

Analiza matematyczna II (skrypt wykładu)

Wydział MIiM UW, 2011/12

wersja z dnia: 12 czerwca 2012

Spis treści

1 Ciągłość funkcji wielu zmiennych	1
1.1 Topologia w \mathbb{R}^n . Zbiory otwarte, domknięte i zwarte	1
1.2 Funkcje ciągłe: definicje, własności, przykłady	7
2 Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych	20
2.1 Pochodne cząstkowe, kierunkowe i różniczka zupełna	20
2.2 Arytmetyczne własności różniczki	26
2.3 Gradient. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji i punkty krytyczne	29
2.4 Twierdzenie o wartości średniej	38
2.5 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora	40
2.5.1 Przykład Peano i twierdzenie Schwarz'a o równości pochodnych mieszanych	41
2.5.2 Druga różniczka	43
2.5.3 Różniczki wyższych rzędów	46
2.5.4 Wzór Taylora. Funkcje klasy C^k i notacja wielowskaźnikowa.	47
2.5.5 Ekstrema lokalne.	50
2.6 Funkcje gładkie	56
3 Odwzorowania klasy C^1 i rozmaitości zanurzone	58
3.1 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym	58
3.2 Twierdzenie o funkcji odwrotnej	60
3.3 Twierdzenie o funkcji uwikłanej	63
3.4 Dyfeomorfizmy zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n	68
3.5 Rozmaitości zanurzone w \mathbb{R}^n	69
3.6 Ekstrema warunkowe i mnożniki Lagrange'a	73
4 Elementy teorii miary	79
4.1 Podstawowe pojęcia. Twierdzenie Carathéodory'ego	80
4.2 Konstrukcja i własności miary Lebesgue'a w \mathbb{R}^n	87
4.3 Funkcje mierzalne	98
5 Całka Lebesgue'a	105
5.1 Całkowanie funkcji nieujemnych	105
5.2 Całkowanie funkcji dowolnego znaku	110
5.2.1 Związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna	114
5.3 Zamiana zmiennych. Twierdzenie Fubini'ego	116

5.3.1	Dowód twierdzenia o zamianie zmiennych	120
5.3.2	Dowód twierdzenia Fubiego	123
5.4	Przestrzeń L^1 funkcji całkownych.	129
5.5	Splot	131
5.5.1	Aproksymacja funkcji całkownych funkcjami gładkimi	132
5.5.2	Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji wielu zmiennych	135
6	Miara powierzchniowa na rozmaitościach zanurzonych	138
6.1	Definicja miary powierzchniowej	139
6.1.1	Wyznacznik Grama. Intuicje geometryczne.	139
6.1.2	Parametryczny opis rozmaitości zanurzonych	142
6.1.3	Twierdzenie o rzędzie. Poprawność definicji miary σ_m	144
6.2	Wzór Cauchy’ego–Bineta. Przykłady.	147
6.3	Otoczenia tubularne i twierdzenie o materacu	152
7	Formy różniczkowe i twierdzenie Stokesa	157
7.1	Formy rzędu 1 i twierdzenie Greena	157
7.2	Formy wieloliniowe antysymetryczne	166
7.3	Formy różniczkowe	170
7.3.1	Przeciąganie form różniczkowych. Różniczka zewnętrzna.	171
7.3.2	Formy różniczkowe w \mathbb{R}^3	175
7.4	Orientacja rozmaitości. Całka z formy różniczkowej	177
7.4.1	Całka z formy różniczkowej	180
7.5	Twierdzenie Stokesa	181
A	Gładki rozkład jedności	190
B	Lemat Poincarégo w obszarach gwiazdzistych	192
C	Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym	195

Zamiast wstępu

1. Ten tekst jest *w budowie*. Mogą w nim być błędy, zarówno literówki, jak i poważniejsze usterki. Mogą stopniowo pojawiać się pewne (niezbyt wielkie) zmiany układu treści. Wszelkie uwagi Czytelników (zgłaszanie błędów, a także sugestie, co zmienić, gdzie warto napisać dokładniejsze wyjaśnienie, gdzie umieścić rysunek itp.) są mile widziane, z góry za nie dziękuję.
2. Kolejne partie tekstu będę starał się publikować na bieżąco, mniej więcej raz w tygodniu, na stronie

<http://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/am2/>

(w zakładce z notatkami).

Paweł Strzelecki

Rozdział 1

Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Zajęcia z Analizy Matematycznej II poświęcone są funkcjom wielu zmiennych rzeczywistych. Dlatego zaczniemy od opisanego najważniejszych z punktu widzenia podstaw Analizy własności przestrzeni \mathbb{R}^n i pewnych klas jej podzbiorów. Dzięki temu będziemy mogli później zobaczyć, że uogólnienia pewnych pojęć, które poznaliśmy dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, są w gruncie rzeczy jasne i naturalne (choć, dla $n > 3$, mogą zdaniem Czytelnika mieć dość abstrakcyjny charakter).

Podkreślmy jednak, że nawet z punktu widzenia w miarę naturalnych zastosowań matematyki nie warto ograniczać studiowania funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ do ‘fizycznych’ przypadków $n, m \in \{1, 2, 3\}$. Na przykład, opis temperatury, ciśnienia, prędkości wiatru i wilgotności powietrza w punktach pewnego obszaru przestrzeni \mathbb{R}^3 i w czasie $t \in (t_0, t_1)$ – a więc, po ludzku mówiąc, możliwie wierne prognozowanie pogody – wymaga w istocie, jak widać, konstrukcji pewnego przekształcenia z podzbioru przestrzeni \mathbb{R}^4 w przestrzeń \mathbb{R}^6 : temperatura, ciśnienie i wilgotność powietrza to trzy liczby, a prędkość wiatru jest wektorem o trzech współrzędnych. Choćby dlatego, ale i ze względów teoretycznych, będziemy zajmować się funkcjami $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dla dowolnych m, n naturalnych.

1.1 Topologia w \mathbb{R}^n . Zbiory otwarte, domknięte i zwarte

Przestrzeń kartezjańska n -wymiarowa, \mathbb{R}^n , to iloczyn n kopii prostej rzeczywistej \mathbb{R} . Elementy przestrzeni \mathbb{R}^n będziemy zamiennie nazywać punktami lub wektorami i oznaczać je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ itp., starając się – w skrypcie, nie na tablicy – konsekwentnie używać pogrubionych liter dla zasygnalizowania, że chodzi o *punkt* w \mathbb{R}^n , niepogrubionych zaś dla oznaczenia *współrzędnych* punktu.

Norma i iloczyn skalarny

Definicja 1.1 (iloczyn skalarny). (Standardowym) iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^n nazywamy funkcję

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Jak wiadomo z wykładów Algebry Liniowej, iloczyn skalarny jest dwuliniowy (liniowy względem każdej zmiennej z osobna), symetryczny (tzn. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ dla wszystkich

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$) i dodatnio określony, tzn. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ dla wszystkich $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Definicja 1.2 (norma euklidesowa). Funkcję

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2 \equiv \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \in [0, \infty)$$

nazywamy normą euklidesową.

Przymiotnik *euklidesowa*, a także dolny indeks 2, będziemy zwykle opuszczać, pisząc po prostu $\|\mathbf{x}\|$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że dla $n = 2$ (odpowiednio, $n = 3$) liczba $\|\mathbf{x}\|$ jest po prostu odległością punktu \mathbf{x} od początku układu współrzędnych na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (odpowiednio, w trójwymiarowej przestrzeni \mathbb{R}^3).

Liczbę $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ nazywamy, zgodnie z naturalną geometryczną interpretacją, *odległością* punktów \mathbf{x} i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Stwierdzenie 1.3 (własności normy i iloczynu skalarnego w \mathbb{R}^n).

(i) **(Nierówność trójkąta).** Dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jest

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

(ii) **(Jednorodność).** Dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest $\|t\mathbf{x}\| = |t| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

(iii) Równość $\|\mathbf{x}\| = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

(iv) **(Nierówność Schwarz).** Dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jest

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|, \tag{1.1}$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ lub $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Własności (ii) oraz (iii) są oczywiste. Nierówność Schwarz i nierówność trójkąta Czytelnik miał okazję poznać wcześniej, ale naszkicujemy dla porządku krótkie dowody.

Zacniemy od nierówności Schwarz. Niech $t \in \mathbb{R}$. Z definicji normy oraz dwuliniowości i symetrii iloczynu skalarnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Trójmian kwadratowy $P(t) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2$ jest więc nieujemny dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Wyróżnik tego trójmianu musi zatem być niedodatni, tzn.

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \leq 0.$$

Stąd już wynika nierówność (1.1). Zauważmy, że równość zachodzi w niej wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ lub gdy $P(t)$ ma pierwiastek, tzn. gdy $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. To jest równoważne warunkowi, podanemu w punkcie (iv).

Nierówność trójkąta łatwo wyprowadzić z nierówności Schwarz: ponieważ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$, więc jest

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 - \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2) \\ &= 2(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dowód stwierdzenia jest zakończony. \square

Uwaga 1.4. Ogólnie, normą nazywa się każdą funkcję $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, która spełnia warunki (i)–(iii) Stwierdzenia 1.3. Zauważmy, że w dowodzie tego stwierdzenia wystarczyło korzystać ze związku $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ i z tego, że przekształcenie $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ jest dwuliniowe, symetryczne i dodatnio określone. Nie było ważne, że chodzi akurat o standardowy iloczyn skalarny.

Wniosek 1.5. Dla każdego przekształcenia dwuliniowego, symetrycznego i dodatnio określonego

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$$

funkcja $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$ jest normą na przestrzeni \mathbb{R}^n .

Można podać inne przykłady norm.

Przykład 1.6. Dla $p \in [1, \infty)$ położmy

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

a dla $p = \infty$ niech

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Zadanie 1.7. Wykazać, że $\|\mathbf{x}\|_p$ jest normą dla każdego $p \in [1, \infty]$.

Wskazówka. Dla dowodu nierówności trójkąta przypomnieć sobie nierówność Höldera i zauważyć, że $|x_i + y_i|^p \leq |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$.

Zadanie 1.8. Czy dla $p \neq 2$ norma $\|\cdot\|_p$ pochodzi od pewnego (niekoniecznie standardowego) iloczynu skalarnego na \mathbb{R}^n ?

Wskazówka. W każdym równoległoboku suma kwadratów długości obu przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków. Zapisać to twierdzenie w języku normy i spróbować je wykorzystać.

Kule. Zbiory otwarte i domknięte.

Definicja 1.9. Kulą otwartą o środku $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Zbiór $\bar{B}(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ to kula domknięta o środku \mathbf{x} i promieniu r .

Dla $n = 1$ kule są po prostu przedziałami: norma euklidesowa w \mathbb{R} to wartość bezwzględna liczby, zaś warunki $|y - x| < r$ i $y \in (x - r, x + r)$ są równoważne. Kule w normie euklidesowej na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 to koła: warunek $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2$ oznacza, że $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ leży wewnątrz okręgu o środku w punkcie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i promieniu $r > 0$.

Definicja 1.10. Zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest *otwarty* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{x} \in \Omega$ istnieje promień $r > 0$ taki, że $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$.

Inaczej mówiąc, zbiór otwarty to taki zbiór, który wraz z każdym swoim punktem zawiera pewną kulę otwartą wokół tego punktu.

Przykład 1.11. Cała przestrzeń \mathbb{R}^n jest zbiorem otwartym (dla każdego $\mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n$ można wziąć w warunku z definicji np. $r = 2011$). Zbiór pusty jest otwarty; warunek z definicji jest wtedy pusto spełniony.

Kula otwarta $B(\mathbf{a}, r)$ jest zbiorem otwartym: jeśli $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$ i $0 < \rho < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, to kula $B(\mathbf{x}, \rho) \subset B(\mathbf{a}, r)$, gdyż dla $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho)$ mamy z nierówności trójkąta

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \rho + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r.$$

(Proszę samodzielnie zrobić rysunek, ilustrujący to oszacowanie). \square

Stwierdzenie 1.12 (własności zbiorów otwartych).

(i) Jeśli zbiory $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $i \in I$, a I jest dowolnym zbiorem, są otwarte, to zbiór

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \text{ jest otwarty.}$$

(ii) Jeśli zbiory $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte, to zbiór $\bigcap_{i=1}^N \Omega_i$ jest otwarty.

Zauważmy od razu, że własność (ii) nie zachodzi dla nieskończonych rodzin zbiorów otwartych: przecięcie wszystkich kul $B(\mathbf{0}, 1/j) \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $j = 1, 2, \dots$, jest zbiorem jednopunktowym $\{\mathbf{0}\}$, a zbiór jednopunktowy w \mathbb{R}^n nie jest otwarty (bo każda kula otwarta w \mathbb{R}^n jest zbiorem nieskończonym).

Dowód. Wykażemy najpierw pierwszą własność. Jeśli $\mathbf{x} \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, to $\mathbf{x} \in \Omega_{i_0}$ dla pewnego $i_0 \in I$. Ponieważ zbiór Ω_{i_0} jest otwarty, więc istnieje $r > 0$ takie, że $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega_{i_0}$. Zatem, $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, a więc zbiór $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ jest otwarty.

Jeśli $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1, \dots, N} \Omega_i$, to $\mathbf{x} \in \Omega_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$. Zatem, wobec otwartości Ω_i , znajdziemy liczby $r_i > 0$ (gdzie $i = 1, 2, \dots, N$) takie, że $B(\mathbf{x}, r_i) \subset \Omega_i$. Niech $r > 0$ będzie najmniejszą¹ spośród liczb r_1, r_2, \dots, r_N . Mamy

$$B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, r_i) \subset \Omega_i \quad \text{dla każdego } i = 1, 2, \dots, N,$$

a więc $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcap_{i=1, \dots, N} \Omega_i$. \square

Definicja 1.13. Zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ jest *domknięty* wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest zbiorem otwartym.

¹Tu właśnie korzystamy z tego, że zbiorów Ω_i jest tylko skończenie wiele!

Cała przestrzeń \mathbb{R}^n i zbiór pusty są domknięte, istnieją więc zbiory, które są jednocześnie otwarte i domknięte. Nietrudno sprawdzić, że każda kula domknięta jest zbiorem domkniętym. Nie należy oczywiście uważać, że każdy zbiór w \mathbb{R}^n jest albo otwarty, albo domknięty: np. przedział $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ nie jest ani domknięty, ani otwarty. Podobnie, koło otwarte $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ z dołączonym punktem $(1, 2)$ nie jest ani domknięte, ani otwarte.

Korzystając z praw de Morgana (dopełnienie iloczynu zbiorów jest sumą dopełnień, a dopełnienie sumy jest iloczynem dopełnień) i definicji zbioru domkniętego, otrzymujemy natychmiast następujący odpowiednik Stwierdzenia 1.12.

Stwierdzenie 1.14 (własności zbiorów domkniętych).

(i) *Jeśli zbiory $F_i \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $i \in I$, a I jest dowolnym zbiorem, są domknięte, to zbiór $\bigcap_{i \in I} F_i$ jest domknięty.*

(ii) *Jeśli zbiory $F_1, F_2, \dots, F_N \subset \mathbb{R}^n$ są domknięte, to zbiór $\bigcup_{i=1}^N F_i$ jest domknięty. \square*

Podamy teraz definicję zbieżnego ciągu punktów przestrzeni \mathbb{R}^n . Czytelnik miał już z nią do czynienia dla $n = 2$, gdy mówiliśmy o zbieżności ciągów liczb zespolonych.

Definicja 1.15. Mówimy, że ciąg $(\mathbf{x}_j) \subset \mathbb{R}^n$ jest zbieżny do punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ dla $j \rightarrow \infty$.

Definicja ma, jak widać, bardzo naturalny sens: zbieżność $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x}$ oznacza, że odległości punktów \mathbf{x}_j i \mathbf{x} są zbieżne do zera dla $j \rightarrow \infty$. Okazuje się, że badanie zbieżności ciągów punktów \mathbb{R}^n można sprowadzić do badania zbieżności ciągów poszczególnych współrzędnych tych punktów.

Stwierdzenie 1.16. *Niech $\mathbf{x}_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$ dla $j \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *Ciąg $(\mathbf{x}_j) \subset \mathbb{R}^n$ jest zbieżny do punktu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) *Dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ jest $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,i} = x_i$.*

Dowód. Dla każdego $i_0 = 1, 2, \dots, n$ jest

$$0 \leq |x_{j,i_0} - x_{i_0}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_{j,i} - x_i|^2 \right)^{1/2} = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\|. \quad (1.2)$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach, warunek (i) pociąga za sobą $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j,i_0} = x_{i_0}$.

Na odwrót, jeśli każdy z n składników skończonej sumy w (1.2) zbiega do zera dla $j \rightarrow \infty$, to, wobec arytmetycznych własności granicy ciągu i ciągłości pierwiastka, ciąg $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ dla $j \rightarrow \infty$. Zatem, warunek (ii) pociąga za sobą (i). \square

Podamy jeszcze wygodną charakteryzację zbiorów domkniętych przestrzeni \mathbb{R}^n .

Stwierdzenie 1.17. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) Zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty.

(ii) Dla każdego ciągu $(\mathbf{x}_j) \subset F$, który jest zbieżny, zachodzi warunek $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_j \in F$.

Dowód. Obu implikacji (i) \Rightarrow (ii) oraz (ii) \Rightarrow (i) dowiedzimy przez zaprzeczenie.

Założmy najpierw, że F jest domknięty, ale warunek (ii) nie zachodzi. Istnieje wtedy ciąg $(\mathbf{x}_j) \subset F$, który jest zbieżny do punktu $\mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$. Z definicji zbioru domkniętego wynika, że Ω jest zbiorem otwartym, tzn. dla pewnego $r > 0$ kula $B(\mathbf{x}, r)$ jest zawarta w Ω (i oczywiście nie ma punktów wspólnych ze zbiorem $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$). Jednak $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$, a więc $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| < r$ dla wszystkich j dostatecznie dużych; dla takich j mamy $\mathbf{x}_j \in B(\mathbf{x}, r)$, tzn. $\mathbf{x}_j \notin F$, sprzeczność.

Na odwrót, założmy, że (ii) zachodzi, ale F nie jest domknięty. Wówczas zbiór $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$ nie jest otwarty. Zaprzeczając warunkowi, podanemu w Definicji 1.10, wskażemy taki punkt $\mathbf{x} \in \Omega$, że dla każdego $j \in \mathbb{N}$ kula $B(\mathbf{x}, 1/j)$ zawiera pewien punkt $\mathbf{x}_j \notin \Omega$, tzn. punkt $\mathbf{x}_j \in F$.² Wtedy $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| < 1/j$, a więc $F \ni \mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem: warunek (ii) nie zachodzi. \square

Uwaga 1.18. Czytelnik mógłby zadać pytanie: czy, zmieniając w definicjach normę euklidesową $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$ na jakąś inną, otrzymalibyśmy w \mathbb{R}^n tę samą rodzinę zbiorów otwartych (i tę samą rodzinę zbiorów domkniętych)? Okazuje się, że tak: to, czy zbiór jest otwarty, nie zależy od tego, jaką normą się posłużymy, określając kule w Definicji 1.10. Wrócimy do tej sprawy później, mówiąc o *równoważności norm* w \mathbb{R}^n . Najpierw jednak potrzebne nam będą pojęcia zbioru zwartego i funkcji ciągłej.

Zbiory zwarte.

Mówiąc o własnościach funkcji ciągłych jednej zmiennej rzeczywistej, wprowadziliśmy bardzo ważną klasę zbiorów zwartych. Tak samo definiuje się zbiory zwarte w \mathbb{R}^n .

Definicja 1.19. Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu $(\mathbf{x}_j) \subset K$ można wybrać podciąg (\mathbf{x}_{j_k}) zbieżny do pewnego punktu $\mathbf{x} \in K$.

Definicja 1.20. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się ograniczony, jeśli zawiera się w pewnej kuli.

Stwierdzenie 1.21. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty.

(ii) Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony.

Dowód. Dla każdego zbioru zwartego zachodzi warunek (ii) Stwierdzenia 1.17 (gdyż dowolny podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, co cały ciąg). Dlatego zwartość pociąga za sobą domkniętość.

Gdyby zbiór K był zwarty i nieograniczony, to dla każdego j znaleźlibyśmy punkt $\mathbf{x}_j \in K \setminus B(\mathbf{0}, j)$. Bez zmniejszenia ogólności, przechodząc w razie potrzeby do podciągu zbieżnego, można założyć, że $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{x} \in K$. Wtedy jednak, z nierówności trójkąta i definicji granicy,

$$j \leq \|\mathbf{x}_j\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \rightarrow \|\mathbf{x}\| < \infty \quad \text{dla } j \rightarrow \infty.$$

²Można myśleć o tym tak: punkt \mathbf{x} jest ‘świadkiem’, że zbiór Ω nie jest otwarty, natomiast punkt \mathbf{x}_j jest ‘świadkiem’, że kula $B(\mathbf{x}, 1/j)$ nie jest cała zawarta w Ω .

To jest sprzeczność, gdyż lewa strona nie jest ograniczona.

Załóżmy teraz, że zachodzi (ii). Niech $(\mathbf{x}_j) \subset K$. Aby wskazać podciąg (\mathbf{x}_j) zbieżny do pewnego punktu w K , posłużymy się Stwierdzeniami 1.17 i 1.16.

Dla każdego numeru $i = 1, 2, \dots, n$ ciąg współrzędnych $(x_{j,i})_{j=1,2,\dots}$ jest ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Możemy wybrać podciąg j'_k tak, aby otrzymać zbieżność na pierwszej współrzędnej, tzn. zbieżność $x_{j'_k,1} \rightarrow x_1$. Następnie, z j'_k można wybrać kolejny podciąg j''_k tak, żeby otrzymać zbieżność także na drugiej współrzędnej, itd. Po n krokach wybierzemy ostatecznie podciąg j_k taki, że $x_{j_k,i} \rightarrow x_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$.³ Na mocy Stwierdzenia 1.16, $\mathbf{x}_{j_k} \rightarrow \mathbf{x}$, a na mocy Stwierdzenia 1.17 i domkniętości K , punkt $\mathbf{x} \in K$. \square

1.2 Funkcje ciągłe: definicje, własności, przykłady

Definicja 1.22. Funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{a} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\mathbf{x} \in A$ i $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, to $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$.

Jak widać, jest to wierny odpowiednik definicji Cauchego funkcji ciągłej jednej zmiennej rzeczywistej. Można też definiować ciągłość funkcji wielu zmiennych, posługując się ciągową definicją Heinego: funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{a} \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $A \ni \mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{a}$ jest $f(\mathbf{x}_j) \rightarrow f(\mathbf{a})$. Dowód równoważności obu definicji jest taki sam, jak w przypadku jednowymiarowym. Nie będziemy go powtarzać.

Mówimy, że funkcja f jest ciągła na zbiorze A , jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Również jednostajną ciągłość funkcji wielu zmiennych definiuje się tak samo, jak w przypadku jednowymiarowym.

Definicja 1.23. Funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest jednostajnie ciągła na A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ i $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, to $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$.

W zeszłym roku poznaliśmy trzy ogólne twierdzenia, podające własności funkcji ciągłych: twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów, twierdzenie Cantora o jednostajnej ciągłości oraz własność Darboux. Pierwsze dwa dotyczyły własności funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \supset K \rightarrow \mathbb{R}$ na zwartych podzbiorach prostej. Przenoszą się one bez zmian, z takimi samymi dowodami, na przypadek funkcji wielu zmiennych. Oto ich sformułowania.

Twierdzenie 1.24 (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów). *Jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem zwartym, a funkcja $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją punkty $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ takie, że*

$$f(\mathbf{x}_1) = \sup_K f, \quad f(\mathbf{x}_2) = \inf_K f.$$

Twierdzenie 1.25 (Cantora o jednostajnej ciągłości). *Jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym, a funkcja $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest jednostajnie ciągła na K .*

³Czytelnik być może pamięta, że z podobnym kolejnym wybieraniem podciągów mieliśmy do czynienia w dowodzie twierdzenia Arzeli i Ascoli'ego – tylko tam proces nie kończył się po n krokach i trzeba było używać metody przekątniowej.

Wspomnijmy jeszcze, zanim przejdziemy do przykładów, że Twierdzenie 1.24 można traktować jako wniosek z ogólniejszego rezultatu.

Twierdzenie 1.26. *Jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym, a funkcja $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła, to zbiór $f(K)$ jest zwarty w \mathbb{R}^m .*

Dowód. Ustalmy dowolny ciąg punktów $(\mathbf{y}_j) \subset f(K)$. Z definicji obrazu zbioru, istnieją punkty $\mathbf{x}_j \in K$ takie, że $\mathbf{y}_j = f(\mathbf{x}_j)$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Zbiór K jest zwarty, więc istnieje podciąg j_k taki, że $\mathbf{x}_{j_k} \rightarrow \mathbf{x} \in K$. Wobec ciągłości f , otrzymujemy $\mathbf{y}_{j_k} = f(\mathbf{x}_{j_k}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \in f(K)$. Zatem, zbiór $f(K)$ jest zwarty. \square

Poznaliśmy formalną definicję ciągłości i trzy proste, choć bardzo ważne twierdzenia, opisujące własności tych funkcji. Przejdźmy teraz do przykładów.

Definicja 1.27 (warunek Lipschitza). Powiemy, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia na zbiorze A warunek Lipschitza ze stałą L wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

zachodzi dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.

Nieformalnie mówiąc, funkcja lipschitzowska to taka funkcja, która wszystkie odległości między punktami zwiększa co najwyżej L -krotnie.

Stwierdzenie 1.28. *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L , to f jest jednostajnie ciągła na A .*

Dowód. (Jest taki sam, jak w przypadku jednowymiarowym). Dla $L = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy więc, że $L > 0$.

Niech $\varepsilon > 0$; weźmy $\delta = \varepsilon/L$. Jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ i $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, to mamy wtedy

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < L\delta = \varepsilon,$$

a zatem, dzięki dowolności $\varepsilon > 0$, f jest jednostajnie ciągła na A . \square

Przykład 1.29. Funkcja $f(\mathbf{x}) = x_i$, przypisująca każdemu punktowi wartość jego i -tej współrzędnej, jest ciągła na \mathbb{R}^n , gdyż spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Istotnie,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |x_i - y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Na przypadek wielowymiarowy przenoszą się bez żadnych istotnych zmian (analizę szczegółów w prostych dowodach pozostawiamy dla Czytelnika jako ćwiczenie) twierdzenia o ciągłości sumy, iloczynu, ilorazu czy złożenia funkcji ciągłych, które poznaliśmy dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Sformułujmy je dla porządku.

Stwierdzenie 1.30. *Jeśli $f, g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ są ciągłe w punkcie $a \in A$, to wówczas funkcja $f + g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ też jest ciągła w punkcie $a \in A$. \square*

Stwierdzenie 1.31. *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $a \in A$, to wówczas funkcja $g \cdot f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ też jest ciągła w punkcie $a \in A$. \square*

Stwierdzenie 1.32. *Jeśli $g: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest ciągła w punkcie $a \in A$, to wówczas funkcja $\frac{1}{g}: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ też jest ciągła w punkcie $a \in A$. \square*

Stwierdzenie 1.33 (ciągłość złożenia). *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła w punkcie $a \in A$, zaś $g: \mathbb{R}^m \subset B \rightarrow \mathbb{R}^k$, gdzie $B \supset f(A)$ (tzn. wszystkie wartości funkcji f należą do dziedziny funkcji g) jest ciągła w punkcie $b = f(a)$, to wówczas funkcja $g \circ f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest ciągła w punkcie $a \in A$. \square*

Wreszcie, zachodzi następujący prosty odpowiednik Stwierdzenia 1.16, dzięki któremu można sprowadzić badanie ciągłości odwzorowania o wartościach w \mathbb{R}^m do badania ciągłości poszczególnych współrzędnych tego odwzorowania.

Stwierdzenie 1.34. *Niech $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{a} \in A$. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Funkcja f jest ciągła w punkcie \mathbf{a} .*
- (ii) *Dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$ funkcja f_j jest ciągła w punkcie \mathbf{a} .*

Dowód. Dla każdego $j_0 = 1, 2, \dots, m$ i każdego ciągu $(\mathbf{x}_k) \subset A$, $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$ mamy oczywiście

$$0 \leq |f_{j_0}(\mathbf{x}_k) - f_{j_0}(\mathbf{a})| \leq \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\mathbf{x}_k) - f_j(\mathbf{a})|^2 \right)^{1/2} = \|f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{a})\|.$$

Dlatego implikacja (i) \Rightarrow (ii) wynika natychmiast z twierdzenia o trzech ciągach, a implikacja w drugą stronę jest konsekwencją arytmetycznych własności granicy i ciągłości pierwiastka kwadratowego. \square

Uwaga 1.35. W powyższym stwierdzeniu ciągłość f_j wynika także stąd, że f_j jest złożeniem f i rzutu na j -tą oś układu współrzędnych. To minimalnie inny sposób wypowiedzenia tego samego faktu.

Wniosek 1.36. *Każdy wielomian n zmiennych rzeczywistych jest funkcją ciągłą.*

Dowód. To wynika natychmiast z ciągłości funkcji współrzędnych i funkcji stałej, oraz z ciągłości sumy i iloczynu funkcji ciągłych. \square

Wniosek 1.37. *Wyznacznik macierzy jest funkcją ciągłą na zbiorze $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ wszystkich macierzy kwadratowych $n \times n$.*

Dowód. Z permutacyjnej definicji wyznacznika wiadomo, że

$$\det X = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}, \quad X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n},$$

gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich permutacji $\sigma \in S_n$ zbioru n -elementowego, a $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$ oznacza *znak permutacji*. Zatem, wyznacznik jest po prostu wielomianem n^2 zmiennych rzeczywistych (wyrazów macierzy X), a więc jest funkcją ciągłą. \square

Z ostatniego wniosku wynika łatwo, że zbiór wszystkich macierzy odwracalnych jest otwartym podzbiorem $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Wiąże się z tym następująca ważna intuicja: mała zmiana wyrazów macierzy odwracalnej daje macierz odwracalną. Sformułujmy to ściśle.

Stwierdzenie 1.38. *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, a Ω jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , to dla każdego przedziału otwartego $(a, b) \supset \mathbb{R}$ (dopuszczamy też możliwość $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) zbiór $U = f^{-1}((a, b))$ jest otwarty.*

Dowód. Wybierzmy $\mathbf{x} \in U$. Znajdziemy taką liczbę $\delta > 0$, że $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$, co zakończy dowód otwartości tego zbioru.

Skoro $\mathbf{x} \in U$, to z definicji $a < f(\mathbf{x}) < b$. Wybierzmy taką liczbę $\varepsilon > 0$, żeby przedział $(f(\mathbf{x}) - \varepsilon, f(\mathbf{x}) + \varepsilon)$ był zawarty w (a, b) . Następnie, dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby dla $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ zachodziła nierówność $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ (uwaga: tu właśnie korzystamy z ciągłości f). Wtedy

$$f(\mathbf{y}) \in (f(\mathbf{x}) - \varepsilon, f(\mathbf{x}) + \varepsilon) \subset (a, b),$$

a więc, wprost z definicji przeciwbrazu, $\mathbf{y} \in f^{-1}((a, b)) = U$. Wykazaliśmy więc, że jeśli $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, to $\mathbf{y} \in U$, tzn. $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$. Zgodnie z początkową zapowiedzią, dowód jest zakończony. \square

Wniosek 1.39. *Zbiór macierzy odwracalnych $n \times n$ jest otwartym podzbiorem $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.*

Dowód. Zbiór, o który chodzi, jest sumą dwóch zbiorów:

$$\{X \in M_{n \times n}: \det X > 0\} \quad \text{oraz} \quad \{X \in M_{n \times n}: \det X < 0\}.$$

Ze Stwierdzenia 1.38 i ciągłości wyznacznika wnioskujemy, że każdy z tych zbiorów jest otwarty, a więc ich suma też jest zbiorem otwartym. \square

Ciągłość norm i przekształceń liniowych

Stwierdzenie 1.40. *Każde przekształcenie liniowe $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia warunek Lipschitza (w szczególności: jest ciągłe).*

Dowód. Niech $A = (a_{ij})$, bez zbytnich obaw o kolizję oznaczeń, oznacza macierz przekształcenia A w standardowych bazach \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m . Wektory standardowej bazy w \mathbb{R}^n będziemy oznaczać

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że zapis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ oznacza tyle samo, co $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$. Posługując się najpierw nierównością trójkąta i własnościami normy, następnie zaś nierównością Schwarzera, łatwo sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i A\mathbf{e}_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A\mathbf{e}_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|A\mathbf{e}_i\|^2 \right)^{1/2} \\ &= C\|\mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

gdzie

$$C \equiv C_A = \left(\sum_{i=1}^n \|A\mathbf{e}_i\|^2 \right)^{1/2}$$

jest pewną stałą, zależną tylko od przekształcenia A , nie zaś od punktu \mathbf{x} .

Zastępując w powyższym rachunku wektor \mathbf{x} wektorem $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, otrzymujemy

$$\|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\| = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Przekształcenie $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia więc warunek Lipschitza. \square

Uwaga 1.41. Definicję ciągłości można formalnie, bez najmniejszych zmian, przenieść na przypadek funkcji $f: V \rightarrow W$, gdzie V, W są przestrzeniami liniowymi unormowanymi. Jednak, gdy V ma wymiar nieskończony, to istnieją przekształcenia *liniowe* $A: V \rightarrow \mathbb{R}$, które nie są ciągłe. Czytelnik, zapoznawszy się do końca z treścią tego rozdziału, może samodzielnie zastanowić się nad (prostymi) przykładami.

Uwaga 1.42. Stała C_A , którą uzyskaliśmy w powyższym dowodzie, jest (na ogół) nieoptymalna. Zauważmy, że $A\mathbf{e}_i$ to po prostu i -ta kolumna macierzy A . Dlatego

$$C_A = \left(\sum_{i=1}^n \|A\mathbf{e}_i\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

jest po prostu normą euklidesową macierzy A , traktowanej jako wektor o $n \cdot m$ współrzędnych. Np. dla $n = m = 3$ i $A = \text{Id}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ otrzymujemy tu wynik $C_{\text{Id}} = \sqrt{3}$, a widać wszak, że dla przekształcenia identycznościowego odpowiednia nierówność zachodzi ze stałą równą 1 (i jest po prostu równością).

Zadanie 1.43. Wykazać, że dla przekształcenia liniowego $A: V \rightarrow W$, gdzie V, W są przestrzeniami liniowymi unormowanymi, następujące warunki są równoważne:

- (i) A jest ciągłe na V ;
- (ii) A jest ciągłe w jednym punkcie przestrzeni V ;
- (iii) Istnieje taka stała C , że $\|A\mathbf{x}\| \leq C\|\mathbf{x}\|$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in V$.

Nietrudno sprawdzić, że wśród wszystkich stałych, spełniających warunek (iii) z powyższego zadania, istnieje zawsze najmniejsza (nierówności nieostre zachowują się w granicy). Tę stałą nazywamy normą⁴ przekształcenia liniowego A i oznaczamy $\|A\|$. Ma ona pogładową interpretację geometryczną: dla $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liczba $\|A\|$ jest równa

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|,$$

tzn. jest długością najdłuższej półosi elipsoidy, która jest obrazem kuli jednostkowej pod działaniem przekształcenia A .

Stwierdzenie 1.44. Niech $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|'$ będzie dowolną normą na przestrzeni \mathbb{R}^n . Wówczas f spełnia warunek Lipschitza w normie euklidesowej $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$. W szczególności, dowolna norma jest funkcją ciągłą na \mathbb{R}^n .

⁴lub normą operatorową

Dowód. Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, postępując tak samo, jak w początkowej części dowodu Stwierdzenia 1.40, otrzymujemy

$$\|\mathbf{x}\|' = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right\|' \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|\mathbf{e}_i\|' \leq \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n (\|\mathbf{e}_i\|')^2 \right)^{1/2} = C \|\mathbf{x}\|_2,$$

gdzie stała

$$C = \left(\sum_{i=1}^n (\|\mathbf{e}_i\|')^2 \right)^{1/2}$$

zależy tylko od nieznannej normy $\|\cdot\|'$, nie zaś od konkretnego punktu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dlatego, z nierówności trójkąta,

$$\left| \|\mathbf{x}\|' - \|\mathbf{y}\|' \right| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|' \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2,$$

tzn. funkcja $f = \|\cdot\|'$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą C . \square

Definicja 1.45 (równoważność norm). Powiemy, że normy $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ określone na tej samej przestrzeni liniowej V są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C \geq 1$ taka, że

$$\frac{1}{C} \|\mathbf{x}\|' \leq \|\mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}\|' \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in V.$$

Twierdzenie 1.46. *Wszystkie normy na przestrzeni \mathbb{R}^n są równoważne.*

Dowód tego twierdzenia pozostawimy jako **zadanie** dla Czytelnika. Oto wskazówka: wystarczy umieć porównać każdą normę z normą euklidesową; porównanie $\|\cdot\|' \leq C \|\cdot\|_2$ przeprowadziliśmy w ostatnim dowodzie. Wystarczy zatem wykazać, że zachodzi, być może z inną stałą, nierówność przeciwna. Można w tym celu wykorzystać twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów i fakt, że sfera $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ jest zbiorem zwartym.

Inne z eleganckich zastosowań twierdzenia Weierstrassa opisuje poniższy

Przykład 1.47 (dowód nierówności między średnimi). Załóżmy, że $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Wykażemy nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną,

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (1.3)$$

a także sprawdzimy, że równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby x_i są równe.

Zauważmy najpierw, że rozważania wystarczy ograniczyć do przypadku, gdy $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. To wynika z *jednorodności*: jeśli każdą z liczb x_i pomnożymy przez ten sam współczynnik $t > 0$, to lewa i prawa strona (1.3) też zostaną pomnożone przez t .

Oznaczmy teraz

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_i \geq 0 \text{ dla wszystkich } i, \text{ a ponadto } x_1 + \dots + x_n = n\}.$$

Zbiór K jest zwarty.⁵ Dla $\mathbf{x} \in K$ prawa strona nierówności (1.3) jest równa 1. Wystarczy więc wykazać, że

$$f(\mathbf{x}) := x_1 x_2 \dots x_n \leq 1 = f(1, 1, \dots, 1) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in K,$$

⁵ K jest określony przez układ nierówności nieostrych, więc jego domkniętość uzyskujemy np. ze Stwierdzenia 1.17. Jeśli $\mathbf{x} \in K$, to $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i| \leq n$; stąd ograniczoność i ostatecznie zwartość K .

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1) \in K$.

Funkcja $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \dots x_n$ jest ciągła, osiąga zatem w pewnym punkcie $\mathbf{a} \in K$ swój kres górny. Przypuśćmy, że ów punkt ma pewne dwie współrzędne różne, np. dla ustalenia uwagi niech $a_1 < a_2$. Z pewnością $\sup f \geq 1$, więc $a_i > 0$ dla wszystkich i . Rozważmy pomocniczy punkt

$$\mathbf{a}' = ((a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2)/2, a_3, \dots, a_n).$$

Suma jego współrzędnych jest równa $\sum a_i = n$, więc także $\mathbf{a}' \in K$. Nietrudno jednak sprawdzić, że z uwagi na ostrą nierówność $a_1 < a_2$ jest⁶

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 > a_1 a_2$$

stąd zaś, ponieważ $a_i > 0$ dla wszystkich i ,

$$f(\mathbf{a}') = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \dots a_n > a_1 a_2 a_3 \dots a_n = f(\mathbf{a}) = \sup_K f,$$

sprzeczność. Punkt \mathbf{a} , w którym f osiąga największą wartość, musi więc mieć wszystkie współrzędne równe. W K jest tylko jeden taki punkt, mianowicie $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1)$.

Ostatecznie więc

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq 1 \quad \text{na } K,$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. \square

Przykład 1.48. Rozważmy teraz funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; to wynika z ciągłości licznika i mianownika.

Na osiach układu współrzędnych w \mathbb{R}^2 , tzn. tam, gdzie $x = 0$ lub $y = 0$, f przybiera wartość 0. Na prostej o równaniu $y = kx$ funkcja f ma wartość

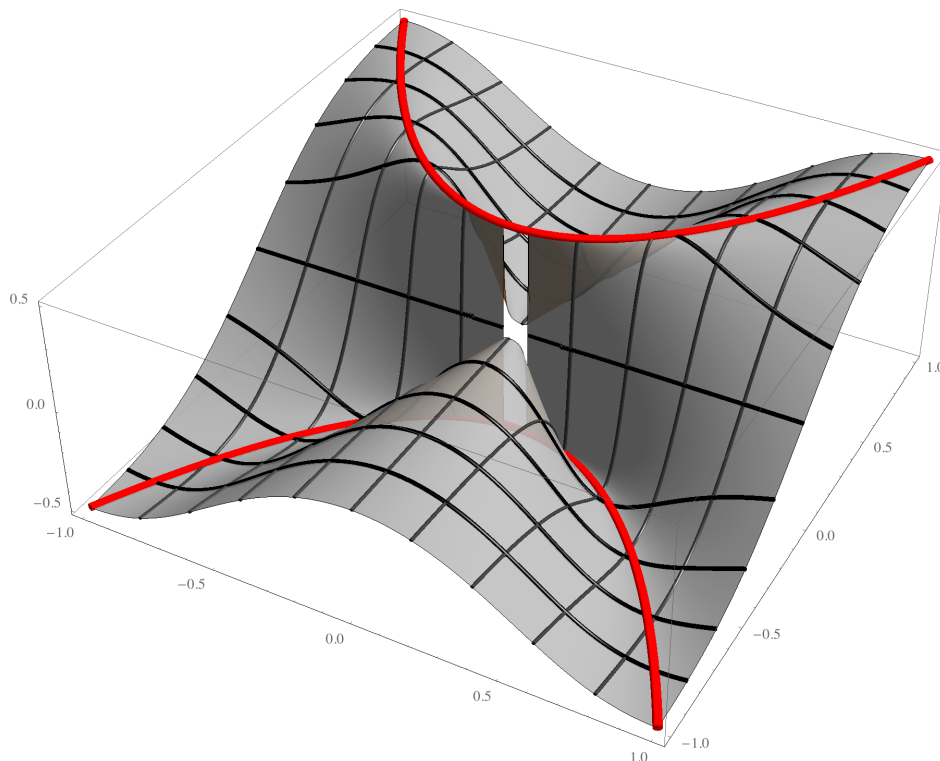
$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{k^2x^2 + x^4} = \frac{kx}{k^2 + x^2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Zatem, analizując zachowanie f na wszystkich prostych przechodzących przez $0 \in \mathbb{R}^2$, nie widzimy jeszcze powodu, dla którego f miałaby być nieciągła w zerze. Jednak na paraboli o równaniu $y = x^2$ jest, poza punktem $(0, 0)$,

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{(x^2)^2 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Nie jest więc prawdą, że $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$ dla każdego ciągu (x_n, y_n) zbieżnego do $0 \in \mathbb{R}^2$: wystarczy wędrować do zera po paraboli i wtedy $f(x_n, y_n) \equiv \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$. \square

⁶To w istocie nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dwóch liczb.



Wykres funkcji f z Przykładu 1.48; na rysunku jest $x^2 + y^2 > 1/500$ (tzn. z dziedziny f wycięty został niewielki dysk o środku w zerze) i $x, y \in [-1, 1]$. Grubymi liniami zaznaczono parabole, złożone z punktów $(t, t^2, 1/2)$ oraz $(t, -t^2, -1/2)$, gdzie $t \in [-1, 1]$: z dokładnością do punktów $(0, 0, \pm \frac{1}{2})$, obie są położone na wykresie f .

Zbiory spójne

Aby zakończyć krótki przegląd podstawowych własności funkcji ciągłych, podamy jeszcze wielowymiarowy odpowiednik własności Darboux. Potrzebne nam będzie w tym celu pojęcie *zbioru spójnego*. Oto odpowiednia definicja.

Definicja 1.49. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *niespójny* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa zbiory otwarte $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\Omega_1 \cap A \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap A, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset, \quad A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2. \quad (1.4)$$

Zbiór B nazywa się *spójny*, jeśli nie jest niespójny.

Przykład 1.50 (spójność odcinka). Sprawdźmy, że dla dowolnych punktów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ odcinek

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z}(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\}$$

jest zbiorem spójnym. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Niech Ω_1, Ω_2 będą zbiorami otwartymi, spełniającymi (1.4) dla $A = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy, że $\mathbf{x} \in \Omega_1$. Z otwartości Ω_1 wynika, że punkt $\mathbf{z}(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \Omega_1$ dla wszystkich dostatecznie małych⁷ $t \geq 0$. Oznaczmy teraz

$$S_1 = \{s \in [0, 1] : \text{dla wszystkich } t \in [0, s] \text{ punkt } \mathbf{z}(t) \in \Omega_1\}.$$

⁷Czytelnik sprawdzi, że jest tak dla $0 \leq t < \delta / \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, gdzie $\delta > 0$ jest taką liczbą, że $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \Omega_1$.

To jest niepusty i ograniczony podzbiór odcinka $[0, 1]$. Niech $\sigma = \sup S_1$. Mamy $\sigma \in (0, 1]$.

Gdyby $\sigma < 1$, $\sigma \in S_1$, to odcinek $[x, \mathbf{z}(\sigma)]$ zawierałby się w Ω_1 . Biorąc $\rho > 0$ takie, że $B(\mathbf{z}(\sigma), \rho) \subset \Omega_1$, sprawdzamy, że

$$\|\mathbf{z}(\sigma) - \mathbf{z}(s)\| = |\sigma - s| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho \quad \text{dla } |\sigma - s| < \rho / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, s \in [0, 1],$$

tzn. $\mathbf{z}(s) \in \Omega_1$ dla wszystkich s dostatecznie bliskich σ , co przeczy temu, że $\sigma = \sup S_1$.

Gdyby $\sigma = 1 \in S_1$, to mielibyśmy $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \Omega_1$, co przeczy definicji niespójności: zbiory $\Omega_i \cap [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ powinny być oba *niepuste i rozłączne*.

Zatem $0 < \sigma \notin S_1$, stąd zaś wynika, że $\mathbf{z}(\sigma) \in \Omega_2$. Wtedy jednak, tym razem wobec otwartości Ω_2 , dla wszystkich s dostatecznie bliskich σ jest $\mathbf{z}(s) \in \Omega_2$, co przeczy równości $\sigma = \sup S_1$ i definicji S_1 . \square

Przykład 1.51 (spójność łamanych). Łamaną w \mathbb{R}^n nazwiemy sumę skończenie wielu odcinków I_1, \dots, I_N , o tej własności, że koniec odcinka I_k jest początkiem I_{k+1} dla każdego $k = 1, 2, \dots, N-1$. (Odcinki mogą mieć inne punkty wspólne: nie wymagamy, żeby łamana nie przecinała siebie samej).

Każda łamana też jest zbiorem spójnym. Można to wykazać na kilka sposobów.

Po pierwsze, łamana jest ciągłym obrazem odcinka, a ciągły obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym (oba fakty nietrudno udowodnić samemu; szczegóły, które pojawią się na zajęciach z topologii, pozostawimy Czytelnikowi).

Po drugie, można wykorzystać spójność odcinka i stosować przez indukcję następujący lemat:

Lemat 1.52. *Jeśli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}^n$ są spójne i $A \cap B \neq \emptyset$, to $S = A \cup B$ jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieją wtedy zbiory otwarte $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\Omega_1 \cap S \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap S, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap S = \emptyset, \quad S \subset \Omega_1 \cup \Omega_2. \quad (1.5)$$

Niech $\mathbf{x} \in A \cap B$. Bez zmniejszenia ogólności, $\mathbf{x} \in \Omega_1$. Zbiór A jest zawarty w sumie S zbiorów A i B ; dlatego, wobec drugiego i trzeciego warunku w (1.5),

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset, \quad A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Jednak A jest spójny, dlatego – z definicji! – któryś ze zbiorów $\Omega_i \cap A$ musi być pusty. Ponieważ $\mathbf{x} \in A \cap \Omega_1$, tzn. $A \cap \Omega_1$ *nie jest* pusty, więc $A \cap \Omega_2 = \emptyset$. Ponieważ $\mathbf{x} \in B$, więc, powtarzając powyższe rozumowanie, wnioskujemy, że $B \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Skoro jednak $A \cap \Omega_2 = B \cap \Omega_2 = \emptyset$, to $(A \cup B) \cap \Omega_2 = S \cap \Omega_2 = \emptyset$. Otrzymaliśmy sprzeczność z pierwszym warunkiem w (1.5). \square

Uwaga 1.53. Proszę sprawdzić, że powyższy lemat zachodzi nie tylko dla dwóch zbiorów spójnych, ale i dla dowolnej rodziny zbiorów spójnych, mających choć jeden punkt wspólny. W dowodzie trzeba dopasować tylko oznaczenia.

Twierdzenie 1.54. *Załóżmy, że zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ ma następującą własność: dla każdych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ istnieje zbiór spójny $A \subset U$ taki, że $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$. Wtedy U jest spójny.*

Dowód. Przypuśćmy, że U nie jest spójny. Weźmy zbiory otwarte $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\Omega_1 \cap U \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap U, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap U = \emptyset, \quad U \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Niech $\mathbf{x} \in \Omega_1 \cap U$, $\mathbf{y} \in \Omega_2 \cap U$. Dobierzmy zbiór spójny $A \subset U$ taki, że $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$. Wtedy

$$\Omega_1 \cap A \supset \{\mathbf{x}\} \neq \emptyset \neq \{\mathbf{y}\} \subset \Omega_2 \cap A, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset, \quad A \subset U \subset \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

To jednak przeczy spójności A , zatem U nie może być niespójny. \square

Wniosek 1.55. *Jeśli dowolne dwa punkty zbioru U można połączyć łamaną (ogólniej: krzywą) zawartą w tym zbiorze, to U jest zbiorem spójnym.*

Okazuje się, że jeśli zbiór U jest otwarty, to implikację z ostatniego wniosku można odwrócić. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.56 (spójność zbiorów otwartych). *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty. Wówczas U jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa punkty zbioru U można połączyć łamaną, zawartą w tym zbiorze.*

Łamane można w tym twierdzeniu zastąpić ogólniejszymi krzywymi (definiując krzywą jako ciągły obraz odcinka). Zanim przejdziemy do dowodu, podkreślmy ważną rzecz: teza tego twierdzenia *nie zachodzi* dla zbiorów, które nie są otwarte. Różne przykłady Czytelnik pozna na zajęciach z Topologii; w szczególności, zbiór

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$$

jest spójny, ale nie każde jego dwa punkty można połączyć krzywą zawartą w A .

Dowód. Wobec Wniosku 1.55 wystarczy wykazać, że jeśli $\mathbf{x} \in U$, to dla każdego $\mathbf{y} \in U$ istnieje łamana zawarta w U i łącząca punkty \mathbf{x}, \mathbf{y} .

Dla $\mathbf{x} \in U$ niech

$$U(\mathbf{x}) = \{\mathbf{z} \in U : \text{istnieje łamana } L \subset U, \text{ łącząca } \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{z}\}.$$

Zauważmy:

$$\text{dla każdego } \mathbf{x} \in U \text{ zbiór } U(\mathbf{x}) \text{ jest niepusty, otwarty i spójny.} \quad (1.6)$$

Istotnie, jeśli $\mathbf{z} \in U(\mathbf{x}) \subset U$, to wobec otwartości U pewna kula $B(\mathbf{z}, \delta) \subset U$. Każdy punkt \mathbf{y} tej kuli można połączyć odcinkiem (promieniem) ze środkiem kuli, punktem \mathbf{z} . Dodając ten odcinek do zawartej w U łamanej o końcach \mathbf{x}, \mathbf{z} , otrzymamy łamaną, która łączy w zbiorze U punkty \mathbf{y} i \mathbf{x} . Dlatego $B(\mathbf{z}, \delta) \subset U(\mathbf{x})$, a więc $U(\mathbf{x})$ jest otwarty. Spójność $U(\mathbf{x})$ wynika z Wniosku 1.55: jeśli dwa punkty $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in U(\mathbf{x})$, to istnieje łamana, łącząca je w $U(\mathbf{x})$. Łączymy po prostu łamaną w U punkty \mathbf{z}_1 i \mathbf{x} , a następnie \mathbf{x} i \mathbf{z}_2 ; każdy punkt takiej łamanej z definicji należy do $U(\mathbf{x})$.

Rozumując podobnie, stwierdzamy, że jeśli $U(\mathbf{y}) \cap U(\mathbf{x})$ jest zbiorem niepustym, to $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x})$, a zatem cały zbiór $U(\mathbf{y}) \subset U(\mathbf{x})$. Czytelnik sam zechce wskazać łamane, łączące odpowiednie punkty. Zamieniając rolami \mathbf{x} i \mathbf{y} , otrzymujemy inkluzję przeciwną. Zatem:

$$\text{jeśli } U(\mathbf{x}) \cap U(\mathbf{y}) \neq \emptyset, \text{ to } U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{y}). \quad (1.7)$$

Ustalmy teraz $\mathbf{x}_0 \in U$. Przypuśćmy, że punktu $\mathbf{y}_0 \in U$ nie można z \mathbf{x}_0 połączyć łamaną. Niech Ω_1 będzie sumą tych zbiorów $U(\mathbf{z})$, które mają punkty wspólne z $U(\mathbf{x}_0)$. Wobec (1.7), mamy $\Omega_1 = U(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$. Niech Ω_2 będzie sumą tych zbiorów $U(\mathbf{z})$, które nie mają punktów wspólnych z $U(\mathbf{x}_0)$. Z założenia, $U(\mathbf{y}_0) \subset \Omega_2$, więc $U \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.

Z określenia Ω_1 i Ω_2 wnioskujemy łatwo, że Ω_1 i Ω_2 są rozłączne. Są też otwarte; to wynika z otwartości $U(\mathbf{x})$ i Stwierdzenia 1.12. Są też niepuste ($\mathbf{x}_0 \in \Omega_1$, a $\mathbf{y}_0 \in \Omega_2$), a ich suma jest zbiorem U . To przeczy spójności U . Uzyskana sprzeczność kończy dowód. \square

Twierdzenie 1.57 (własność Darboux). *Założmy, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty i spójny, a funkcja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ i*

$$f(\mathbf{x}) < c < f(\mathbf{y})$$

dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, to wówczas istnieje punkt $\mathbf{z} \in \Omega$ taki, że $f(\mathbf{z}) = c$.

Dowód. Wybierzmy łamaną L , która łączy w zbiorze Ω punkty \mathbf{x} i \mathbf{y} . Niech $\gamma: [0, 1] \rightarrow L$ będzie funkcją ciągłą⁸ taką, że $\gamma(0) = \mathbf{x}$ i $\gamma(1) = \mathbf{y}$.

Funkcja $g = f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia

$$g(0) = f(\gamma(0)) = f(\mathbf{x}) < c < f(\mathbf{y}) = f(\gamma(1)) = g(1).$$

Dlatego istnieje $s \in (0, 1)$ takie, że $g(s) = c$. Zatem $f(\mathbf{z}) = c$ dla $\mathbf{z} = \gamma(s)$. \square

Uwaga 1.58. Czytelnik zechce zauważyć, że wykazaliśmy w istocie, że przy założeniach Twierdzenia 1.57 punkt pośredni \mathbf{z} , o którym mowa w tezie, można znaleźć na *każdej* łamanej, łączącej w Ω punkty \mathbf{x}, \mathbf{y} .

Na zakończenie powiemy kilka słów o ciągłości funkcji odwrotnej do funkcji wielu zmiennych (i założeniach, których wymaga odpowiednik jednowymiarowego twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej).

Twierdzenie 1.59. *Założmy, że zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, a funkcja $f: \mathbb{R}^m \supset K \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest ciągła i różnowartościowa. Wówczas $g = f^{-1}: \mathbb{R}^n \supset f(K) \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła.*

Dowód. Założmy, że $\mathbf{y}_j \rightarrow \mathbf{y} \in f(K)$. Wykażemy, że $g(\mathbf{y}_j) \rightarrow g(\mathbf{y})$ dla $j \rightarrow \infty$.

Niech $\mathbf{x}_j = g(\mathbf{y}_j) \in K$. Ponieważ K jest zwarty, więc istnieje podciąg $\mathbf{x}_{j_k} \rightarrow \mathbf{x} \in K$. Zatem, wobec ciągłości f , ciąg $\mathbf{y}_{j_k} = f(\mathbf{x}_{j_k})$ ma granicę $f(\mathbf{x})$, a ponieważ ciąg nie może mieć dwóch granic, więc $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, tzn. $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$. Wiemy zatem, że $g(\mathbf{y}_{j_k}) = \mathbf{x}_{j_k} \rightarrow g(\mathbf{y})$.

Rozumując podobnie, można wykazać, że *każdy podciąg ciągu $g(\mathbf{y}_j)$ zawiera podciąg $g(\mathbf{y}_{j_s})$ taki, że $g(\mathbf{y}_{j_s}) \rightarrow g(\mathbf{y})$* . Stąd już wynika, że cały ciąg $g(\mathbf{y}_j)$ jest zbieżny do $g(\mathbf{y})$. \square

Okazuje się, że założenie zwartości jest w Twierdzeniu 1.59 istotne. Oto przykłady.

Przykład 1.60. Niech

$$f: [0, \infty) \ni t \mapsto f(t) = \exp(2\pi i \cdot e^{-t}) \equiv (\cos 2\pi e^{-t}, \sin 2\pi e^{-t}) \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2.$$

⁸Można wybrać funkcję γ , która jest kawałkami afiniczną: po prostu parametryzujemy kolejne odcinki łamanej L , np. dzieląc $[0, 1]$ na tyle przedziałów, z ilu odcinków składa się L .

Czytelnik bez trudu sprawdzi, że funkcja f jest ciągłą różnowartościową (to wynika z własności funkcji wykładniczej w \mathbb{C}), a zbiorem jej wartości jest okrąg jednostkowy $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$. Jednak

$$f(0) = (1, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

a więc funkcja odwrotna do f nie jest ciągła w $(1, 0)$. \square

Przykład 1.61 (gęste krzywe na torusie). Niech $R > r > 0$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dana wzorem

$$F(\theta, \varphi) = ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^3.$$

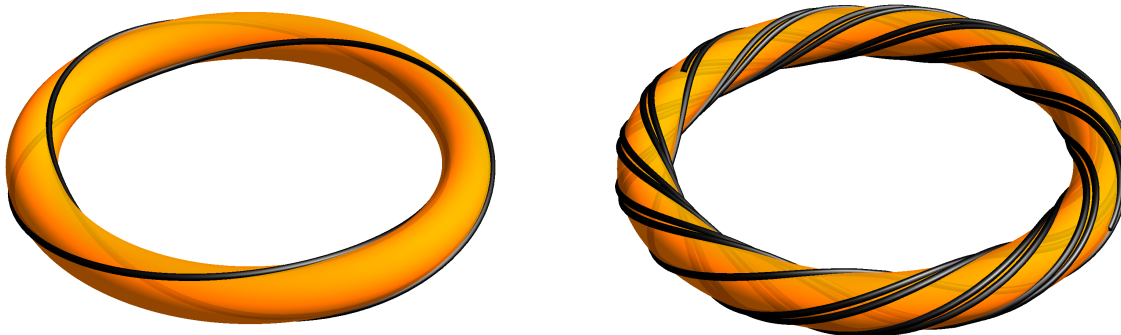
Można sprawdzić, że obrazem funkcji F jest torus obrotowy \mathbb{T} , który powstaje przez obrót (położonego w płaszczyźnie $x_2 = 0$) okręgu

$$\gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{x} - (R, 0, 0)\| = r\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: x_2 = 0\}$$

wokół osi x_3 układu współrzędnych. Oczywiście, F jest ciągła. Rozpatrzmy teraz złożenie F z funkcją $\mathbb{R} \ni t \mapsto (t, at)$, gdzie a jest (jakakolwiek) ustaloną liczbą niewymierną, tzn. przekształcenie

$$g(t) = F(t, at) = ((R + r \cos at) \cos t, (R + r \cos at) \sin t, r \sin at)$$

Nietrudno sprawdzić, że g jest różnowartościowa (to wynika z niewymierności a), zaś obraz funkcji g , tzn. krzywa $g(\mathbb{R})$, jest gęstym⁹ podzbiorem torusa \mathbb{T} .



Oba obrazki uzyskano dla $R = 8$, $r = 1$. Po lewej stronie: obraz przekształcenia $g_1(t) = F(2t, 3t)$ to krzywa zamknięta na torusie (węzeł, nazywany trójlistnikiem). Funkcja g_1 jest okresowa.

Po prawej: obraz przekształcenia $g_2(t) = F(t, at)$ dla $a = 1 + \sqrt{5}$, $t \in [0, 15\pi]$. Funkcja g_2 jest różnowartościowa i ciągła na \mathbb{R} , ale odwrotna do niej nie jest ciągła na zbiorze $A = g_2(\mathbb{R})$ w \mathbb{R}^3 . Podobne krzywe na torusie nazywa się czasem obmotkami.

Z geometrycznego punktu widzenia, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$ to różnowartościowe, równomierne nawinięcie (nieskończenie cienkiej i długiej) nitki na torus obrotowy.

⁹Proszę wykazać, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{T}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją dowolnie duże liczby $t \in \mathbb{R}$ takie, że $g(t) \in \mathbb{T} \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Można wcześniej przypomnieć sobie dowód gęstości – dla niewymiernych $b \in \mathbb{R}$ – ciągu $c_n = nb - [nb]$ w odcinku $[0, 1]$; Czytelnik zapewne widział ten dowód podczas ćwiczeń z Analizy Matematycznej I.

Funkcja g jest ciągła. Jednak przekształcenie g^{-1} nie jest ciągłe w *żadnym* punkcie zbioru $g(\mathbb{R})$, bo dowolnie blisko punktu $g(s)$ znajdują się punkty $g(t)$, dla których liczba $|t - s|$ może być dowolnie duża. \square

Założenie zwartości w Twierdzeniu 1.59 można zastąpić założeniem otwartości dziedziny oraz równości wymiarów dziedziny i przeciwdziedziny przekształcenia f . Zachodzi następujące twierdzenie, udowodnione przez holenderskiego matematyka L.E.J. Brouwera w 1912 roku.

Twierdzenie 1.62 (Brouwera o niezmienniczości obszaru). *Przypuśćmy, że zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, a funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest różnowartościowa i ciągła. Wtedy $V = f(U)$ jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n , a funkcja $f^{-1}: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ jest ciągła.*

Dowód wykracza poza ramy tego wykładu i należy do topologii, a nie do analizy.

Rozdział 2

Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych

2.1 Pochodne cząstkowe, kierunkowe i różniczka zupełna

Definicja 2.1 (pochodna cząstkowa). Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, ma w punkcie $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ *pochodną cząstkową względem zmiennej x_i* wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja *jednej* zmiennej rzeczywistej

$$F_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad F_i: (a_i - \delta, a_i + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

ma pochodną w punkcie a_i , gdzie $\delta > 0$ wybieramy tak, aby odcinek $(\mathbf{a} - \delta \mathbf{e}_i, \mathbf{a} + \delta \mathbf{e}_i) \subset \Omega$. Przyjmujemy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = F_i'(a_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (2.2)$$

Używa się także innych oznaczeń:

$$D_i f(\mathbf{a}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Jak widać, pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ obliczamy, traktując wszystkie zmienne oprócz x_i jako ustalone parametry i wykonując różniczkowanie względem x_i . Obowiązują przy tym oczywiście wszystkie reguły, które Czytelnik poznał, ucząc się rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Np. jeśli

$$f(x, y, z) = x^2 + x \cos(yz) + z \exp(x^2),$$

to

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + \cos(yz) + 2zx \exp(x^2), & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= -xz \sin(yz), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -xy \sin(yz) + \exp(x^2). \end{aligned}$$

Uwaga 2.2. Ze wzoru (2.2) wynika, że gdy wartości f są liczbami rzeczywistymi, tzn. $m = 1$ w Definicji 2.1, to także $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ – tam, gdzie jest określona – jest liczbą rzeczywistą. Jeśli $m > 1$, to $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ jest wektorem z przestrzeni \mathbb{R}^m .

Podkreślmy od razu, że samo istnienie pochodnych cząstkowych funkcji f *nie gwarantuje* ciągłości funkcji.

Przykład 2.3. (i) Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, y \neq 0\}$, tzn. niech $f \equiv 1$ na A i $f \equiv 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Na obu osiach układu współrzędnych mamy $f \equiv 0$ i dlatego, wprost z definicji,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}).$$

Jednak f nie jest ciągła w zerze, gdyż $f(\mathbf{0}) = 0 \neq \lim_{j \rightarrow \infty} f(1/j, 1/j^2)$.

(ii) Rozpatrzmy ponownie funkcję z Przykładu 1.48:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Jeśli $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(y^2 + x^4) - 4x^3 \cdot yx^2}{(y^2 + x^4)^2} = \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(y^2 + x^4)^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(y^2 + x^4) - 2y \cdot yx^2}{(y^2 + x^4)^2} = \frac{-x^2(y^2 - x^4)}{(y^2 + x^4)^2}. \quad (2.5)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, $f \equiv 0$ na obu osiach układu współrzędnych mamy i dlatego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}).$$

Jednak wiemy już, że f nie jest ciągła w punkcie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Przykład 2.4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $G(x) = (x, f(x))$, $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wówczas $\frac{\partial G}{\partial x} = G'(x) = (1, f'(x))$. Interpretacja geometryczna jest prosta: $G'(x)$ jest wektorem stycznym do wykresu f w punkcie $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$.

Definicja 2.5 (pochodna kierunkowa). Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, ma w punkcie $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ *pochodną kierunkową względem wektora* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja *jednej zmiennej rzeczywistej*

$$F_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}), \quad F_{\mathbf{v}}: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.6)$$

ma pochodną w zerze. (Liczbę $\delta > 0$ wybieramy tak, by odcinek $(\mathbf{a} - \delta\mathbf{v}, \mathbf{a} + \delta\mathbf{v}) \subset \Omega$.) Przyjmujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = (F_{\mathbf{v}})'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}. \quad (2.7)$$

Używa się także innych oznaczeń:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

Uwaga 2.6. Zauważmy, że pochodna kierunkowa względem \mathbf{e}_i jest tym samym, co pochodna cząstkowa względem x_i :

$$D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Przykład 2.7. Raz jeszcze rozpatrzmy funkcję z Przykładu 1.48, daną wzorem (2.3). Dla $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ i dowolnego wektora $\mathbf{v} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, gdzie $\xi, \eta \neq 0$, iloraz

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 \xi^2 \eta}{h^2 \eta^2 + h^4 \xi^4} = \frac{\xi^2 \eta}{\eta^2 + h^2 \xi^4} \rightarrow \frac{\xi^2}{\eta} \quad \text{dla } h \rightarrow 0.$$

Zatem f ma w zerze *wszystkie* pochodne kierunkowe (sprawdzaliśmy już istnienie pochodnych cząstkowych). Nietrudno stwierdzić, że w pozostałych punktach \mathbb{R}^2 funkcja f też ma wszystkie pochodne kierunkowe. Wynika stąd, że nawet istnienie wszystkich pochodnych kierunkowych w każdym punkcie dziedziny nie gwarantuje ciągłości funkcji wielu zmiennych rzeczywistych.

Właściwym odpowiednikiem pojęcia pochodnej jest, dla funkcji wielu zmiennych, pojęcie różniczki.

Definicja 2.8 (różniczkowalność funkcji wielu zmiennych). Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (2.8)$$

Przekształcenie A nazywamy *różniczką (lub pochodną, lub różniczką zupełną) f w punkcie \mathbf{a}* i oznaczamy $Df(\mathbf{a})$ lub $f'(\mathbf{a})$.

Stwierdzenie 2.9. Niech $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Następujące warunki są równoważne:

- (i) f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$;
- (ii) istnieją przekształcenie liniowe $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i funkcja

$$r: \Omega_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{a} + \mathbf{h} \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ciągła w punkcie $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dla których zachodzi równość

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + A\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \cdot r(\mathbf{h}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{h} \in \Omega_{\mathbf{a}}. \quad (2.9)$$

Jeśli zachodzi warunek (ii), to $Df(\mathbf{a}) = A$.

Dowód. Jeśli różniczka $A = Df(\mathbf{a})$ istnieje, to wystarczy określić

$$r(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \quad \text{dla } \mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \quad r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Funkcja r jest określona, gdy $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \Omega$. Ponadto, dzięki warunkowi (2.8),

$$\|r(\mathbf{h})\| = \frac{\|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0, \quad \text{dla } \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0,$$

tzn. równoważnie $r(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Na odwrót, jeśli zachodzi (ii), to warunek $r(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0} = r(\mathbf{0})$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ implikuje, że granica we wzorze (2.8) jest równa zero, tzn. $A = Df(\mathbf{a})$. \square

Uwaga 2.10. Jeśli różniczka $Df(\mathbf{a})$ istnieje, to jest określona jednoznacznie. Istotnie, gdyby wzór (2.9) zachodził dla A_i, r_i , gdzie $i = 1, 2$, to mielibyśmy $A_1\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r_1(\mathbf{h}) = A_2\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r_2(\mathbf{h})$ dla wszystkich \mathbf{h} z pewnej kuli $B(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$. Stąd, kładąc $\mathbf{h} = t \cdot \mathbf{v}$, gdzie $\|\mathbf{v}\| = 1$ i $t > 0$, a następnie dzieląc obie strony przez t , otrzymujemy

$$(A_1 - A_2)\mathbf{v} = r_2(t\mathbf{v}) - r_1(t\mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow 0.$$

Jednak lewa strona nie zależy od t . Zatem przekształcenia liniowe A_1 i A_2 pokrywają się na całej sferze jednostkowej $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\| = 1\}$, a więc są równe.

Wniosek 2.11. Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, to dla każdego niezerowego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ jest

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

W szczególności, dla $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ jest

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dowód. Podstawiając w równości (2.9) wektor $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$, gdzie \mathbf{v} jest ustalony i $t \neq 0$, otrzymujemy

$$Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{t} Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \pm \|\mathbf{v}\|r(t\mathbf{v}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}), \quad t \rightarrow 0.$$

Lewa strona nie zależy od t ; dlatego zachodzi pierwsza równość z tezy wniosku. Druga równość to jej przypadek szczególny (wspominaliśmy już, że pochodna f w kierunku \mathbf{e}_i i pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są równe). \square

Wniosek 2.12. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech

$$f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$;
- (ii) każda z funkcji f_i jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$.

W standardowych bazach przestrzeni \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m macierz $Df_i(\mathbf{a}) \in M_{1 \times n}$ jest wtedy i -tym wierszem macierzy $Df(\mathbf{a}) \in M_{m \times n}$.

Dowód. Posługujemy się Stwierdzeniem 2.9. Obie strony równości (2.9) są wektorami z \mathbb{R}^m . Równość i -tych współrzędnych tych wektorów ($i = 1, \dots, m$) jest równoważna różniczkowalności f_i ($i = 1, \dots, m$) w punkcie $\mathbf{a} \in A$ oraz równości $Df_i(\mathbf{a})\mathbf{h} = (Df(\mathbf{a})\mathbf{h})_i$ dla $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, tzn. – po utożsamieniu przekształceń liniowych z ich macierzami w standardowych bazach – temu, że $Df_i(\mathbf{a})$ jest i -tym wierszem macierzy $Df(\mathbf{a})$. \square

Uwaga 2.13 (terminologia: macierz Jacobiego). Jak wiadomo z wykładów Algbrzy Liniowej, przekształcenie liniowe $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma w standardowych bazach macierz (oznaczaną zwykle tą samą literą) o m wierszach i n kolumnach, której j -tą kolumnę stanowi wektor $A\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^m$, gdzie \mathbf{e}_j ($j = 1, \dots, n$) są wektorami standardowej bazy w \mathbb{R}^n . Z dwóch ostatnich wniosków wypływa zatem następująca obserwacja: jeśli

$$f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dla $i = 1, \dots, m$, jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, to jej różniczka ma w standardowych bazach przestrzeni \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m macierz

$$Df(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Kolumny tej macierzy to wektory

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Macierz (2.10) nazywamy *macierzą Jacobiego* przekształcenia różniczkowalnego f . Dla $n = m$ wyznacznik tej macierzy nazywamy *jakobianem* przekształcenia f w punkcie \mathbf{a} .

Wniosek 2.14. *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, to f jest ciągła w punkcie \mathbf{a} .*

Dowód. Korzystamy ze Stwierdzenia 2.9 (ii) oraz ciągłości przekształceń liniowych: dla $\mathbf{h} \rightarrow 0$ jest

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \cdot r(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m,$$

to zaś oznacza, że f jest ciągła w punkcie \mathbf{a} . \square

Uwaga 2.15. Wiemy już zatem, że istnienie pochodnych cząstkowych funkcji f w danym punkcie jest warunkiem *koniecznym* różniczkowalności f w tym punkcie. Nie jest jednak warunkiem *dostatecznym*, gdyż z istnienia pochodnych cząstkowych (a nawet wszystkich pochodnych kierunkowych) nie wynika ciągłość! Poniżej podajemy warunek *dostateczny* różniczkowalności, wyrażony w języku pochodnych cząstkowych.

Twierdzenie 2.16. *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ i wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ istnieją na całej kuli $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ i są ciągłe w punkcie \mathbf{a} , gdzie $r > 0$, to f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$. Zachodzi wtedy wzór*

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wobec Stwierdzenia 2.12, wystarczy przeprowadzić dowód dla $m = 1$.

Dla uproszczenia¹ przyjmijmy $n = 2$. Niech odąd $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, $\|\mathbf{h}\| < r$.

Aby skorzystać z istnienia pochodnych cząstkowych, wyrazimy przyrost f na odcinku $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}]$ jako sumę przyrostów wzdłuż dwóch odcinków równoległych do osi układu współrzędnych. Stosując twierdzenie Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych do funkcji

$$F_1(t) = f(a_1 + t, a_2 + h_2), \quad t \in [0, h_1],$$

oraz

$$F_2(t) = f(a_1, a_2 + t), \quad t \in [0, h_2]$$

sprawdzamy, że dla pewnych punktów pośrednich $\theta_i = \theta_i(\mathbf{h}) \in [0, h_i]$ ($i = 1, 2$) jest

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= (F_1(h_1) - F_1(0)) + (F_2(h_2) - F_2(0)) \\ &= h_1 F_1'(\theta_1) + h_2 F_2'(\theta_2) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underbrace{a_1 + \theta_1, a_2 + h_2}_{\text{punkt } \mathbf{p}_1}) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underbrace{a_1, a_2 + \theta_2}_{\text{punkt } \mathbf{p}_2}) \\ &= \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})}_{\text{część liniowa przyrostu}} + R(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

gdzie reszta

$$R(\mathbf{h}) = h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \right) + h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \right).$$

Z nierówności Schwarz'a wynika, że dla $\|\mathbf{h}\| < \delta < r$ jest

$$0 \leq |R(\mathbf{h})| \leq \sqrt{2} \|\mathbf{h}\| \cdot \max_{i=1,2} \left(\sup_{\mathbf{p} \in B(\mathbf{a}, \delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right| \right).$$

Jednak

$$\sup_{\mathbf{p} \in B(\mathbf{a}, \delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right| \quad \text{dla } \delta \rightarrow 0$$

dzięki ciągłości $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie \mathbf{a} . Zatem

$$R(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\| \cdot r(\mathbf{h}),$$

¹Chodzi o uproszczenie zapisu, a nie istotnych trudności – Czytelnik zechce się nad tym zastanowić. W ogólnym przypadku mielibyśmy w dowodzie do czynienia z sumą n przyrostów, a nie dwóch.

gdzie $r(\mathbf{0}) = 0$ i $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Ze Stwierdzenia 2.9 wynika teraz, że

$$Df(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \right).$$

Dowód został zakończony. \square

Na zakończenie tego podrozdziału podkreślmy jedno. Czytelnikowi może wydawać się, że pochodna cząstkowa i być może pochodna kierunkowa to pojęcia naturalniejsze od różniczki. Tak nie jest. Pochodne cząstkowe i kierunkowe określa się po to, żeby badać zachowanie funkcji na prostych. Z przytoczonych przykładów wynika jasno, że nie daje to dostatecznych informacji o zachowaniu funkcji w całym otoczeniu danego punktu. Naturalnym uogólnieniem pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej jest właśnie różniczka. Jej istnienie oznacza, że odwzorowanie f można lokalnie przybliżyć przekształceniami

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) \approx f(\mathbf{x}).$$

Ponadto, przekształcenie liniowe $Df(\mathbf{a})$ koduje w sobie pełną informację o pochodnych kierunkowych i cząstkowych f .

2.2 Arytmetyczne własności różniczki

Stwierdzenie 2.17 (różniczka sumy funkcji). *Jeśli $f, g: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ są różniczkowalne w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, to funkcja $f + g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w \mathbf{a} i zachodzi wzór*

$$D(f + g)(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) + Dg(\mathbf{a}).$$

Dowód. Stosujemy Stwierdzenie 2.9. Wzory 2.9 dla funkcji f, g dodajemy stronami; ponieważ $o(\|\mathbf{h}\|) + o(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$, więc uzyskujemy warunek (ii) Stwierdzenia 2.9 dla funkcji $f + g$. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie. \square

Uogólnimy teraz wzór $(fg)' = f'g + fg'$ na przypadek wielowymiarowy. Okazuje się, że jeśli można zdefiniować ‘iloczyn’ przekształceń różniczkowalnych f, g (to może być np. iloczyn funkcji o wartościach w \mathbb{R} i \mathbb{R}^m , albo iloczyn skalarny wektorów z \mathbb{R}^m , albo iloczyn wektorowy wektorów z \mathbb{R}^3 , albo iloczyn macierzy o odpowiednich rozmiarach, gdy wartości f, g są macierzami itp.), to ów iloczyn jest różniczkowalny, a jego pochodną oblicza się podobnie, jak dla funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} .

Twierdzenie 2.18 (różniczka ‘iloczynu’). *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $g: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ są różniczkowalne w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, a przekształcenie*

$$B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto B[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathbb{R}^l$$

jest dwuliniowe², to wówczas funkcja

$$B[f, g]: \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto B[f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^l$$

jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$ i zachodzi równość

$$DB[f, g](\mathbf{a})\mathbf{h} = B[Df(\mathbf{a})\mathbf{h}, g(\mathbf{a})] + B[f(\mathbf{a}), Dg(\mathbf{a})\mathbf{h}] \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

²Oznaczenie $B[f, g]$ Czytelnik może zastąpić przez $f \cdot g$ – wtedy analogia z przypadkiem jednowymiarowym będzie widoczna jak na dłoni.

Uwaga 2.19. Nie zakładamy, że $B[f, g] = B[g, f]$ (bo np. mnożenie macierzy nie jest działaniem przemiennym). Dlatego we wzorze (2.11) nie wolno zamieniać kolejności argumentów B w składnikach prawej strony.

Dowód TWIERDZENIA 2.18. Wobec Stwierdzenia 2.9,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h}), \quad (2.12)$$

$$g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_g(\mathbf{h}), \quad (2.13)$$

gdzie $\|R_f(\mathbf{h})\| = \|R_g(\mathbf{h})\| = o(\|\mathbf{h}\|)$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Ustalmy zatem liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla wszystkich $\|\mathbf{h}\| < \delta$ mieć

$$\|R_f(\mathbf{h})\| + \|R_g(\mathbf{h})\| < \|\mathbf{h}\|. \quad (2.14)$$

Korzystając z dwuliniowości B , piszemy

$$\begin{aligned} & B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] \\ &= B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] \\ &\quad + B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] \\ &= B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] + B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a})] \\ &= B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] + B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a})] \\ &\quad + B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a})] \stackrel{\text{ozn.}}{=} S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Do prawej strony wstawiamy teraz równości (2.12) i (2.13). Składnik

$$S_1 = B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] = B[Df(\mathbf{a})\mathbf{h}, g(\mathbf{a})] + B[R_f(\mathbf{h}), g(\mathbf{a})],$$

gdzie $B[R_f(\mathbf{h}), g(\mathbf{a})] = o(\|\mathbf{h}\|)$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ (to łatwo wynika z dwuliniowości B). Podobnie,

$$S_2 = B[f(\mathbf{a}), Dg(\mathbf{a})\mathbf{h}] + B[f(\mathbf{a}), R_g(\mathbf{h})] = B[f(\mathbf{a}), Dg(\mathbf{a})\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Dlatego suma $S_1 + S_2$ daje prawą stronę wzoru (2.11) z tezy, z błędem $o(\|\mathbf{h}\|)$. Wreszcie, składnik $S_3 = o(\|\mathbf{h}\|)$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Istotnie, każde przekształcenie dwuliniowe B spełnia nierówność

$$\|B[\mathbf{x}, \mathbf{y}]\| \leq C\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

z pewną stałą C zależną od B .³ Dlatego

$$\begin{aligned} \|S_3\| &\leq C\|Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h})\| \cdot \|Dg(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_g(\mathbf{h})\| \\ &\leq C \cdot M^2\|\mathbf{h}\|^2 \quad \text{dla } \|\mathbf{h}\| < \delta, \end{aligned}$$

gdzie, wobec oszacowania (2.14), można wziąć np. stałą $M = \|Df(\mathbf{a})\| + \|Dg(\mathbf{a})\| + 1$. Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} & B[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}), g(\mathbf{a} + \mathbf{h})] - B[f(\mathbf{a}), g(\mathbf{a})] = \\ &= S_1 + S_2 + S_3 = \text{prawa strona wzoru (2.11)} + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{dla } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Wobec Stwierdzenia 2.9, dowód jest zakończony. \square

³Czytelnik może to udowodnić samodzielnie, naśladowując dowód Stwierdzenia 1.40.

Twierdzenie 2.20 (różniczka złożenia funkcji). Niech $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ i $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami otwartymi. Jeśli $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega_1$, $\mathbf{a} \in \Omega_2 \supset f(\Omega_1)$ i $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$, to złożenie $g \circ f$ jest różniczkowalne w punkcie \mathbf{a} i zachodzi wzór

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a}). \quad (2.15)$$

Dowód. Wobec Stwierdzenia 2.9,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h}), \quad (2.16)$$

$$g(\mathbf{b} + \mathbf{w}) - g(\mathbf{b}) = Dg(\mathbf{b})\mathbf{w} + R_g(\mathbf{w}), \quad (2.17)$$

gdzie $\|R_f(\mathbf{h})\| = o(\|\mathbf{h}\|)$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ i $\|R_g(\mathbf{w})\| = o(\|\mathbf{w}\|)$ dla $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{0}$. Do (2.17) podstawmy $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ oraz $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$. Korzystając z (2.16), otrzymujemy

$$\begin{aligned} g \circ f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g \circ f(\mathbf{a}) &= g(\mathbf{b} + \mathbf{w}) - g(\mathbf{b}) \\ &= Dg(\mathbf{b})\mathbf{w} + R_g(\mathbf{w}) \\ &= Dg(\mathbf{b})(Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h})) + R_g(\mathbf{w}) \\ &= [Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a})]\mathbf{h} + R, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdzie reszta

$$R = Dg(\mathbf{b})(R_f(\mathbf{h})) + R_g(\mathbf{w}).$$

Niech $M = \|Dg(\mathbf{b})\| + \|Df(\mathbf{a})\| + 1$. Dla małych $\|\mathbf{h}\|$ jest $\|R_f(\mathbf{h})\| < \|\mathbf{h}\|$ i dlatego

$$\|\mathbf{w}\| = \|Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + R_f(\mathbf{h})\| \leq \|Df(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \|R_f(\mathbf{h})\| \leq M\|\mathbf{h}\|.$$

Zatem $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ i mamy

$$\begin{aligned} \frac{\|R\|}{\|\mathbf{h}\|} &\leq \frac{M\|R_f(\mathbf{h})\| + \|R_g(\mathbf{w})\|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= M \frac{\|R_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \frac{\|R_g(\mathbf{w})\|}{\|\mathbf{w}\|} \\ &\leq M \left(\frac{\|R_f(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\|R_g(\mathbf{w})\|}{\|\mathbf{w}\|} \right) \rightarrow 0 \quad \text{dla } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}, \end{aligned}$$

tzn. $R = o(\|\mathbf{h}\|)$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Wobec równości (2.18) i Stwierdzenia 2.9, zachodzi równość $D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a})$. \square

Uwaga 2.21. Zgodnie z definicją różniczka $D(g \circ f)(\mathbf{a})$ złożenia $g \circ f: \mathbb{R}^n \supset \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ powinna być przekształceniem liniowym z \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^k . Istotnie tak jest: $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $Dg(\mathbf{b}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, więc ich złożenie jest przekształceniem liniowym z \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^k .

Twierdzenie 2.20 ma następującą interpretację: macierz Jacobiego różniczki przekształcenia $g \circ f$ jest iloczynem macierzy Jacobiego przekształceń g i f , wziętych w odpowiednich punktach. Z wieloma zastosowaniami tej interpretacji Czytelnik spotka się w konkretnych przykładach.

2.3 Gradient. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji i punkty krytyczne

Definicja 2.22 (gradient funkcji wielu zmiennych). Gradientem funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $\mathbf{x} \in \Omega$ nazywamy wektor

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Z tej definicji oraz definicji macierzy Jacobiego wynika, że dla $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mamy

$$\langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Czytelnik może więc uważać, że rozróżnianie gradientu i różniczki to niepotrzebna maniera. Podkreślmy jednak, że $\text{grad } f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, natomiast $Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$. Przywykliśmy utożsamiać przestrzenie $(\mathbb{R}^n)^*$ i \mathbb{R}^n ; to wymaga odwołania się do konkretnego układu współrzędnych. Na gładkich powierzchniach w \mathbb{R}^n – powiedzmy na torusie czy na sferze – nie sposób jednak zwykle wskazać jakiegoś wyróżnionego układu współrzędnych. Dlatego odróżnianie gradientu i różniczki ma sens. Czytelnik zetknie się z tym później w bieżącym roku, a także na zajęciach z geometrii różniczkowej.

Stwierdzenie 2.23. Dla każdej funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i każdego wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ takiego, że

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|, \quad \text{gdzie } \mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

zachodzi nierówność

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}) \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

Ponadto, równość w (2.19) zachodzi jedynie dla $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Dowód. Wobec Wniosku 2.11 i nierówności Schwarza, mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{w} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|^2,$$

natomiast

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Stąd już wynika nierówność (2.19).

W nierówności Schwarza $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ dla wektorów \mathbf{v}, \mathbf{w} o równych długościach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v} = \pm \mathbf{w}$. Jednak dla $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$ jest

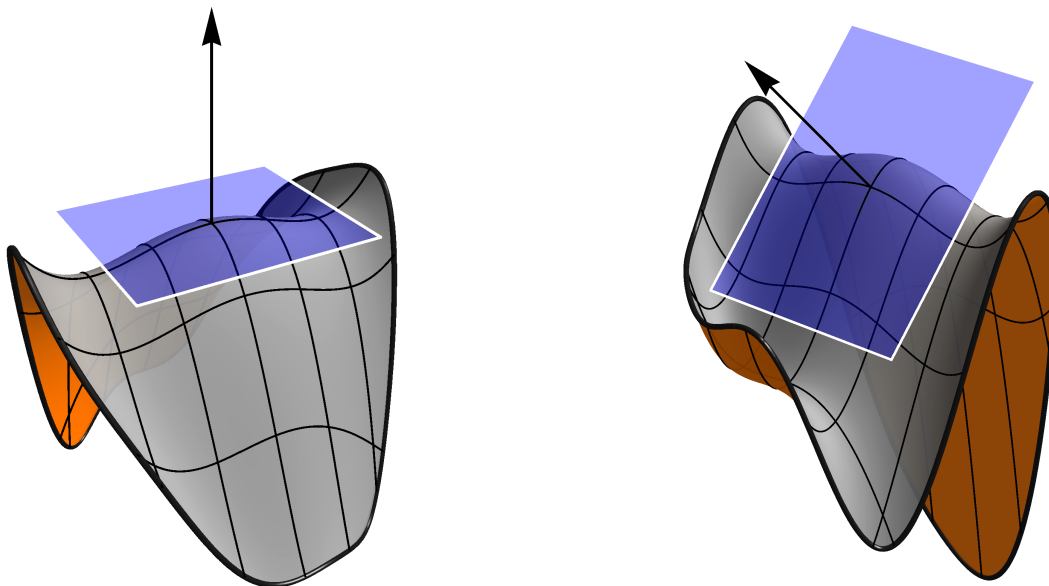
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\|\mathbf{v}\|^2 < 0 < \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}).$$

Ta obserwacja kończy dowód. \square

Powyższe stwierdzenie ma następującą interpretację geometryczną: gradient funkcji w punkcie wyznacza kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie. Długość wektora gradientu odpowiada za tempo wzrostu w tym kierunku.

Definicja 2.24 (płaszczyzna styczna do wykresu funkcji). Jeśli $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie \mathbf{a} , to płaszczyzną styczną do wykresu f w punkcie $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nazywamy zbiór

$$T = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = x_{n+1} - f(\mathbf{a})\}$$



Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})) \in \mathbb{R}^3$ ma równanie

$$f_{x_1}(\mathbf{p})(x_1 - p_1) + f_{x_2}(\mathbf{p})(x_2 - p_2) = x_3 - f(\mathbf{p})$$

Wektor $(-f_{x_1}(\mathbf{p}), -f_{x_2}(\mathbf{p}), 1) \in \mathbb{R}^3$ jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.

Po lewej: w punkcie ekstremum lokalnego $f_x = f_y = 0$ i tam płaszczyzna styczna jest pozioma.

Innymi słowy, zbiór T jest wykresem odwzorowania afinicznego

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in \mathbb{R}.$$

Wprost z definicji różniczki wynika, że dla $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ jest $f(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$. Widzieliśmy też, że ten warunek określa odwzorowanie ϕ jednoznacznie. To uzasadnia nazwę *płaszczyzna styczna*. Zauważmy, że jeśli $Df(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, to przekształcenie ϕ jest stałe, a więc jego wykresem jest hiperpłaszczyzna $x_{n+1} = \text{const}$.

Podamy teraz warunek konieczny istnienia ekstremum⁴ funkcji w punkcie wewnętrznym dziedziny.

Stwierdzenie 2.25 (lemat Fermata). Jeśli funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$ i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$Df(\mathbf{a}) = 0,$$

lub równoważnie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

⁴Definicja maksimum (minimum) lokalnego jest analogiczna, jak w wymiarze 1; trzeba tylko przedział wokół danego punktu w dziedzinie zastąpić kulą o środku w tym punkcie.

Dowód. Jeśli f ma ekstremum lokalne w \mathbf{a} , to dla każdego $i = 1, \dots, n$ funkcja

$$F_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

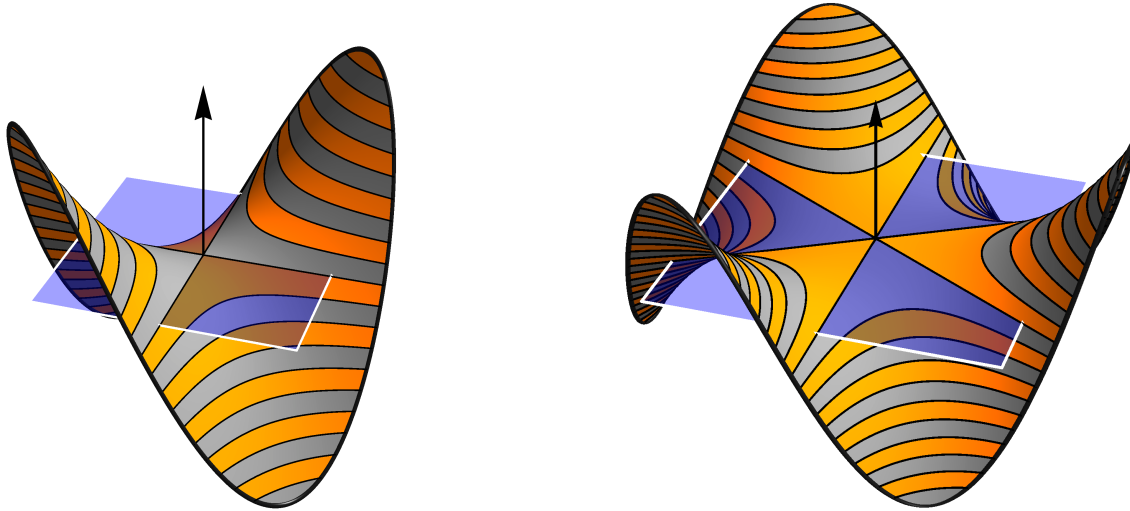
określona w pewnym przedziale $(a_i - \delta, a_i + \delta) \subset \mathbb{R}$, ma ekstremum lokalne w a_i . Dlatego $F'_i(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})\mathbf{e}_i = 0$. \square

W wielu sytuacjach wykorzystywane jest następujące ogólne pojęcie.

Definicja 2.26. Przypuśćmy, że odwzorowanie $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne na Ω . Powiemy, że $\mathbf{a} \in \Omega$ jest *punktem krytycznym* f wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie liniowe $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma rząd mniejszy, niż $\min(m, n)$.⁵

Gdy $m = 1$, to $\mathbf{a} \in \Omega$ jest punktem krytycznym funkcji $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ma rząd mniejszy, niż $\min(n, 1) = 1$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy $Df(\mathbf{a})$ jest przekształceniem zerowym. Jest to równoważne temu, że wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ znikają w punkcie \mathbf{a} . Zachodzi zatem następujące:

Stwierdzenie 2.27. Wszystkie ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są jej punktami krytycznymi. \square

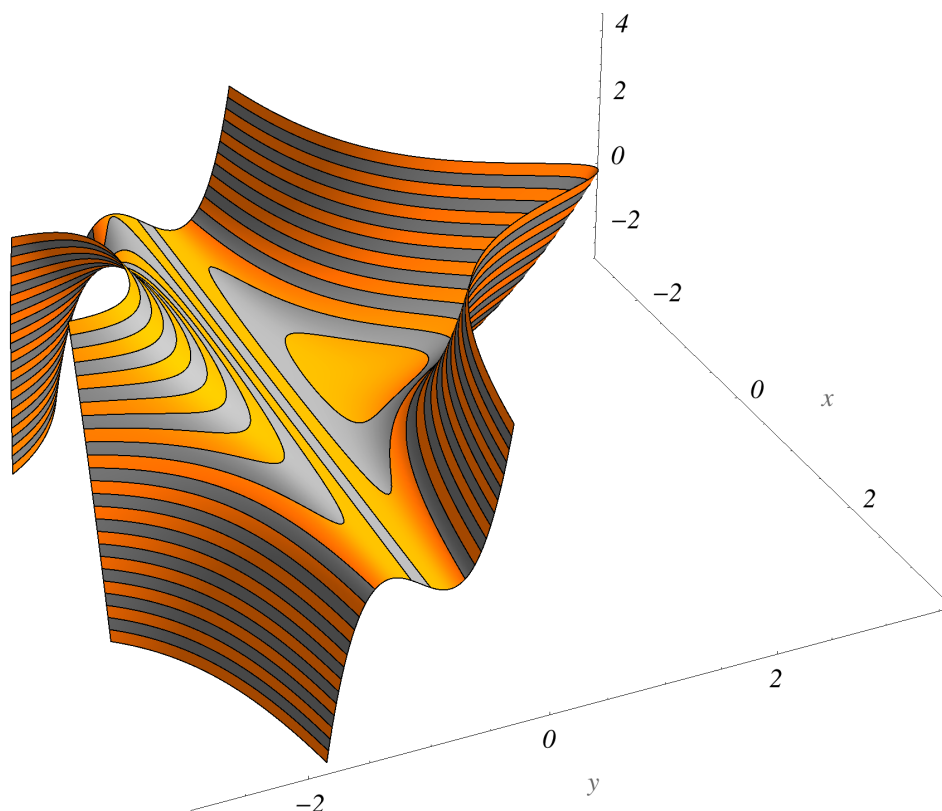


Po lewej: wykres funkcji $f(x, y) = xy$. Płaszczyzna styczna przecina wykres funkcji wzdłuż osi x i y . Po prawej: tzw. małpie siodło, wykres funkcji $g(x, y) = x^3 - 3y^2x$. Płaszczyzna styczna przecina wykres wzdłuż trzech prostych. Na obu rysunkach brzozy kolorowych pasów to poziomic (linie, na których funkcja ma stałą wartość).

Oczywiście nie zachodzi implikacja odwrotna. Funkcja $f(x, y) = xy$ ma pochodne cząstkowe $f_x(x, y) = y$ i $f_y(x, y) = x$, które znikają jednocześnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = 0$. Jednak w punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie ma ani minimum, ani maksimum lokalnego (równego zero), gdyż w każdym otoczeniu tego punktu przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Podobnie,

$$g(x, y) = x^3 - 3y^2x = x(x - y\sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) \quad (2.20)$$

⁵Zauważmy: $k = \min(m, n)$ jest maksymalnym możliwym rzędem przekształcenia liniowego z \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^m .



Wykres funkcji $f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2$. Zaznaczone linie to poziomice. W środku widoczne minimum lokalne. Dla $x = \text{const} > 0$ funkcja $f(\text{const}, y)$ jest wielomianem stopnia 3; proszę zwrócić uwagę na kształt przedniej krawędzi tego fragmentu wykresu f .

ma pochodne cząstkowe $g_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2$ i $g_y(x, y) = 6xy$. Łatwo zauważyć, że jedynym punktem krytycznym tej funkcji jest $(0, 0)$, jednak w każdym otoczeniu tego punktu f przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Nawet dla $n = 2$ zachowanie funkcji różniczkowalnych $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ potrafi odbiegać od naiwnych oczekiwań, jakie Czytelnik mógłby mieć dzięki wcześniejszym jednowymiarowym intuicjom. Należy o tym pamiętać, szukając kresów zbioru wartości funkcji.

Przykład 2.28. Istnieją funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (o ciągłych pochodnych cząstkowych), które spełniają dwa warunki:

- f ma na \mathbb{R}^2 tylko jeden punkt krytyczny, w którym jest jej ekstremum lokalne;
- f nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Taka funkcja w punkcie jedynego swego ekstremum lokalnego nie osiąga ani kresu dolnego, ani kresu górnego! Spójrzmy na dwa konkretne przykłady takich sytuacji.

Niech

$$f(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2. \quad (2.21)$$

Funkcja f jest wielomianem, więc ma ciągle pochodne cząstkowe. Wyznamy teraz

jej punkty krytyczne. Łatwo obliczamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1 + y)^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2(1 + y)^2 + 2y.$$

Jeśli $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, to $x = 0$ lub $y = -1$. Jednak dla $y = -1$ jest $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv -2 \neq 0$, tzn. f nie ma żadnych punktów krytycznych postaci $(a, -1)$. Natomiast $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 2y = 0$ dla $y = 0$. Dlatego jedynym punktem krytycznym f jest $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Nietrudno zauważyć, że dla $|y| < 1/2$ jest $2 \geq 1 + y \geq 1/2$ i dlatego

$$8(x^2 + y^2) \geq f(x, y) \geq \frac{1}{8}(x^2 + y^2), \quad |y| < \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stąd wynika, że f ma w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ minimum lokalne właściwe. Jednak f nie jest na \mathbb{R}^2 ograniczona ani z góry, ani z dołu, gdyż funkcja

$$h(y) = f(1, y) = (1 + y)^3 + y^2, \quad y \in \mathbb{R},$$

jest wielomianem trzeciego stopnia, a więc nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Innego przykładu tego zjawiska dostarcza funkcja

$$g(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}, \quad (2.22)$$

która jest nieograniczona z góry i z dołu na \mathbb{R}^2 , gdyż $g(x, 0) = 3x - x^3 - 1$ jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej x . Mamy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3(e^y - x^2), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 3e^y(x - e^{2y}).$$

Z równań $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ otrzymujemy $y = \ln x^2$ i $x = e^{2y} = x^4$, stąd zaś $x = 1$ i $y = 0$ (innych rozwiązań nie ma). Zachowanie funkcji g w otoczeniu punktu $(1, 0)$ można przeanalizować, korzystając ze wzoru Taylora.⁶ Wskażemy tylko kroki w rachunkach; Czytelnik zechce sprawdzić (nietrudne) szczegóły samodzielnie. Najpierw piszemy

$$g(x, y) = 3(x - 1)e^y - x^3 + 3e^y - e^{3y},$$

podstawiamy $x^3 = (1 + (x - 1))^3 = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3$ i otrzymujemy

$$g(x, y) = 3e^y - e^{3y} - 1 + 3(x - 1)(e^y - 3) - 3(x - 1)^2 - (x - 1)^3.$$

Następnie wykorzystujemy rozwinięcie Taylora–Maclaurina funkcji wykładniczej. Prowadzi to do wyniku

$$g(x, y) = 1 - 3(x - 1)^2 - 3y^2 + 3y(x - 1) + \frac{3}{2}y^2(x - 1) + o(y^2) + o((x - 1)^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0.$$

⁶Nie znamy jeszcze wprowadzie wzoru Taylora dla funkcji wielu zmiennych, tu jednak nietrudno jest znaleźć najpierw rozwinięcie Taylora względem x (traktując y jako parametr), potem zaś skorzystać ze znanego rozwinięcia $e^y = 1 + y + y^2/2! + \dots$.

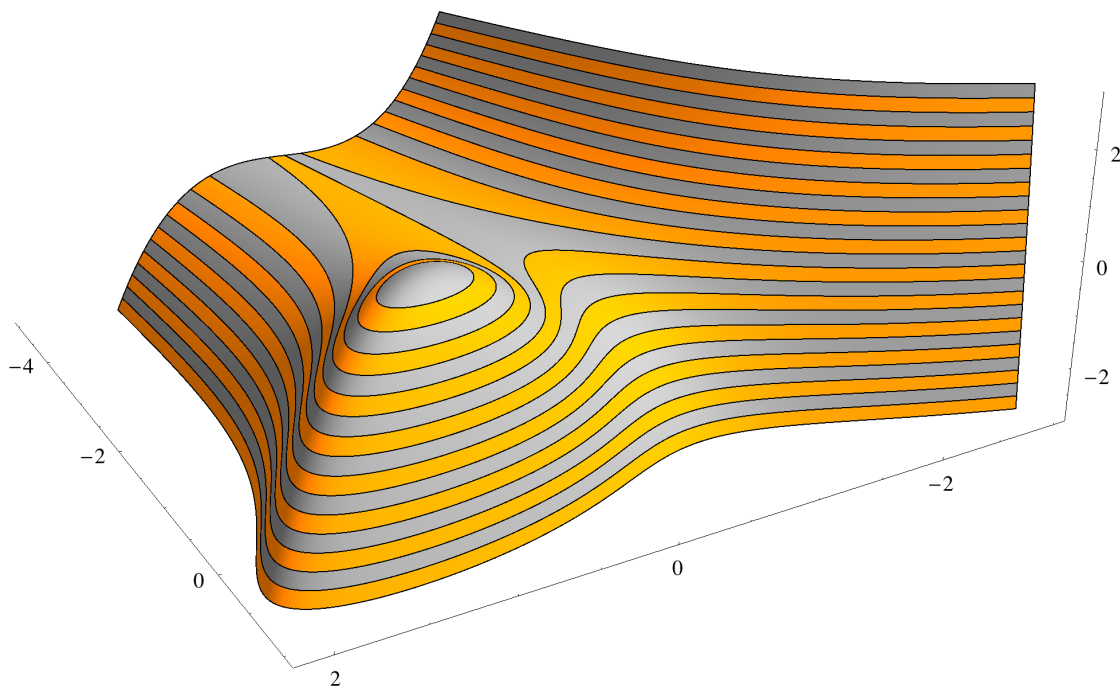
Jednak $|3y(x-1)| \leq \frac{3}{2}(y^2 + (x-1)^2)$, a z nierówności Younga $ab \leq a^p/p + b^q/q$ (gdzie $a, b \geq 0, p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, patrz wykłady Analizy Matematycznej z I roku) zastosowanej dla $p = 3/2$ i $q = 3$ otrzymujemy

$$\frac{3}{2}|y^2(x-1)| \leq |y|^3 + \frac{1}{2}|x-1|^3 = o(y^2) + o((x-1)^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0.$$

Dlatego

$$g(x, y) \geq 1 - \frac{3}{2}(y^2 + (x-1)^2) + o(y^2) + o((x-1)^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 1, y \rightarrow 0,$$

stąd zaś wynika, że g ma w punkcie $(1, 0)$ maksimum lokalne właściwe. Odpowiedni fragment wykresu funkcji g przedstawiony jest na rysunku. \square



Wykres funkcji $g(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. Widoczny garb to jedyne maksimum lokalne tej funkcji. Innych punktów krytycznych g nie ma. Pomysł na prezentację wykresu zaczerpnięty z książki: Stan Wagon, *Mathematica in action*, wydanie 3, Springer Verlag 2010.

Przykład 2.29 (Nierówność między średnimi raz jeszcze). Udowodnimy ponownie nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną. Jak wcześniej w Przykładzie 1.47, założymy, że

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n, \quad x_i \geq 0.$$

Wykażemy, że $x_1 x_2 \dots x_n \leq 1$ (przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy wszystkie x_i są równe).

Tym razem niech

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \underbrace{(n - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}))}_{=x_n \geq 0}$$

dla

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : x_i \geq 0, \quad x_1 + \dots + x_{n-1} \leq n\}.$$

Zbiór K jest zwarty w \mathbb{R}^{n-1} , a funkcja f jest ciągła na K , zatem f osiąga swój kres górny. Na brzegu K jest $f \equiv 0$, a f przyjmuje wartości dodatnie, np. w punkcie $(1, \dots, 1)$, dlatego $\sup f = f(\mathbf{a})$ dla pewnego punktu \mathbf{a} należącego do wnętrza zbioru K . W tym punkcie musi być $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$.

Stosując wzór na pochodną iloczynu, łatwo sprawdzić, że wewnątrz K

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{f(\mathbf{a})}{a_i} - a_1 \dots a_{n-1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Dlatego układ równań $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ jest równoważny innemu:

$$n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Sumując te równania, otrzymujemy $n(n-1) = (n-1) \sum a_j + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, a stąd $\sum a_j = n-1$ i dlatego

$$n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_i = 1 - a_i,$$

ostatecznie więc $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ jedynie wtedy, gdy $a_i = 1$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n-1$. Właśnie w punkcie $(1, \dots, 1)$ funkcja f przyjmuje więc swój kres górny, równy 1. \square

Opisaliśmy już geometryczną interpretację gradientu: jest to kierunek, w którym funkcja rośnie najszybciej. Okazuje się, że można powiedzieć więcej: przy nieznacznym dodatkowym założeniu funkcja “jest stała w kierunkach prostopadłych do gradientu”. Aby wyjaśnić to bliżej i ściślej, będziemy potrzebowali dwóch definicji.

Definicja 2.30 (poziomica funkcji). Poziomicą funkcji $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy zbiór

$$M = \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\},$$

gdzie $\mathbf{a} \in \Omega$ jest ustalonym punktem.

Innymi słowy, poziomica składa się z tych punktów, gdzie funkcja przybiera konkretną, ustaloną wartość (równą $f(\mathbf{a})$ dla danego punktu $\mathbf{a} \in \Omega$).

Definicja 2.31 (wektory styczne do zbioru w punkcie). Mówimy, że wektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ jest styczny do zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ w punkcie $\mathbf{a} \in A$ (i piszemy $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg punktów $\mathbf{x}_j \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ taki, że $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{a}$ dla $j \rightarrow \infty$, a ponadto

$$\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}. \quad (2.23)$$

Przyjmijmy także, że wektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ jest, dla dowolnych A i $\mathbf{a} \in A$, styczny do zbioru A w punkcie \mathbf{a} . Zbiór $T_{\mathbf{a}}A$ nazywamy przestrzenią styczną do A w punkcie \mathbf{a} (lub, czasem, stożkiem stycznym do A w punkcie \mathbf{a}).

W literaturze matematycznej można spotkać różne (niekoniecznie równoważne) definicje wektora stycznego do zbioru. Przytoczona wyżej ma tę zaletę, że można się nią posługiwać, nie przyjmując *żadnych* dodatkowych założeń o zbiorze A .

Uwaga 2.32. Lewa strona wzoru (2.23) nie zmienia się, gdy wektor \mathbf{w} mnożymy przez liczbę $t > 0$. Dlatego jeśli $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$, to $t \cdot \mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$ dla $t > 0$. To przestaje być prawdą dla $t < 0$: jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest wykresem funkcji $y = |x|^{1/2}$ i $\mathbf{a} = (0, 0)$, to nietrudno sprawdzić, że $\mathbf{w} = (0, 1) \in T_{\mathbf{a}}A$, natomiast $-\mathbf{w} \notin T_{\mathbf{a}}A$.

Uwaga 2.33. Przypuśćmy, że $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną zmiennej jednej zmiennej rzeczywistej $t \in I$, gdzie I jest jakimś przedziałem otwartym wokół zera. Wówczas wektor $\gamma'(0)$ jest styczny do zbioru A w punkcie $\mathbf{a} = \gamma(0)$. Jeśli $\gamma'(0) = 0$, to nie ma czego dowodzić. Przypuśćmy więc, że $\mathbf{w} \equiv \gamma'(0) \neq 0$. Z definicji pochodnej

$$\mathbf{w} = \gamma'(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma(1/j) - \gamma(0)}{1/j}.$$

Ponieważ norma jest funkcją ciągłą, więc

$$0 \neq \|\mathbf{w}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\gamma(1/j) - \gamma(0)\|}{1/j}$$

(i wyrazy ciągu po prawej stronie są różne od zera dla dużych j). Dlatego

$$\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma(1/j) - \gamma(0)}{1/j} \cdot \frac{1/j}{\|\gamma(1/j) - \gamma(0)\|} \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma(1/j) - \gamma(0)}{\|\gamma(1/j) - \gamma(0)\|},$$

a więc warunek (2.23) jest spełniony w punkcie $\mathbf{a} = \gamma(0)$ dla punktów $\mathbf{x}_j = \gamma(1/j)$.

Interpretacja fizyczna powyższego spostrzeżenia jest jasna: jeśli podróżujemy w zbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$ (i położenie jest różniczkowalną funkcją czasu t), to wektor prędkości jest cały czas styczny do zbioru A .

Twierdzenie 2.34 (prostotałość gradientu do poziomicy). Załóżmy, że $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$ i ciągła na pewnej kuli $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$, gdzie $r > 0$. Niech

$$A = \{x \in \Omega: f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}.$$

Jeśli $\mathbf{v} := \text{grad } f(\mathbf{a}) \neq 0$, to następujące warunki są równoważne:

(i) $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$;

(ii) wektor \mathbf{w} jest prostopadły do $\mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{a})$, tzn. $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Dowód. Jeśli $\mathbf{w} = 0$, to oba warunki są spełnione. Niech więc odtąd $\mathbf{w} \neq 0$. Załóżmy także, że $f(\mathbf{a}) = 0$; to nie zmniejsza ogólności rozważań, gdyż dodając do f stałą, nie zmieniamy gradientu.

Najpierw wykażemy, że (i) \Rightarrow (ii). Niech $\mathbf{x}_j \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ będzie zbieżnym do \mathbf{a} ciągiem punktów, dla którego zachodzi warunek (2.23). Ponieważ $\mathbf{x}_j \in A$, więc z definicji $f(\mathbf{x}_j) = 0$. Wobec różniczkowalności f w \mathbf{a} , mamy

$$\begin{aligned} 0 = f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{a} + (\mathbf{x}_j - \mathbf{a})) &= f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|) \\ &= \underbrace{f(\mathbf{a})}_{=0} + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x}_j - \mathbf{a} \rangle + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|) \\ &= \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{x}_j - \mathbf{a} \rangle + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|), \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

a zatem

$$0 = \left\langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \right\rangle + \frac{o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}.$$

Zgodnie z (2.23), $(\mathbf{x}_j - \mathbf{a})/\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\| \rightarrow \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$, gdy $j \rightarrow \infty$. Zatem

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \right\rangle = \left\langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right\rangle = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{w} \rangle.$$

Dowód implikacji (ii) \Rightarrow (i) jest nieco trudniejszy. Niech $\mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{a}) \neq 0$. Ustalmy najpierw, posługując się wprost definicją różniczki i gradientu, liczbę $t > 0$ tak, aby mieć

$$f(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v}) > 0 = f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{a} - t \cdot \mathbf{v}) \quad \text{oraz} \quad t \cdot \|\mathbf{v}\| < \frac{r}{2};$$

można to zrobić, gdyż $Df(\mathbf{a})\mathbf{h} = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle$ i dla małych $|t|$ jest

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(t\mathbf{v}) + o(|t|) = Df(\mathbf{a})(t\mathbf{v}) + o(|t|) = t\|\mathbf{v}\|^2 + o(|t|),$$

a więc znak liczby $f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ jest taki, jak znak t .

Dalszy ciąg dowodu polega na tym, by wybrać punkty $\mathbf{x}_j \in A$, dla których zachodzi warunek z definicji wektora stycznego. Kluczowy krok pod koniec rozumowania wykonujemy nie wprost; w dowodzie istotną rolę odgrywa ciągłość f w całym otoczeniu \mathbf{a} . (Czytelnik zechce wykonać rysunek, zakładając, że płaszczyzna kartki jest rozpięta na \mathbf{v} i \mathbf{w} , i zaznaczać położenia kolejnych rozpatrywanych punktów).

Niech $j \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{j} < t$. Korzystając z ciągłości f w punktach $\mathbf{a} \pm \frac{1}{j}\mathbf{v}$, wybierzmy liczbę $\delta_j \in (0, 1/j)$ tak, aby

$$f(\mathbf{a} + \frac{1}{j}\mathbf{v} + s\mathbf{w}) > 0 \quad \text{dla wszystkich } |s| \leq \delta_j \quad (2.24)$$

i jednocześnie

$$f(\mathbf{a} - \frac{1}{j}\mathbf{v} + s\mathbf{w}) < 0 \quad \text{dla wszystkich } |s| \leq \delta_j. \quad (2.25)$$

Założymy też, że punkty $\mathbf{a} \pm \frac{1}{j}\mathbf{v} + \delta_j\mathbf{w} \in B(\mathbf{a}, r)$.

Dla każdego dostatecznie dużego $j \in \mathbb{N}$ funkcja

$$[-1/j, 1/j] \ni \theta \mapsto \phi_j(\theta) = f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{v} + \delta_j\mathbf{w}) \in \mathbb{R}$$

jest ciągła i na końcach odcinka $[-1/j, 1/j]$ ma wartości różnych znaków, zatem istnieje punkt $\theta_j \in (-1/j, 1/j)$ taki, że $\phi_j(\theta_j) = 0$, lub równoważnie

$$\mathbf{x}_j \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{a} + \theta_j\mathbf{v} + \delta_j\mathbf{w} \in A = \{f = 0\}.$$

Ponieważ $\delta_j \in (0, 1/j)$ i $|\theta_j| < 1/j$, więc $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{a}$ i $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{a}$ dla $j \rightarrow \infty$. Korzystając ze zwartości sfery jednostkowej $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| = 1\}$, możemy założyć (przechodząc w razie potrzeby do odpowiedniego podciągu), że

$$\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} = \alpha_j\mathbf{v} + \beta_j\mathbf{w} \longrightarrow \mathbf{u}_0 = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad j \rightarrow \infty$$

gdzie współczynniki $\alpha_j \rightarrow \alpha$, $\beta_j \rightarrow \beta$ dla $j \rightarrow \infty$. Zauważmy, że $\beta_j = \delta_j/\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\| > 0$. Dlatego $\beta = \lim \beta_j \geq 0$.

Z definicji, wektor $\mathbf{u}_0 \in T_{\mathbf{a}}A$. Gdyby $\alpha \neq 0$, to mielibyśmy

$$\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle = \alpha \|\mathbf{v}\|^2 + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \stackrel{(i)}{=} \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \neq 0.$$

Byłoby więc $\mathbf{u}_0 \in T_{\mathbf{a}}A$ i nie zachodziłby warunek (ii), co przeczyłoby udowodnionej już implikacji (i) \Rightarrow (ii).

Dlatego musi być $\alpha = 0$. Ponieważ $\mathbf{u}_0 \neq 0$, więc $\beta \neq 0$, czyli $\beta > 0$. Wykazaliśmy zatem, że

$$\mathbf{u}_0 = \beta \mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A, \quad \beta > 0.$$

Zgodnie z Uwagą 2.32, $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{a}}A$. \square

Zadanie 2.35. Wskazać przykład funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnej w $\mathbf{a} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\text{grad } f(0, 0) = (1, 0)$, dla której nie zachodzi implikacja (ii) \Rightarrow (i) w ostatnim twierdzeniu.

Wskazówka. Podzielić płaszczyznę na trzy obszary (dolną półpłaszczyznę $y < 0$ i dwie ćwiartki górnej półpłaszczyzny); na jednym z nich przyjmując $f(x, y) = x$, a na dwóch pozostałych $f(x, y) = x \pm y^2$, tak, aby zbiór $A = \{f = 0\}$ był półprostą domkniętą o końcu w punkcie \mathbf{a} .

Przykład 2.36 (styczna do okręgu). Niech $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$, gdzie $R > 0$. Zbiór $\{f = 0\}$ to okrąg γ_R o promieniu $R > 0$. Gradient funkcji f w punkcie $(x, y) \in \gamma_R$ to wektor $2(x, y)$, współliniowy z promieniem okręgu γ_R , prowadzącym do punktu (x, y) . Twierdzenie 2.34 implikuje więc, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, poprowadzonego w punkcie styczności.

Zadanie 2.37. Proszę wykazać, że jeśli P jest płaszczyzną styczną (w sensie Definicji 2.24) do wykresu funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$, to dla każdego punktu $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in P$ wektor

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}, x_{n+1}) - (\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

jest styczny (w sensie Definicji 2.31) do wykresu funkcji f . Można posłużyć się Twierdzeniem 2.34, tzn. przedstawić wykres funkcji n zmiennych jako poziomice pewnej funkcji $n + 1$ zmiennych.

2.4 Twierdzenie o wartości średniej

Definicja 2.38 (Funkcje klasy C^1). Niech Ω będzie zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n . Mówimy, że $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, jeśli $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma na Ω ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Uwaga 2.39. Jeśli $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, to wobec twierdzenia 2.16 f jest różniczkowalna w każdym punkcie Ω , a ponadto odwzorowanie

$$\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m \times n}$$

jest ciągłe (tu korzystamy ze Stwierdzenia 1.34). Ponieważ z istnienia różniczki wynika ciągłość funkcji, więc funkcje klasy C^1 są ciągłe.

Na odwrót, jeśli założymy, że $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i ma ciągłą różniczkę $Df: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, to oczywiście spełnione są warunki Definicji 2.38. To wynika ze Stwierdzenia 1.34.

Podamy teraz odpowiednik twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie 2.40 (o wartości średniej). Niech $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że dla pewnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ odcinek $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \Omega$ i f jest różniczkowalna we wszystkich punktach tego odcinka. Wówczas

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\theta \in [0,1]} \|Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\|. \quad (2.26)$$

Geometryczny sens tego twierdzenia jest następujący: jeśli różniczka $Df(\mathbf{p})$ zwiększa długość wektorów co najwyżej k -krotnie, to norma przyrostu funkcji wzdłuż odcinka $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, zawartego w dziedzinie, nie przekracza iloczynu liczby k i długości tego odcinka.

Dowód. Wprowadźmy dwie funkcje pomocnicze,

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - f(\mathbf{x}), \quad t \in [0, 1], \quad (2.27)$$

$$\Phi(t) = \langle g(1), g(t) \rangle, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.28)$$

Dla $t \in [0, 1]$ punkt $\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, zatem g jest funkcją różniczkowalną zmiennej t (jako złożenie funkcji różniczkowalnych). Podobnie, Φ jest funkcją różniczkowalną. Ponadto, $\Phi(1) = \|g(1)\|^2 = \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\|^2$ i $\Phi(0) = 0$. Wyraźmy przyrost funkcji Φ , stosując twierdzenia Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej, a następnie obliczmy pochodną $\Phi'(\theta)$, korzystając z twierdzeń o pochodnej iloczynu i różniczce złożenia. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\|^2 &= \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= \Phi'(\theta) \quad \text{dla pewnego } \theta \in (0, 1) \\ &= \langle g(1), g'(\theta) \rangle \\ &= \langle f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}), Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \\ &\leq \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \cdot \|Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \cdot \|Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

(Pierwsza nierówność to nierówność Schwarz'a; druga wynika z definicji normy przekształcenia liniowego). Jeśli $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| = 0$, to teza jest oczywista. W przeciwnym przypadku dzielimy otrzymaną nierówność przez $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| > 0$ i biorąc kres górny prawej strony względem $\theta \in [0, 1]$ otrzymujemy (2.26). \square

Podamy jeszcze drugi dowód tego ważnego twierdzenia. Wymaga on wprawdzie nieco mocniejszych założeń, jednak użyty w nim sposób postępowania jest bardzo naturalny i często wykorzystywany w wielu działach analizy.

DRUGI DOWÓD TWIERDZENIA O WARTOŚCI ŚREDNIEJ. Niech g nadal oznacza funkcję pomocniczą, określoną wzorem (2.27). Założymy dodatkowo, że $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wtedy $g'(t)$ jest funkcją ciągłą. Wyrazimy przyrost f , tzn. przyrost g na odcinku $[0, 1]$, całkując g' .

Uwaga. Wartościami g' są wektory z przestrzeni \mathbb{R}^m . Przyjmujemy naturalną umowę: całka oznaczona $\int_a^b h(t) dt$ z (ciągłej) funkcji wektorowej $h = (h_1, \dots, h_m): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest wektorem o współrzędnych $\int_a^b h_j(t) dt$. Zachodzi wtedy nierówność

$$\left\| \int_a^b h(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|h(t)\| dt, \quad (2.29)$$

którą Czytelnik może udowodnić samodzielnie.⁷

Mamy

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt.$$

Korzystając z nierówności 2.29 i obliczając g' (jak w pierwszym dowodzie), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| &= \left\| \int_0^1 g'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|g'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| dt \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \cdot \int_0^1 \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| dt \\ &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\|. \end{aligned}$$

(Pisząc ostatnią nierówność, oszacowaliśmy całkę przez iloczyn kresu górnego funkcji i długości odcinka). \square

2.5 Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora

Zajmiemy się teraz określeniem pochodnych cząstkowych rzędu wyższego niż pierwszy, różniczek wyższych rzędów, oraz uogólnieniem wzoru Taylora na funkcje wielu zmiennych. Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, wzór Taylora pozwala znajdować najlepsze przybliżenia wielomianowe funkcji, a także prowadzi do warunków dostatecznych, gwarantujących, że w punkcie krytycznym funkcja ma ekstremum lokalne.

Jak można się spodziewać, pochodne cząstkowe wyższych rzędów definiuje się indukcyjnie.

Definicja 2.41 (pochodne cząstkowe drugiego rzędu). Załóżmy, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma na Ω pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Jeśli funkcja $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ma w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$ pochodną cząstkową względem x_j , to przyjmujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right](\mathbf{a}).$$

Będziemy też używać innych oznaczeń:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = D_j D_i f(\mathbf{a}) = f_{x_i x_j}(\mathbf{a}).$$

⁷Wskazówka: Całkę można przybliżać sumami Riemanna, a dla sum Riemanna mamy tu do czynienia po prostu z nierównością trójkąta dla normy.

Uwaga. Posługując się oznaczeniami $f_{x_i x_j}$, przestrzegamy naturalnej mnemotechnicznej konwencji: *najpierw* różniczkujemy względem tej zmiennej, która jest zapisana *bliżej* f .

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów definiuje się analogicznie, np.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right](\mathbf{a});$$

stosując inne oznaczenia, napisalibyśmy $D_k D_j D_i f(\mathbf{a}) = D_k(D_j D_i f)(\mathbf{a})$ oraz

$$(f_{x_i x_j})_{x_k}(\mathbf{a}) = f_{x_i x_j x_k}(\mathbf{a}).$$

Stosowanie wszelkich oznaczeń tego typu dla pochodnych cząstkowych rzędu wyższego niż drugi jest w praktyce dość niewygodne. Dlatego później poznamy jeszcze inną, wygodną i bardzo skrótową konwencję notacyjną. Najpierw jednak omówimy najważniejsze własności pochodnych cząstkowych drugiego rzędu.

2.5.1 Przykład Peano i twierdzenie Schwarz'a o równości pochodnych mieszanych

Bardzo naturalne jest pytanie: czy, wprowadzając oznaczenia pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, trzeba rzeczywiście koniecznie odróżniać $f_{x_i x_j}$ od $f_{x_j x_i}$? Czytelnik, oswojony już nieco z przykładami patologicznego zachowania funkcji wielu zmiennych, może spodziewać się, że odpowiedź jest twierdząca.

Przykład 2.42 (G. Peano, 1884). Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

W punktach $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ funkcja f jest różniczkowalna. Ponadto,

$$|f(x, y)| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2);$$

korzystając z tej nierówności, sprawdza się łatwo (wprost z definicji różniczki), że $Df(0, 0) = (0, 0) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Obliczymy teraz pochodne mieszane $f_{xy}(0, 0)$ i $f_{yx}(0, 0)$.

Mamy

$$f_{xy}(0, 0) = (f_x)_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y)}{y},$$

gdyż $f_y(0, 0) = 0$ (pamiętajmy: różniczka f znika w zerze). Wartość $f_x(0, y)$ obliczamy, posługując się definicją f ; aby nie wykonywać długich rachunków, zauważmy, że $f(x) = x^2$ ma w zerze pochodną 0 i dlatego

$$f_x(0, y) = y \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)_{|x=0} = -y.$$

Zatem $f_{xy}(0, 0) = -1$. Zamieniając x, y rolami, otrzymujemy w ten sam sposób $f_y(x, 0) = x$ i $f_{yx}(0, 0) = 1$. Jest więc $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Podobny (bardziej skomplikowany) przykład podał H.A. Schwarz nieco wcześniej. Okazuje się jednak, że takie zachowanie jest wykluczone wówczas, gdy pochodne mieszane są ciągłe.

Twierdzenie 2.43 (Schwarza o równości pochodnych mieszanych). *Ustalmy $i, j \in 1, \dots, n$. Jeśli funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest klasy C^1 i ma na Ω ciągłą pochodną $f_{x_i x_j}$, to pochodna $f_{x_j x_i}$ istnieje we wszystkich punktach Ω i $f_{x_j x_i} = f_{x_i x_j}$.*

Dowód poprzedzimy kilkoma lematami.

Lemat 2.44. *Niech $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Jeśli funkcja $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ zmiennych $(x, y) \in Q$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną cząstkową $f_y: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, to*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór

$$\Phi'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (2.30)$$

Dowód. Z definicji całki oznaczonej,

$$f(x, y + h) - f(x, y) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x, y + sh) ds = h \int_0^1 f_y(x, y + sh) ds.$$

Dlatego iloraz różnicowy funkcji Φ jest równy

$$\begin{aligned} \Delta_h \Phi(y) &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{\Phi(y + h) - \Phi(y)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y)) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 f_y(x, y + sh) ds \right) dx. \end{aligned}$$

Oznaczmy literą I całkę po prawej stronie wzoru (2.30). Ponieważ $f_y(x, y) = \int_0^1 f_y(x, y) ds$, więc

$$\begin{aligned} \|\Delta_h \Phi(y) - I\| &= \left\| \int_a^b \left(\int_0^1 f_y(x, y + sh) ds \right) dx - \int_a^b \left(\int_0^1 f_y(x, y) ds \right) dx \right\| \\ &= \left\| \int_a^b \left(\int_0^1 (f_y(x, y + sh) - f_y(x, y)) ds \right) dx \right\| \\ &\leq \int_a^b \left(\int_0^1 \|f_y(x, y + sh) - f_y(x, y)\| ds \right) dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Funkcja f_y jest ciągła na zbiorze zwartym $Q = [a, b] \times [c, d]$, a więc jest jednostajnie ciągła na Q . Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby $\|f_y(\mathbf{p}_1) - f_y(\mathbf{p}_2)\| < \varepsilon/(b - a)$ dla $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| < \delta$. Wówczas, dla $|h| < \delta$, funkcja podcałkowa w (2.31) jest w każdym punkcie mniejsza od $\varepsilon/(b - a)$ i otrzymujemy

$$\|\Delta_h \Phi(y) - I\| < \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\varepsilon}{b - a} ds \right) dx = (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon.$$

Wprost z definicji granicy, $\Delta_h \Phi(y) \rightarrow I$ dla $h \rightarrow 0$, tzn. istotnie zachodzi wzór (2.30). \square

Uwaga 2.45. Oczywiście, wzór analogiczny do (2.30) zachodzi także wtedy, gdy zmienne zamienimy rolami.

Lemat 2.46. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$. Jeśli $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ma pochodną cząstkową f_{yx} ciągłą na Q , to wówczas f_{xy} istnieje w punktach prostokąta Q i $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ dla $(x, y) \in Q$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $m = 1$. Niech $(x, y), (x, y_0) \in Q$. Napiszmy

$$f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y f_y(x, z) dz = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y g(x, z) dz,$$

gdzie funkcja $g = f_y$ jest ciągła na Ω i ma pochodną $g_x = f_{yx}$ ciągłą na Q . Różniczkując powyższy wzór względem x i stosując poprzedni lemat do g , otrzymujemy

$$f_x(x, y) = f_x(x, y_0) + \int_{y_0}^y g_x(x, z) dz = f_x(x, y_0) + \int_{y_0}^y f_{yx}(x, z) dz.$$

Zatem

$$\frac{f_x(x, y) - f_x(x, y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y f_{yx}(x, z) dz.$$

Dla $y \rightarrow y_0$ lewa strona dąży do $f_{xy}(x, y_0)$, prawa zaś do wartości funkcji podcałkowej w punkcie y_0 , tzn. do $f_{yx}(x, y_0)$ (tu ponownie korzystamy z ciągłości f_{yx} i z twierdzenia o wartości średniej dla całki). Dowód jest zakończony w przypadku $m = 1$.

Gdy $m > 1$, to z pierwszej części dowodu wynika, że wszystkie współrzędne pochodnej f_{xy} są dobrze określone i równe odpowiednim współrzędnym f_{yx} . \square

Dowód Twierdzenia 2.43. Dla zbiorów $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ twierdzenie wynika natychmiast z ostatniego lematu. Jeśli $n > 2$, to zauważmy, że aby określić pochodne $f_{x_i x_j}$ oraz $f_{x_j x_i}$ w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, wystarczy znać wartości f jedynie na dwuwymiarowej płaszczyźnie afinicznej $\mathbf{a} + \text{span}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Stosując Lemat 2.46 na przecięciach zbioru Ω z takimi płaszczyznami, łatwo otrzymujemy tezę. \square

2.5.2 Druga różniczka

Zacznijmy od objaśnienia, jakim obiektem matematycznym miałyby być druga różniczka $D^2 f$ funkcji wielu zmiennych. Przypuśćmy, że $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna na Ω . Dla ustalonego $\mathbf{x} \in \Omega$ jej różniczka $Df(\mathbf{x})$ jest elementem przestrzeni $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, którą, ustalwszy bazy w \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m , można utożsamiać z $M_{m \times n}$ lub \mathbb{R}^{mn} . Inaczej mówiąc,

$$Df: \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{mn}.$$

Naturalnie byłoby określić drugą różniczkę $D^2 f$ jako $D^2 f = D(Df)$ (wszędzie tam, gdzie Df sama jest funkcją różniczkowalną). Zgodnie z definicją różniczki, powinno wtedy być

$$D^2 f = D(Df): \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^2 f(\mathbf{x}) \ni L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)).$$

tzn. $D^2 f(\mathbf{x}) = D(Df)(\mathbf{x})$ powinna być, dla ustalonego \mathbf{x} , przekształceniem liniowym z \mathbb{R}^n w przestrzeń, do której należą wartości różniczkowanej funkcji Df , tzn. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Brzmi to zawile i widać od razu, że definiowanie różniczek wyższych rzędów prowadziłyby do coraz dłuższych napisów (i coraz bardziej skomplikowanych przestrzeni liniowych). Dlatego korzysta się z naturalnego izomorfizmu

$$L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \equiv L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

między przestrzenią $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ i przestrzenią $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ przekształceń *dwuliniowych* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Jest to izomorfizm *kanoniczny*, tzn. zdefiniowany bez odwoływania się do układu współrzędnych, za pomocą wzoru

$$L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \ni F \longmapsto B_F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \quad (2.32)$$

gdzie

$$B_F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{u})\mathbf{v} \quad \text{dla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

Sprawdzenie, że to rzeczywiście izomorfizm, jest łatwym ćwiczeniem.

Definicja 2.47. Przypuśćmy, że różniczka $Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ funkcji $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest określona w każdym punkcie zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli funkcja

$$g = Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m \times n}$$

jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, to przekształcenie dwuliniowe

$$D^2f(\mathbf{a}) = D(Df)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{a}) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \equiv L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

nazywamy drugą różniczką funkcji f w punkcie \mathbf{a} .

Uwaga 2.48. Dla $m = 1$ różniczka $Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ ma jako współrzędne pochodne cząstkowe $f_{x_i}(\mathbf{x})$. Dlatego przekształcenie dwuliniowe $D^2f(\mathbf{x})$ ma, w standardowej bazie \mathbb{R}^n , macierz, której wyrazami są pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f ; ponadto,

$$D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T D^2f(\mathbf{x})\mathbf{w},$$

gdzie lewą stronę interpretujemy jako wartość przekształcenia dwuliniowego dla pary wektorów \mathbf{v}, \mathbf{w} , prawą zaś jako wynik mnożenia trzech macierzy, o rozmiarach (odpowiednio) $1 \times n, n \times n$ i $n \times 1$.

Z twierdzenia Schwarz'a o równości pochodnych mieszanych wynika natychmiast, że jeśli $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągle pochodne cząstkowe do rzędu 2 włącznie, to $Df: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ jest funkcją różniczkowalną i dla każdego $\mathbf{a} \in \Omega$ macierz przekształcenia dwuliniowego $D^2f(\mathbf{a})$ jest macierzą symetryczną, gdyż $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$. Okazuje się jednak, że tak jest również wtedy, gdy $D^2f(\mathbf{a})$ po prostu istnieje; nie trzeba zakładać ciągłości pochodnych mieszanych w pewnym otoczeniu punktu \mathbf{a} .

Twierdzenie 2.49 (Schwarz'a o symetrii drugiej różniczki). Załóżmy, że różniczka $Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ funkcji $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest określona w każdym punkcie zbioru otwartego Ω . Jeśli $D^2f(\mathbf{a}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ istnieje dla pewnego $\mathbf{a} \in \Omega$, to jest przekształceniem dwuliniowym symetrycznym, tzn.

$$D^2f(\mathbf{a})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = D^2f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Ustalmy $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Niech $\max(\|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{w}\|) = M$. Rozpatrzmy funkcję pomocniczą

$$\phi(s, t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{a} + s\mathbf{v}) + f(\mathbf{a}) - ts D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

określoną dla s, t w pewnym otoczeniu zera. Mamy $\phi(0, t) = 0$; z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$\begin{aligned} \|\phi(s, t)\| &= \|\phi(s, t) - \phi(0, t)\| \leq |s| \sup_{\sigma \in [0, s]} \|\phi_s(\sigma, t)\| \\ &= |s| \sup_{\sigma \in [0, s]} \left\| \left(Df(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) - Df(\mathbf{a} + \sigma\mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{v} - t D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \right\|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ponieważ $D^2 f(\mathbf{a})$ istnieje, więc $Df(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = Df(\mathbf{a}) + D^2 f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|r(\mathbf{h})$, gdzie $r(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ dla $\mathbf{h} \rightarrow 0$ (patrz Stwierdzenie 2.9). Podstawiając w tej równości wektory $\mathbf{h}_1 = t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}$ i $\mathbf{h}_2 = \sigma\mathbf{v}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) &= Df(\mathbf{a}) + D^2 f(\mathbf{a}) \cdot (t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) + \|\mathbf{h}_1\|r(\mathbf{h}_1), \\ Df(\mathbf{a} + \sigma\mathbf{v}) &= Df(\mathbf{a}) + D^2 f(\mathbf{a}) \cdot \sigma\mathbf{v} + \|\mathbf{h}_2\|r(\mathbf{h}_2). \end{aligned}$$

Odejmując oba wzory stronami i pamiętając o izomorfizmie przestrzeni $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ oraz $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \left(Df(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + \sigma\mathbf{v}) - Df(\mathbf{a} + \sigma\mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{v} - t D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ = \left(\|\mathbf{h}_1\|r(\mathbf{h}_1) - \|\mathbf{h}_2\|r(\mathbf{h}_2) \right) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Niech odtąd $s = t$. Wtedy $|\sigma| \leq |s| = |t|$, co daje oszacowania $\|h_i\| \leq 2M|t|$ dla $i = 1, 2$ oraz

$$\|r(\mathbf{h}_i)\| \leq \sup_{\|\mathbf{h}\| \leq 2Mt} \|r(\mathbf{h})\| = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.36)$$

Korzystając ze wzorów (2.35)–(2.36), przepisujemy dla $s = t$ nierówność (2.34) w postaci

$$\phi(t, t) \leq |t| \cdot \left(2Mt \cdot 2 \sup_{\|\mathbf{h}\| \leq 2Mt} \|r(\mathbf{h})\| \right) \cdot \|v\| = t^2 o(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Innymi słowy, $\phi(t, t)/t^2 \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow 0$, lub równoważnie

$$D^2 f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{w} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) + f(\mathbf{a})}{t^2}. \quad (2.37)$$

Prawa strona wzoru (2.37) nie zmienia się, gdy zamienimy wektory \mathbf{w}, \mathbf{v} rolami. Dlatego lewa strona też musi być symetryczną funkcją \mathbf{w} i \mathbf{v} , tzn. $D^2 f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = D^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. \square

Przykład 2.50. a) Jeśli $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, gdzie $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest ustalonym przekształceniem liniowym, to $Df(\mathbf{x}) = A$ jest przekształceniem stałym i dlatego $D^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

b) Jeśli

$$f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie A jest macierzą $n \times n$, to ze wzoru na pochodną ‘iloczynu’ otrzymujemy

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \langle A\mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle + \langle A\mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = \langle A^T \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle + \langle A\mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle = \langle (A + A^T)\mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle,$$

co oznacza, że $Df(\mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x}$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.⁸ Zatem, Df zależy od \mathbf{x} liniowo i mamy $D^2 f(\mathbf{x}) = A + A^T$. Jeśli $A = A^T$, tzn. macierz A jest symetryczna, to $D^2 f(\mathbf{x}) = 2A$.

⁸Pisząc wzór $Df(\mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x}$, utożsamiamy funkcjonal liniowy $Df(\mathbf{x})$ z wektorem $(A + A^T)\mathbf{x}$.

2.5.3 Różniczki wyższych rzędów

Różniczki wyższych rzędów definiuje się indukcyjnie, wzorem

$$D^k(f)(\mathbf{a}) = D(D^{k-1}f)(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \Omega, \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Aby definicja $D^k(f)(\mathbf{a})$ miała sens, różniczka rzędu $(k-1)$ powinna być funkcją określoną w otoczeniu punktu \mathbf{a} i różniczkowalną w \mathbf{a} . Różniczka k -tego rzędu, $D^k(f)(\mathbf{a})$ jest przekształceniem k -liniowym z $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ w \mathbb{R}^m , tzn.

$$D^k f(\mathbf{a}): \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}} \ni (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \mapsto D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^m.$$

Wartość $D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, która jest wektorem z \mathbb{R}^m , zależy liniowo od każdego z wektorów \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, k$) z osobna. Taka interpretacja różniczki k -tego rzędu jest rzeczą naturalną: jeśli

$$D^{k-1}f: \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^{k-1}f(\mathbf{x}) \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ razy}}, \mathbb{R}^m),$$

gdzie

$$L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)$$

oznacza przestrzeń przekształceń $(k-1)$ -liniowych z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ w \mathbb{R}^m , to zgodnie z definicją różniczki

$$D^k f: \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto D^k f(\mathbf{x}) = D(D^{k-1}f)(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \underbrace{L(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}_{k-1 \text{ razy}}).$$

Jednak przestrzenie

$$V_1 := L(\mathbb{R}^n, \underbrace{L(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}_{k-1 \text{ razy}}) \quad \text{oraz} \quad V_2 := L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)$$

można utożsamić; ich naturalnym izomorfizmem jest przekształcenie $V_1 \ni F \mapsto B_F \in V_2$, gdzie F i B_F powiązane są zależnością

$$F(\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = B_F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k).$$

Uwaga 2.51. Jeśli $D^k f(\mathbf{a})$ istnieje, to jest przekształceniem wieloliniowym symetrycznym, tzn.

$$D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = D^k f(\mathbf{a})(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

dla każdej permutacji $\sigma \in S_k$ zbioru k -elementowego. Można to udowodnić przez indukcję względem k , posługując się twierdzeniem Schwarz'a o symetrii drugiej różniczki.

Uwaga 2.52. Będziemy odtąd używać oznaczenia

$$Df(\mathbf{a})\mathbf{h}^k = Df(\mathbf{a})(\underbrace{\mathbf{h}, \dots, \mathbf{h}}_{k \text{ razy}}) \tag{2.38}$$

dla oznaczenia wartości k -tej różniczki (która jest przekształceniem k -liniowym) na układzie k identycznych wektorów.

Aby wszystkie rachunki w następnym podrozdziale Czytelnik mógł prześledzić ze zrozumieniem, wprowadzimy jeszcze jedną definicję.

Definicja 2.53 (norma przekształcenia wieloliniowego). Normą przekształcenia k -liniowego

$$B \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}}, \mathbb{R}^m)$$

nazywamy najmniejszą stałą $C = \|B\| \geq 0$ taką, że

$$\|B(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)\| \leq \|B\| \cdot \|\mathbf{v}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{v}_k\| \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n.$$

Zapisywanie różniczek wyższych rzędów we współrzędnych jest zajęciem niewdzięcznym i nie będziemy tego robić. Wygodną metodą oznaczania pochodnych cząstkowych wyższych rzędów podamy w następnym podrozdziale.

2.5.4 Wzór Taylora. Funkcje klasy C^k i notacja wielowskaźnikowa.

Okazuje się, że przy odpowiedniej notacji, wprowadzonej wyżej, wzór Taylora w najprostszej wersji, z resztą w postaci Peano, wygląda zupełnie tak samo, jak dla funkcji jednej zmiennej.

Twierdzenie 2.54 (wzór Taylora z resztą w postaci Peano). Załóżmy, że funkcja $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest $(k-1)$ -krotnie różniczkowalna na Ω , kula $B(\mathbf{a}, r) \subset \Omega$ dla pewnego $r > 0$ i $D^k f(\mathbf{a})$ istnieje. Wówczas, dla $\|\mathbf{h}\| < r$,

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2!}D^2f(\mathbf{a})\mathbf{h}^2 + \dots + \frac{1}{k!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^k + R(\mathbf{h}), \quad (2.39)$$

gdzie $R(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^k \rightarrow \mathbf{0}$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Dowód. Oszacujemy resztę

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \left(f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})\mathbf{h} + \frac{1}{2!}D^2f(\mathbf{a})\mathbf{h}^2 + \dots + \frac{1}{k!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^k \right),$$

stosując $k-1$ razy twierdzenie o wartości średniej. Zauważmy, że $R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, a ponadto

$$DR(\mathbf{h}) = Df(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - Df(\mathbf{a}) - \frac{1}{1!}D^2f(\mathbf{a})\mathbf{h} - \dots - \frac{1}{(k-1)!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^{k-1},$$

$$D^2R(\mathbf{h}) = D^2f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - D^2f(\mathbf{a}) - \dots - \frac{1}{(k-2)!}D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}^{k-2},$$

⋮

$$D^{k-1}R(\mathbf{h}) = D^{k-1}f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - D^{k-1}f(\mathbf{a}) - D^k f(\mathbf{a})\mathbf{h}.$$

Mamy więc $DR(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \dots, D^{k-1}R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Korzystając z Twierdzenia 2.40, otrzymujemy nierówności

$$\begin{aligned} \|R(\mathbf{h})\| &= \|R(\mathbf{h}) - R(\mathbf{0})\| \leq \|\mathbf{h}\| \cdot \sup_{\theta \in [0,1]} \|DR(\theta\mathbf{h})\| \\ &\leq \|\mathbf{h}\|^2 \sup_{\theta \in [0,1]} \|D^2R(\theta\mathbf{h})\| \\ &\vdots \\ &\leq \|\mathbf{h}\|^{k-1} \sup_{\theta \in [0,1]} \|D^{k-1}R(\theta\mathbf{h})\|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Normę $\|D^{k-1}R(\theta\mathbf{h})\|$ trzeba oszacować inaczej, gdyż $D^k f$ istnieje *tylko* w punkcie \mathbf{a} . Można jednak skorzystać po prostu z definicji różniczki; wobec wzoru na $D^{k-1}R$ mamy

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [0,1]} \|D^{k-1}R(\theta\mathbf{h})\| &= \sup_{\theta \in [0,1]} \left(|\theta| \cdot \|\mathbf{h}\| \frac{\|D^{k-1}f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - D^{k-1}f(\mathbf{a}) - D^k f(\mathbf{a})\theta\mathbf{h}\|}{\|\theta\mathbf{h}\|} \right) \\ &\leq \|\mathbf{h}\| \sup_{\theta \in [0,1]} \frac{\|D^{k-1}f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - D^{k-1}f(\mathbf{a}) - D^k f(\mathbf{a})\theta\mathbf{h}\|}{\|\theta\mathbf{h}\|} = \|\mathbf{h}\| \cdot o(1) \quad \text{dla } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Łącząc tę nierówność z (2.40), otrzymujemy $\|R(\mathbf{h})\| = \|\mathbf{h}\|^k o(1)$ dla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. \square

W praktyce wygodnie jest znać także inne postacie wzoru Taylora. Jedną z nich, używającą tzw. notacji wielowskaźnikowej, podajemy niżej.

Notacja wielowskaźnikowa. Funkcje klasy C^k .

Definicja 2.55. Wielowskaźnik $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ to wektor o współrzędnych α_i całkowitych nieujemnych, lub równoważnie element zbioru $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Dla wielowskaźników α, β i każdego punktu $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ piszemy:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad (2.42)$$

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{dla wszystkich } i = 1, \dots, n, \quad (2.43)$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!} (\alpha - \beta)! \quad \text{dla } \beta \leq \alpha, \quad (2.44)$$

gdzie $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

Za pomocą wielowskaźników wygodnie jest oznaczać pochodne cząstkowe wyższych rzędów w takich sytuacjach, gdy kolejność wykonywania poszczególnych różniczkowań nie ma znaczenia.

Definicja 2.56. Niech Ω będzie zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n . Mówimy, że $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu k ciągle na zbiorze Ω .

Uwaga 2.57. Podobnie jak w przypadku funkcji klasy C^1 , powyższa definicja jest równoważna temu, że f jest ciągła na Ω i wszystkie przekształcenia j -liniowe

$$D^j f: \Omega \ni \mathbf{x} \longmapsto D^j f(\mathbf{x}) \in L(\underbrace{\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n}_j \text{ razy}, \mathbb{R}^m) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

są dobrze określone i ciągłe na zbiorze Ω . Można to udowodnić, posługując się Twierdzeniem 2.16. Jest to dość łatwe: rozumowanie wymaga tylko znajomości pojęć i nie są potrzebne żadne rachunki.

Umowa. Dla funkcji $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ symbol

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} (D_1)^{\alpha_1} (D_2)^{\alpha_2} \dots (D_n)^{\alpha_n} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.45)$$

oznacza pochodną cząstkową tej funkcji, rzędu $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, przy czym różniczkowanie względem zmiennej x_i wykonujemy α_i -krotnie ($i = 1, 2, \dots, n$). Z twierdzenia Schwarz'a o równości pochodnych mieszanych wynika, że dla funkcji klasy C^k kolejność wykonywania różniczkowań nie odgrywa roli; można więc w ten sposób oznaczać wszystkie pochodne cząstkowe takiej funkcji, bez obawy, że nie wiadomo, o jaką pochodną chodzi. Przyjmujemy także

$$D^{(0,0,\dots,0)} f \equiv f.$$

Twierdzenie 2.58 (wzór Taylora z resztą całkową). *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Jeśli kula $B(\mathbf{a}, \delta) \subset \Omega$ dla pewnego $\delta > 0$, to wówczas*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{a}) \mathbf{h}^\alpha + R_k(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \quad (2.46)$$

dla $\|\mathbf{h}\| < \delta$, gdzie reszta

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = k \int_0^1 (1-t)^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \left(D^\alpha f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - D^\alpha f(\mathbf{a}) \right) \mathbf{h}^\alpha dt. \quad (2.47)$$

Uwaga. We wzorze (2.46) sumowanie po prawej stronie odbywa się względem *wszystkich* wielowskazyńników długości $|\alpha| \leq k$.

Dowód. Skorzystamy ze wzoru Taylora z resztą całkową dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Ustalmy $\mathbf{a} \in \Omega$ i $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $\|\mathbf{h}\| < \delta$. Niech $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ dla $t \in [0, 1]$. Funkcja g jest klasy C^k na pewnym odcinku otwartym $I \supset [0, 1]$. Dlatego

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} g^{(k)}(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} (g^{(k)}(t) - g^{(k)}(0)) dt. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aby zakończyć pracę, wyrazimy pochodne funkcji g przez pochodne cząstkowe funkcji f . Posługując się wzorem na pochodną złożenia, dowodzimy przez indukcję, że

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_i, \quad g''(t) = \sum_{i_1, i_2=1}^n D_{i_2} D_{i_1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2}$$

itd.; ogólnie,

$$g^{(s)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s=1}^n D_{i_s} \dots D_{i_2} D_{i_1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_s}, \quad s = 1, \dots, k. \quad (2.49)$$

Ostatnią sumę zapiszemy, używając notacji wielowskaźnikowej. Ustalmy wielowskaźnik $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ taki, że $|\alpha| = s \in [1, k]$. Liczba takich ciągów (i_1, i_2, \dots, i_s) o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w których 1, 2, ..., n występują (odpowiednio) α_1 -krotnie, α_2 -krotnie, ..., α_n krotnie, wynosi, zgodnie ze znanym wzorem kombinatorycznym,

$$\binom{s}{\alpha_1} \cdot \binom{s - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \binom{s - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{s!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!} = \frac{s!}{\alpha!}.$$

Dla każdego z tych ciągów mamy

$$D_{i_s} \dots D_{i_2} D_{i_1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} h_{i_2} \cdot \dots \cdot h_{i_s} = D^\alpha f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^\alpha,$$

a więc wzór (2.49) można przepisać w postaci

$$\frac{g^{(s)}(t)}{s!} = \sum_{|\alpha|=s} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^\alpha, \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (2.50)$$

Podstawiając (2.50) do wzoru (2.48), otrzymujemy tezę twierdzenia. \square

W szczególnym przypadku $k = 2$, dla funkcji $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalnej dwukrotnie w sposób ciągły, można podobnie (stosując wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla funkcji $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ jednej zmiennej t) uzyskać następujący fakt.

Wniosek 2.59. *Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ i odcinek $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subset \Omega$, gdzie $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, to istnieje wówczas punkt $\theta \in (0, 1)$ taki, że*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n f_{x_j}(\mathbf{a}) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) h_i h_j. \quad (2.51)$$

Dowód. Ćwiczenie dla Czytelnika.

Zadanie 2.60. Wykazać, że dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ jest

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha.$$

Wskazówka. Oznaczyć lewą stronę $f(\mathbf{x})$ i zastosować wzór Taylora.

2.5.5 Ekstrema lokalne.

Wiemy już, że warunkiem koniecznym, by funkcja różniczkowalna $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ miała ekstremum w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$, jest znikanie jej gradientu w tym punkcie. Zajmiemy się teraz sformułowaniem warunków dostatecznych istnienia ekstremum lokalnego funkcji klasy C^2 . Wyrazimy je za pomocą własności drugiej różniczki.

Definicja 2.61. Niech $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Macierz

$$H_f(\mathbf{a}) = D^2 f(\mathbf{a}) = (f_{x_i x_j}(\mathbf{a}))_{i,j=1,2,\dots,n} \in M_{n \times n}$$

nazywamy *hesjanem* funkcji f w punkcie $\mathbf{a} \in \Omega$.

Z twierdzenia Schwarz'a o równości pochodnych mieszanych wynika natychmiast, że $H_f(\mathbf{a})$ jest macierzą symetryczną. Jak wiadomo z wykładów Algebry Liniowej, wszystkie wartości własne macierzy symetrycznej A są rzeczywiste, a w \mathbb{R}^n istnieje baza ortonormalna, złożona z wektorów własnych A .

Przypomnijmy, że macierz symetryczna $A \in M_{n \times n}$ nazywa się dodatnia (ujemna) wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ (odpowiednio $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$). Macierze nieujemne i niedodatnie definiuje się analogicznie, za pomocą nierówności nieostrych. Jeśli A jest dodatnia (ujemna, nieujemna, niedodatnia), to piszemy $A > 0$ (odpowiednio: $A < 0$, $A \geq 0$, $A \leq 0$).

Stwierdzenie 2.62. *Załóżmy, że $\mathbf{a} \in \Omega$ jest punktem krytycznym funkcji $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Jeśli f ma w \mathbf{a} minimum (odpowiednio: maksimum) lokalne, to $H_f(\mathbf{a}) \geq 0$ (odpowiednio: $H_f(\mathbf{a}) \leq 0$).*

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że f ma w \mathbf{a} minimum lokalne. W punkcie krytycznym $f_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Dlatego ze wzoru Taylora (2.51) (patrz Wniosek 2.59) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{x_i x_j}(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) h_i h_j = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq 0$$

dla wszystkich $\|\mathbf{h}\|$ dostatecznie małych. Ustalmy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ i podstawmy w tej nierówności $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i $|t| \ll 1$. Dzieląc obie strony przez $\frac{1}{2}t^2 > 0$, otrzymujemy

$$\langle H_f(\mathbf{a} + \theta t \mathbf{v}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0.$$

Przechodząc do granicy $t \rightarrow 0$ i korzystając z ciągłości drugich pochodnych cząstkowych f otrzymujemy $\langle H_f(\mathbf{a}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

Jeśli f ma w \mathbf{a} maksimum lokalne, to rozpatrujemy funkcję $-f$, która ma w tym punkcie minimum lokalne. \square

Przydatna w praktyce jest oczywiście implikacja odwrotna.

Twierdzenie 2.63 (warunki dostateczne ekstremów lokalnych). *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Przypuśćmy, że $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ma w $\mathbf{a} \in \Omega$ punkt krytyczny, tzn. $\text{grad } f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Wówczas:*

- (i) *Jeśli $H_f(\mathbf{x}) \geq 0$ w pewnym otoczeniu punktu \mathbf{a} , to f ma w \mathbf{a} minimum lokalne.*
- (ii) *Jeśli $H_f(\mathbf{a}) > 0$, to f ma w \mathbf{a} minimum lokalne właściwe.*
- (iii) *Jeśli $H_f(\mathbf{x}) \leq 0$ w pewnym otoczeniu punktu \mathbf{a} , to f ma w \mathbf{a} maksimum lokalne.*
- (iv) *Jeśli $H_f(\mathbf{a}) < 0$, to f ma w \mathbf{a} maksimum lokalne właściwe.*

Dowód. Ponieważ $f_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, więc ze wzoru Taylora (2.51) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}),$$

gdzie $\theta = \theta(\mathbf{h}) \in (0, 1)$. Z tej równości natychmiast wynikają podpunkty (i) oraz (iii) Twierdzenia 2.63.

Założmy teraz, że $A := H_f(\mathbf{a}) > 0$. Funkcja $\mathbb{S}^{n-1} \ni \mathbf{v} \mapsto \phi(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ jest wtedy dodatnia i ciągła na sferze jednostkowej \mathbb{S}^{n-1} , która jest zbiorem zwartym. Wobec twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów, istnieją stałe $\alpha, \beta > 0$ takie, że

$$\beta \geq \phi(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \alpha > 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Podstawiając w tej nierówności $\mathbf{v} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$, gdzie $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ jest dowolnym wektorem różnym od $\mathbf{0}$, otrzymujemy

$$\beta\|\mathbf{w}\|^2 \geq \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \geq \alpha\|\mathbf{w}\|^2 > 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Dlatego, z nierówności Schwarz'a i definicji normy macierzy,

$$\begin{aligned} \langle H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle &= \langle A\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle + \langle (H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - A)\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle \\ &\geq \alpha\|\mathbf{h}\|^2 - \|(H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - A)\mathbf{h}\| \cdot \|\mathbf{h}\| \\ &\geq \alpha\|\mathbf{h}\|^2 - \|(H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - A)\| \cdot \|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ponieważ $f \in C^2$, więc wszystkie współrzędne macierzy $H_f(\mathbf{x})$ zależą od \mathbf{x} w sposób ciągle. Istnieje zatem liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$ i $\theta \in (0, 1)$, to

$$\|(H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - H_f(\mathbf{a}))\| = \|(H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) - A)\| < \frac{\alpha}{2}.$$

Wtedy jednak, wobec (2.52),

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\langle H_f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle > \frac{\alpha}{4}\|\mathbf{h}\|^2 > 0.$$

To dowodzi punktu (ii). Dowód (iv) jest taki sam. \square

Uwaga 2.64. W dowodach podpunktów (ii) oraz (iv) w Twierdzeniu 2.63 nie trzeba zakładać, że $f \in C^2$. Wystarczy po prostu, żeby f była różniczkowalna na zbiorze Ω i jej druga różniczka $D^2f(\mathbf{a})$ istniała w punkcie krytycznym \mathbf{a} i była w nim dodatnia (wtedy f ma w \mathbf{a} minimum lokalne właściwe) bądź ujemna (wtedy f ma w \mathbf{a} maksimum lokalne właściwe). W dowodzie wykorzystuje się wzór Taylora z resztą Peano. Zainteresowany Czytelnik zdoła sam uzupełnić szczegóły rozumowania.

Zanim przejdziemy do przykładów, przytoczymy jeszcze twierdzenie, które pozwala wnioskować, kiedy f z pewnością *nie ma* ekstremum lokalnego w punkcie krytycznym.

Twierdzenie 2.65. *Założmy, że $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ma w $\mathbf{a} \in \Omega$ punkt krytyczny i $D^2f(\mathbf{a})$ istnieje. Jeśli $H_f(\mathbf{a}) = D^2f(\mathbf{a})$ ma wartość własną $\lambda_1 > 0$ i wartość własną $\lambda_2 < 0$, to f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie \mathbf{a} .*

Dowód. Niech \mathbf{v}_i będzie unormowanym wektorem własnym macierzy $H_f(\mathbf{a})$, odpowiadającym wartości własnej λ_i , gdzie $i = 1, 2$. Dla dostatecznie małej liczby $\delta > 0$ rozpatrzmy dwie funkcje pomocnicze,

$$g_i(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}_i), \quad |t| < \delta, \quad i = 1, 2.$$

Mamy $g'_i(t) = Df(\mathbf{a} + t\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i$, tzn. $g'_i(0) = 0$, oraz

$$g''(t) = \langle D^2f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Zatem $g_1''(0) = \langle D^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \lambda_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 = \lambda_1 > 0$. Podobnie, $g_2''(0) = \lambda_2 < 0$. Dlatego g_1 ma minimum lokalne właściwe w zerze, a g_2 ma maksimum lokalne właściwe w zerze. Wynika stąd, że f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie \mathbf{a} (gdyby miała, to każda z funkcji $g_{\mathbf{v}} = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ miałyby w zerze ekstremum lokalne *tego samego typu*, co f). \square

To, czy macierz $H_f(\mathbf{a}) = D^2 f(\mathbf{a})$ jest dodatnia (ujemna), można rozpoznawać za pomocą kryterium Sylwestera.

Twierdzenie 2.66 (kryterium Sylwestera). Niech $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ i $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $i, j = 1, 2, \dots, n$. Oznaczmy

$$d_\ell = \det \left(a_{ij} \right)_{i,j=1,\dots,\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

(i) Jeśli $d_\ell > 0$ dla każdego $\ell = 1, 2, \dots, n$, to $A > 0$.

(ii) Jeśli $(-1)^\ell d_\ell > 0$ dla każdego $\ell = 1, 2, \dots, n$, to $A < 0$.

(iii) Jeśli $d_\ell \neq 0$ dla każdego $\ell = 1, \dots, n$, ale nie zachodzi ani założenie (i), ani założenie (ii), to macierz A ma wartości własne różnych znaków.

Dowód Czytelnik miał okazję poznać na wykładach z Algebry Liniowej. Zainteresowanym polecam książkę A. Mostowskiego i M. Starka *Elementy algebry wyższej*.

Uwaga 2.67. Jeśli $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^2 , ma punkt krytyczny $\mathbf{a} \in \Omega$ i wszystkie wartości własne macierzy $D^2 f(\mathbf{a})$ są różne od zera, to mówimy, że \mathbf{a} jest *niezdegenerowanym punktem krytycznym*. Z Twierdzeń 2.65 i 2.63 wynika, że o tym, czy funkcja f ma w niezdegenerowanym punkcie krytycznym ekstremum lokalne, można jednoznacznie przesądzić, badając znaki wartości własnych macierzy $D^2 f(\mathbf{a})$.

Uwaga 2.68. Podkreślmy wyraźnie: założenie ostrych nierówności w punktach (ii) i (iv) Twierdzenia 2.63 jest istotne. Każda z funkcji

$$f_1(x, y) = x^4 + y^4, \quad f_2(x, y) = -x^4 - y^4, \quad f_3(x, y) = x^4 - y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ma (jedyny) punkt krytyczny w $(0, 0)$. Jest oczywiste, że dla funkcji f_1 ten punkt jest minimum lokalnym właściwym, dla f_2 – maksimum lokalnym właściwym, natomiast f_3 w ogóle nie ma tym punkcie ekstremum lokalnego. Mamy jednak

$$D^2 f_i(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Biorąc

$$f_4(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_5(x, y) = x^2, \quad f_6(x, y) = x^2 - y^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

otrzymamy

$$\text{grad } f_i(0, 0) = (0, 0) \quad \text{oraz} \quad D^2 f_i(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 4, 5, 6.$$

Łatwo zauważyć, że w punkcie $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ funkcja f_4 ma minimum lokalne właściwe, f_5 – minimum lokalne (które nie jest właściwe), natomiast f_6 w ogóle nie ma ekstremum.

Przykład 2.69. Niech $h(x, y) = ay(e^x - 1) + x \sin x + 1 - \cos y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Wykażemy, że h ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Pochodne cząstkowe funkcji h są równe

$$h_x(x, y) = ay e^x + \sin x + x \cos x, \quad h_y(x, y) = a(e^x - 1) + \sin y,$$

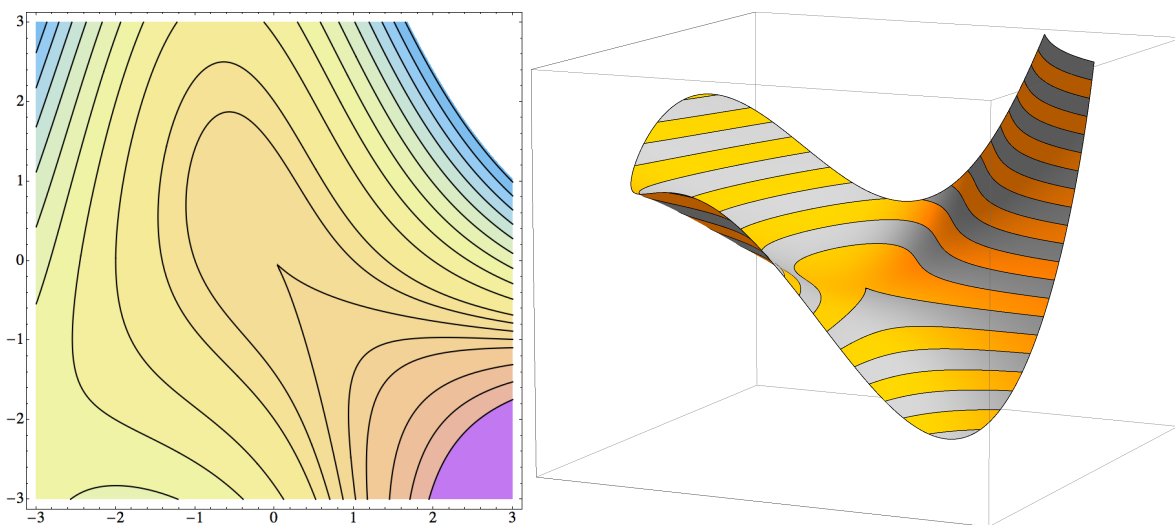
więc (niezależnie od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$) jest $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$ i h ma w zerze punkt krytyczny. Dalej, obliczamy

$$\begin{aligned} h_{xx}(x, y) &= ay e^x + 2 \cos x - x \sin x, \\ h_{xy}(x, y) &= a e^x, \quad h_{yy} = \cos y. \end{aligned}$$

Podstawiając $x = y = 0$ otrzymujemy

$$D^2 h(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D^2 h(0, 0) = 2 - a^2.$$

Jeśli $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, to $\det D^2 h(0, 0) = 2 - a^2 > 0$ i z kryterium Sylwestera wynika, że macierz $D^2 h(0, 0)$ jest dodatnio określona, a więc h ma minimum lokalne właściwe w punkcie $(0, 0)$ (patrz Twierdzenie 2.63 (ii)).



Ilustracja do Przykładu 2.69. Parametr $a = \sqrt{2}$. Mamy wówczas $h(x, y) = P(x, y) + o(x^3) + o(y^3)$ dla $x, y \rightarrow 0$, gdzie

$$P(x, y) = \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{yx^2}{\sqrt{2}}$$

jest wielomianem Taylora rzędu 3 funkcji h wokół zera. Po lewej: poziomice funkcji P , narysowane na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (w dziedzinie funkcji). Zbiór punktów w \mathbb{R}^2 , opisany równaniem $P(x, y) = 0$, to krzywa z wyraźnym dziobkiem. Po prawej: fragment wykresu funkcji P , tzn. powierzchnia w \mathbb{R}^3 o równaniu $z = P(x, y)$.

Jeśli $a \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, to $\det D^2 h(0, 0) = 2 - a^2 < 0$. Macierz $D^2 h(0, 0)$ ma więc wartości własne różnych znaków i wobec Twierdzenia 2.65 h nie ma w zerze ekstremum lokalnego.

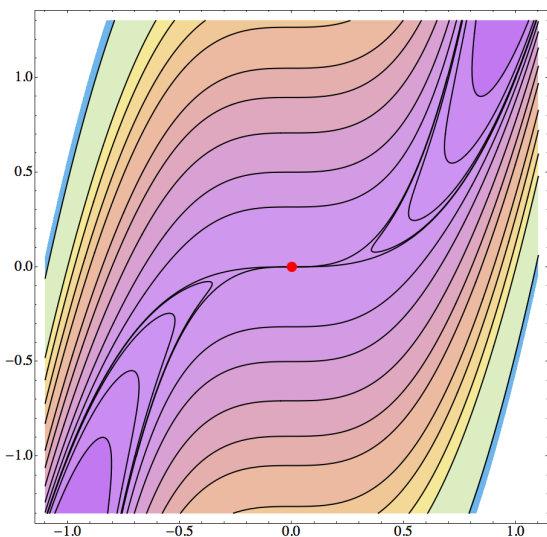
Przypadek $a = \pm\sqrt{2}$ trzeba rozpatrzyć osobno. Macierz $D^2 h(0, 0)$ ma wtedy wartości własne 3 i 0, więc nie jest dodatnia i nie wolno stosować Twierdzenia 2.63 (ii); jak wynika z wcześniej przytoczonych przykładów, w takiej sytuacji funkcja może zarówno mieć ekstremum lokalne, jak i go nie mieć.

Dla ustalenia uwagi, niech $a = \sqrt{2}$. Użyjemy wzoru Taylora (najprościej jest w tym przypadku wykorzystać znane rozwinięcia funkcji elementarnych) i napiszemy

$$\begin{aligned} h(x, y) &= y\sqrt{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!} + o(y^4) \\ &= x^2 + xy\sqrt{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{yx^2}{\sqrt{2}} + o(x^3) + o(y^3) \\ &= \left(x + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{yx^2}{\sqrt{2}} + o(x^3) + o(y^3). \end{aligned}$$

Na prostej $y = -x\sqrt{2}$ mamy więc $h(x, -x\sqrt{2}) = -x^3 + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Zatem, h nie ma ekstremum w zerze: wyrazy trzeciego rzędu we wzorze Taylora powodują, że $h(x, -x\sqrt{2})$ zmienia znak w każdym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}$, a przecież $h(0, 0) = 0$. Przypadek $a = -\sqrt{2}$ sprawdza się tak samo; Czytelnik łatwo uzupełni szczegóły obliczeń.

Czytelnik może sprawdzić, że kierunek prostej $y = -x\sqrt{2}$ jest wyznaczony przez wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$ taki, że $D^2h(0, 0)(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. W innych kierunkach hesjan ma dodatnie wartości. Sprawdzaliśmy więc w istocie, jak zachowuje się funkcja h wokół zera “w podejrzanym kierunku” – i to wystarczyło, by stwierdzić brak ekstremum lokalnego. \square



Ilustracja do Przykładu 2.70. Krzywe $g(x, y) = \text{const}$ na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 . W punkcie krytycznym $(0, 0)$ spotykają się dwa szerokie grzbiety i dwie wąskie, wygięte doliny.

Zatem funkcja g ma w zerze (jedyne) punkt krytyczny;

$$D^2g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Na każdej prostej $y = kx$ jest $g(kx, x) = k^2x^2 + o(x^3)$ dla $x \rightarrow 0$, a więc obcięcie funkcji g do takiej prostej ma w zerze *minimum* lokalne (właściwe). Na prostej $x = 0$ jest

W Przykładzie 2.69 wystarczyło użyć twierdzeń 2.63 i 2.65 (dających automatyczne kryteria badania funkcji wokół punktu krytycznego), a w wątpliwym przypadku zbadać zachowanie funkcji na prostych, przechodzących przez punkt krytyczny. Podkreślimy jednak, że z zachowania funkcji na poszczególnych takich prostych *nie wolno* wnioskować, że ma ona ekstremum lokalne!

Przykład 2.70. Niech

$$g(x, y) = (y - x^3)(y - 3x^3)$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy

$$g_x(x, y) = 18x^5 - 12x^2y,$$

$$g_y(x, y) = -4x^3 + 2y,$$

$$g_{xx}(x, y) = 90x^4 - 24xy,$$

$$g_{xy}(x, y) = -12x^2,$$

$$g_{yy}(x, y) = 2.$$

$g(x, y) = g(0, y) = y^2$ (tzn. znów mamy funkcję jednej zmiennej, która ma minimum w zerze). Jednak na krzywej $y = 2x^3$ jest $g(x, y) = g(x, 2x^3) = -x^6$, a więc w dowolnie małym otoczeniu zera funkcja g przyjmuje nie tylko wartości dodatnie, ale także ujemne.

2.6 Funkcje gładkie

Definicja 2.71. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, to przyjmujemy

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Funkcje $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ nazywamy funkcjami klasy C^∞ lub *funkcjami gładkimi*. Są to funkcje, które mają ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów (a zatem, mają ciągłe różniczki wszystkich rzędów).

Dla krótkości, pisze się $C^\infty(\Omega)$ zamiast $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Definicja 2.72. Nośnikiem $\text{supp } f$ funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy domknięcie zbioru tych punktów, w których f ma wartości różne od zera:

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Twierdzenie 2.73. Istnieją funkcje klasy $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, których nośnik jest niepustym zbiorem zwartym. Ścisłej mówiąc, dla każdego punktu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ i każdych liczb $0 < r < R$ istnieje funkcja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ taka, że $f \equiv 1$ na kuli $B(\mathbf{a}, r)$ i $f \equiv 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{a}, R)$.

Szkic dowodu. Krok 1. Niech $n = 1$. Nietrudno wykazać, że istnieje funkcja $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest klasy C^∞ i znika poza przedziałem $[-1, 1]$, ale $\varphi_1(0) = 1$. Taką funkcją jest np.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \exp(-\text{tg}^2(\pi x/2)), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Sprawdzenie, że φ_1 istotnie spełnia podane warunki, pozostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika.

Krok 2. Funkcja

$$\varphi_2(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_1(t) dt$$

jest dobrze określona (całkujemy tylko po przedziale skończonym), nieujemna i gładka. Mamy $\varphi_2 \equiv 0$ na $(-\infty, -1]$ i $\varphi_2(x) \equiv c := \int_{-1}^1 \varphi_1$ dla $x \geq 1$. Na przedziale $[-1, 1]$ funkcja φ_2 jest rosnąca.

Teraz wykorzystamy przesuwanie, skalowanie i mnożenie funkcji gładkich.

Krok 3. Ustalmy $R > r > 0$. Dobierzmy $a > 0$ tak, żeby $\frac{a+2}{a} = \frac{R}{r}$. Funkcja

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{c^2} \varphi_2(1+a+x) \varphi_2(1+a-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

jest gładka, znika poza przedziałem $[-a-2, a+2]$ i jest równa 1 na przedziale $[-a, a]$ (patrz załączony rysunek). Funkcja

$$\varphi_4(x) = \varphi_3\left(\frac{(a+2)x}{R}\right)$$

też jest gładka. Wobec doboru a , $\varphi_4 \equiv 1$ na $[-r, r]$ i $\varphi_4 \equiv 0$ poza przedziałem $[-R, R]$.

Krok 4. Funkcja $f_1(\mathbf{x}) = \varphi_4(\|\mathbf{x}\|)$ spełnia warunki twierdzenia dla $\mathbf{a} = 0$. (Zauważmy, że dla $\|\mathbf{x}\| < r$ funkcja f ma stałą wartość 1, więc jej pochodne cząstkowe znikają w punktach kuli otwartej $B(0, r)$. Norma $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ jest funkcją gładką na zbiorze $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| > r/2\}$, i dlatego f jest gładka na całej przestrzeni \mathbb{R}^n .) Przesuwając f_1 , tzn. biorąc $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, kończymy dowód w ogólnym przypadku. \square

Uwaga 2.74. Zbiór wszystkich funkcji gładkich o zwartym nośniku w \mathbb{R}^n oznacza się symbolem $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Samodzielne rozwiązanie poniższych zadań pozwoli Czytelnikowi lepiej oswoić się z pojęciem funkcji gładkiej.

Zadanie 2.75. Niech $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że zbiór K jest zwarty, a zbiór Ω jest otwarty. Wykazać, że istnieje funkcja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taka, że $f \equiv 1$ na K i $\text{supp } f \subset \Omega$.

Zadanie 2.76. Niech F będzie dowolnym zbiorem domkniętym w \mathbb{R}^n . Istnieje wówczas funkcja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ taka, że $f \geq 0$ i $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$.

Rozdział 3

Odwzorowania klasy C^1 i rozmaitości zanurzone

3.1 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

W tym podrozdziale (X, ϱ) oznacza przestrzeń metryczną.

Definicja 3.1 (warunek Cauchy’ego). Mówimy, że ciąg $(x_n) \subset X$ spełnia warunek Cauchy’ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n, m > n_0$ jest $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Łatwo wykazać, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy’ego jest ograniczony.

Definicja 3.2 (zupełność). Przestrzeń metryczna (X, ϱ) nazywa się *zupełna* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg $(x_n) \subset X$ spełniający warunek Cauchy’ego jest zbieżny w X .

Przykład 3.3. 1. Przestrzeń \mathbb{R} z metryką $\varrho(x, y) = |x - y|$ jest zupełna. Podobnie, \mathbb{R}^n z metryką zadaną przez (jakąkolwiek) normę jest przestrzenią zupełną.

2. $Y = [0, 1]$ z metryką $\varrho(x, y) = |x - y|$ jest przestrzenią zupełną. Ogólnie, każdy domknięty podzbiór Y przestrzeni metrycznej zupełnej (X, ϱ) , z odziedziczoną metryką ϱ , jest przestrzenią metryczną zupełną. Natomiast podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej, który nie jest domknięty, nie jest zupełny (są w Y ciągi zbieżne, których granice nie należą do Y).

3. Przestrzeń funkcji ciągłych $C([0, 1], \mathbb{R})$ z metryką

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

jest zupełna. Zbieżność w metryce ϱ to zbieżność jednostajna; jeśli ciąg funkcji ciągłych spełnia jednostajny warunek Cauchy’ego, to jest jednostajnie zbieżny, a jego granica też jest funkcją ciągłą.¹

4. Przestrzeń $C_b^1(\mathbb{R})$ tych funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , które są ograniczone i mają ograniczoną pochodną, wyposażona w metrykę

$$\varrho_1(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x) - g'(x)|,$$

¹Patrz skrypty z Analizy Matematycznej I, rozdział 7.

jest zupełna. Zbieżność ciągu funkcji (f_m) w metryce ϱ_1 to zbieżność jednostajna wraz z pochodnymi. Dowód zupełności $C_b^1(\mathbb{R})$ (wskazówka: skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

5. Niech $r > 0$ i $B = B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^n$. Przestrzeń $C(\overline{B}, \mathbb{R}^m)$ wszystkich funkcji ciągłych $f: \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^m$ z metryką

$$\varrho(f, g) = \sup_{\mathbf{x} \in \overline{B}} \|f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\|$$

jest zupełna. Formalny dowód tego faktu wymaga określenia zbieżności jednostajnej funkcji wielu zmiennych i powtórzenia dowodów twierdzeń, które poznaliśmy na I roku studiów. Jednak rozumowania są identyczne: zupełność prostej zastępuje się zupełnością \mathbb{R}^n , a nierówność trójkąta dla modułu – nierówność trójkąta dla normy. Dlatego ten przykład nie różni się szczególnie od podanego w punkcie 3.

Definicja 3.4. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną i niech $T: X \rightarrow X$. Mówimy, że odwzorowanie T jest *związające* (albo inaczej: jest *kontrakcją*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $\lambda \in (0, 1)$ taka, że

$$\varrho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Uwaga 3.5. Każda kontrakcja jest ciągła na X , gdyż spełnia warunek Lipschitza.

Definicja 3.6. Punkt $\mathbf{x} \in X$ nazywa się *punktem stałym* odwzorowania $T: X \rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Twierdzenie 3.7 (Banacha o punkcie stałym). *Jeśli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną zupełną, zaś $T: X \rightarrow X$ jest kontrakcją, to T ma dokładnie jeden punkt stały $\mathbf{x} \in X$.*

Dowód tego twierdzenia, nazywanego także *zasadą odwzorowań związających*, jest krótki i nietrudny, a samo twierdzenie — opublikowane w wersji abstrakcyjnej w roku 1922, w pracy doktorskiej Banacha² — ma mimo swojej prostoty wiele zastosowań, w których X bywa zwykle jakąś przestrzenią funkcyjną, a równanie $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ — równaniem różniczkowym lub całkowym.

Podamy jeszcze pogładową interpretacją twierdzenia Banacha: *jeśli rozłożony plan miasta upuścimy na jednej z ulic w tym mieście, to jest dokładnie jeden taki punkt planu, który znalazł się idealnie w tym miejscu, które przedstawia.* Czytelnik zechce zastanowić się nad prawdziwością tego zdania i dopiero później przeczytać poniższy dowód.

Dowód. Odwzorowanie związające nie może mieć dwóch różnych punktów stałych: gdyby $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ i $T(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$, to mielibyśmy

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varrho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \lambda \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ponieważ $\lambda \in (0, 1)$, więc musi zachodzić równość $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, tzn. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Pozostaje wykazać *istnienie* punktu stałego. Niech $\mathbf{x}_0 \in X$ będzie dowolnym punktem. Rozpatrzmy zdefiniowany rekurencyjnie ciąg $\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n)$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Ponieważ T jest kontrakcją, więc

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) = \varrho(T(\mathbf{x}_n), T(\mathbf{x}_{n-1})) &\leq \lambda \varrho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}) \\ &\leq \lambda^2 \varrho(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^n \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

²Fundamenta Math., tom 3, rok 1922, str. 133–181.

dla pewnej liczby $\lambda \in (0, 1)$. Jeśli $m > n$, to na mocy nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) &\leq \varrho(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}) + \cdots + \varrho(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \lambda^j \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^j \varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) = \lambda^n \frac{\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)}{1 - \lambda} = C\lambda^n, \end{aligned}$$

gdzie stała C nie zależy od n . Zatem ciąg (\mathbf{x}_n) spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny, gdyż przestrzeń (X, ϱ) jest zupełna. Niech $\mathbf{x} = \lim \mathbf{x}_n$. Wobec ciągłości T ,

$$T(\mathbf{x}) = T(\lim \mathbf{x}_n) = \lim T(\mathbf{x}_n) = \lim \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}.$$

Dowód jest zakończony. \square

Okazuje się, że jeśli dwie kontrakcje są bliskie, to ich punkty stałe są bliskie. Z poniższego faktu skorzystamy w następnym podrozdziale.

Lemat 3.8. *Jeśli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną zupełną, a $T_1, T_2: X \rightarrow X$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą $\lambda < 1$ i ponadto*

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \varrho(T_1(\mathbf{x}), T_2(\mathbf{x})) < \varepsilon$$

to punkty stałe \mathbf{x}_j kontrakcji T_j , gdzie $j = 1, 2$, spełniają nierówność $\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \varepsilon/(1 - \lambda)$.

Dowód. Na mocy nierówności trójkąta,

$$\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \varrho(T_1(\mathbf{x}_1), T_2(\mathbf{x}_2)) \leq \varrho(T_1(\mathbf{x}_1), T_1(\mathbf{x}_2)) + \varrho(T_1(\mathbf{x}_2), T_2(\mathbf{x}_2)) < \lambda\varrho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varepsilon.$$

Przenosząc pierwszy składnik na lewą stronę, łatwo otrzymujemy tezę. \square

3.2 Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Udowodnimy w tym podrozdziale jedno z najważniejszych twierdzeń, jakie Czytelnik pozna w ciągu całego wykładu.

Twierdzenie 3.9 (o funkcji odwrotnej). *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n i $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Załóżmy, że dla pewnego $\mathbf{a} \in \Omega$ różniczka $Df(\mathbf{a}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest izomorfizmem liniowym. Istnieją wówczas liczba $\delta > 0$ i zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}^n$ takie, że*

- (i) $f: B(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow V$ jest bijekcją;
- (ii) przekształcenie $g = f^{-1}: V \rightarrow B(\mathbf{a}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 na V ;
- (iii) Jeśli $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ i $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$, to $Dg(\mathbf{y}) = (Df(\mathbf{x}))^{-1}$.

Zanim przejdziemy do dowodu, podkreślmy ważną rzecz: dla $n = 1$ podobne twierdzenie ma charakter *globalny*. Jeśli $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i f' nie znika w żadnym punkcie, to f' ma stały znak, a f jest ściśle monotoniczna na \mathbb{R} . Zatem funkcja $g = f^{-1}$ jest określona na przedziale otwartym $I = f(\mathbb{R})$. Dla $n > 1$ jest inaczej: może się okazać, że różniczka $Df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest odwracalna dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ale f nie jest różnowartościowe!

Przykład 3.10. Niech

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \ni (x, y) = x + iy = z \mapsto \exp z = (e^x \cos y, e^x \sin y) =: F(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

To przekształcenie jest gładkie i oczywiście nie jest różnowartościowe, gdyż każda liczba $2\pi ik$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest okresem funkcji wykładniczej w \mathbb{C} . Jednak

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

a więc $\det DF(x, y) = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} > 0$. Dlatego $DF(x, y)$ jest macierzą odwracalną dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Dowód Twierdzenia 3.9. Krok 1. Niech $A = Df(\mathbf{a})$. Rozpatrując zamiast f nową funkcję

$$\Omega - \mathbf{a} \ni \mathbf{x} \mapsto A^{-1} \cdot (f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - f(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^n,$$

można sprowadzić dowód do przypadku $Df(\mathbf{a}) = \text{Id} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{a} = f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \in \Omega$. Takie założenia odąd przyjmujemy.

Krok 2: różnowartościowość f i odwracalność Df w otoczeniu zera. Zapiszmy $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})$, gdzie $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zatem $Df(\mathbf{x}) = \text{Id} + D\varphi(\mathbf{x})$ i $D\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Przekształcenie $\mathbf{p} \mapsto D\varphi(\mathbf{p})$ jest ciągle na Ω , więc istnieje taka liczba $\delta_1 > 0$, że $\|D\varphi(\mathbf{p})\| < \frac{1}{2}$ dla wszystkich $\mathbf{p} \in B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$. Wobec twierdzenia o wartości średniej,

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \sup_{\mathbf{p} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \|D\varphi(\mathbf{p})\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 2\delta_1). \quad (3.2)$$

Przeto

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \\ &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{aligned}$$

dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$. Stąd wynika różnowartościowość f na kuli $B(\mathbf{0}, 2\delta_1)$. Na obrazie tej kuli przekształcenie $g = f^{-1}$ jest dobrze określone i spełnia warunek Lipschitza ze stałą 2, a więc jest ciągle.

Kluczową trudnością dowodu jest wykazanie, że dla pewnego $\delta > 0$ zbiór $f(B(\mathbf{0}, \delta))$ jest otwarty w \mathbb{R}^n . Aby ją pokonać, wykorzystamy twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Krok 3: funkcję $g = f^{-1}$ można określić na pewnym zbiorze otwartym. Wykażemy, że istnieje funkcja ciągła

$$\gamma: \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1) \rightarrow \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$$

taka, że

$$f(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1). \quad (3.3)$$

Wyniknie stąd, że kula $B(\mathbf{0}, \delta_1)$ jest zawarta w obrazie $f(B(\mathbf{0}, 2\delta_1))$.

Funkcję $g = f^{-1}$ można będzie określić wzorem $g(\mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})$ właśnie na $B(\mathbf{0}, \delta_1)$. Zbiór $U = f^{-1}(B(\mathbf{0}, \delta_1))$ jest otwarty w \mathbb{R}^n , gdyż f jest ciągle. Ponadto, $\mathbf{0} \in U$, więc dla pewnego $\delta_2 > 0$ kula $B(\mathbf{0}, \delta_2) \subset U$. Biorąc $V = g^{-1}(B(\mathbf{0}, \delta_2)) = f(B(\mathbf{0}, \delta_2))$, otrzymamy – wobec ciągłości $g!$ – otwarty podzbiór \mathbb{R}^n . Zakończy to dowód punktu (i) oraz

części punktu (ii) twierdzenia o funkcji odwrotnej. Pozostanie do wykazania, że $g \in C^1$ i różniczki obu funkcji wiąże zależność (iii).

Mamy

$$f(\underbrace{\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})}_{=\mathbf{x}}) = \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})).$$

Zatem warunek (3.3) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma(\mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1). \quad (3.4)$$

Ustalmy teraz $\mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$ i rozpatrzmy pomocnicze przekształcenie

$$T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = -\varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1).$$

Ponieważ $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, więc na mocy (3.2) jest $\|T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})\| \leq \|\varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z})\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y} + \mathbf{z}\| \leq \delta_1$ dla $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$. Innymi słowy,

$$T_{\mathbf{y}}: \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1) \rightarrow \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1).$$

Nietrudno też sprawdzić, że T jest kontrakcją, gdyż

$$\|T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_1) - T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_2)\| = \|\varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}_1) - \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}_2)\| \stackrel{(3.2)}{\leq} \frac{1}{2}\|(\mathbf{y} + \mathbf{z}_1) - (\mathbf{y} + \mathbf{z}_2)\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|.$$

Na mocy Twierdzenia 3.7, $T_{\mathbf{y}}$ ma dokładnie jeden punkt stały $\mathbf{z} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$. Wobec Lematu 3.8 (jego założenia sprawdzamy łatwo, podobnie jak wyżej), przekształcenie

$$\overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1) \ni \mathbf{y} \mapsto \gamma(\mathbf{y}) = \mathbf{z} = \text{punkt stały kontrakcji } T_{\mathbf{y}} \in \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1)$$

jest ciągle. Oczywiście, $T_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} = \gamma(\mathbf{y})$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (3.4), tzn. równoważny mu warunek (3.3).

Krok 4: różniczkowalność g i wzór $Dg(\mathbf{y}) = Df(\mathbf{x})^{-1}$ dla $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Przypuśćmy, że byłoby już wiadomo, że $g = f^{-1}$ jest przekształceniem różniczkowalnym. Stosując twierdzenie o różniczce złożenia do funkcji

$$g \circ f = \text{Id}: B(\mathbf{0}, \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

otrzymalibyśmy wtedy równość

$$Dg(f(\mathbf{x})) \cdot Df(\mathbf{x}) = \text{Id} \quad \text{dla } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \delta_2), \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in V = f(B(\mathbf{0}, \delta_2)),$$

tzn. $Dg(f(\mathbf{x})) = Df(\mathbf{x})^{-1}$ na $B(\mathbf{0}, \delta_2)$. Operacja odwracania macierzy jest ciągła na zbiorze macierzy odwracalnych w $M_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (przypomnijmy: jest to zbiór otwarty!), więc przekształcenie

$$V \ni \mathbf{y} \mapsto Dg(\mathbf{y}) = \left(Df(g(\mathbf{y})) \right)^{-1} \in M_{n \times n}$$

jest ciągle. Aby zakończyć cały dowód Twierdzenia 3.9, pozostaje więc wykazać, że $Dg(\mathbf{y})$ istnieje, gdy $\mathbf{y} \in V$. Udowodnimy w tym celu następujący

Lemat 3.11 (o różniczce przekształcenia odwrotnego). *Niech U, V będą zbiorami otwartymi w \mathbb{R}^n , a $f: U \rightarrow V$ — bijekcją różniczkowalną w punkcie $\mathbf{x} \in U$. Załóżmy, że różniczka $Df(\mathbf{x}) = A$ jest izomorfizmem liniowym. Jeśli funkcja $g = f^{-1}: V \rightarrow U$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, to $Dg(\mathbf{y})$ istnieje i jest równa A^{-1} .*

Dowód LEMATU. Oznaczmy $B = A^{-1} = (Df(\mathbf{x}))^{-1}$ i $M = \|A\| + 2\|B\| + 1$. Różniczka $Df(\mathbf{x}) = A$ istnieje, więc

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = A\mathbf{h} + r(\mathbf{h}), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Wybierzmy $\delta > 0$ tak, aby $\|r(\mathbf{h})\| < \frac{1}{2M}\|\mathbf{h}\|$ dla $\|\mathbf{h}\| < \delta$. Połóżmy $\mathbf{v} = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$, gdzie $\|\mathbf{h}\| < \delta$. Pokażemy, że wektory \mathbf{h} i \mathbf{v} mają porównywalne długości. Po pierwsze,

$$\|\mathbf{v}\| = \|A\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \frac{1}{2M}\|\mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{h}\|.$$

Po drugie, $A\mathbf{h} = \mathbf{v} - r(\mathbf{h})$ na mocy (3.5) i dlatego

$$\|\mathbf{h}\| = \|B \cdot A \cdot \mathbf{h}\| = \|B\mathbf{v} - B \cdot r(\mathbf{h})\| \leq \|B\| \left(\|\mathbf{v}\| + \frac{1}{2M}\|\mathbf{h}\| \right) \leq \|B\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{h}\|,$$

stąd zaś $\|\mathbf{h}\| \leq 2\|B\| \cdot \|\mathbf{v}\| \leq M\|\mathbf{v}\|$. Ostatecznie

$$\frac{1}{M}\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{v}\| \quad \text{dla} \quad \|\mathbf{h}\| < \delta. \quad (3.6)$$

Ponieważ $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, więc

$$g(\mathbf{y} + \mathbf{v}) - g(\mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{h} = B(A\mathbf{h}) = B\mathbf{v} - B(r(\mathbf{h})).$$

Częścią liniową przyrostu g jest $B\mathbf{v}$, zaś reszta $r_1(\mathbf{v}) = B(r(\mathbf{h}))$ spełnia warunek

$$\frac{\|B(r(\mathbf{h}))\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \frac{M \cdot \|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq M^2 \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0},$$

gdyż wobec (3.6) warunki $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}$ i $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ są równoważne. Z definicji różniczki, $Dg(\mathbf{y}) = B = A^{-1}$. Dowód lematu, a także dowód całego Twierdzenia 3.9, jest zakończony. \square

Uwaga 3.12. W powyższym dowodzie twierdzenie Banacha o punkcie stałym można stosować do przestrzeni funkcyjnej $X = C(\overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1), \overline{B}(\mathbf{0}, \delta_1))$ z metryką ‘supremum’. Określamy przekształcenie

$$T: X \rightarrow X, \quad (T\gamma)(\mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y} + \gamma(\mathbf{y})).$$

Sprawdzenie, że $T: X \rightarrow X$ jest kontrakcją, wykonujemy tak samo, jak rachunki w 3. kroku dowodu. Funkcja γ , która jest punktem stałym T , spełnia równanie (3.4) – i od razu, bez powoływania się na Lemat 3.8, wiadomo, że γ jest ciągła.

3.3 Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Poznamy teraz kolejne twierdzenie, które w ścisły sposób wypowiada naturalne oczekiwanie: *jeśli mamy m równań, w których występuje $n + m$ niewiadomych, to ‘zwykle’ m spośród tych niewiadomych można wyznaczyć za pomocą pozostałych n .* (Oczywiście nie zawsze tak jest – równania mogą np. być sprzeczne).

Oznaczenia. W tym podrozdziale będziemy rozpatrywać funkcję

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Punkty \mathbb{R}^n będziemy oznaczać literą \mathbf{x} , a punkty \mathbb{R}^m – literą \mathbf{y} . Różniczką $DF(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest macierzą o m wierszach i $n + m$ kolumnach; będziemy pisać

$$DF(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad (3.7)$$

gdzie $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_{m \times n}$ ma m wierszy i n kolumn, zaś $D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_{m \times m}$ jest macierzą kwadratową o m wierszach i tyluż kolumnach. Inaczej mówiąc, zapis $D_{\mathbf{x}}F \in M_{m \times n}$ oznacza, że chodzi o różniczkę F jako funkcji zmiennej \mathbf{x} , natomiast \mathbf{y} traktujemy jako parametr; podobnie interpretujemy $D_{\mathbf{y}}F \in M_{m \times m}$.

Twierdzenie 3.13 (o funkcji uwikłanej). Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ i niech $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$. Załóżmy, że $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ i $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Niech wreszcie

$$\det D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0.$$

Istnieją wówczas zbiory otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V \subset \mathbb{R}^m$ oraz funkcja $h \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ takie, że $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} \in V$, zaś warunek

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subset \Omega \quad (3.8)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ dla pewnego $\mathbf{x} \in U$. Ponadto,

$$Dh(\mathbf{x}) = -\left(D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))\right)^{-1} \cdot D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})). \quad (3.9)$$

Nazwa twierdzenia ma następujący sens: w małym otoczeniu takiego punktu $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, w którym spełnione są założenia, równanie $F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ definiuje funkcję $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ w sposób *uwikłany*. Zanim podamy dowód, spójrzmy na dwa proste przykłady (z wieloma innymi Czytelnik spotka się później).

Przykład 3.14. (i). Niech $A_1 \in M_{m \times n}$, $A_2 \in M_{m \times m}$ i $\det A_2 \neq 0$. Rozpatrzmy przekształcenie liniowe

$$F: \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

dane wzorem $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A_1\mathbf{x} + A_2\mathbf{y}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Równanie $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ można rozwiązać; zachodzi ono wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = -(A_2)^{-1} \cdot A_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Mamy też oczywiście $D_{\mathbf{x}}F \equiv A_1$ i $D_{\mathbf{y}}F \equiv A_2$. Widać więc, że w tej sytuacji funkcja h jest określona na całej przestrzeni \mathbb{R}^n i jest liniowa; zachodzi też warunek (3.9), opisujący jej różniczkę.

(ii). Niech $n = m = 1$, $a, b > 0$ i niech $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Równanie $F(x, y) = 0$ opisuje elipsę E w \mathbb{R}^2 . Mamy

$$F_x(x, y) = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y(x, y) = \frac{2y}{b^2}.$$

W otoczeniu każdego punktu $(x_0, y_0) \in E$, który ma współrzędną $y_0 \neq 0$, spełnione są założenia Twierdzenia 3.13. Zatem, istnieją przedziały otwarte $U, V \subset \mathbb{R}$ takie, że $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, a równanie $F(x, y) = 0$, rozpatrywane dla $(x, y) \in U \times V$, wyznacza zmienną y jako funkcję x . W tym przykładzie też możemy napisać jawny wzór

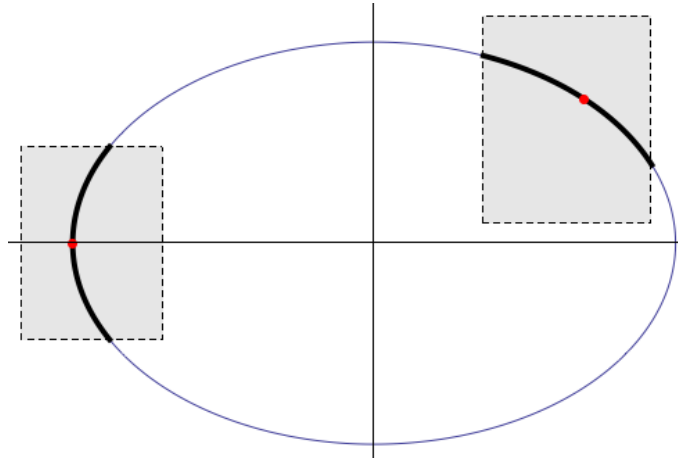
$$y = h(x) = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (3.10)$$

Wybór znaku zależy od położenia (x_0, y_0) na elipsie, tzn. od znaku y_0 . Widać też, że ważny jest wybór *dwóch* małych otoczeń U i V : jeśli nie ograniczymy się do małego otoczenia punktu y_0 , to nie wiemy, jaki znak wybrać we wzorze (3.10).

Załóżmy na chwilę, że $y_0 > 0$. Można wtedy wybrać jako V np. przedział $(0, 2b)$. Zgodnie z wzorem (3.9), powinno być

$$h'(x) = -(F_y(x, y))^{-1} \cdot F_x(x, y) = -\frac{b^2}{2y} \cdot \frac{2x}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{h(x)}.$$

Taki właśnie wynik uzyskujemy, różniczkując funkcję $h(x) = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$, daną wzorem (3.10).



W otoczeniu punktu $(x_0, y_0) \in E$, $y_0 > 0$, elipsa E o równaniu $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ jest wykresem funkcji $y = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}$. W otoczeniu punktu $(-a, 0)$ ta sama elipsa jest wykresem funkcji $x = -a\sqrt{1 - (y^2/b^2)}$ zmiennej y .

Zauważmy jeszcze, że jeśli $\mathbf{p} \in (x_0, y_0) \in E$ i $y_0 = 0$, to wtedy w otoczeniu punktu \mathbf{p} równanie elipsy wyznacza x jako funkcję zmiennej y . Nie kłóci się to z Twierdzeniem 3.13. Możemy wszak je zastosować, wybierając inny, nieznikający minor macierzy DF . W tym przypadku $x_0 \neq 0$ i $F_x(x_0, y_0) \neq 0$.

DOWÓD TWIERDZENIA 3.13. Krok 1: zastosowanie twierdzenia o funkcji odwrotnej. Rozpatrzymy funkcję pomocniczą

$$H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}, \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Ponieważ $F \in C^1$, więc także $H \in C^1$. Nietrudno zauważyć, że macierz różniczki funkcji H wygodnie zapisuje się w postaci blokowej,

$$DH(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \text{Id} & \mathbf{0} \\ A & B \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{Id} &\in M_{n \times n}, & \mathbf{0} &\in M_{n \times m}, \\ A = D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\in M_{m \times n}, & B = D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\in M_{m \times m}. \end{aligned}$$

Posługując się n -krotnie rozwinięciem Laplace'a, stwierdzamy, że

$$\det DH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0.$$

Zatem, w punkcie $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ spełnione są założenia Twierdzenia 3.9 (o funkcji odwrotnej). Istnieje więc kula $(n+m)$ -wymiarowa $B(\mathbf{p}, r)$ i zbiór otwarty $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ takie, że $H: B(\mathbf{p}, r) \rightarrow W$ jest bijekcją i funkcja $G = H^{-1}: W \rightarrow B(\mathbf{p}, r)$ jest klasy C^1 . Ponadto, dla $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B(\mathbf{p}, r)$ jest $\det D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$.

Krok 2: postać funkcji odwrotnej do H . Zapiszmy

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

gdzie $G_1: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $G_2: W \rightarrow \mathbb{R}^m$. Przy tych oznaczeniach,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), F(G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}))), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W.$$

Porównując n początkowych współrzędnych tej równości, otrzymujemy $G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$ dla $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$, a następnie

$$H(G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}))), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W. \quad (3.11)$$

Krok 3: opis rozwiązań równania $F = 0$. Jeśli $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B(\mathbf{p}, r)$, to warunek $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{x}, 0) \in W,$$

tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, 0) = (G_1(\mathbf{x}, 0), G_2(\mathbf{x}, 0))$, co oznacza, że $\mathbf{y} = G_2(\mathbf{x}, 0)$. Z równania $F = 0$ wyznaczyliśmy więc \mathbf{y} jako pewną funkcję \mathbf{x} .

W kuli $B(\mathbf{p}, r)$ zawarty jest pewien produkt $U \times V$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V \subset \mathbb{R}^m$ są zbiorami otwartymi; można np. wziąć $U = B(\mathbf{a}, r/2)$ i $V = B(\mathbf{b}, r/2)$. Wtedy

$$h = G_2(\cdot, 0): U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

i na zbiorze $U \times V$ równanie $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ i $\mathbf{y} \in V$. Zmniejszając w razie potrzeby U , np. biorąc $\rho > 0$ tak małe, żeby $U_1 = B(\mathbf{a}, \rho) \subset h^{-1}(B(\mathbf{b}, r/2))$ (tu korzystamy z ciągłości $h!$), możemy bez zmiany ogólności założyć, że $h(U) \subset V$. Ponieważ $G \in C^1$, więc $G_1, G_2 \in C^1$ i dlatego $h \in C^1$. Udowodniliśmy więc całą tezę twierdzenia, wyjąwszy wzór (3.9).

Krok 4: różniczka funkcji uwikłanej h . Na zbiorze $U \subset \mathbb{R}^n$ jest $F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Różniczkując to równanie stronami i stosując wzór na pochodną złożenia

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \xrightarrow{F} F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$$

(Czytelnik zechce sam narysować odpowiednie macierze, najlepiej w postaci blokowej), otrzymujemy

$$D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) + D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \cdot Dh(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in M_{m \times n}.$$

Dla $\mathbf{x} \in U$ macierz $D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$ jest odwracalna; przenosząc $D_{\mathbf{x}}F(\dots)$ na prawą stronę równania i mnożąc obie strony przez $D_{\mathbf{y}}F(\dots)^{-1}$, otrzymujemy wzór (3.9). \square

Uwaga 3.15. Jeśli w Twierdzeniu 3.9 o funkcji odwrotnej założymy dodatkowo, że $f \in C^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, to wówczas także $f^{-1} \in C^k$. Przypomnijmy: różniczka funkcji odwrotnej $g = f^{-1}$ dana jest wzorem $Dg(\mathbf{y}) = (Df(g(\mathbf{y})))^{-1}$, tzn. jest złożeniem trzech odwzorowań:

$$\mathbf{y} \mapsto g(\mathbf{y}) = \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \mapsto Df(\mathbf{z}), \quad A \mapsto A^{-1}. \quad (3.12)$$

To, że $g = f^{-1} \in C^k$, gdy $f \in C^k$, można więc łatwo wykazać przez indukcję względem k . Dla $k = 1$ udowodniliśmy to już w Twierdzeniu 3.9. Jeśli $f \in C^k$ i wiemy z założenia, że dowodzona własność zachodzi dla $k - 1$, to pierwsze odwzorowanie w (3.12) jest klasy C^{k-1} na mocy założenia indukcyjnego, drugie – też jest klasy C^{k-1} , gdyż $Df \in C^{k-1}$, trzecie zaś jest klasy C^∞ (wyrazy macierzy A^{-1} wyrażają się przez funkcje wymierne od wyrazów macierzy A).

Podobnie, jeśli w Twierdzeniu 3.13 o funkcji uwikłanej założymy, że $F \in C^k$, to funkcja uwikłana h , o której mowa w tezie, też jest klasy C^k . \square

Podamy teraz inne przykłady zastosowania twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Przykład 3.16. Niech $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$. Zbiór $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$ jest sferą \mathbb{S}^{n-1} . Różniczka

$$DF(\mathbf{x}) = (F_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, F_{x_n}(\mathbf{x})) = 2(x_1, \dots, x_n) = 2\mathbf{x}$$

nie znika w żadnym punkcie sfery. Dlatego w otoczeniu każdego punktu $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ sferę \mathbb{S}^{n-1} można przedstawić jako wykres funkcji $(n - 1)$ zmiennych,

$$x_i = \pm \left(1 - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Jeśli $p_i \neq 0$, to w pewnym otoczeniu \mathbf{p} z równania sfery możemy wyznaczyć zmienną x_i , dobierając odpowiednio znak w powyższym wzorze.

Przykład 3.17 (torus jako poziomicą pewnej funkcji). Niech $R > r > 0$. Połóżmy

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 - r^2, \quad x^2 + y^2 > 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

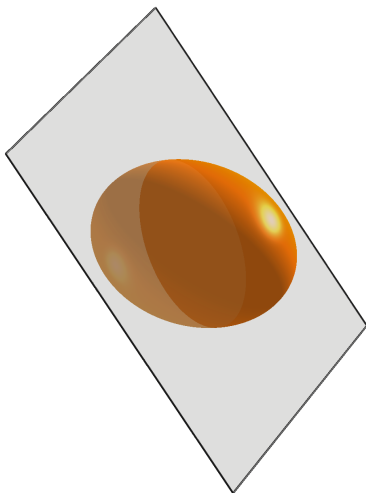
Wtedy

$$F_z(x, y, z) = 2z, \quad F_x(x, y, z) = 2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

a F_y otrzymujemy, zamieniając role x i y . Zbiór $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$ jest domknięty, gdyż F jest ciągła; żaden punkt $(0, 0, z)$ nie należy do M , gdyż $R^2 + z^2 - r^2 \geq R^2 - r^2 > 0$. Zatem $M \subset \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$. Zbiór Ω jest otwarty, a funkcja $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Sprawdzimy, że w każdym punkcie zbioru M różniczka funkcji F ma rząd równy 1. Niech $(x, y, z) \in M$. Jeśli $z \neq 0$, to $F_z \neq 0$. Jeśli $z = 0$, ale $x \neq 0$, to $\sqrt{x^2 + y^2} - R = \pm r \neq 0$ i $F_x \neq 0$. Jeśli wreszcie $z = x = 0$, to $|y| = \sqrt{x^2 + y^2} = R \pm r$ i wtedy $F_y \neq 0$. Zatem, w otoczeniu każdego punktu $(x, y, z) \in M$ zbiór M można przedstawić jako wykres pewnej funkcji dwóch zmiennych, klasy C^1 (ustaliwszy $(x, y, z) \in M$, łatwo jest rozwikłać równanie $F = 0$ w sposób jawny – Czytelnik może to robić sam).

Zbiór M jest torusem obrotowym: we współrzędnych biegunowych $x = t \cos \theta$, $y = t \sin \theta$ równanie $F = 0$ zmienia się w $(t - R)^2 + z^2 = r^2$. Dla każdego kąta $\theta \in [0, 2\pi)$ przekrój M pionową płaszczyzną $\{(t \cos \theta, t \sin \theta, z) : t > 0, z \in \mathbb{R}\}$ jest więc okręgiem.



Wskażemy jeszcze prosty przykład zastosowania Twierdzenia 3.13 dla $n = 1, m = 2$.

Przykład 3.18. Niech $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6, x + y + z).$$

Zbiór $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: F(x, y, z) = (0, 0)\}$ jest częścią wspólną zbiorów M_i opisanych równaniami $F_i = 0$, gdzie F_1 i F_2 są współrzędnymi F , tzn. jest przecięciem elipsoidy trójosiowej i płaszczyzny. Minory 2×2 macierzy

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 6z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

znikają jednocześnie tylko wtedy, gdy $x = 2y = 3z$. Na płaszczyźnie $x + y + z = 0$ równości $x = 2y = 3z$ zachodzą jedynie w punkcie $(0, 0, 0) \notin M$, a więc w każdym punkcie M co najmniej jeden z minorów macierzy DF nie znika. Wobec Twierdzenia 3.13, każdy punkt zbioru M ma takie otoczenie, w którym dwie spośród zmiennych (x, y, z) można wyznaczyć jako funkcję trzeciej zmiennej.

3.4 Dyfeomorfizmy zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n

Definicja 3.19. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, to przekształcenie $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy *dyfeomorfizmem klasy C^1* , gdy $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jest przekształceniem różnowartościowym, zbiór $f(\Omega)$ jest otwarty w \mathbb{R}^n i przekształcenie odwrotne $f^{-1} \in C^1(f(\Omega), \mathbb{R}^n)$.

Z definicji wynika, że dyfeomorfizm jest homeomorfizmem. Czytelnik nie powinien jednak uważać, że dyfeomorfizm to homeomorfizm, który jest różniczkowalny: przekształcenie $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ jest bijekcją klasy C^∞ , jednak przekształcenie doń odwrotne, $\mathbb{R} \ni y \mapsto \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$, nie jest klasy C^1 (z uwagi na zachowanie pochodnej w zerze).

Przekształcenie odwrotne do dyfeomorfizmu też jest dyfeomorfizmem.

Przykład 3.20. 1. Każde odwracalne przekształcenie liniowe $\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in A(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem. Z odwracalności A wynika różnowartościowość tego przekształcenia. Przekształcenia liniowe $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ i $\mathbf{y} \mapsto f^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ są ciągłe, a ich różniczki $Df(\mathbf{x}) = A$ i $Df^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}$ są stałe, więc też są ciągłe.

2. Przekształcenie

$$(-1, 1) \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = \left(x, \frac{2}{\pi} \arctan y\right) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$$

jest dyfeomorfizmem pasa $(-1, 1 \times \mathbb{R})$ na kwadrat $(-1, 1)^2$. Obie współrzędne f są gładkie i różnowartościowe, więc f jest gładkie i różnowartościowe. Macierz

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2/\pi}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

jest odwracalna dla każdego (x, y) , więc funkcja f^{-1} – która, wobec różnowartościowości f , określona jest *globalnie* na kwadracie $(-1, 1)^2$ – jest klasy C^1 na mocy Twierdzenia 3.9. Można zresztą wypisać f^{-1} wzorem.

3. Niech $\Omega_1 = \mathbb{R} \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Przekształcenie

$$\Omega_1 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \in \Omega_2$$

jest dyfeomorfizmem pasa Ω_1 na półpłaszczyznę $\Omega_2 = F(\Omega_1)$. Najprościej to zauważyć, odwołując się do własności funkcji wykładniczej w \mathbb{C} . Sprawdzenie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

Stwierdzenie 3.21. *Złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem.* \square

Zadanie 3.22. Wykazać, że koło $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ i kwadrat $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_1 < 1\}$ są dyfeomorficzne.

Z pojęciem dyfeomorfizmu spotkamy się wielokrotnie, także w drugim semestrze.

3.5 Rozmaitości zanurzone w \mathbb{R}^n

Definicja 3.23. Zbiór $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ nazywamy *zanurzoną rozmaitością n -wymiarową klasy C^1* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$ istnieje kula $B(\mathbf{p}, r)$ w \mathbb{R}^{n+m} , n -wymiarowa podprzestrzeń liniowa $P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, zbiór U otwarty w P i funkcja $\varphi \in C^1(P, P^\perp)$ takie, że

$$M \cap B(\mathbf{p}, r) = \text{wykres } \varphi \cap B(\mathbf{p}, r),$$

gdzie

$$\text{wykres } \varphi = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} = P \oplus P^\perp : \mathbf{x} \in U, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}.$$

Mówiąc krótko i potocznie, zanurzona rozmaitość n -wymiarowa klasy C^1 w \mathbb{R}^{n+m} to zbiór, który *lokalnie*, w otoczeniu każdego swojego punktu, jest wykresem pewnej funkcji klasy C^1 wybranych n zmiennych.

Liczbę m nazywamy *kwymiarem* rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Twierdzenie 3.24. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ będzie zbiorem otwartym i niech $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Jeśli $\mathbf{q} \in \Omega$ jest punktem takim, że $DF(\mathbf{z})$ jest epimorfizmem liniowym dla każdego punktu \mathbf{z} , należącego do zbioru*

$$M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = F(\mathbf{q})\}$$

to wówczas M jest rozmaitością n -wymiarową klasy C^1 .

Dowód. Niech $\mathbf{p} \in M$. Ponieważ $DF(\mathbf{z})$ jest epimorfizmem w każdym punkcie zbioru M , więc w punkcie \mathbf{p} nie znika pewien minor rozmiaru $m \times m$ macierzy $DF(\mathbf{p})$. Dlatego, odpowiednio permutując zmienne, można zastosować Twierdzenie 3.13 (o funkcji uwikłanej) i wywnioskować, że w małym otoczeniu punktu \mathbf{p} zbiór M pokrywa się z wykresem pewnej funkcji klasy C^1 , określonej na otwartym podzbiórze \mathbb{R}^n i prowadzącej w \mathbb{R}^m . \square

Zastosowania tego twierdzenia spotkaliśmy już w przykładach 3.14 (ii), 3.16, 3.17, 3.18. Przykładami rozmaitości są więc elipsa (zarówno zanurzona w \mathbb{R}^2 , jak i zanurzona w \mathbb{R}^3), sfera i torus.

Przykład 3.25 (lemniskata i precel). Lemniskatą nazywamy zbiór

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^2 + y^2 = 0\}.$$

Równanie $x^4 - x^2 + y^2 = 0$, równoważnie $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$, opisuje w \mathbb{R}^2 krzywą w kształcie ósemki. Wykresy funkcji $x \mapsto \pm x\sqrt{1-x^2}$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie $(0, 0) \in L$, więc L nie jest rozmaitością jednowymiarową zanurzoną w \mathbb{R}^2 .

Niech teraz $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$F(x, y, z) = (x^4 - x^2 + y^2)^2 + z^2 - \frac{1}{36}$$

i niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$. Sprawdźmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 3.24. Pochodne cząstkowe F są równe

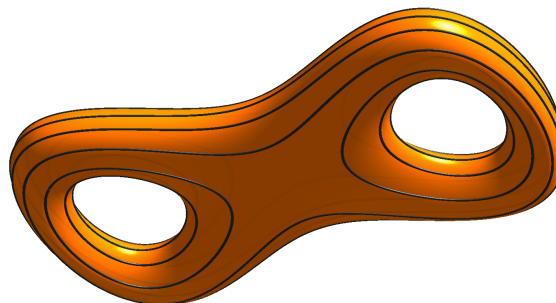
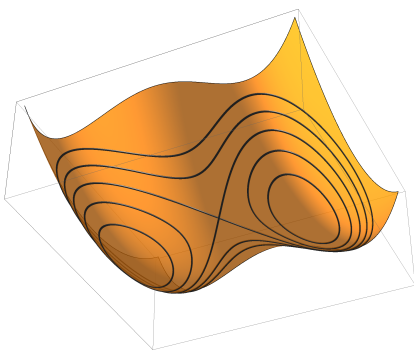
$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= 2(x^4 - x^2 + y^2) \cdot (4x^3 - 2x) = 4x(2x^2 - 1)(x^4 - x^2 + y^2), \\ F_y(x, y, z) &= 4y(x^4 - x^2 + y^2), \quad F_z(x, y, z) = 2z. \end{aligned}$$

W tych punktach M , gdzie $z \neq 0$, różniczka funkcji F jest epimorfizmem (tzn. ma rząd równy 1), gdyż tam $F_z \neq 0$. Jeśli $(x, y, z) \in M$ i $z = 0$, to $x^4 - x^2 + y^2 = \pm \frac{1}{6}$. Zatem, o ile $y \neq 0$, to $F_y(x, y, 0) \neq 0$ w punktach $(x, y, 0) \in M$.

Jeśli wreszcie $(x, y, z) \in M$ i $y = z = 0$, to $x^4 - x^2 + y^2 = x^4 - x^2 = \pm \frac{1}{6}$. Inaczej mówiąc, liczba x jest pierwiastkiem wielomianu $P(t) = t^4 - t^2 \mp \frac{1}{6}$. Mamy $P'(t) = 4t^3 - 2t$; P' znika więc dla $t = 0$ i $t = \pm 1/\sqrt{2}$. Te punkty nie są jednak pierwiastkami P , tzn. P ma pierwiastki jednokrotne i jeśli $P(x) = 0$, to $P'(x) \neq 0$. Ostatecznie więc,

$$F_x(x, 0, 0) = 4x(2x^2 - 1)(x^4 - x^2 + y^2) = 2P'(x) \cdot \pm 16 \neq 0 \quad \text{dla } (x, 0, 0) \in M.$$

Sprawdziliśmy więc, że we wszystkich punktach $(x, y, z) \in M$ różniczka $DF(x, y, z)$ jest epimorfizmem (ma maksymalny możliwy rząd, w tym przypadku równy 1).



Z lewej: wykres funkcji $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ widziany od dołu. Z prawej: precel o równaniu $f(x, y)^2 + z^2 = \frac{1}{36}$. (Oba rysunki poddano lekkiemu – afinicznemu – zniekształceniu.)

Jak wygląda zbiór M ? Wyobraźmy sobie, że zmienna z to wysokość. Cięcie zbioru M poziomą płaszczyzną $\{z = c\}$, gdzie $c \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$, składa się z takich punktów (x, y, z) , że

$$x^4 - x^2 + y^2 = \pm a, \quad \text{gdzie } a = \sqrt{\frac{1}{36} - c^2}, \quad z = c,$$

tnz. wygląda tak samo, jak dwa poziome przekroje wykresu funkcji $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$, płaszczyznami $\{z = \pm a\}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że w punkcie $(0, 0)$ funkcja f ma siodło, a w punktach $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ dwa minima lokalne. Zatem, krzywe $f = \text{const}$ wyglądają tak, jak na załączonym rysunku, zaś sam zbiór M wygląda tak, jak powierzchnia precla z dwiema dziurami na wylot.³ \square

Opiszemy teraz zbiór wektorów stycznych (w sensie Definicji 2.31) do rozmaitości zanurzonej klasy C^1 . Okazuje się, że jeśli M jest rozmaitością n -wymiarową, to $T_{\mathbf{p}}M$ jest przestrzenią liniową wymiaru n . Oto jej opis, w dwóch wersjach, uzależnionych od tego, jak opisujemy rozmaitość M .

Twierdzenie 3.26 (przestrzeń styczna do rozmaitości, wersja I). *Jeśli $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest wykresem funkcji $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, to w każdym punkcie $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a})) \in M$ mamy*

$$T_{\mathbf{p}}M = \{(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} = \text{Im } D\Phi(\mathbf{a}),$$

gdzie $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$, $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

Przekształcenie Φ , o którym mowa w powyższym twierdzeniu, nazywa się czasem *naturalną parametryzacją wykresu funkcji φ* .

Twierdzenie 3.27 (przestrzeń styczna do rozmaitości, wersja II). *Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest zbiorem otwartym, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ i dla każdego punktu $\mathbf{p} \in M$, gdzie*

$$M = \{\mathbf{z} \in \Omega : F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\},$$

przekształcenie liniowe $DF(\mathbf{p})$ jest epimorfizmem, to

$$T_{\mathbf{p}}M = \ker DF(\mathbf{p}) \quad \text{dla } \mathbf{p} \in M.$$

Udowodnimy najpierw pierwsze z tych twierdzeń, posługując się wprost Definicją 2.31. Drugie twierdzenie wyprowadzimy później z pierwszego, posługując się twierdzeniem o funkcji uwikłanej, żeby opisać lokalnie M jako wykres funkcji klasy C^1 . Uważny Czytelnik spostrzegł przypuszczalnie, że z Twierdzeniem 3.27 spotkaliśmy się już w prostym przypadku $m = 1$, dowodząc, że gradient funkcji jest prostopadły do poziomicy (patrz Twierdzenie 2.34).

DOWÓD TWIERDZENIA 3.26. Ustalmy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Niech $\gamma(t) = (\mathbf{a} + t\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{a} + t\mathbf{v})) = \Phi(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Wektor $\gamma'(0)$ prędkości krzywej γ należy do zbioru $T_{\gamma(0)}M = T_{\mathbf{p}}M$ (patrz Uwaga 2.33), gdzie oczywiście $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a})) = \Phi(\mathbf{a})$. Wobec wzoru na pochodną złożenia,

$$\gamma'(0) = D\Phi(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{t=0} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v} = (\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}).$$

Datego $\text{Im } D\Phi(\mathbf{a}) \subset T_{\mathbf{p}}M$. Trzeba jeszcze tylko wykazać inkluzję przeciwną.

Niech zatem $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Sprawdzimy, że $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v}$ dla pewnego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Bez zmniejszenia ogólności przyjmiemy, że $\|\mathbf{w}\| = 1$. Ponieważ $M = \Phi(\Omega)$, więc z definicji wektora stycznego wynika, że istnieje ciąg $(\mathbf{x}_j) \subset \Omega$ zbieżny do \mathbf{a} i taki, że

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \mathbf{w} \quad \text{oraz} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} = \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{n-1}; \quad (3.13)$$

³Ten konkretny sposób przedstawienia precla jako *jednej* poziomicy pewnej funkcji klasy C^1 obmyślił Hermann Karcher, geometra z Uniwersytetu w Bonn.

drugie założenie nie zmniejsza ogólności, gdyż sfera \mathbb{S}^{n-1} jest zbiorem zwartym. Funkcja φ jest różniczkowalna w \mathbf{a} ; dlatego, wobec ciągłości przekształceń liniowych,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \stackrel{(3.13)}{=} \|D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|. \quad (3.14)$$

Uwzględniając tę równość, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}{\sqrt{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|^2 + \|\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{a})\|^2}} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\|\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{a})\|^2}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|^2}\right)^{-1/2} \\ &= \left(1 + \|D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|^2\right)^{-1/2} \\ &= \left(\|\mathbf{z}\|^2 + \|D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\|D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|}. \end{aligned}$$

Teraz piszemy

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{D\Phi(\mathbf{a})(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|)}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|}{\|\Phi(\mathbf{x}_j) - \Phi(\mathbf{a})\|} \left(D\Phi(\mathbf{a}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} + \frac{o(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{a}\|} \right) \\ &= \frac{D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}}{\|D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|} \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v}$, gdzie wektor $\mathbf{v} = \|D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{z}\|^{-1}\mathbf{z}$. Dowód Twierdzenia 3.26 jest zakończony. \square

DOWÓD TWIERDZENIA 3.27. Ustalmy $\mathbf{p} \in M$. Bez zmiany ogólności (permutując w razie potrzeby zmienne w \mathbb{R}^{n+m}) przyjmiemy, że w małym otoczeniu $\Omega_1 \subset \Omega$ punktu \mathbf{p} funkcja F zmiennej $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, spełnia założenia Twierdzenia 3.13 o funkcji uwikłanej, tzn.

$$\det D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U.$$

Istnieje wtedy funkcja $\varphi: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ klasy C^1 taka, że zbiór M w otoczeniu punktu \mathbf{p} jest wykresem funkcji φ . Niech $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a}))$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$$T_{\mathbf{p}}M = \{(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Posłużymy się teraz wzorem (3.9) na różniczkę funkcji uwikłanej φ . Wynika zeń, że

$$D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{p})\mathbf{v} + D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{p})D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v} = 0,$$

lub równoważnie, $DF(\mathbf{p})(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) = 0$, tzn. każdy wektor $(\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v})$ należy do jądra przekształcenia $DF(\mathbf{p})$. Na odwrót, jeśli $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \ker DF(\mathbf{p})$, gdzie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, to

$$0 = DF(\mathbf{p})\mathbf{w} = D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{p})\mathbf{v} + D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{p})\mathbf{u},$$

stąd zaś, wobec wzoru (3.9), otrzymujemy $\mathbf{u} = -(D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{p}))^{-1}D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{p})\mathbf{v} = D\varphi(\mathbf{p})\mathbf{v}$. Zatem rzeczywiście $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, D\varphi(\mathbf{a})\mathbf{v}) \in T_{\mathbf{p}}M$. \square

3.6 Ekstrema warunkowe i mnożniki Lagrange'a

W wielu konkretnych zastosowaniach rachunku różniczkowego trzeba znajdować wartość największą lub najmniejszą pewnej funkcji n zmiennych, ale nie na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tylko wtedy, gdy między poszczególnymi zmiennymi zachodzą dodatkowe związki. Np. obliczając odległość punktu $(3, 4, 5)$ od powierzchni sfery \mathbb{S}^2 , szukamy w istocie najmniejszej wartości funkcji

$$g(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{S}^2,$$

na pewnej podrozmaitości w \mathbb{R}^3 : na sferze. Gradient funkcji $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, jak nietrudno stwierdzić, znika jedynie w punkcie $(3, 4, 5)$, w którym g osiąga swój kres dolny na \mathbb{R}^3 . Jednak $(3, 4, 5) \notin \mathbb{S}^2$, gdzie jest więc osiągany kres dolny na sferze?

Akurat to zadanie można rozwiązać szkolnymi metodami, odwołując się do elementarnej geometrii. Problemy tego typu pojawiają się jednak w wielu dziedzinach, choćby w ekonomii, w różnych zadaniach związanych z optymalizacją kosztów i zysku, gdy wiadomo, że np. suma różnych rodzajów wydatków firmy (płace, reklama, środki produkcji, ubezpieczenie itp.) powinna być stała. Warto więc dysponować ogólnymi metodami rozwiązywania podobnych zadań.

Powiemy teraz, jak badać minima i maksima funkcji, określonych na n -wymiarowych rozmaitościach zanurzonych w \mathbb{R}^{n+m} . Równania, opisujące daną rozmaitość, traktujemy jako dodatkowe warunki, wiążące poszczególne zmienne w \mathbb{R}^{n+m} . Stąd właśnie bierze się nazwa *ekstrema warunkowe* albo *ekstrema związane*.

Twierdzenie 3.28 (warunek konieczny ekstremum warunkowego). *Załóżmy, że $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ i $F = (F_1, \dots, F_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Niech $M = \{\mathbf{z} \in \Omega: F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$. Niech $\mathbf{p} \in M$ i niech przekształcenie $DF(\mathbf{p})$ będzie epimorfizmem liniowym.*

Jeśli g osiąga w punkcie $\mathbf{p} \in M$ swój kres górny lub dolny na zbiorze M , to

$$\langle \text{grad } g(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$$

i istnieją liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\text{grad } g(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \text{grad } F_i(\mathbf{p}). \quad (3.15)$$

Liczby λ_i nazywa się *mnożnikami Lagrange'a*. Geometryczny sens warunku (3.15) jest następujący: gradient funkcji g w punkcie \mathbf{p} jest prostopadły do przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{p}}M = \ker DF(\mathbf{p})$ do rozmaitości M . To wynika z Twierdzenia 3.27. Aby to łatwiej zrozumieć, Czytelnik może pomyśleć o przypadku $m = 1, n = 2$. Wtedy F ma wartości rzeczywiste i warunek (3.15) oznacza, że $\text{grad } g(\mathbf{p}) = \lambda \text{grad } F(\mathbf{p})$, a wektor $\text{grad } F(\mathbf{p})$ jest wszak prostopadły do poziomicy funkcji F .

Dowód. Pewien minor $m \times m$ macierzy $DF(\mathbf{p})$ nie znika. Bez zmniejszenia ogólności (permutując w razie potrzeby zmienne) załóżmy zatem, że $DF(\mathbf{p}) = (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{p}), D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{p}))$, gdzie $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{p})$ jest macierzą o n kolumnach i m wierszach, zaś $D_{\mathbf{y}}F(\mathbf{p})$ – odwracalną macierzą kwadratową $m \times m$. Wobec Twierdzenia 3.13, dla pewnego $r > 0$ zbiór $M \cap B(\mathbf{p}, r)$ jest wykresem funkcji $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, gdzie U jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n . Punkt $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{a}))$ dla pewnego $\mathbf{a} \in U$. Oznaczmy jeszcze $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$.

Funkcja $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})), \quad \text{gdzie } \mathbf{x} \in U, \quad \text{tzn. } (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \Phi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{p}, r),$$

jest różniczkowalna na U i osiąga swój kres górny (lub dolny) w punkcie $\mathbf{a} \in U$. Dlatego, wobec wzoru na pochodną złożenia,

$$0 = DG(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{p})D\Phi(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{x}}g(\mathbf{p}) + D_{\mathbf{y}}g(\mathbf{p})D\varphi(\mathbf{a}).$$

Innymi słowy, $\langle \text{grad } g(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = (D_{\mathbf{x}}g(\mathbf{p}), D_{\mathbf{y}}g(\mathbf{p}))\mathbf{w} = 0$ dla każdego wektora $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{a})\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$, gdzie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ można wybrać dowolnie. Wobec Twierdzenia 3.26, obraz przekształcenia liniowego $D\Phi(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ to przestrzeń styczna $T_{\mathbf{p}}M$, a więc otrzymaliśmy warunek

$$\langle \text{grad } g(\mathbf{p}), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M. \quad (3.16)$$

Wyprowadzimy stąd warunek (3.15). W tym celu opiszemy bazę przestrzeni $V = (T_{\mathbf{p}}M)^\perp$.

Twierdzenie 3.27 orzeka, iż $T_{\mathbf{p}}M = \ker DF(\mathbf{p})$. Wymiar $T_{\mathbf{p}}M$ jest równy n , zatem $\dim V = (n+m) - n = m$. Wiersze macierzy $DF(\mathbf{p})$, tzn. wektory $\text{grad } F_i(\mathbf{p})$, są ortogonalne do $\ker DF(\mathbf{p})$. Zatem, $\text{grad } F_i(\mathbf{p}) \in V$ dla $i = 1, \dots, m$. Ponadto, wektory $\text{grad } F_1(\mathbf{p}), \dots, \text{grad } F_m(\mathbf{p})$ są liniowo niezależne, gdyż $DF(\mathbf{p})$ jest epimorfizem. Zatem, $(\text{grad } F_i(\mathbf{p}))_{i=1, \dots, m}$ jest bazą V . Warunek (3.16) oznacza zaś, że wektor $\text{grad } g(\mathbf{p}) \in V$; dlatego $\text{grad } g(\mathbf{p})$ jest kombinacją wektorów bazy V , tzn. wektorów $\text{grad } F_i(\mathbf{p})$. \square

Funkcję $L(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{z})$, gdzie liczby λ_i spełniają, przy założeniach ostatniego twierdzenia, warunek (3.15), nazywamy *funkcją Lagrange'a* (dla punktu $\mathbf{p} \in M$). Badając drugą różniczkę tej funkcji, można w wielu sytuacjach sprawdzić, czy g ma w punkcie \mathbf{p} ekstremum lokalne związane na rozmaitości M , czy go nie ma.

Definicja 3.29. Załóżmy, że $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ i $F = (F_1, \dots, F_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Niech $M = \{\mathbf{z} \in \Omega: F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$. Mówimy, że g ma w punkcie $\mathbf{p} \in M$ minimum (odpowiednio: maksimum) lokalne związane na M wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $r > 0$ jest $g(\mathbf{p}) \leq g(\mathbf{z})$ (odpowiednio: $g(\mathbf{p}) \geq g(\mathbf{z})$) dla wszystkich $\mathbf{z} \in M$, $\|\mathbf{z} - \mathbf{p}\| < r$.

Jeśli nierówności są ostre, to mówi się, że ekstremum lokalne związane jest *właściwe*.

Twierdzenie 3.30 (warunki dostateczne ekstremum lokalnego związanego).

Niech $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ i $F = (F_1, \dots, F_m) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^{n+m} . Przypuśćmy, że w punkcie $\mathbf{p} \in M = \{\mathbf{z} \in \Omega: F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$ przekształcenie $DF(\mathbf{p})$ jest epimorfizem i zachodzi (3.15), tzn.

$$\text{grad } g(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \text{grad } F_i(\mathbf{p}).$$

Niech $L = g - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas:

- (i) Jeśli $D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) > 0$ (odpowiednio, $D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) < 0$) dla wszystkich $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M \setminus \{0\}$, to g ma w $\mathbf{p} \in M$ właściwe minimum (odpowiednio: maksimum) lokalne związane.
- (ii) Jeśli istnieją dwa wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ takie, że $D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) > 0 > D^2L(\mathbf{p})(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, to g nie ma w punkcie \mathbf{p} ekstremum lokalnego związanego.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności (można przesunąć układ współrzędnych w \mathbb{R}^{n+m} i dodać do g stałą) założmy, że $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in M$, $L(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = F_1(\mathbf{0}) = \dots = F_m(\mathbf{0}) = 0$. Założmy ponadto, przenumerowując w razie potrzeby zmienne i stosując twierdzenie o funkcji uwikłanej, że $M \cap B(\mathbf{p}, r)$ jest wykresem funkcji

$$\mathbb{R}^n \supset U \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{p}, r).$$

Dla ustalenia uwagi, niech $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Wobec Uwagi 3.15, φ jest klasy C^2 . Niech Φ będzie naturalną parametryzacją M , tzn. $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in M$ dla $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ i $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \mathbf{p}$. Założmy, że $D^2L(\mathbf{0}) > 0$ na $T_{\mathbf{p}}M$.

Aby wykazać tezę, zastosujemy wzór Taylora do funkcji L . Z warunku (3.15) wynika, że $DL(\mathbf{0}) = Dg(\mathbf{0}) - \sum \lambda_i DF_i(\mathbf{0}) = 0$. Dlatego dla $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, r)$ jest

$$L(\mathbf{z}) = D^2L(\mathbf{0})(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + r_1(\mathbf{z}), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{\|\mathbf{z}\| \rightarrow 0} \frac{r_1(\mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|^2} = 0.$$

Podstawiając do tej równości

$$M \ni \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{0}) + D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x} + r_2(\mathbf{x}) = D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x} + r_2(\mathbf{x}),$$

gdzie reszta $r_2(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ dla $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, dzięki dwuliniowości $D^2L(\mathbf{0})$ otrzymujemy

$$L(\mathbf{z}) = D^2L(\mathbf{0})(D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}, D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{0}, r), \quad (3.17)$$

gdzie

$$R(\mathbf{x}) = r_1(\Phi(\mathbf{x})) + 2D^2L(\mathbf{0})(D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}, r_2(\mathbf{x})) + D^2L(\mathbf{0})(r_2(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x})). \quad (3.18)$$

Z założenia, forma $D^2L(\mathbf{0})$ jest dodatnia na wektorach z przestrzeni stycznej. Istnieje więc stała $\alpha > 0$ taka, że

$$D^2L(\mathbf{0})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha \|\mathbf{w}\|^2.$$

Biorąc wektor $\mathbf{w} = D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x} \in T_{\mathbf{p}}M$ (tu stosujemy Twierdzenie 3.26!) otrzymujemy

$$D^2L(\mathbf{0})(D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}, D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}) \geq \alpha \|D\Phi(\mathbf{0})\mathbf{x}\|^2 \geq \alpha \|\mathbf{x}\|^2. \quad (3.19)$$

Nietrudno stwierdzić – nie będziemy podawać formalnego dowodu w języku ε - δ – że reszta $R(\mathbf{x})$, dana wzorem (3.18), jest równa $o(\|\mathbf{x}\|^2)$ dla $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, tzn. $|R(\mathbf{x})| < \alpha \|\mathbf{x}\|^2/2$ dla $\|\mathbf{x}\|$ dostatecznie małych, $\|\mathbf{x}\| < \delta$. Ostatecznie więc ze wzorów (3.17)-(3.19) otrzymujemy

$$L(\mathbf{z}) = L(\Phi(\mathbf{x})) \geq \alpha \|\mathbf{x}\|^2 + R(\mathbf{x}) \geq \frac{\alpha \|\mathbf{x}\|^2}{2} \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) \in M \cap B(\mathbf{0}, \delta).$$

Ponieważ $L(\mathbf{0}) = 0$, więc $L(\mathbf{z}) > L(\mathbf{0})$ dla $\mathbf{z} \in M \cap B(\mathbf{0}, \delta)$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Jednak na rozmaitości M jest $F_1 = \dots = F_m = 0$ i dlatego

$$g(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) > L(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$$

dla wszystkich punktów $\mathbf{z} \in M \cap B(\mathbf{0}, \delta)$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Dowód punktu (i) jest zakończony. Dowód punktu (ii) jest bardzo podobny. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie. \square

Przejdźmy do przykładów.

Przykład 3.31 (długi, ale pouczający). Niech $n = 2$, $m = 1$. Znajdziemy wszystkie ekstrema lokalne związanej funkcji $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na powierzchni M , opisanej równaniem

$$F(x, y, z) := \frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 - 1 = 0.$$

Jak zobaczymy, na M jest 26 punktów, w których dla pewnej liczby λ zachodzi warunek Lagrange'a $\text{grad } g = \lambda \text{ grad } F$. Stosując ostatnie twierdzenie, sprawdzimy, że w ośmiu z nich g ma maksimum warunkowe na M , a w sześciu – minimum warunkowe na M . W dwunastu pozostałych 'podejrzanych' punktach g nie ma ani minimum warunkowego, ani maksimum warunkowego.

Warunek (3.15) i równanie $F \equiv 0$, opisujące M , prowadzą do układu czterech równań:

$$2x = 4\lambda \frac{x^3}{3^4}, \quad 2y = 4\lambda \frac{y^3}{2^4}, \quad 2z = 4\lambda z^3, \quad (3.20)$$

$$\frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 = 1. \quad (3.21)$$

Mnożąc równania (3.20) odpowiednio przez x, y, z , a następnie dodając wyniki stronami, otrzymujemy

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2\lambda \left(\frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 \right) \stackrel{(3.21)}{=} 2\lambda > 0, \quad (3.22)$$

dla każdego punktu $(x, y, z) \in M$, który spełnia warunek z tezy Twierdzenia 3.28. Liczba $\lambda \neq 0$, gdyż współrzędne punktu $(x, y, z) \in M$ nie mogą jednocześnie zniknąć.

Wypiszmy jeszcze funkcję Lagrange'a, która pomoże nam określić charakter punktów krytycznych funkcji $g|_M$. Mamy

$$L(x, y, z) = g(x, y, z) - \lambda F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(\frac{x^4}{3^4} + \frac{y^4}{2^4} + z^4 - 1 \right).$$

Dlatego

$$D^2L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - 12\lambda \frac{x^2}{3^4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 12\lambda \frac{y^2}{2^4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 12\lambda z^2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Układ równań (3.20)–(3.21) rozwiążemy, rozpatrując oddzielnie trzy przypadki.

Przypadek 1: $xyz \neq 0$. Dzieląc równania (3.20) odpowiednio przez $4\lambda x, 4\lambda y$ i $4\lambda z$, otrzymujemy wtedy

$$x^2 = \frac{3^4}{2\lambda}, \quad y^2 = \frac{2^4}{2\lambda}, \quad z^2 = \frac{1}{2\lambda}. \quad (3.24)$$

Dlatego

$$2\lambda \stackrel{(3.22)}{=} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3^4 + 2^4 + 1}{2\lambda} = \frac{98}{2\lambda},$$

stąd zaś $2\lambda = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$. Ostatecznie więc rozwiązaniami układu (3.20)–(3.21) są w tym przypadku

$$2\lambda = g(x, y, z) = 7\sqrt{2}, \quad x = \pm \frac{9}{\sqrt{7\sqrt{2}}}, \quad y = \pm \frac{4}{\sqrt{7\sqrt{2}}}, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{7\sqrt{2}}} \quad (3.25)$$

Ponieważ znaki \pm można dla każdej z trzech niewiadomych x, y, z wybrać oddzielnie, więc takich rozwiązań jest 8. Macierz drugiej różniczki funkcji Lagrange'a w każdym z tych punktów określamy, wstawiając (3.24) do (3.23); prowadzi to do wyniku

$$D^2L(x, y, z) = -4 \cdot \text{Id} \quad \text{dla } (x, y, z) \in M \text{ spełniających (3.25).}$$

Forma $D^2L(x, y, z)$ jest więc w każdym z tych ośmiu punktów ujemna (nie tylko na przestrzeni stycznej $T_{(x,y,z)}M$, ale po prostu na całej przestrzeni \mathbb{R}^3). Wobec Twierdzenia 3.30 funkcja $g|_M$ ma w każdym z tych punktów właściwe maksimum lokalne związane.

Przypadek 2: jedna współrzędna punktu (x, y, z) jest równa zero, a dwie są różne od zera. Rozwiązań tego typu jest 12. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $x = 0, yz \neq 0$. (Są jeszcze analogiczne podprzypadki $y = 0$ i $xz \neq 0$ oraz $z = 0$ i $xy = 0$ – ich szczegółowe rozpatrzenie pozostawimy Czytelnikowi). Tym razem dzielimy drugie i trzecie z równań (3.20) przez $4\lambda y$ i $4\lambda z$ odpowiednio; otrzymujemy

$$x = 0, \quad y^2 = \frac{2^4}{2\lambda}, \quad z^2 = \frac{1}{2\lambda}. \quad (3.26)$$

Dlatego

$$2\lambda \stackrel{(3.22)}{=} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2^4 + 1}{2\lambda} = \frac{17}{2\lambda},$$

stąd zaś $2\lambda = \sqrt{17}$. Rozwiązaniami układu (3.20)–(3.21) są zatem

$$2\lambda = g(x, y, z) = \sqrt{17}, \quad x = 0, \quad y = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \quad (3.27)$$

Takich rozwiązań jest 4. Podobnie otrzymujemy rozwiązania

$$2\lambda = g(x, y, z) = \sqrt{82}, \quad x = \pm \frac{9}{\sqrt{82}}, \quad y = 0, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{82}} \quad (3.28)$$

$$2\lambda = g(x, y, z) = \sqrt{97}, \quad x = \pm \frac{9}{\sqrt{97}}, \quad y = \pm \frac{4}{\sqrt{97}}, \quad z = 0 \quad (3.29)$$

Dla każdego z rozwiązań (3.27) macierz

$$D^2L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ma wartości własne 2 i -4 , nie jest więc ani dodatnia, ani ujemna na \mathbb{R}^3 . Aby posłużyć się Twierdzeniem 3.30, należy jednak sprawdzić, jak zachowuje się macierz $D^2L(x, y, z)$ na przestrzeni stycznej $T_{(x,y,z)}M$. Wobec Twierdzenia 3.27,

$$T_{(x,y,z)}M = \ker DF(x, y, z) = \left\{ (u, w, v) \in \mathbb{R}^3 : \frac{4x^3}{3^4} \cdot u + \frac{4y^3}{2^4} \cdot w + 4z^3 \cdot v = 0 \right\},$$

a ponieważ w przypadku (3.27) jest $x = 0, yz \neq 0$, więc

$$T_{(x,y,z)}M = \left\{ (u, w, v) \in \mathbb{R}^3 : u \text{ jest dowolne, } \frac{4y^3}{2^4} \cdot w + 4z^3 \cdot v = 0 \right\},$$

$$D^2L(x, y, z) \left((u, w, v), (u, w, v) \right) = 2u^2 - 4(w^2 + v^2).$$

Ponieważ współrzędną u wektora (u, w, v) stycznego do M możemy manipulować dowolnie, więc druga różniczka funkcji Lagrange'a przybiera na przestrzeni stycznej do M zarówno wartości dodatnie, jak ujemne. Wobec Twierdzenia 3.30 (ii), funkcja g nie ma w takich punktach ekstremum lokalnego związanego.

Przypadek 2: dwie współrzędne punktu (x, y, z) są równe zero, a jedna jest różna od zera. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $x = y = 0, z \neq 0$. Wtedy z równań (3.20)–(3.22) otrzymujemy po łatwym rachunku

$$x = y = 0, \quad z = \pm 1, \quad 2\lambda = z^2 = 1. \quad (3.30)$$

Pozostałe rozwiązania tego typu to

$$x = z = 0, \quad y = \pm 2, \quad 2\lambda = 4; \quad (3.31)$$

$$y = z = 0, \quad x = \pm 3, \quad 2\lambda = 9. \quad (3.32)$$

W takich punktach (jest ich razem 6) funkcja $g|_M$ ma właściwe minima lokalne związane. Rozpatrzmy np. zachowanie g w otoczeniu punktów (3.30). Mamy w nich $DF(x, y, z) = (0, 0, \pm 4)$ i

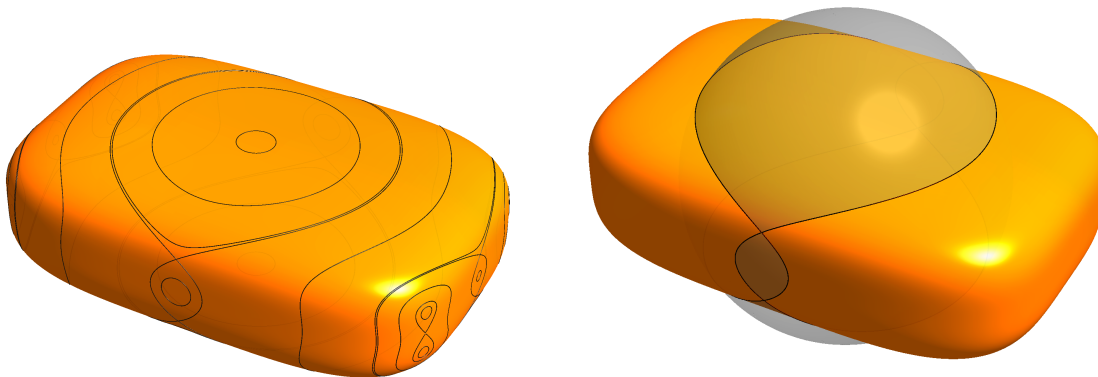
$$T_{(x,y,z)}M = \ker DF(x, y, z) = \{(u, w, v) \in \mathbb{R}^3 : v = 0\}.$$

Tym razem

$$D^2L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

więc $D^2L(x, y, z)((u, w, v), (u, w, v)) = 2(u^2 + w^2)$ dla $(u, w, v) \in T_{(x,y,z)}M$, tzn. $D^2L(\mathbf{p})$ jest dodatnia na $T_{\mathbf{p}}M$. Podobnie jest w punktach (3.31)–(3.32). Są to więc minima $g|_M$.

Porównując wartości $g(x, y, z) = 2\lambda$ w znalezionych punktach, stwierdzimy łatwo, że $\inf_M g = 1$ i $\sup_M g = \sqrt{98}$.



Z lewej: powierzchnia M przypomina prostopadłościan o wyokrąglonych krawędziach i rogach. Czarnym kolorem zaznaczono poziomicę funkcji $g|_M$. Widać wyraźnie trzy minima lokalne związane $g|_M$ i dwa jej maksima lokalne związane. W punktach skrzyżowań poziomic $g|_M$ nie ma ekstremum związanego.

Z prawej: każda ze sfer, na których $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ma stałą wartość, przecina M wzdłuż poziomic $g|_M = \text{const}$. Na rysunku wskazano poziomicę, odpowiadającą punktom (3.27), w których funkcja $g|_M$ ma siodła.

Rozdział 4

Elementy teorii miary

Zajmiemy się teraz całkowaniem funkcji wielu zmiennych. Czytelnik wie już, że do ważnych zastosowań całki należy obliczanie pól i objętości. Okazuje się, że pytania *jakie funkcje wolno (próbować) całkować? dla jakich podzbiorów przestrzeni można w ogóle określić ich objętość?* są subtelne, a odpowiedzi na te pytania wymagają głębokiego wniknięcia w pogranicze teorii mnogości i topologii.

Zacznijmy od przykładu, który dobitnie wyjaśnia, że funkcji, która miałaby naturalne pożądane cechy *miary*, nie można określić na *wszystkich* podziorach prostej.

Przykład 4.1 (G. Vitali). Nie istnieje funkcja $\mu: 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, która spełniałaby następujące warunki:

- (i) $\mu([a, b]) = b - a$ dla każdego przedziału $[a, b] \subset \mathbb{R}$;
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (iii) *przeliczalna addytywność*: Jeśli zbiory $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$, są parami rozłączne, to $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;
- (iv) *niezmienniczość ze względu na przesunięcia*: dla każdego zbioru $V \subset \mathbb{R}$ i każdej liczby $t \in \mathbb{R}$ jest $\mu(t + V) = \mu(V)$.

Przypuśćmy, że taka funkcja μ jednak istnieje. Określmy relację w zbiorze \mathbb{R} : przyjmijmy, że $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in \mathbb{Q}$. Łatwo zauważyć, że jest to relacja równoważności: $x \sim x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdyż $x - x = 0$, a $0 \in \mathbb{Q}$; jeśli $x \sim y$, to także $y \sim x$, gdyż $y - x = -(x - y)$ jest liczbą wymierną, gdy $x - y \in \mathbb{Q}$; wreszcie, $x \sim y$ i $y \sim z$ pociąga za sobą $x \sim z$, gdyż $x - z = (x - y) + (y - z)$, a suma dwóch liczb wymiernych jest wymierna.

Każda klasa abstrakcji $[x]$ ma reprezentanta $y \in [0, 1]$; to wynika stąd, że $x \sim x + k$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i każdego $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z aksjomatu wyboru, utwórzmy zbiór $V \subset [0, 1]$, który zawiera dokładnie jednego reprezentanta każdej klasy abstrakcji. Rozpatrzmy zbiór

$$W = \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (t + V),$$

tzn. sumę mnogościową przesunięć $t + V$ zbioru V o wektory wymierne t z przedziału $[-1, 1]$. Ponieważ $V \subset [0, 1]$, więc $W \subset [-1, 2]$. Ponadto, dla różnych t_1, t_2 zbiory $t_1 + V$ i $t_2 + V$ są rozłączne: gdyby $t_1 + v_1 = t_2 + v_2$ dla pewnych $t_1 \neq t_2 \in \mathbb{Q}$ i $v_1, v_2 \in V$, to mielibyśmy $v_1 - v_2 = t_2 - t_1 \in \mathbb{Q}$ i $v_2 \neq v_1$, tzn. $v_1 \sim v_2$ byłyby różnymi elementami tej samej klasy abstrakcji, wbrew definicji V .

Jeśli μ spełnia warunki (i)–(iv), to $\mu(A) \leq \mu(B)$ dla $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Dlatego

$$3 = \mu([-1, 2]) \geq \mu(W) = \mu\left(\bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (t + V)\right) \\ \stackrel{\text{(iii)}}{=} \sum_{t \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mu(t + V) \stackrel{\text{(iv)}}{=} \mu(V) + \mu(V) + \mu(V) + \dots$$

Gdyby $\mu(V) > 0$, to prawa strona byłaby nieskończona. Otrzymujemy więc $\mu(V) = 0$, stąd zaś $\mu(W) = 0 + 0 + \dots = 0$.

Z drugiej strony, zbiór W zawiera cały przedział $[0, 1]$. Istotnie, niech $x \in [0, 1]$ będzie dowolną liczbą. Wybierzmy $v \in V$ tak, aby $x \sim v$; jest to możliwe, gdyż zbiór V zawiera reprezentanta *każdej* klasy abstrakcji. Wtedy $t = x - v \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ i $x = t + v \in t + V \subset W$.

Zatem

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(W) = 0.$$

Ta sprzeczność dowodzi, że nie istnieje funkcja μ , spełniająca warunki (i)–(iv). \square

W przestrzeni \mathbb{R}^3 nawet rezygnacja z przeliczalnej addytywności na rzecz skończonej addytywności nie pomaga: jak udowodnili Banach i Tarski, kulę jednostkową w \mathbb{R}^3 można podzielić na pięć (parami rozłącznych) zbiorów A_i , $1 \leq i \leq 5$, a następnie wskazać pięć izometrii g_i , $1 \leq i \leq 5$, przestrzeni \mathbb{R}^3 takich, że

$$B(0, 1) = g_1(A_1) \cup g_2(A_2) \cup g_3(A_3) = g_4(A_4) \cup g_5(A_5),$$

gdzie każda z dwóch sum jest sumą zbiorów parami rozłącznych. Gdyby więc istniała skończenie addytywna funkcja nieujemna μ , określona na wszystkich podzbiorach \mathbb{R}^3 i niezmiennicza ze względu na izometrie, to mielibyśmy

$$\mu(B(0, 1)) = \sum_{i=1}^5 \mu(A_i) = \sum_{i=1}^5 \mu(g_i(A_i)) = 2\mu(B(0, 1)).$$

(Konstrukcja takiego paradoksalnego rozkładu kuli wykorzystuje, prócz aksjomatu wyboru, fakt, że składanie obrotów w \mathbb{R}^3 nie jest przemienne, a grupa obrotów zawiera podgrupę wolną o dwóch generatorach.)

Podobne przykłady wskazują, że jakieś ograniczenie klasy zbiorów, dla których będziemy określać *miarę*, jest rzeczą konieczną.

4.1 Podstawowe pojęcia. Twierdzenie Carathéodory'ego

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Będziemy używać oznaczenia $[0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\} = \mathbb{R}_+ \cup \{0, +\infty\}$.

Definicja 4.2 (ciało i σ -ciało zbiorów). Powiemy, że rodzina zbiorów $\mathcal{F} \subset 2^X$ jest *ciałem* wtedy i tylko wtedy, gdy

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (ii) Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to także $X \setminus A \in \mathcal{F}$;

(iii) Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Gdy spełniony jest także warunek

(iv) Dla wszystkich $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,

to mówimy, że \mathcal{F} jest σ -ciałem (lub: *ciałem przeliczalnie addytywnym*).

Uwaga 4.3. Korzystając ze wzorów De Morgana, łatwo jest wykazać, że jeśli $\mathcal{F} \subset 2^X$ jest ciałem zbiorów i $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$ oraz $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Istotnie,

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{F},$$

a więc także $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{F}$. Dalej, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{F}$. Podobnie dowodzi się, że każde σ -ciało jest zamknięte ze względu na branie przeliczalnych przecięć. \square

Nietrudno podać kilka prostych przykładów ciał i σ -ciał. Rodzina 2^X wszystkich podzbiorów zbioru X jest zarówno ciałem, jak i σ -ciałem. Rodzina

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N}: A \text{ lub } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}$$

jest ciałem, ale nie jest σ -ciałem: suma przeliczalnie wielu zbiorów skończonych może być zbiorem nieskończonym, którego uzupełnienie też jest nieskończone. Rodzina

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ lub } \mathbb{R} \setminus A \text{ jest zbiorem (co najwyżej) przeliczalnym}\}$$

jest σ -ciałem¹.

Przykład 4.4. Niech $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ będzie dowolną rodziną σ -ciał (odpowiednio: ciał) podzbiorów zbioru X . Wtedy

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \subset 2^X$$

też jest σ -ciałem (odpowiednio: ciałem). To wynika wprost z definicji: każde z \mathcal{F}_i jest zamknięte ze względu na odpowiednie działania na zbiorach, więc część wspólna \mathcal{F}_i też jest zamknięta ze względu na te same działania.

Uwaga 4.5. Z powyższego przykładu wynika, że dla każdej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{G} \subset 2^X$ istnieje *najmniejsze* (ze względu na inkluzję) σ -ciało $\mathcal{F} \subset 2^X$ takie, że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: jest to przecięcie rodziny wszystkich σ -ciał, zawierających \mathcal{G} (jest to rodzina niepusta, gdyż należy do niej σ -ciało 2^X).

Definicja 4.6 (zbiory borelowskie). Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Najmniejsze σ -ciało, zawierające wszystkie zbiory otwarte w przestrzeni X , nazywamy σ -ciałem zbiorów borelowskich w X i oznaczamy $\mathcal{B}(X)$.

Z σ -ciałem $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zbiorów borelowskich w \mathbb{R}^n zetkniemy się wielokrotnie.

¹To łatwo wynika z twierdzenia, orzekającego, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Definicja 4.7 (miara zewnętrzna). Funkcję $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ nazywamy *miarą zewnętrzną* na X , jeśli $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ dla wszystkich $A \subset B \subset X$ i wreszcie

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad \text{dla wszystkich } A_1, A_2, \dots \in 2^X. \quad (4.1)$$

Własność (4.1) nazywa się *przeliczalną podaddytywnością* miary zewnętrznej.

Definicja 4.8 (miara). Niech $\mathcal{F} \subset 2^X$ będzie σ -ciałem. Funkcję $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ nazywamy *miarą* na \mathcal{F} , jeśli $\mu(\emptyset) = 0$ oraz

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{dla wszystkich parami rozłącznych } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}. \quad (4.2)$$

Własność (4.2) nazywa się *przeliczalną addytywnością* miary.

Podamy teraz kilka prostych własności miary, wynikających łatwo z definicji, następnie zaś sformułujemy ważne twierdzenie, wskazujące, jak dla danej miary zewnętrznej μ^* na X wyróżnić pewne σ -ciało $\mathcal{F} \subset 2^X$, na którym funkcja μ^* – jak za dotknięciem czarodziejskiej różdżki – staje się miarą, tzn. spełnia nie tylko (4.1), ale i mocniejszy, naturalny warunek (4.2).

Stwierdzenie 4.9. Niech $\mathcal{F} \subset 2^X$ będzie σ -ciałem, a μ – miarą na \mathcal{F} . Wówczas:

(i) $\mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ dla wszystkich $A \subset B \in \mathcal{F}$;

(ii) jeśli $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, $A_i \in \mathcal{F}$, to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i);$$

(iii) jeśli $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, $A_i \in \mathcal{F}$ i $\mu(A_1) < \infty$, to

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

Dowód. Własność (i), tzw. *monotoniczność* miary, uzyskujemy, kładąc w (4.2) $A_1 = A$, $A_2 = B \setminus A \in \mathcal{F}$ i $A_j = \emptyset$ dla $j \geq 3$. Wtedy $\bigcup A_j = A \cup (B \setminus A) = B$ i zbiory A_j są parami rozłączne. Dlatego, wobec (4.2),

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Aby wykazać (ii), przyjmiemy $P_1 = A_1$ i $P_j = A_j \setminus A_{j-1}$ dla $j = 2, 3, \dots$. Wtedy $\bigcup A_j = \bigcup P_j$, zaś wobec założenia $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ zbiory P_j są parami rozłączne. Dlatego, wobec równości $\mu(P_j) = \mu(A_j) - \mu(A_{j-1})$,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \\ &= \mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + (\mu(A_3) - \mu(A_2)) + \dots \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j), \end{aligned}$$

gdyż $\mu(A_j)$ jest j -tą sumą częściową szeregu $\sum \mu(P_j)$.

Dla dowodu (iii) zauważmy, że na mocy wzorów De Morgana

$$A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \quad \text{gdzie } B_j = A_1 \setminus A_j$$

Zbiory B_j tworzą ciąg wstępujący, tzn. $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$. Na mocy udowodnionych już punktów (i) oraz (ii),

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \stackrel{(i)}{=} \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) \stackrel{(i)}{=} \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Uwaga 4.10. Założenie $\mu(A_1) < \infty$ w Stwierdzeniu 4.9 (iii) jest istotne. Jeśli np. na $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ weźmiemy miarę liczącą, która każdemu zbiorowi $A \subset \mathbb{N}$ przypisuje liczbę jego elementów $\#A$, to dla (nieskończonych) zbiorów $A_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}$ jest $\mu(A_j) = +\infty$, a zatem

$$+\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) > 0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Definicja 4.11 (warunek Carathéodory'ego). Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X . Powiemy, że zbiór $A \subset X$ spełnia warunek Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \quad \text{dla każdego zbioru } Z \subset X. \quad (4.3)$$

Twierdzenie 4.12 (C. Carathéodory). Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X . Rodzina $\mathcal{F} \subset 2^X$ wszystkich zbiorów $A \subset X$, spełniających warunek Carathéodory'ego, jest σ -ciałem. Funkcja

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$$

jest miarą, tzn. spełnia warunek przeliczalnej addytywności (4.2).

Twierdzenie Carathéodory'ego jest bardzo ważne, gdyż ułatwia konstrukcję różnych miar. Wystarczy skonstruować miarę zewnętrzną μ^* (co jest łatwiejsze, gdyż warunki w definicji są słabsze!) na X , a następnie zawęzić dziedzinę funkcji μ^* do rodziny tych zbiorów A , które spełniają (4.3). W taki właśnie sposób konstruujemy w następnym podrozdziale miarę Lebesgue'a na \mathbb{R}^n , tzn. naturalny i ogólny odpowiednik długości przedziału w \mathbb{R} , pola wielokąta w \mathbb{R}^2 czy objętości wielościanu w \mathbb{R}^3 , określony jednak dla bardzo szerokiej klasy podzbiorów przestrzeni.

Co ciekawe, twierdzenie Carathéodory'ego nie wydaje się łatwe, gdyż warunek (4.3) nie jest szczególnie naturalny. Jednak, jak zobaczymy, dowód wprawdzie jest długi, ale nie jest zbyt trudny: w gruncie rzeczy polega na planowym i zmundnym, choć dość prostym sprawdzaniu kolejnych warunków.

Dowód. Krok 1: Zbiór pusty należy do \mathcal{F} , gdyż dla każdego Z jest $\mu^*(Z) = 0 + \mu^*(Z \setminus \emptyset) = \mu^*(Z \cap \emptyset) + \mu^*(Z \setminus \emptyset)$.

Krok 2: rodzina \mathcal{F} jest zamknięta ze względu na branie dopełnień. To wynika z faktu, że warunek Carathéodory'ego można zapisać w symetrycznej postaci

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus (X \setminus A)) + \mu^*(Z \cap (X \setminus A)).$$

Krok 3: jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cup B \in \mathcal{F}$. Aby to wykazać, piszemy $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oraz

$$Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup ((Z \setminus A) \cap B), \quad (4.4)$$

$$Z \setminus (A \cup B) = (Z \setminus A) \setminus B, \quad (4.5)$$

następnie zaś szacujemy, korzystając z podaddytywności μ^* ,

$$\begin{aligned} & \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \\ & \stackrel{(4.4)}{\leq} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*((Z \setminus A) \cap B) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \\ & \stackrel{(4.5)}{=} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*((Z \setminus A) \cap B) + \mu^*((Z \setminus A) \setminus B) \\ & \stackrel{(4.3)}{=} \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \stackrel{(4.3)}{=} \mu^*(Z) \end{aligned}$$

Nierówność przeciwna, $\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B))$, zachodzi na mocy podaddytywności funkcji μ^* . Zatem zbiór $A \cup B$ spełnia warunek Carathéodory'ego.

Krok 4. Wiemy już, że \mathcal{F} jest ciałem zbiorów. Dlatego (patrz Uwaga 4.3) iloczyn oraz różnica dwóch zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego też spełnia warunek Carathéodory'ego.

Krok 5: addytywność μ^* na \mathcal{F} . Niech $A, B \in \mathcal{F}$ będą zbiorami rozłącznymi. Zamieniając w warunku Carathéodory'ego (4.3) zbiór Z na $Z \cap (A \cup B)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap (A \cup B)) &= \mu^*(Z \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*((Z \cap (A \cup B)) \setminus A) \\ &= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B), \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdyż dla A, B rozłącznych jest

$$Z \cap (A \cup B) \cap A = Z \cap A, \quad (Z \cap (A \cup B)) \setminus A = Z \cap B.$$

Dla $Z = X$ otrzymujemy

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Przez łatwą indukcję względem m dowodzimy, że suma skończonej liczby zbiorów z \mathcal{F} też należy do \mathcal{F} . Ponadto, dla dowolnego $Z \subset X$ zachodzi odpowiednik równości (4.6), mianowicie

$$\mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) \quad \text{dla } A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F} \text{ parami rozłącznych.} \quad (4.7)$$

Krok 6: rodzina \mathcal{F} jest σ -ciałem. Wystarczy w tym celu sprawdzić, że

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F} \quad \text{dla } A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots, \text{ parami rozłącznych,} \quad (4.8)$$

gdyż suma dowolnych zbiorów $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots$, jest równa sumie zbiorów

$$P_1 = A_1, \quad P_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \dots, \quad P_m = A_m \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}), \quad \dots,$$

które już są parami rozłączne (i też należą do \mathcal{F} , gdyż \mathcal{F} jest ciałem).

Niech więc odtąd $A_j \in \mathcal{F}$, gdzie $j \in \mathbb{N}$, będą parami rozłączne. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Niech $Z \in 2^X$ będzie dowolnym zbiorem. Korzystając z (4.7) i monotoniczności μ^* , piszemy

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^m A_j\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j\right) \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j\right) \geq \sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right). \end{aligned}$$

Zatem, wszystkie sumy częściowe szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_j)$ o wyrazach dodatnich są ograniczone. Szereg ten jest więc zbieżny, a jego suma spełnia nierówność

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Wobec przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej μ^* , otrzymujemy stąd

$$L = \mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P.$$

Nierówność $L \leq P$ jest oczywista; dlatego $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ spełnia warunek Carathéodory'ego.

Krok 7: przeliczalna addytywność μ^* na \mathcal{F} . Załóżmy, że zbiory $A_j \in \mathcal{F}$, gdzie $j = 1, 2, \dots$, są parami rozłączne. Wobec (4.7) dla $Z = X$ oraz monotoniczności μ^* ,

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) \stackrel{(4.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu^*(A_j) \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots$$

Przechodząc do granicy $m \rightarrow \infty$ po prawej stronie tej nierówności, otrzymujemy

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Dzięki przeliczalnej podaddytywności miary zewnętrznej μ^* , ostatnia nierówność jest w istocie równością. Dowód całego Twierdzenia 4.12 jest zakończony. \square

Stwierdzenie 4.13. *Jeśli μ^* jest miarą zewnętrzną na X i $\mu^*(A) = 0$ dla pewnego $A \subset X$, to A spełnia warunek Carathéodory'ego.*

Dowód. Dla każdego $Z \subset X$ mamy, przy tych założeniach, $0 = \mu^*(A) \geq \mu^*(Z \cap A) = 0$ i dlatego

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus A) \leq \mu^*(Z).$$

To spostrzeżenie kończy dowód. \square

Samo twierdzenie Carathéodory'ego nie orzeka wprawdzie, jak duża jest rodzina zbiorów \mathcal{F} spełniających warunek (4.3). Jednak przy pewnych łagodnych założeniach dodatkowych, nałożonych na μ^* , σ -ciało \mathcal{F} jest dostatecznie obszerne.

Definicja 4.14. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X . Każdy zbiór $A \subset X$ spełniający warunek Carathéodory'ego, nazywamy zbiorem μ^* -mierzalnym, a σ -ciało \mathcal{F} , o którym mowa w Twierdzeniu 4.12, oznaczamy $\mathcal{F}(\mu^*)$.

Definicja 4.15. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że miara zewnętrzna $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ jest *miarą zewnętrzną metryczną*, jeśli

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

dla wszystkich $A, B \subset X$, których *odstęp* $\text{dist}(A, B) > 0$, gdzie

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} (\text{dist}(x, B)), \quad \text{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \varrho(x, y).$$

Twierdzenie 4.16. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, zaś μ^* – miarą zewnętrzną metryczną na X . Wówczas σ -ciało zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(X)$ jest zawarte w σ -ciele $\mathcal{F}(\mu^*)$.

Dowód. Z uwagi na definicję $\mathcal{B}(X)$, wystarczy wykazać, że każdy zbiór otwarty $\Omega \subset X$ należy do $\mathcal{F}(\mu^*)$.

Ustalmy zbiór otwarty $\Omega \subset X$ i niech

$$\Omega_m = \left\{ x \in \Omega : \varrho(x, X \setminus \Omega) > \frac{1}{m} \right\} \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots$$

Wtedy $\text{dist}(\Omega_m, X \setminus \Omega) \geq \frac{1}{m} > 0$. Dalej, niech

$$P_m = \left\{ x \in \Omega : \frac{1}{m} < \varrho(x, X \setminus \Omega) \leq \frac{1}{m-1} \right\} \quad \text{dla } m = 2, 3, \dots$$

Zauważmy, że

$$\Omega \setminus \Omega_m = P_{m+1} \cup P_{m+2} \cup P_{m+3} \cup \dots \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

a ponadto

$$\text{dist}(P_i, P_j) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{i-1} \quad \text{dla } i > j + 1, j \geq 2 \quad (4.10)$$

(to nietrudny wniosek z nierówności trójkąta). Aby sprawdzić, że zbiór Ω spełnia warunek Carathéodory'ego, weźmy dowolny zbiór $Z \subset X$. Wystarczy wykazać, że

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega). \quad (4.11)$$

Jak widać, bez zmiany ogólności możemy przyjąć, że $\mu^*(Z) < \infty$. Ponieważ μ^* jest miarą zewnętrzną metryczną, więc na mocy (4.10) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap P_{2j-1}) = \mu^*(Z \cap (P_1 \cup P_3 \cup \dots \cup P_{2m-1})) \leq \mu^*(Z)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^m \mu^*(Z \cap P_{2j}) = \mu^*(Z \cap (P_2 \cup P_4 \cup \dots \cup P_{2m})) \leq \mu^*(Z).$$

Zatem

$$\sum_{j=1}^{2m} \mu^*(Z \cap P_j) \leq 2\mu^*(Z) < \infty \quad \text{dla każdego } m = 1, 2, \dots,$$

tzn. szereg $\sum \mu^*(Z \cap P_j)$ jest zbieżny. Dlatego dzięki (4.9) otrzymujemy

$$\mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_j) \rightarrow 0 \quad \text{dla } m \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Ponieważ $\text{dist}(\Omega_m, X \setminus \Omega) \geq \frac{1}{m} > 0$, więc

$$\mu^*(Z \cap \Omega_m) + \mu^*\left(\underbrace{Z \cap (X \setminus \Omega)}_{=Z \setminus \Omega}\right) = \mu^*((Z \cap \Omega_m) \cup (Z \setminus \Omega)) \leq \mu^*(Z).$$

Przeto

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega) &\leq \mu^*(Z \cap \Omega_m) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) + \mu^*(Z \setminus \Omega) \\ &\leq \mu^*(Z) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus \Omega_m)) \end{aligned}$$

i w granicy $m \rightarrow \infty$, dzięki warunkowi (4.12), $\mu^*(Z \cap \Omega) + \mu^*(Z \setminus \Omega) \leq \mu^*(Z)$. \square

4.2 Konstrukcja i własności miary Lebesgue'a w \mathbb{R}^n

W tym podrozdziale przyjmiemy $X = \mathbb{R}^n$. W przestrzeni \mathbb{R}^n rozpatrujemy metrykę euklidesową. Definiujemy także dwa porządki częściowe w \mathbb{R}^n : piszemy $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i < y_i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$, zaś $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \leq y_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Definicja 4.17 (przedziały n -wymiarowe). Załóżmy, że $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{x} < \mathbf{y}$. Zbiory

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} < \mathbf{z} < \mathbf{y}\} \quad \text{oraz} \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}]_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{z} \preccurlyeq \mathbf{y}\}$$

nazywamy, odpowiednio, n -wymiarowym przedziałem otwartym i n -wymiarowym przedziałem domkniętym o końcach \mathbf{x} i \mathbf{y} . Odcinki $[x_i, y_i] \subset \mathbb{R}$ nazywamy *krawędziami* takich przedziałów.

Czytelnik zechce zauważyć, że przedziały 2-wymiarowe to prostokąty, a przedziały 3-wymiarowe to prostopadłościany. Przedział domknięty jest po prostu iloczynem kartezjańskim swoich krawędzi,

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_n = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times \dots \times [x_n, y_n].$$

Uwaga 4.18. Jeśli $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \dots = y_n - x_n$, to przedział $P = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]_n$ nazywamy *kostką* (domkniętą).

Definicja 4.19 (objętość przedziału n -wymiarowego). Jeśli P jest przedziałem o końcach $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, to liczbę

$$\text{vol}(P) = \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)$$

nazywamy *objętością przedziału P* .

Zdefiniujemy teraz miarę zewnętrzną Lebesgue'a w \mathbb{R}^n .

Definicja 4.20. Dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ kładziemy

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(P_j) : \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ jest rodziną przedziałów pokrywającą } A \right\}.$$

Uwaga 4.21. W powyższej definicji można rozpatrywać tylko przedziały domknięte, albo tylko przedziały otwarte, albo przedziały obu rodzajów. Nie wpływa to na wartość $\lambda_n^*(A)$. Wnikliwy Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Stwierdzenie 4.22. Funkcja λ_n^* jest miarą zewnętrzną na \mathbb{R}^n .

Dowód. Po pierwsze, $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$, gdyż zbiór pusty można, dla każdego $\varepsilon > 0$, przykryć jednym przedziałem o objętości ε^n . Po drugie, dla $A \subset B$ jest $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(B)$; to wynika wprost z definicji kresu dolnego, gdyż każda przeliczalna rodzina, która pokrywa zbiór B , pokrywa także A .

Pozostaje sprawdzić przeliczalną podaddytywność λ_n^* . Niech $A_j \subset \mathbb{R}^n$ dla $j = 1, 2, \dots$. Bez zmniejszenia ogólności niech $\lambda_n^*(A_j) < \infty$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ dobierzmy taką rodzinę przedziałów $\{P_{j,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ pokrywającą zbiór A_j , żeby

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Sumując te nierówności (kolejność sumowania nie gra roli, gdyż mamy do czynienia ze zbieżnymi szeregami o wyrazach dodatnich), otrzymujemy

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Rodzina $\{P_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ jest przeliczalna i pokrywa zbiór $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Dlatego, z definicji,

$$\lambda_n^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$, kończymy dowód. \square

Twierdzenie 4.23. Funkcja λ_n^* jest miarą zewnętrzną metryczną na \mathbb{R}^n .

Dowód. Niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i $\text{dist}(A, B) > 2d > 0$. Aby wykazać, że $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B)$, wystarczy sprawdzić nierówność

$$\lambda_n^*(A \cup B) \geq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B), \quad (4.13)$$

gdyż wiemy już, że λ_n^* jest podaddytywna.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz przeliczalną rodzinę \mathcal{P} przedziałów domkniętych pokrywającą zbiór $A \cup B$ i taką, że

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \text{vol}(P) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Każdy przedział $P \in \mathcal{P}$ możemy rozdrobnić, tzn. podzielić na $m = k^n$ przystających przedziałów domkniętych P_1, \dots, P_m , dzieląc każdą krawędź P na k równych części. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że wtedy

$$\text{vol}(P) = \sum_{i=1}^m \text{vol}(P_i) = m \cdot \text{vol}(P_1) = k^n \cdot \text{vol}(P_1).$$

Dobierając do danego P odpowiednio dużą liczbę $k = k(P)$, uzyskamy wszystkie przedziały P_i o średnicy mniejszej niż d . Można więc bez zmniejszenia ogólności założyć, że \mathcal{P} składa się tylko z przedziałów o średnicy mniejszej niż d . Każdy z tych przedziałów może przecinać co najwyżej jeden ze zbiorów A i B , gdyż $\text{dist}(A, B) > 2d$. Usuńmy z \mathcal{P} te przedziały, które nie mają punktów wspólnych z $A \cup B$ i otrzymaną rodzinę podzielmy na dwie, \mathcal{P}_A i \mathcal{P}_B , złożone odpowiednio z przedziałów, mających punkty wspólne z A i przedziałów, mających punkty wspólne z B . Jest jasne, że \mathcal{P}_A pokrywa A , zaś \mathcal{P}_B pokrywa B . Dlatego

$$\lambda_n^*(A) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_A} \text{vol}(P), \quad \lambda_n^*(B) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_B} \text{vol}(P).$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_A} \text{vol}(P) + \sum_{P \in \mathcal{P}_B} \text{vol}(P) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}} \text{vol}(P) \leq \lambda_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$, dostajemy warunek (4.13), co kończy dowód. \square

Definicja 4.24. Miara zewnętrzna λ_n^* ograniczona do σ -ciała $\mathcal{F}(\lambda_n^*) =: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ podzbiorów λ_n^* -mierzalnych przestrzeni \mathbb{R}^n nazywa się *miarą Lebesgue'a* w \mathbb{R}^n .

Elementy σ -ciała $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a* w \mathbb{R}^n , lub krótko: *zbiorami λ_n -mierzalnymi*. Dla $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ piszemy $\lambda_n^*(A) = \lambda_n(A)$.

Aby opisać zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a nieco dokładniej, wprowadzimy dwie klasy podzbiorów \mathbb{R}^n .

Definicja 4.25. Zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się *zbiorem klasy G_δ* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory otwarte $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, takie, że

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Zbiór F jest *klasy F_σ* wtedy i tylko wtedy, gdy jego uzupełnienie $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest zbiorem klasy G_δ .

Inaczej mówiąc, zbiory klasy G_δ to przeliczalne przecięcia zbiorów otwartych, a zbiory klasy F_σ to przeliczalne sumy zbiorów domkniętych. Każdy zbiór otwarty jest oczywiście klasy G_δ , a każdy zbiór domknięty jest klasy F_σ . Zbiór liczb wymiernych jest klasy F_σ , bo jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów jednopunktowych, ale nie jest klasy G_δ (to wynika z twierdzenia Baire'a, które Czytelnik poznał na wykładach z topologii). Każdy przedział w \mathbb{R} jest jednocześnie zbiorem klasy G_δ i F_σ .

Wprost z definicji wynika, że zarówno zbiory klasy G_δ , jak i zbiory klasy F_σ , są zbiorami borelowskimi.

Twierdzenie 4.26 (charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a).
Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

- (i) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $A \subset \Omega$ i $\lambda_n^*(\Omega \setminus A) < \varepsilon$;
- (iii) Istnieje zbiór $G \subset \mathbb{R}^n$ typu G_δ taki, że $A \subset G$ i $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$;
- (iv) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $F \subset A$ i $\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon$;
- (v) Istnieje zbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ typu F_σ taki, że $F \subset A$ i $\lambda_n^*(A \setminus F) = 0$.

Dowód. (i) \Rightarrow (ii). Przedstawmy zbiór A jako sumę zbiorów mierzalnych i ograniczonych,

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad A_1 = A \cap B(\mathbf{0}, 1), \quad A_j = A \cap (B(\mathbf{0}, j) \setminus B(\mathbf{0}, j-1)) \text{ dla } j \geq 2.$$

Mierzalność A_j wynika z mierzalności kul otwartych (które należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) i z faktu, że $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest ciałem.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ wybierzmy rodzinę \mathcal{P}_j przedziałów otwartych $\{P_{j,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, pokrywającą A_j i taką, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \lambda_n^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}. \quad (4.14)$$

Niech Ω_j będzie sumą wszystkich przedziałów rodziny \mathcal{P}_j . Oczywiście, Ω_j jest zbiorem otwartym. Ponadto,

$$\lambda_n(A_j) \leq \lambda_n(\Omega_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(P_{j,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(P_{j,k}) \leq \lambda_n(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} < \infty,$$

gdyż zbiór A_j zawiera się w pewnym przedziale, a miara Lebesgue'a każdego przedziału wprost z definicji jest mniejsza lub równa od jego objętości. Ponieważ Ω_j ma miarę skończoną i $A_j \subset \Omega_j$, więc

$$\lambda_n(\Omega_j \setminus A_j) = \lambda_n(\Omega_j) - \lambda_j(A_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Niech $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$; wobec otwartości wszystkich Ω_j zbiór Ω jest otwarty, a dzięki monotoniczności i przeliczalnej addytywności miary

$$\lambda_n(\Omega \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(\Omega_j \setminus A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

(ii) \Rightarrow (iii). Dla $m = 1, 2, \dots$ wybierzmy zbiór otwarty $\Omega_m \supset A$ tak, aby $\lambda_n^*(\Omega_m \setminus A) < 1/m$. Zbiór $G = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m$ jest typu G_δ , $A \subset G$ i mamy

$$\lambda_n^*(G \setminus A) \leq \lambda_n^*(\Omega_m \setminus A) \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0 \quad \text{dla } m \rightarrow \infty.$$

Zatem $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$ i otrzymaliśmy warunek (iii).

(iii) \Rightarrow (i). Każdy zbiór G typu G_δ jest borelowski (jako przecięcie przeliczalnie wielu zbiorów otwartych), więc jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Mamy też $\lambda_n^*(G \setminus A) = 0$, zbiór $G \setminus A$ jest więc mierzalny na mocy Stwierdzenia 4.13. Ponieważ $A \subset G$, więc

$$A = G \setminus (G \setminus A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),$$

jako różnica dwóch zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Aby zakończyć cały dowód, zauważmy, że (iv) zachodzi dla $\mathbb{R}^n \setminus A$ wtedy i tylko wtedy, gdy (ii) zachodzi dla A . Stąd i z praw De Morgana wynika równoważność (ii) oraz (iv). Podobnie uzyskuje się równoważność (iii) oraz (v). \square

Wniosek 4.27. *Każdy zbiór $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest sumą pewnego zbioru borelowskiego i pewnego zbioru Z takiego, że $\lambda_n(Z) = 0$*

Dowód. Teza wynika z równoważności (i) \Leftrightarrow (v) w ostatnim twierdzeniu, gdyż każdy zbiór F typu F_σ należy do σ -ciała zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. \square

Uwaga 4.28. Wynika stąd, że σ -ciało $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest istotnie większe niż $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: każdy podzbiór zbioru miary zero jest zbiorem mierzalnym, a ponieważ istnieją zbiory miary zero i mocy continuum (np. zbiór Cantora, z którym Czytelnik zetknął się podczas wykładów Analizy I), więc rodzina $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest równoliczna z rodziną $2^{\mathbb{R}^n}$ wszystkich podzbiorów \mathbb{R}^n , natomiast $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jest "zaledwie" mocy continuum. \square

Znamy w tej chwili formalną definicję miary Lebesgue'a λ_n i σ -ciała $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, na którym jest określona. Nie potrafimy jednak obliczać miary zbyt wielu zbiorów (wyjąwszy, być może, zbiory miary zero). Zaczniemy od prostego stwierdzenia, potwierdzającego, że – zgodnie z naturalną intuicją – miara Lebesgue'a przedziału n -wymiarowego jest równa jego objętości.

Stwierdzenie 4.29. *Dla każdego przedziału P jest $\text{vol}(P) = \lambda_n(P)$.*

Dowód. Z konstrukcji wynika, że $\lambda_n(P) \leq \text{vol}(P)$: przedział sam jest swoim (co najwyżej przeliczalnym) pokryciem, a miarę zewnętrzną definiujemy jako kres dolny sum objętości dla wszystkich pokryć. Wykażemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $\text{vol}(P) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon$; to wystarczy, żeby zakończyć dowód.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Bez zmniejszenia ogólności założmy, że P jest przedziałem domkniętym. Dobierzmy rodzinę \mathcal{R} przedziałów otwartych R_i , $i = 1, 2, \dots$ pokrywającą P i taką, że

$$\sum_{R_i \in \mathcal{R}} \text{vol}(R_i) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Ponieważ P jest zbiorem zwartym, więc z rodziny \mathcal{P} można wybrać podrodzinę skończoną R_1, \dots, R_N , stanowiącą pokrycie P . Mamy zatem

$$\sum_{i=1}^N \text{vol}(R_i) \leq \sum_{R_i \in \mathcal{R}} \text{vol}(R_i) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Niech $d > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia R_1, \dots, R_N zbioru P . Podzielmy przedział P na $m = k^n$ przystających przedziałów P_j , dzieląc każdą krawędź na k równych odcinków.

Dla dostatecznie dużego k każdy z przedziałów P_j ma średnicę mniejszą niż $d/2$, więc jest zawarty w którymś z przedziałów R_1, \dots, R_N . Dlatego

$$\text{vol}(P) = \sum_{i=j}^m \text{vol}(P_j) \leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\{j: P_j \subset R_i\}} \text{vol}(P_j) \right) \leq \sum_{i=1}^N \text{vol}(R_i) \leq \lambda_n(P) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$, uzyskujemy nierówność $\text{vol}(P) \leq \lambda_n(P)$. \square

Stwierdzenie 4.30. *Dla każdego zbioru $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zbiór $\mathbf{x} + A$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i $\lambda_n(\mathbf{x} + A) = \lambda_n(A)$.*

Dowód. Mierzalność $\mathbf{x} + A$ uzyskujemy, korzystając z Twierdzenia 4.26. Równość miar obu zbiorów łatwo wynika stąd, że objętość przedziału jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Przesuwając każdy element pokrycia zbioru A o wektor \mathbf{x} , uzyskamy pokrycie zbioru $\mathbf{x} + A$; stąd wynika, że $\lambda_n(\mathbf{x} + A) \leq \lambda_n(A)$, a ponieważ $A = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + A)$, to zachodzi także nierówność przeciwna. \square

Wykażemy teraz, że niezmienniczość ze względu na przesunięcia charakteryzuje miarę Lebesgue'a z dokładnością do stałego czynnika. Ta charakteryzacja pozwoli nam później wyjaśnić, jak zmienia się miara Lebesgue'a, gdy zbiory mierzalne poddajemy przekształceniom liniowym (skądinąd, ta własność miary jest kluczem do wielowymiarowego twierdzenia o zamianie zmiennych w całce).

Twierdzenie 4.31. *Załóżmy, że μ jest miarą na σ -ciele $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli $\mu(A) = c \cdot \lambda_n(A)$ dla wszystkich $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i ponadto $\mu(P)$ jest skończona i dodatnia dla każdego przedziału P , to wówczas*

$$\mu(A) = c \cdot \lambda_n(A), \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad (4.15)$$

gdzie $c = \mu([0, 1]^n)$.

W dowodzie tego twierdzenia posłużymy się dwoma lematami, które zasługują na oddzielne odnotowanie.

Lemat 4.32. *Jeśli $H \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru $k < n$, a μ miarą niezmienniczą ze względu na przesunięcia, skończoną na przedziałach i określoną na pewnym σ -ciele, zawierającym $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, to $\mu(H) = 0$.*

Lemat 4.33. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Oznaczmy przez \mathcal{P}_m , gdzie $m = 0, 1, 2, \dots$, rodzinę wszystkich kostek w \mathbb{R}^n o krawędziach długości $1/2^m$ i wszystkich wierzchołkach w punktach $k/2^m$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Istnieje wtedy przeliczalna rodzina $\{Q_i\}_{i \in I}$ kostek z $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots$, o wnętrzach parami rozłącznych, taka, że*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} Q_i.$$

Uwaga. Rodzinę $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots$ nazywa się czasem *kostkami diadycznymi*. Kostki z \mathcal{P}_{m+1} (inaczej: tzw. *kostki (m+1)-szej generacji*) powstają z kostek rodziny \mathcal{P}_m , tj. kostek m -tej generacji, przez podział wszystkich krawędzi na dwie równe części (jedna kostka z \mathcal{P}_m jest wtedy dzielona na 2^n kostek z \mathcal{P}_{m+1} , mających parami rozłączne wnętrza).

Dowód Lematu 4.32. Dla $m = 1, 2, \dots$ połóżmy $H_m = H \cap B(\mathbf{0}, m)$. Zbiór H_m jest μ -mierzalny (należy do dziedziny μ), gdyż H i kula $B(\mathbf{0}, m)$ są zbiorami borelowskimi.

Ponieważ $\dim H < n$, więc istnieje wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ prostopadły do H . Niech

$$H_{m,j} = H_m + \frac{1}{j} \mathbf{v}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Przy ustalonym m zbiory $H_{m,j}$ są parami rozłączne. Są też zawarte w kuli $B(\mathbf{0}, m+1)$; to wynika z nierówności trójkąta (do wektorów z H_m dodajemy wektor \mathbf{v}/j , którego norma nie przekracza 1). Miara μ jest skończona na przedziałach i niezmiennicza ze względu na przesunięcia; dlatego

$$\infty > \mu(B(\mathbf{0}, m+1)) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_{m,j}\right) = \mu(H_{m,1}) + \mu(H_{m,2}) + \mu(H_{m,3}) + \dots,$$

stąd zaś $\mu(H_{m,1}) = \mu(H_{m,2}) = \mu(H_{m,3}) = \dots = \mu(H_m)$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Wobec Stwierdzenia 4.9 (ii), $\mu(H) = \lim \mu(H_m) = 0$. \square

Dowód Lematu 4.33. Wybieramy kolejne kostki diadyczne zawarte w Ω indukcyjnie, zaczynając od największych (o krawędzi 1), a potem przechodząc do kolejnych generacji i dokładając nowe, coraz drobniejsze kostki, które mieszczą się w Ω . Niech K_0 będzie sumą wszystkich kostek rodziny \mathcal{P}_0 zawartych w Ω . Jeśli $m = 0, 1, 2, \dots$ i zbiory $K_0, \dots, K_m \subset \Omega$ zostały już zdefiniowane, to przyjmujemy jako K_{m+1} sumę tych kostek z rodziny \mathcal{P}_{m+1} , które są zawarte w Ω i mają wnętrza rozłączne z $K_0 \cup \dots \cup K_m$.

Zbiór $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots$ jest sumą przeliczalnie wielu kostek diadycznych o wnętrzach parami rozłącznych. Wprost z definicji K_m wynika, że $K_m \subset \Omega$ dla $m = 0, 1, 2, \dots$, więc oczywiście $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots \subset \Omega$. Inkluzja przeciwna wynika z otwartości Ω ; uzupełnienie nietrudnych szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie. \square

Dowód Twierdzenia 4.31. Niech

$$\xi(A) = \frac{\mu(A)}{\mu([0, 1]^n)}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Wystarczy wykazać, że $\xi = \lambda_n$ na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dowód przeprowadzimy, wzbogacając stopniowo klasę zbiorów, na której obie miary są równe.

Krok 1. Miary ξ i λ_n pokrywają się na kostkach diadycznych. To łatwo wynika z niezmienniczości obu miar ze względu na przesunięcia i z Lematu 4.32.² Istotnie, ponieważ dla $k = 0, 1, 2, \dots$ kostka $[0, 1]^n$ jest sumą 2^{kn} przystających kostek (o wnętrzach parami rozłącznych), które są obrazami $[0, 1/2^k]^n$ w odpowiednich przesunięciach, więc

$$1 = \xi([0, 1]^n) = 2^n \xi([0, \frac{1}{2}]^n) = 2^{2n} \xi([0, \frac{1}{4}]^n) = \dots = 2^{kn} \xi([0, \frac{1}{2^k}]^n) = \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem $\xi(Q) = 2^{-kn} = \lambda_n(Q)$ dla wszystkich $Q \in \mathcal{P}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Krok 2. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach otwartych. To wynika z poprzedniego kroku dowodu i z Lematu 4.33. Jeśli $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, to

$$\xi(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i) = \lambda_n(\Omega);$$

²Można stosować ten lemat do miary ξ , która jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia.

pierwsza i trzecia równość zachodzą, gdyż miary ξ i λ_n znikają na podprzestrzeniach afinicznych wymiaru mniejszego niż n .

Krok 3. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach ograniczonych typu G_δ . Jeśli zbiór G jest ograniczony i typu G_δ , to $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, gdzie Ω_j są zbiorami otwartymi, ograniczonymi. Dlatego, wobec Stwierdzenia 4.9 (iii),

$$\xi(G) = \lim_{j \rightarrow \infty} \xi(\Omega_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_n(\Omega_j) = \lambda_n(G).$$

Krok 4. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach ograniczonych miary Lebesgue'a zero. Istotnie, jeśli $\lambda_n(Z) = 0$, to na mocy Twierdzenia 4.26 istnieje G ograniczony i typu G_δ taki, że $Z \subset G$ i $\lambda_n(G) = 0$. Wtedy jednak $\xi(G) = 0$, więc $0 \leq \xi(Z) \leq \xi(G) = 0$.

Krok 5. Miary ξ i λ_n pokrywają się na zbiorach ograniczonych, mierzalnych w sensie Lebesgue'a. To wynika natychmiast z Twierdzenia 4.26: wynika zeń łatwo, że każdy zbiór mierzalny i ograniczony jest sumą pewnego zbioru ograniczonego typu G_δ i rozłącznego z nim zbioru miary zero.

Ponieważ każdy zbiór $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest sumą wstępującego ciągu zbiorów mierzalnych i ograniczonych (można np. wziąć $A_j = A \cap B(0, j)$), więc na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii) miary ξ i λ_n są równe na całym σ -ciele $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. \square

Omówimy teraz pewną charakteryzację wyznacznika macierzy, która pozwoli nam podać wzór na miarę Lebesgue'a liniowego obrazu zbioru mierzalnego.

Lemat 4.34. Załóżmy, że funkcja $c: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ma dwie własności: $c(s \cdot \text{Id}) = |s|^n$ dla każdej liczby $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ i $c(AB) = c(A)c(B)$ dla wszystkich macierzy $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Wówczas

$$c(A) = |\det A| \quad \text{dla wszystkich } A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Dowód. Oznaczmy przez A_j macierz, która poza przekątną ma same zera, a na przekątnej same jedynki, z wyjątkiem j -tego miejsca, gdzie znajduje się liczba -1 . Mamy $A_j^2 = \text{Id}$ i dla każdej liczby $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest

$$|s|^{2n} = c(s^2 \cdot A_j^2) = (c(s \cdot A_j))^2.$$

Ponieważ $c(A) \geq 0$ dla każdej nieosobliwej macierzy A , więc $c(s \cdot A_j) = |s|^n$.

Niech teraz, dla $1 \leq k \neq l \leq n$, δ_{kl} oznacza macierz kwadratową, złożoną z samych zer, za wyjątkiem jedynki w k -tym wierszu i l -tej kolumnie. Połóżmy $M_{kl}(s) = \text{Id} + s\delta_{kl}$. Nietrudno sprawdzić (Czytelnik zechce uzupełnić szczegóły), że zachodzą równości $\delta_{kl} \cdot A_k = \delta_{kl} = -A_k \cdot \delta_{kl}$. Dlatego

$$A_k \cdot \delta_{kl} \cdot A_k = -\delta_{kl},$$

stąd zaś $A_k \cdot M_{kl}(s) \cdot A_k = M_{kl}(-s)$ i wobec równości $c(A_k) = 1$ jest

$$c(M_{kl}(-s)) = c(A_k)^2 c(M_{kl}(s)) = c(M_{kl}(s)). \quad (4.16)$$

Jednak

$$M_{kl}(s)M_{kl}(-s) = (\text{Id} + s\delta_{kl})(\text{Id} - s\delta_{kl}) = \text{Id} - s^2 \cdot \delta_{kl}^2 = \text{Id}$$

i dlatego równość (4.16), łącznie z założeniem $c(AB) = c(A)c(B)$, pociąga za sobą warunek

$$c(M_{kl}(\pm s)) = 1, \quad c(A \cdot M_{kl}(\pm s)) = c(M_{kl}(\pm s) \cdot A) = c(A) \quad \text{dla } A \in GL(n, \mathbb{R}). \quad (4.17)$$

Widać więc, że funkcja $c(A)$ nie zmienia wartości, gdy daną macierz mnożymy przez $M_{kl}(\pm s)$. Zauważmy jednak, że iloczyn

$$M_{kl}(s)B = B + s \cdot \delta_{kl} \cdot B$$

powstaje w ten sposób, że do k -tego wiersza macierzy B dodajemy l -ty wiersz tej macierzy pomnożony przez s , a pozostałe wiersze pozostawiamy bez zmian. Podobnie, iloczyn $BM_{kl}(s) = B + s \cdot B \cdot \delta_{kl}$ powstaje tak, że do l -tej kolumny B dodajemy k -tą kolumnę, pomnożoną przez s (a pozostałych kolumn nie zmieniamy).

Wiadomo z algebry liniowej, że za pomocą takich operacji na wierszach i kolumnach, tzn. za pomocą mnożenia przez $M_{kl}(\pm s)$, można każdą macierz nieosobliwą przekształcić w macierz diagonalną $s \cdot \text{Id}$ lub $s \cdot A_n$, gdzie $s = \sqrt[n]{|\det A|}$. Ponieważ zaś

$$c(s \cdot \text{Id}) = c(s \cdot A_n) = |s|^n$$

więc ostatecznie $c(A) = |s|^n = |\det A|$. \square

Twierdzenie 4.35. Niech $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, a $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – przekształceniem liniowym. Wówczas zbiór $\Phi(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i zachodzi równość

$$\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi| \cdot \lambda_n(A). \quad (4.18)$$

Dowód. Jeśli $\det \Phi = 0$, to obraz $\text{im } \Phi = \Phi(\mathbb{R}^n)$ przekształcenia Φ jest podprzestrzenią liniową wymiaru mniejszego niż n . Z Lematu 4.32 wynika, że $\lambda_n(\Phi(\mathbb{R}^n)) = 0$, a więc dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ zbiór $\Phi(A) \subset \Phi(\mathbb{R}^n)$ jest mierzalny i ma miarę zero. Innymi słowy, teza twierdzenia zachodzi, gdy $\det \Phi = 0$.

Niech zatem odąd $\det \Phi \neq 0$. Przekształcenie Φ jest wtedy homeomorfizmem \mathbb{R}^n na \mathbb{R}^n ; obrazy zbiorów otwartych są więc otwarte (to wynika z ciągłości Φ^{-1}), obrazy zbiorów typu G_δ są zbiorami typu G_δ , zaś obrazy zbiorów miary Lebesgue'a zero są zbiorami miary Lebesgue'a zero.³ Dlatego, wobec Twierdzenia 4.26, obrazy zbiorów mierzalnych są zbiorami mierzalnymi.

Pozostaje udowodnić wzór (4.18). Połóżmy

$$\mu_\Phi(A) = \lambda_n(\Phi(A)); \quad (4.19)$$

łatwo sprawdzić, że μ_Φ jest miarą na σ -ciele $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, niezmienniczą ze względu na przesunięcia. Z Twierdzenia 4.31 wynika, że

$$\mu_\Phi(A) = c(\Phi) \cdot \lambda_n(A) \quad \text{dla } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad (4.20)$$

gdzie stała

$$c(\Phi) = \mu_\Phi([0, 1]^n) = \lambda_n(\Phi([0, 1]^n)). \quad (4.21)$$

³Czytelnik zechce samodzielnie przemyśleć ten fakt; należy pamiętać, że przekształcenie Φ zwiększa długość każdego wektora co najwyżej $\|\Phi\|$ razy.

Potraktujmy teraz c jako funkcję, określoną na grupie $GL(n, \mathbb{R})$ macierzy nieosobliwych $n \times n$ (każdy izomorfizm liniowy utożsamiamy z jego macierzą w standardowych bazach). Sprawdźmy, że c spełnia założenia Lematu 4.34, co pozwoli zakończyć cały dowód twierdzenia.

Jeśli $\Phi = s \cdot \text{Id}$, to $\Phi([0, 1]^n)$ jest kostką o krawędzi $|s|$, a więc ma miarę $|s|^n$. Zatem $c(s \cdot \text{Id}) = |s|^n$. Dla $\Phi_1, \Phi_2 \in GL(n, \mathbb{R})$ mamy z definicji c

$$\mu_{\Phi_1 \Phi_2}([0, 1]^n) = c(\Phi_1 \Phi_2);$$

z drugiej strony, wobec definicji μ_Φ jest

$$\begin{aligned} \mu_{\Phi_1 \Phi_2}([0, 1]^n) &\stackrel{(4.21)}{=} \lambda_n(\Phi_1(\Phi_2([0, 1]^n))) \\ &\stackrel{(4.19)}{=} \mu_{\Phi_1}(\Phi_2([0, 1]^n)) \\ &\stackrel{(4.20)}{=} c(\Phi_1) \lambda_n(\Phi_2([0, 1]^n)) \stackrel{(4.21)}{=} c(\Phi_1) c(\Phi_2). \end{aligned}$$

Spełnione są więc oba założenia Lematu 4.34. Wnioskujemy że, że $c(\Phi) = |\det \Phi|$; wzory (4.19)–(4.20) implikują, że

$$\lambda_n(\Phi(A)) = \mu_\Phi(A) = c(\Phi) \lambda_n(A) = |\det \Phi| \cdot \lambda_n(A).$$

Dowód Twierdzenia 4.35 jest zakończony. \square

Uwaga 4.36. 1. W przestrzeni \mathbb{R}^3 istnieją wielościany, które mają równe objętości, ale nie są równoważne przez podział skończony (tzn. jednego z nich nie można w żaden sposób podzielić na skończoną liczbę wielościanowych klocków, z których dałoby się złożyć drugi wielościan).⁴ Między innymi dlatego dowód równości $\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi| \lambda_n(A)$ wymaga kilkakrotnego odwołania się do charakterystyki miary Lebesgue'a, podanej w Twierdzeniu 4.31.

2. Jak przekonamy się później, równość (4.18) jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o zamianie zmiennych w całce Lebesgue'a.

Twierdzenie 4.37. *Założmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ są zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a. Wówczas zbiór $A \times B$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ i zachodzi równość*

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B). \quad (4.22)$$

Dowód. Będziemy postępować podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 4.31, stopniowo powiększając klasy zbiorów A, B , dla których zachodzi teza. Dowód nie jest trudny, jednak jego zapisanie wymaga pewnej pracy.

Krok 1. Jeśli A i B są przedziałami odpowiednio w \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m , to ich iloczyn kartezjański jest przedziałem w \mathbb{R}^{n+m} ; mamy wtedy

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \text{vol}(A \times B) = \text{vol}(A) \cdot \text{vol}(B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B).$$

⁴Na płaszczyźnie każde dwa wielokąty o równych polach są równoważne przez podział skończony. Pytanie, czy analogiczny fakt ma miejsce w \mathbb{R}^3 , było w 1900 r. treścią trzeciego problemu Hilberta. W tym samym roku Max Dehn podał przykład dwóch ostrosłupów o równych objętościach, które nie są równoważne przez podział skończony. Zainteresowany Czytelnik może sięgnąć np. do rozdziału 7 książki M. Aignera i G.M. Zieglera *Dowody z Księgi* (wyd. PWN, Warszawa 2002).

(Środkowa równość wynika wprost z definicji objętości przedziału).

Krok 2. Jeśli A i B są zbiorami otwartymi, to

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,$$

gdzie Q_j (odpowiednio, R_k) są kostkami diadycznymi w \mathbb{R}^n (odpowiednio, w \mathbb{R}^m) o wewnątrz parami rozłącznych. Wtedy jednak

$$A \times B = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_j \times R_k,$$

gdzie przedziały $Q_j \times R_k$ mają wnętrza parami rozłączne. Ponieważ miara Lebesgue'a zeruje się na podprzestrzeniach, zawierających ściany tych przedziałów, więc

$$\begin{aligned} \lambda_{n+m}(A \times B) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_{n+m}(Q_j \times R_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) \lambda_m(R_k) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(R_k) \right) = \lambda_n(A) \lambda_m(B). \end{aligned}$$

Krok 3. Załóżmy teraz, że A, B są zbiorami ograniczonymi typu G_δ , tzn.

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \quad B = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j,$$

gdzie $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ są otwarte i ograniczone w \mathbb{R}^n , zaś $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ są otwarte i ograniczone w \mathbb{R}^m . Wtedy

$$A \times B = \bigcap_{j=1}^{\infty} (U_j \times V_j)$$

jest zbiorem ograniczonym typu G_δ w \mathbb{R}^{n+m} . Na mocy Stwierdzenia 4.9 (iii) o mierze iloczynu ciągu zstępującego,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+m}(A \times B) &= \lim_{j=1} \lambda_{n+m}(U_j \times V_j) = \lim_{j=\infty} \lambda_n(U_j) \lambda_m(V_j) \\ &= \lim_{j=\infty} \lambda_n(U_j) \cdot \lim_{j=\infty} \lambda_m(V_j) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B). \end{aligned}$$

Krok 4. Wzór (4.22) zachodzi, gdy A, B są ograniczone i $\lambda_n(A) = 0$ lub $\lambda_m(B) = 0$. Bez zmniejszenia ogólności niech $\lambda_n(A) = 0$; w drugim przypadku dowód jest taki sam.

Zbiór B jest ograniczony, a więc jest zawarty w pewnej kuli otwartej $V \subset \mathbb{R}^m$. Niech $\varepsilon > 0$. Wobec Twierdzenia 4.26, istnieje taki zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$, że $A \subset U$ i $\lambda_n(U) < \varepsilon / \lambda_m(V)$. Zatem

$$\lambda_{n+m}(A \times B) \leq \lambda_{n+m}(U \times V) = \lambda_n(U) \lambda_m(V) < \varepsilon;$$

z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0 = \lambda_n(A) \times \lambda_m(B)$.

Krok 5. Załóżmy teraz, że $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ są ograniczonymi zbiorami mierzalnymi. Znajdziemy zbiory $Y \subset \mathbb{R}^n$ i $Z \subset \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lambda_n(Y) = \lambda_m(Z) = 0,$$

$$A \cap Y = B \cap Z = \emptyset,$$

zbiory $G_A = A \cup Y$ oraz $G_B = B \cup Z$ są typu G_δ .

Wtedy

$$G_A \times G_B = A \times B \cup (Y \times B \cup A \times Z \cup Y \times Z).$$

Z poprzedniego kroku dowodu wynika, że $\lambda_{n+m}(Y \times B \cup A \times Z \cup Y \times Z) = 0$. Zbiór $G_A \times G_B$ jest typu G_δ w \mathbb{R}^{n+m} ; dlatego zbiór $A \times B$, który różni się odeń o zbiór miary zero, należy do $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Mamy też

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(G_A \times G_B) = \lambda_n(G_A)\lambda_m(G_B) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

Krok 6 (przypadek ogólny). Jeśli A i B są dowolnymi zbiorami mierzalnymi, to biorąc $A_j = A \cap B(0, j)$ w \mathbb{R}^n i $B_j = B \cap B(0, j)$ w \mathbb{R}^m , otrzymujemy na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii)

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lim_{j=\infty} \lambda_{n+m}(A_j \times B_j) = \lim_{j=\infty} \lambda_n(A_j)\lambda_m(B_j) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

Dowód całego Twierdzenia 4.37 jest zakończony. \square

4.3 Funkcje mierzalne

Określmy teraz klasę funkcji, które można całkować względem danej miary. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a \mathcal{F} – ustalonym σ -ciałem podzbiorów X , wyposażonym w przeliczalnie addytywną miarę $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$. Trójkę (X, \mathcal{F}, μ) nazywa się *przestrzenią z miarą*. Najważniejszym modelem takiej sytuacji będzie dla nas na razie $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda_n$. Będziemy rozpatrywać funkcje $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definicja 4.38. Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest *mierzalna* (względem σ -ciała \mathcal{F}) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór

$$f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X: f(x) > a\}$$

należy do \mathcal{F} .

Jeśli $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda_n$, to mówimy o funkcjach *mierzalnych w sensie Lebesgue'a*.

Stwierdzenie 4.39. Niech $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Następujące warunki są równoważne:

- (i) funkcja f jest mierzalna;
- (ii) dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X: f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$;
- (iii) dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{F}$;

(iv) dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X: f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$.

Dowód. Skorzystamy z tego, że σ -ciało \mathcal{F} jest zamknięte ze względu na branie dopełnień i przeliczalnych sum.

Zauważmy, że zbiór $\{x \in X: f(x) \leq a\}$ jest dopełnieniem $\{x \in X: f(x) > a\}$. Dlatego (i) \Rightarrow (ii). Następnie,

$$\{x \in X: f(x) < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X: f(x) \leq a - \frac{1}{m}\}.$$

Dlatego drugi warunek pociąga za sobą trzeci.

Z warunku (iii) wynika (iv), gdyż $\{x \in X: f(x) \geq a\} = X \setminus \{x \in X: f(x) < a\}$. Wreszcie,

$$\{x \in X: f(x) > a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X: f(x) \geq a + \frac{1}{m}\};$$

dlatego (iv) pociąga za sobą warunek, podany w definicji funkcji mierzalnej. \square

Stwierdzenie 4.40. *Jeśli $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są funkcjami mierzalnymi, to zbiory*

$$\{x \in X: f(x) > g(x)\}, \quad \{x \in X: f(x) \geq g(x)\}, \quad \{x \in X: f(x) = g(x)\}$$

należą do σ -ciała \mathcal{F} .

Dowód. Ponieważ zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} jest gęsty w \mathbb{R} , więc

$$\begin{aligned} \{x \in X: f(x) > g(x)\} &= \bigcup_{w \in \mathbb{Q}} \{x \in X: f(x) > w > g(x)\} \\ &= \bigcup_{w \in \mathbb{Q}} \{x \in X: f(x) > w\} \cap \{x \in X: w > g(x)\}. \end{aligned}$$

Z poprzedniego stwierdzenia wynika więc, że $\{f > g\} \in \mathcal{F}$. Przez symetrię, $\{g > f\}$ też należy do \mathcal{F} . Zbiory $\{f \geq g\}$ i $\{g \geq f\}$ są dopełnieniami zbiorów, odpowiednio, $\{g > f\}$ i $\{f > g\}$, więc także należą do \mathcal{F} . Wreszcie,

$$\{x \in X: f(x) = g(x)\} = \{x \in X: f(x) \geq g(x)\} \cap \{x \in X: g(x) \geq f(x)\} \in \mathcal{F},$$

gdź \mathcal{F} jest zamknięte ze względu na branie iloczynu zbiorów. \square

Stwierdzenie 4.41. *Jeśli $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją mierzalną, to przeciwobraz $f^{-1}(B)$ każdego zbioru borelowskiego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest mierzalny.*

Dowód. Klasa \mathcal{K} wszystkich tych podzbiorów prostej, których przeciwobrazy należą do σ -ciała \mathcal{F} , sama jest σ -ciałem (łatwe ćwiczenie). Ponadto, wszystkie przedziały otwarte należą do \mathcal{K} ; to wynika ze Stwierdzenia 4.39. Dlatego \mathcal{K} zawiera najmniejsze σ -ciało, zawierające wszystkie przedziały, tzn. σ -ciało $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. \square

Twierdzenie 4.42. *Niech $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \dots$, będzie dowolnym ciągiem funkcji mierzalnych. Wówczas każda z funkcji*

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$$

jest mierzalna.

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, sformułujmy oczywisty, ważny wniosek.

Wniosek 4.43. *Jeśli ciąg funkcji mierzalnych $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest zbieżny punktowo na X , to $f = \lim f_j$ jest funkcją mierzalną.*

Dowód WNIOSKU 4.43. Jeśli ciąg f_j jest zbieżny punktowo na X , to $f = \lim f_j = \liminf f_j$.
□

Dowód TWIERDZENIA 4.42. Wykorzystamy Stwierdzenie 4.39. Przy ustalonym $x \in X$ kres dolny zbioru $\{f_n(x): n = 1, 2, \dots\}$ jest mniejszy od $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ jest $f_n(x) < a$. Innymi słowy,

$$\left\{x \in X: \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) < a\}.$$

Ponieważ każdy z zbiorów $\{x \in X: f_n(x) < a\}$ należy do \mathcal{F} , więc i zbiór po lewej stronie ostatniej równości należy do \mathcal{F} , to zaś oznacza, że funkcja $f = \inf_n f_n$ jest mierzalna.

Podobnie,

$$\left\{x \in X: \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f_n(x) > a\} \in \mathcal{F}.$$

Dlatego $\sup_n f_n$ jest funkcją mierzalną.

Aby wykazać mierzalność granicy dolnej i górnej, przypomnijmy (patrz np. skrypt wykładów z Analizy I, podrozdział 8.1), że

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\inf_{n > j} a_n \right), \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n > j} a_n \right).$$

Z udowodnionej już części twierdzenia i tych wzorów wynika mierzalność funkcji $\liminf f_n$ i $\limsup f_n$. □

Okazuje się, że klasa funkcji mierzalnych jest zamknięta z uwagi na różne operacje algebraiczne.

Stwierdzenie 4.44. *Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a funkcje $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne. Wówczas mierzalna jest każda z funkcji*

$$\alpha \cdot f, \quad \alpha f + \beta g, \quad f^2, \quad fg, \quad |f|, \quad \max(f, g), \quad \min(f, g).$$

Uwaga 4.45. 1. Zakładamy milcząco, że podane wyżej funkcje są dobrze określone.

2. W wielu sytuacjach można się nie przejmować powyższym zastrzeżeniem. Wyjaśnijmy to nieco bliżej. Najpierw wprowadzimy ważny termin: mówi się, że funkcja mierzalna f ma własność W prawie wszędzie na X , jeśli zbiór tych punktów X , gdzie własność W jest naruszona, jest zbiorem miary zero.

Jeśli $X = \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, a funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, to każda funkcja g , która jest równa f prawie wszędzie (tzn. jest taka, że $\{f \neq g\}$ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero), też jest funkcją mierzalną. To wynika z faktu, że każdy podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Jeśli zatem funkcje f, g są *prawie wszędzie skończone* (tzn. zbiory $Z_f = \{f = \pm\infty\}$ i $Z_g = \{g = \pm\infty\}$ są zbiorami miary Lebesgue'a zero), to sumę $f + g$ oraz iloczyn $f \cdot g$ można bez kłopotu określić na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus (Z_f \cup Z_g)$, a na zbiorze $Z_f \cup Z_g$ nadać im *jakkolwiek* wartość. To nie wpłynie na mierzalność.

Dowód Stwierdzenia 4.44. Krok 1. Jeśli $\alpha > 0$, to

$$\{x \in X : \alpha f(x) > a\} = \left\{x \in X : f(x) > \frac{a}{\alpha}\right\} \in \mathcal{F} \quad \text{dla każdego } a \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $\alpha < 0$, to zmienia się kierunek jednej z nierówności w powyższym wzorze; mierzalność funkcji αf wynika wtedy z równoważności warunków, podanych w Stwierdzeniu 4.39.

Krok 2: mierzalność sumy dwóch funkcji. Mierzalność $\alpha f + \beta g$ wystarczy udowodnić, gdy $\alpha = \beta = 1$. Zauważmy najpierw, że jeśli h jest funkcją mierzalną, to $h + \text{const}$ też jest mierzalna, gdyż $\{x \in X : h(x) + c > a\} = \{x \in X : h(x) > -c + a\}$. Dalej, dla każdego $a \in \mathbb{R}$ mamy

$$\{x \in X : f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > -g(x) + a\};$$

funkcja $-g(x) + a = -1 \cdot g(x) + a$ jest mierzalna, więc mierzalność zbioru $\{f + g > a\}$ wynika ze Stwierdzenia 4.40.

Krok 3: mierzalność kwadratu funkcji mierzalnej. Dla $a \leq 0$ zbiór $\{x \in X : f^2(x) \geq a\}$ jest po prostu równy X , a więc należy do \mathcal{F} . Dla $a > 0$ mamy

$$\{x \in X : f^2(x) \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq \sqrt{a}\} \cup \{x \in X : f(x) \leq -\sqrt{a}\} \in \mathcal{F}.$$

Krok 4: mierzalność iloczynu wynika teraz natychmiast ze wzoru

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Krok 5: mierzalność $|f|$ sprawdzamy łatwo wprost z definicji; dla $a \geq 0$ jest

$$\{x \in X : |f(x)| \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\} \cup \{x \in X : f(x) \leq -a\},$$

zaś dla $a < 0$ mamy po prostu $\{x \in X : |f(x)| \geq a\} = X$.

Krok 6: aby zakończyć cały dowód, stosujemy wzory

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

i korzystamy z udowodnionej już mierzalności sumy, różnicy i wartości bezwzględnej funkcji mierzalnych. \square

Stwierdzenie 4.46. Jeśli $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna, a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna.

Dowód. Dla dowolnych funkcji $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$. Ponieważ g jest ciągła, więc zbiór $Z_a = g^{-1}((a, +\infty))$ jest zbiorem otwartym, tzn. jest sumą przeliczalnie wielu rozłącznych przedziałów otwartych. Dlatego

$$\{x \in X : g \circ f(x) > a\} = (g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(Z_a)$$

jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów, należących do \mathcal{F} . \square

Funkcje proste

Definicja 4.47. Funkcję mierzalną $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, która ma skończony zbiór wartości, nazywamy *funkcją prostą*.

Stwierdzenie 4.48. *Funkcja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją prostą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją parami rozłączne zbiory $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ oraz różne elementy $a_1, \dots, a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ takie, że*

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \cdot \chi_{A_j} \quad (4.23)$$

Dowód. Proste ćwiczenie. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to χ_A jest funkcją mierzalną, gdyż zbiór $\{\chi_A > a\}$ jest albo pusty, albo równy A , albo równy X . Dlatego mierzalność kombinacji liniowej funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych wynika ze Stwierdzenia 4.44.

Załóżmy teraz, że $a_1 < a_2 < \dots < a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ są wszystkimi wartościami funkcji mierzalnej f . Dla $j = 1, 2, \dots, k$ niech $A_j := \{x \in X : f(x) = a_j\}$. Oczywiście,

$$A_j = X \setminus \left(\{x \in X : f(x) > a_j\} \cup \{x \in X : f(x) < a_j\} \right);$$

zbiory A_j są mierzalne, parami rozłączne i $f = \sum a_j \chi_{A_j}$. \square

Uwaga 4.49. Funkcja (4.23) ma skończony zbiór wartości także wtedy, gdy zbiory A_j nie są parami rozłączne.

Wniosek 4.50. *Kombinacja liniowa skończonej liczby funkcji prostych jest funkcją prostą.*

Twierdzenie 4.51. *Jeśli $f: X \rightarrow [0, \infty]$ jest mierzalna, to istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ zbieżny do f punktowo na X . Jeśli ponadto f jest ograniczona, to istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych zbieżny do f jednostajnie na X .*

Dowód. Dla $n = 1, 2, \dots$ połóżmy

$$A_{m,n} = \left\{ x \in X : f(x) : \frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n} \right\}, \quad m = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1,$$

$$A_{2^n,n} = \{x \in X : n \leq f(x)\}.$$

Zbiory $A_{m,n}$ są mierzalne i są, przy ustalonym n , parami rozłączne. Przyjmijmy

$$f_n = \sum_{m=0}^{n \cdot 2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}.$$

(Intuicja jest prosta i naturalna: wykres f tniemy na części, prowadząc cięcia na wysokościach $m/2^n$, gdzie $m = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n$; funkcja f_n jest stała między dwiema cięciami. Przechodząc od n do $n+1$, prowadzimy cięcia dwukrotnie gęściej i nieco wyżej – nie tylko do wysokości n , ale aż do $n+1$).

Wprost z definicji $f_n \leq f$ na X , gdyż $f_n = m/2^n \leq f$ na każdym ze zbiorów $A_{m,n}$. Jeśli $f(x) < \infty$, to dla wszystkich $n > f(x)$ mamy $f_n(x) \leq f(x) < f(x) + 2^{-n}$ i dlatego $f_n(x) \rightarrow f(x)$ na zbiorze $\{f < \infty\}$. Jeśli $f(x) = \infty$, to $f(x) \geq n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i wtedy $f_n(x) = n$, a więc również w tym przypadku $f_n(x) = n \rightarrow f(x) = \infty$.

Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że $f_{n+1} \geq f_n$, gdyż

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= A_{2m,n+1} \cup A_{2m+1,n+1}, & m &= 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1, \\ A_{2^n,n} &= A_{n2^{n+1},n+1} \cup A_{n2^{n+1}+1,n+1} \cup \dots \cup A_{(n+1)2^{n+1},n+1}. \end{aligned}$$

(Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi).

Jeśli f jest ograniczona, to dla $n > \sup f$ nierówność $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ zachodzi na całym zbiorze X . To oznacza, że $f_n \rightrightarrows f$ na X . \square

Podamy teraz dwa twierdzenia, opisujące związek mierzalności z ciągłością.

Twierdzenie 4.52 (N. Łuzin). *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$, że $f|_F$ jest ciągła i $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F) < \varepsilon$.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $h(x) = \frac{\pi}{2} + \arctg f(x)$. Funkcja h jest nieujemna i ograniczona na \mathbb{R}^n , zatem wobec Twierdzenia 4.51 istnieje ciąg funkcji prostych $h_k \rightrightarrows h$ na \mathbb{R}^n , $h - 2^{-k} \leq h_k \leq h$. Niech $h_k = \sum_{i=1}^{m_k} a_{k,i} \chi_{A_{k,i}}$, gdzie $A_{k,1}, A_{k,2}, \dots, A_{k,m_k}$ są parami rozłączne. Można przyjąć, że $a_{k,1} = 0$ dla wszystkich k ; wtedy \mathbb{R}^n jest sumą zbiorów $A_{k,i}$.

Wobec Twierdzenia 4.26, charakteryzującego zbiory mierzalne, istnieją zbiory domknięte $F_{k,i} \subset A_{k,i}$ takie, że $\lambda_n(A_{k,i} \setminus F_{k,i}) < \varepsilon/(m_k 2^k)$. Połóżmy

$$F_k = F_{k,1} \cup F_{k,2} \cup \dots \cup F_{k,m_k},$$

jest to zbiór domknięty, gdyż suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest domknięta. Ponadto,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_k) = \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_n(A_{k,i} \setminus F_{k,i}) < m_k \cdot \frac{\varepsilon}{m_k 2^k} = \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (4.24)$$

Zbiór domknięty $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ spełnia, wobec wzorów de Morgana,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F) = \lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus F_k\right) \stackrel{(4.24)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Zauważmy, że h_k jest stała na każdym ze zbiorów $F_{k,i}$, a więc jest ciągła na F_k , tzn. jest ciągła także na $F \subset F_k$. Ponadto, na zbiorze F jest $|h_k - h| \leq 2^{-k}$. Innymi słowy, na zbiorze F ciąg $h_k|_F$ funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do $h|_F$. Wynika stąd ciągłość $h|_F$. Ponieważ $f = \text{tg}(h - \frac{\pi}{2})$, więc $f|_F$ jest ciągła. \square

Twierdzenie 4.53 (M. Fréchet). *Jeśli $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to istnieje ciąg funkcji ciągłych $\phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zbieżny do f prawie wszędzie na \mathbb{R}^n .*

Dowód. Skorzystajmy z twierdzenia Łuzina. Dla $k \in \mathbb{N}$ niech F_k będzie takim zbiorem domkniętym, że $f_k = f|_{F_k}$ jest ciągła i $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_k) < 2^{-k-1}$. Na mocy znanego z topologii twierdzenia Tietzego o przedłużaniu istnieje funkcja ciągła $\phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\phi_k = f_k$ na zbiorze F_k .

Zbiory $D_k = F_k \cap F_{k+1} \cap F_{k+2} \cap \dots$ są domknięte; ponadto,

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus F_j) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \dots = \frac{1}{2^k}. \quad (4.25)$$

Na zbiorze D_k jest $\phi_j = f_j = f$ dla wszystkich $j = k, k + 1, k + 2, \dots$. Dlatego ciąg ϕ_j jest zbieżny punktowo do f na sumie $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ zbiorów D_k . Z oszacowania (4.25) wynika, że

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus S) = \lambda_n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus D_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D_k) \stackrel{(4.25)}{=} 0.$$

To spostrzeżenie kończy cały dowód. \square

Naturalne jest pytanie, dla jakich przestrzeni z miarą (X, \mathcal{F}, μ) zachodzą odpowiedniki twierdzeń Łuzina i Fréchet’a. W dowodach wykorzystuje się tylko dwie szczególne własności przestrzeni \mathbb{R}^n i miary Lebesgue’a: charakteryzację zbiorów mierzalnych (ściślej: możliwość ‘przybliżania’ zbiorów mierzalnych zbiorami domkniętymi) oraz twierdzenie Tietzego o przedłużaniu, które zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej normalnej (w szczególności: dla każdej przestrzeni metrycznej).

Definicja 4.54 (miara regularna). Miara μ na σ -ciele \mathcal{F} przestrzeni topologicznej, zawierającym σ -ciało $\mathcal{B}(X)$ zbiorów borelowskich, nazywa się regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \mathcal{F}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór otwarty $\Omega \subset X$ i zbiór domknięty $F \subset X$ takie, że $F \subset A \subset \Omega$ i $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$.

Uwaga 4.55. Twierdzenie Łuzina zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej z miarą regularną μ , natomiast twierdzenie Fréchet’a zachodzi dla każdej przestrzeni topologicznej normalnej, wyposażonej w miarę regularną μ .

Rozdział 5

Całka Lebesgue'a

W tym rozdziale (X, \mathcal{F}, μ) jest ustaloną przestrzenią z miarą. Elementy σ -ciała \mathcal{F} nazywamy zbiorami mierzalnymi.

Ogólna idea, kryjąca się za definicją całki Lebesgue'a, jest bardzo prosta: dla funkcji $f = c\chi_A$, gdzie A jest zbiorem mierzalnym, przyjmujemy $\int_X f d\mu = c \cdot \mu(A)$. Inaczej mówiąc, całka funkcji stałej na zbiorze A i równej zero poza A jest proporcjonalna do miary $\mu(A)$. Oczywiście, byłoby rzeczą naturalną przyjąć umowę, że całka jest liniowa; wtedy całka z funkcji $\sum a_i \chi_{A_i}$ powinna być równa sumie $\sum a_i \mu(A_i)$. Funkcje nieujemne można przybliżać funkcjami prostymi, więc ich całki można próbować przybliżać całkami funkcji prostych. Natomiast dowolna funkcja mierzalna jest różnicą dwóch funkcji nieujemnych, więc dla takich funkcji całkę można określić jako różnicę całek tych funkcji nieujemnych.

Okazuje się, że ten plan można zrealizować. W dodatku, zachodzą wtedy naturalne, wygodne i ogólne twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki. Opisaniem szczegółów tej konstrukcji zajmiemy się w podrozdziałach 5.1 i 5.2. Następnie, w kolejnych podrozdziałach, wyjaśnimy, jaki jest związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna, a także omówimy dwa bardzo ważne wyniki: twierdzenie o zamianie zmiennych i twierdzenie Fubiniego. Znajomość tych narzędzi pozwala *obliczać* bardzo wiele konkretnych całek; przykłady pozna Czytelnik zarówno w trakcie wykładu, jak i na ćwiczeniach.

5.1 Całkowanie funkcji nieujemnych

Definicja całki Lebesgue'a przypomina definicję dolnej całki Riemanna. Różnica polega na tym, że rozbijamy dziedzinę funkcji nie na przedziały, tylko na przeliczalne rodziny dowolnych zbiorów mierzalnych.

Definicja 5.1 (rozbicia zbioru mierzalnego). Załóżmy, że $E \in \mathcal{F}$ jest mierzalnym podzbiorem X . Mówimy, że skończona lub przeliczalna rodzina $\mathcal{P} = \{E_1, E_2, \dots\}$ zbiorów E_i jest *rozbiciem* E wtedy i tylko wtedy, gdy E_i są mierzalne, parami rozłączne i $E = \bigcup E_i$. Zbiór wszystkich rozbić danego zbioru mierzalnego E oznaczamy $\mathcal{R}(E)$.

Definicja 5.2 (całka funkcji nieujemnej). Załóżmy, że funkcja mierzalna $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest nieujemna na zbiorze mierzalnym $E \subset X$. Kładziemy wówczas

$$\int_E f d\mu \equiv \int_E f(x) d\mu(x) = \sup \left(\sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} f(x) \cdot \mu(E_i) \right),$$

gdzie kres górny jest wzięty po wszystkich rozbiciach $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$ zbioru E .

Z własności kresów wynika od razu, że

$$\int_E \alpha f(x) d\mu(x) = \alpha \int_E f(x) d\mu(x) \quad (5.1)$$

dla wszystkich liczb $\alpha \geq 0$, nieujemnych funkcji mierzalnych f i zbiorów mierzalnych E . Zauważmy ponadto, że jeśli $f: X \supset E \rightarrow [0, \infty]$ przyjmuje wartość ∞ na zbiorze $A \subset E$ miary dodatniej, to z pewnością $\int_E f d\mu = \infty$.

Stwierdzenie 5.3 (monotoniczność całki). *Jeśli $0 \leq f \leq g$ na zbiorze mierzalnym E i $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne, to*

$$\int_E f(x) d\mu(x) \leq \int_E g(x) d\mu(x).$$

Dowód. Dla każdego zbioru $A \subset E$ jest $\inf_A f \leq \inf_A g$, zatem dla każdego rozbicia $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$ zbioru E mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} f(x) \cdot \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{x \in E_i} g(x) \cdot \mu(E_i).$$

Biorąc kres górny względem wszystkich rozbić $\mathcal{P} \in \mathcal{R}(E)$, otrzymujemy tezę. \square

Stwierdzenie 5.4 (o wartości średniej). *Jeśli $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna i nieujemna na zbiorze $E \in \mathcal{F}$, to*

$$\mu(E) \cdot \inf_E f \leq \int_E f(x) d\mu(x) \leq \mu(E) \cdot \sup_E f. \quad (5.2)$$

Dowód. Ustalmy rozbicie $\mathcal{P} = (E_1, E_2, \dots)$ zbioru E . Ponieważ $\mu(E) = \sum \mu(E_i)$ oraz, dla każdego indeksu i z osobna, $\inf_E f \leq \inf_{E_i} f \leq \sup_E f$, więc

$$\mu(E) \cdot \inf_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \inf_E f \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \inf_{E_i} f \leq \sup_E f \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E) \sup_E f.$$

Stąd natychmiast wynika teza. \square

Zanotujmy dwa łatwe wnioski z tego twierdzenia.

Wniosek 5.5. *Jeśli $f = c$ jest funkcją stałą, to $\int_E f d\mu = c\mu(E)$*

Dowód. Mamy $c = \sup_E f = \inf_E f$; obie strony nierówności (5.2) są więc równe $c\mu(E)$. \square

Wniosek 5.6. *Jeśli $\mu(E) = 0$, to $\int_E f d\mu = 0$ dla każdej funkcji mierzalnej f , nieujemnej na E . \square*

Twierdzenie 5.7. *Jeśli f jest mierzalna i nieujemna na X , to funkcja*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F}$$

jest miarą na σ -ciele \mathcal{F} : gdy zbiór $E \in \mathcal{F}$ jest sumą skończoną lub przeliczalną zbiorów mierzalnych i parami rozłącznych E_i , to

$$\int_E f d\mu = \sum_i \int_{E_i} f d\mu. \quad (5.3)$$

Dowód. Własności $\nu(A) \geq 0$ i $\nu(\emptyset) = 0$ są oczywiste. Wystarczy udowodnić wzór (5.3). Zrobimy to dla rozbić przeliczalnych zbioru E na parami rozłączne zbiory E_i (dla rozbić skończonych zmieniają się tylko oznaczenia).

Niech $E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{ik}$, gdzie $F_{ik} \in \mathcal{F}$, będzie rozbiem E_i na zbiory F_{ik} parami rozłączne. Wtedy $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{ik}$ jest rozbiem E i wprost z definicji całki

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_{F_{1k}} f \cdot \mu(F_{1k}) + \cdots + \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{F_{Nk}} f \cdot \mu(F_{Nk}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{F_{ik}} f \cdot \mu(F_{ik}) \leq \int_E f d\mu$$

dla każdej liczby $N \in \mathbb{N}$. Biorąc oddzielnie kres górny każdej ze skończenie wielu sum po lewej stronie względem wszystkich rozbić zbioru E_i ($i = 1, \dots, N$), otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^N \int_{E_i} f d\mu \leq \int_E f d\mu,$$

stąd zaś, dla $N \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Udowodnimy teraz nierówność przeciwną. Niech $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, gdzie A_k są parami rozłączne. Ponieważ $E = \bigcup E_i$ i zbiory E_i też są parami rozłączne, więc wobec przeliczalnej addytywności miary μ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{A_k} f \cdot \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{A_k} f \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_k \cap E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \inf_{A_k \cap E_i} f \cdot \mu(A_k \cap E_i) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ostatnia nierówność wynika wprost z definicji całki: rodzina $A_k \cap E_i$, $k = 1, 2, \dots$, jest rozbiem zbioru E_i . Biorąc teraz kres górny względem wszystkich rozbić $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, otrzymujemy $\int f d\mu \leq \sum_i \int_{E_i} f d\mu$. \square

Ponieważ miara jest monotoniczną funkcją zbioru, więc natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.8. *Jeśli f jest mierzalna i nieujemna na zbiorze $E \in \mathcal{F}$, to $\int_{E_1} f d\mu \leq \int_E f d\mu$ dla każdego zbioru mierzalnego $E_1 \subset E$. \square*

Wniosek 5.9. *Jeśli funkcje mierzalne f, g są nieujemne i równe prawie wszędzie na zbiorze $E \in \mathcal{F}$, to $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.*

Dowód. Zbiór $A = \{f \neq g\}$ jest mierzalny i $\mu(A) = 0$. Dlatego $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu = 0$ wobec Wniosku 5.6. Na zbiorze $E \setminus A$ jest $f = g$, więc zachodzi oczywisty ciąg równości

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus A} f d\mu + \int_A f d\mu = \int_{E \setminus A} f d\mu = \int_{E \setminus A} g d\mu = \int_{E \setminus A} g d\mu + \int_A g d\mu = \int_E g d\mu.$$

Wniosek 5.10. *Jeśli f jest mierzalna i nieujemna na E , a $\int_E f d\mu = 0$, to $f = 0$ prawie wszędzie na E .*

Dowód. Zbiór $\{x \in X : f(x) > 0\}$ jest sumą wstępującego ciągu zbiorów mierzalnych $E_m = \{x \in X : f(x) \geq 1/m\}$, $m = 1, 2, \dots$. Dlatego

$$0 \leq \frac{1}{m} \mu(E_m) \leq \int_{E_m} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0,$$

skąd $\mu(E_m) = 0$, a następnie, na mocy Stwierdzenia 4.9 (ii), $\mu(E) = \lim \mu(E_m) = 0$. \square

Całka Lebesgue'a jest wygodnym narzędziem m.in. z uwagi na bardzo ogólne twierdzenia o możliwości przechodzenia do granicy pod znakiem całki. Oto pierwsze z nich.

Twierdzenie 5.11 (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej). *Załóżmy, że ciąg funkcji mierzalnych $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejący i wszystkie funkcje f_j są nieujemne na zbiorze $E \in \mathcal{F}$. Wówczas*

$$\int_E \left(\lim_{j \rightarrow \infty} f_j \right) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu. \quad (5.5)$$

Dowód. Ciąg f_j jest niemalejący, więc $f = \lim f_j$ jest dobrze określona w każdym punkcie przestrzeni X , a także mierzalna na mocy Twierdzenia 4.42. Ponadto, $f_j \leq f$ na E dla każdego indeksu j , więc wobec monotoniczności całki

$$\int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad j = 1, 2, \dots$$

i dlatego w granicy

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu = \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu.$$

Wystarczy więc udowodnić nierówność przeciwną. Oznaczmy w tym celu

$$E_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}, \quad E_+ = \{x \in E : 0 < f(x) < \infty\}, \quad E_\infty = \{x \in E : f(x) = +\infty\}.$$

Zbiory E_0, E_+, E_∞ są parami rozłączne i mierzalne, a ich suma jest równa E .

Krok 1. Na zbiorze E_0 jest $0 \leq f_j(x) \leq f(x) = 0$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$, tzn. $f_j \equiv 0 \equiv f$ na E_0 i dlatego $\lim \int_{E_0} f_j d\mu = 0 = \int_{E_0} f d\mu$.

Krok 2. Zajmijmy się teraz zbiorem E_+ . Niech $\theta \in (0, 1)$ i $E_m = \{x \in E_+ : f_m(x) \geq \theta f(x)\}$. Dla każdego $x \in E_+$ jest $f(x) = \lim f_j(x) > \theta f(x)$, a więc istnieje liczba m_x taka, że

$x \in E_m$ dla wszystkich $m > m_x$. Zatem $E_+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, a wobec monotoniczności ciągu f_m ciąg zbiorów E_m jest wstępujący. Wobec Twierdzenia 5.7, $\nu(A) = \int_A f d\mu$ jest miarą na σ -ciele podzbiorów mierzalnych zbioru E . Korzystając z monotoniczności całki i Stwierdzenia 4.9 (ii) dla miary ν , otrzymujemy

$$\nu(E_+) = \int_{E_+} f d\mu \geq \int_{E_+} f_m d\mu \geq \int_{E_m} \theta f d\mu = \theta \nu(E_m) \rightarrow \theta \nu(E_+) \quad \text{dla } m \rightarrow \infty.$$

Zatem

$$\int_{E_+} f d\mu \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_+} f_m d\mu \geq \theta \int_{E_+} f d\mu$$

Biorąc $\theta \rightarrow 1$, otrzymujemy

$$\int_{E_+} f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_+} f_m d\mu.$$

Krok 3. Wreszcie, zbadajmy zachowanie całek funkcji f, f_m na zbiorze E_{∞} . Ustalmy $M < \infty$. Niech $A_m = \{x \in E_{\infty} : f_m(x) \geq M\}$. Wtedy

$$\int_{E_{\infty}} f d\mu \geq \int_{E_{\infty}} f_m d\mu \geq \int_{A_m} f_m d\mu \geq M\mu(A_m)$$

Ciąg zbiorów A_m jest wstępujący, a jego suma to zbiór E_{∞} , więc, podobnie jak wcześniej,

$$\int_{E_{\infty}} f d\mu \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_{\infty}} f_m d\mu \geq M\mu(E_{\infty}).$$

Dla $M \rightarrow \infty$ otrzymujemy więc¹

$$\int_{E_{\infty}} f d\mu \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_{\infty}} f_m d\mu \geq \infty \cdot \mu(E_{\infty}) = \int_{E_{\infty}} f d\mu.$$

Dodając otrzymane wyżej nierówności, przekonujemy się, że

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m d\mu &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{E_0} f_m d\mu + \int_{E_+} f_m d\mu + \int_{E_{\infty}} f_m d\mu \right) \\ &\geq \int_{E_0} f d\mu + \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_{\infty}} f d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia o zbieżności monotonicznej jest zakończony. \square

Stwierdzenie 5.12 (liniowość całki). Dla wszystkich $\alpha, \beta \geq 0$ i wszystkich funkcji mierzalnych f, g , nieujemnych na zbiorze $E \in \mathcal{F}$, zachodzi wzór

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

¹Czytelnik zechce pamiętać o umowie $\infty \cdot 0 = 0$, którą przyjmujemy w teorii miary i całki.

Dowód. Z uwagi na równość (5.1), wystarczy przeprowadzić dowód w szczególnym przypadku $\alpha = 1 = \beta$. Ponadto, ponieważ wobec Twierdzenia 4.51 każda nieujemna funkcja mierzalna jest granicą niemalejącego ciągu funkcji prostych, więc z uwagi na twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej wystarczy ograniczyć się do sytuacji, gdy f, g są funkcjami prostymi.

Z Twierdzenia 5.7 wynika, że całka z nieujemnej funkcji prostej $h = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{C_j}$, gdzie zbiory C_j są mierzalne i parami rozłączne, a stałe $c_j \geq 0$ dla wszystkich j , jest równa

$$\sum_{j=1}^N \int_{C_j} h d\mu = \sum_{j=1}^N c_j \mu(C_j).$$

Niech więc $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$, $g = \sum_{i=1}^l b_i \chi_{B_i}$, gdzie $E = \bigcup_{j=1}^m A_j = \bigcup_{i=1}^l B_i$ (w każdej z tych sum zbiory są mierzalne i parami rozłączne). Wtedy $f + g = a_j + b_i$ na $A_j \cap B_i$, a zbiór E jest rozłączną sumą iloczynów $A_j \cap B_i$. Dlatego na mocy Twierdzenia 5.7

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_{\bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^l (A_j \cap B_i)} (f + g) d\mu = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l \int_{A_j \cap B_i} (f + g) d\mu \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l (a_j + b_i) \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \left(\sum_{i=1}^l \mu(A_j \cap B_i) \right) + \sum_{i=1}^l b_i \left(\sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j) + \sum_{i=1}^l b_i \mu(B_i) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

5.2 Całkowanie funkcji dowolnego znaku

Dla takich funkcji posługujemy się rozkładem $f = f_+ - f_-$, gdzie

$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = -\min(f, 0)$$

oznaczają część dodatnią i część ujemną funkcji mierzalnej $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. (Zbiór X , σ -ciało $\mathcal{F} \subset 2^X$ jego podzbiorów i miara μ na \mathcal{F} są ustalone).

Definicja 5.13. Jeśli $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją mierzalną, zbiór $E \subset X$ jest mierzalny i co najmniej jedna z całek $\int_E f_+ d\mu$, $\int_E f_- d\mu$ jest skończona, to przyjmujemy

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

Jeśli całka $\int_E f d\mu$ jest skończona, to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna* na E .

Jeśli $f \geq 0$, to jej część ujemna $f_- = 0$; zatem dla funkcji nieujemnych powyższa definicja pokrywa się z przyjętą wcześniej.

Zanotujmy dłuższą listę elementarnych własności całki.

Stwierdzenie 5.14 (własności całki).

- (i) Jeśli $f = c$ jest stała na zbiorze E , to $\int_E f d\mu = c\mu(E)$.
- (ii) Jeśli $\mu(E) = 0$, to $\int_E f d\mu = 0$ dla każdej funkcji mierzalnej $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
- (iii) Funkcja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest całkowna na zbiorze $E \subset X$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $|f|$ jest całkowna na E .
- (iv) Funkcja f całkowna na $E \subset X$ jest skończona prawie wszędzie w E .
- (v) **Monotoniczność całki:** jeśli $f \leq g$ na zbiorze E i całki z obu funkcji są określone, to $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.
- (vi) **Własność wartości średniej:** dla każdej funkcji f całkownej na E jest

$$\inf_E f \cdot \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq \sup_E f \cdot \mu(E).$$

- (vii) **Nierówność trójkąta:** jeśli $\int_E f d\mu$ jest określona, to

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

- (viii) **Przeliczalna addytywność całki jako funkcji zbioru:** Jeśli E jest sumą zbiorów $E_i \in \mathcal{F}$ parami rozłącznych, a f jest całkowna na E , to

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu.$$

- (ix) **Liniowość całki:** jeśli całki funkcji f, g są określone na E i ich suma też jest określona (tzn. nie jest wyrażeniem $\infty - \infty$), to

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Dowód. Własności (i) oraz (ii) wynikają łatwo z definicji i odpowiednich własności całki funkcji nieujemnej. Mamy $|f| = f_+ + f_-$, dlatego wobec liniowości całki funkcji nieujemnej

$$\int_E |f| d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu < \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy całki funkcji f_+, f_- są skończone, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy ich różnica jest określona i skończona, tzn. gdy f jest całkowna. Zatem zachodzi (iii).

Gdyby $f = +\infty$ (odpowiednio, $f = -\infty$) na zbiorze miary dodatniej w E , to całka funkcji f_+ (odpowiednio, funkcji f_-) byłaby nieskończona. Stąd wynika własność (iv).

Dla dowodu (v) wystarczy zauważyć, że jeśli $f \leq g$, to $f_+ \leq g_+$ i $f_- \geq g_-$, a następnie skorzystać z definicji całki i monotoniczności całki funkcji nieujemnej. Własności (vi) i (vii) wynikają od razu z (i), (v) oraz nierówności

$$\inf f \leq f \leq \sup f, \quad -|f| \leq f \leq |f|.$$

Przeliczalną addytywność całki funkcji całkowalnej otrzymujemy jako wniosek z Twierdzenia 5.7: całka funkcji f_+ i całka f_- – gdy traktować je jako funkcje zbioru – są miarami przeliczalnie addytywnymi.

Najbardziej kłopotliwy jest dowód (ix), gdyż całki mogą przyjmować wartość $\pm\infty$. Rozważmy najpierw przypadek, gdy f, g są całkowalne. Ponieważ

$$\int_E |f + g| d\mu \leq \int_E (|f| + |g|) d\mu = \int_E |f| d\mu + \int_E |g| d\mu,$$

więc $f + g$ też jest całkowalna. Ponadto,

$$f_+ + g_+ - (f + g)_+ = f_- + g_- - (f + g)_- \geq 0 \quad (5.6)$$

oraz

$$\begin{aligned} f + g &= f_+ - f_- + g_+ - g_- = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-) \\ &= (f + g)_+ + (f_+ + g_+ - (f + g)_+) - \left((f + g)_- + (f_- + g_- - (f + g)_-) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dzięki addytywności całki funkcji nieujemnych, otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu &= \int_E (f_+ + g_+) d\mu = \int_E (f + g)_+ d\mu + \int_E (f_+ + g_+ - (f + g)_+) d\mu \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \int_E (f + g)_+ d\mu + \int_E (f_- + g_- - (f + g)_-) d\mu \end{aligned}$$

i podobnie

$$\int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E (f + g)_- d\mu + \int_E (f_- + g_- - (f + g)_-) d\mu.$$

Odejmując te równości stronami, sprawdzamy, że $\int_E f d\mu + \int_E g d\mu = \int_E (f + g) d\mu$.

Przypuśćmy teraz, że np. $\int_E f d\mu = +\infty$, a $\int_E g d\mu \in \mathbb{R}$. Wtedy musi być $\int_E f_+ d\mu = +\infty$. Całki funkcji f_-, g_+, g_- są liczbami rzeczywistymi. W takim razie, z pierwszej części dowodu,

$$\begin{aligned} \infty &> \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu \stackrel{(5.6)}{\geq} \int_E (f + g)_- d\mu \geq 0, \\ \infty &> \int_E (f_- + g_- - (f + g)_-) d\mu \stackrel{(5.6)}{=} \int_E (f_+ + g_+ - (f + g)_+) d\mu \geq \int_E (f_+ - (f + g)_+) d\mu. \end{aligned}$$

Gdyby $\int_E (f + g)_+ d\mu$ była skończona, to dzięki wykazanej już liniowości całki funkcji całkowalnych, uzyskalibyśmy stąd $\int_E f_+ d\mu < \infty$, wbrew założeniu. Dlatego $\int_E (f + g)_+ d\mu = +\infty > \int_E (f + g)_- d\mu$ i własność (ix) zachodzi w rozważanym przypadku.

Pozostałe przypadki można rozpatrzyć podobnie; szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Posługując twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, udowodnimy teraz kolejne ważne twierdzenia o możliwości przechodzenia do granicy pod znakiem całki.

Twierdzenie 5.15 (lemat Fatou). *Jeśli funkcje $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \dots$, są mierzalne i są nieujemne na zbiorze mierzalnym $E \subset X$, to*

$$\int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu. \quad (5.8)$$

Uwaga 5.16 (przykład ‘wędrującego garbu’). Może się zdarzyć, że nierówność w lemacie Fatou jest *ostra*. Oto przykład dla jednowymiarowej miary Lebesgue’a. Warto go pamiętać, gdyż łatwo sobie wtedy przypomnieć, jaki jest *kierunek* nierówności w lemacie. Jeśli $f_j = \chi_{[j, j+1]}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, to mamy $\liminf f_j(t) = \lim_j f(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, więc dla $\mu = \lambda_1$ lewa strona (5.8) jest zerem. Jednak $\int_{\mathbb{R}} f_j d\lambda_1 = 1$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$, więc prawa strona (5.8) jest jedynką. Czytelnik zechce samodzielnie podać podobny przykład dla $E = [0, 1]$, $\mu = \lambda_1$ na $[0, 1]$.

Proszę zauważyć, że ten przykład świadczy również o tym, że założenie monotoniczności w Twierdzeniu 5.11 jest istotne. \square

DOWÓD LEMATU FATOU. Raz jeszcze przypomnijmy, że

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\inf_{j \geq m} f_j(x) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{j \geq m} f_j(x) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x),$$

gdzie $h_m(x) = \inf_{j \geq m} f_j(x)$ jest rosnącym ciągiem funkcji mierzalnych, nieujemnych na E i $h_m \leq f_m$ dla każdego m . Dlatego, wobec Twierdzenia 5.11 o zbieżności monotonicznej,

$$\begin{aligned} \int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu &= \int_E \lim_{m \rightarrow \infty} h_m d\mu \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E h_m d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E \inf_{j \geq m} f_j d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E f_m d\mu. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z monotoniczności całki i nierówności $h_m \leq f_m$. \square

Twierdzenie 5.17 (Lebesgue’a o zbieżności zmajoryzowanej). Załóżmy, że funkcje $f_j, f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2, \dots$, są mierzalne i $|f_j| \leq g$, gdzie $g: X \rightarrow [0, \infty]$ jest funkcją całkowalną. Jeśli $f_j(x) \rightarrow f(x)$ prawie wszędzie w X , to

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |f_j - f| d\mu = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu = \int_X f d\mu. \quad (5.9)$$

Podany wcześniej przykład ‘wędrującego garbu’ świadczy o tym, że założenie, iż $|f_j|$ są wspólnie ograniczone przez jedną i tę samą funkcję g (czasem nazywaną *majorantą*), jest istotne!

Dowód. Skoro $g \geq |f_j|$, to $g \pm f_j \geq 0$. Z lematu Fatou otrzymujemy więc

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} (g \pm f_j) d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X (g \pm f_j) d\mu. \quad (5.10)$$

Zauważmy, że dla każdego ciągu liczbowego (a_j) i $b \in \mathbb{R}$ jest

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (b + a_j) = b + \liminf_{j \rightarrow \infty} a_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} (b - a_j) = b - \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j.$$

Funkcja g , jako funkcja nieujemna całkowalna, jest skończona prawie wszędzie w X . Dlatego z dwóch nierówności (5.10), przytoczonej własności granicy dolnej i liniowości całki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_X (g + \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j) d\mu &\leq \int_X g d\mu + \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu, \\ \int_X (g - \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j) d\mu &\leq \int_X g d\mu - \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu, \end{aligned}$$

stąd zaś, po odjęciu $\int_X g d\mu$,

$$\int_X \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\mu \leq \int_X \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu.$$

Jednak $\liminf f_j = \limsup f_j = \lim f_j = f$ na zbiorze pełnej miary w X , więc prawa i lewa strona w powyższych nierównościach są równe $\int_X f d\mu$. Stąd natychmiast wynika teza.²
□

Twierdzenie 5.18 (bezwzględna ciągłość całki jako funkcji zbioru). *Jeśli f jest funkcją całkowalną na zbiorze mierzalnym E , to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że*

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset E$ o mierze $\mu(A) < \delta$.

Dowód. Wobec Twierdzenia 5.7,

$$\nu(A) = \int_A |f| d\mu, \quad A \subset E, \quad A \in \mathcal{F}$$

jest miarą (przeliczalnie addytywną) na σ -ciele podzbiorów mierzalnych zbioru E . Z założenia, $\nu(E) = \int_E |f| d\mu < \infty$. Połóżmy

$$E_m = \{x \in E : |f(x)| \geq m\}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

wtedy $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$. Dzięki warunkowi $\nu(E) < \infty$, ze Stwierdzenia 4.9 (iii) otrzymujemy

$$\nu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(E_m) = 0.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $\nu(E_m) < \varepsilon/2$. Wtedy, dla $A \subset E$,

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A \cap E_m} |f| d\mu + \int_{A \setminus E_m} |f| d\mu \leq \nu(E_m) + m \cdot \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + m \cdot \mu(A) < \varepsilon,$$

o ile tylko $\mu(A) < \delta = \varepsilon/(2m)$. □

5.2.1 Związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna

Pozostaje pytanie, jak obliczać całkę Lebesgue'a? Czy dla miary $\mu = \lambda_1$ na prostej rzeczywistej mamy do czynienia z tą samą całką, którą obliczaliśmy, znajdując funkcje pierwotne i posługując się twierdzeniem Newtona–Leibniza? Okazuje się, że tak. Wyjaśnijmy krótko związek obu całek. Będziemy posługiwać się terminologią, wprowadzoną podczas wykładów na I roku (patrz rozdział 9.5 skryptu z Analizy Matematycznej I).

²Dla dowodu pierwszej części (5.17) proszę zauważyć, że $|f_j - f| \rightarrow 0$ p.w. i $|f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq 2g$.

Założmy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$. Z całkowalności w sensie Riemanna wynika mierzalność.³ Oczywiście całka Lebesgue'a modułu takiej funkcji nie przekracza $M(b - a)$, gdzie $M = \sup |f|$. Niech P będzie dowolnym podziałem odcinka $[a, b]$ i niech $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ oznaczają końce odcinków tworzących ten podział. Wobec addytywności całki jako funkcji zbioru (patrz własność (viii) w Stwierdzeniu 5.14) całka Lebesgue'a

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} f d\lambda_1, \quad \text{gdzie } J_i = [x_{i-1}, x_i] \text{ dla } i = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

Z monotoniczności całki

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \sup_{J_i} f &= \sum_{i=1}^N \sup_{J_i} f \cdot \lambda_1(J_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \int_{J_i} f d\lambda_1 \quad (\text{ta suma jest całką Lebesgue'a } f) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \inf_{J_i} f \cdot \lambda_1(J_i) = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) \inf_{J_i} f \end{aligned}$$

Lewa i prawa strona powyższych nierówności są, odpowiednio, górną i dolną sumą całkową Riemanna dla podziału P . Zatem $G(f, P) \geq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \geq D(f, P)$ dla każdego podziału P . Biorąc kres dolny lewych stron i kres górny prawych stron względem wszystkich podziałów $[a, b]$, sprawdzamy, że całka Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f d\lambda_1$ jest nie większa od całki górnej Riemanna funkcji f i nie mniejsza od całki dolnej Riemanna funkcji f :

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P G(f, P) \geq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \geq \sup_P D(f, P) = \int_a^b f(x) dx;$$

Ponieważ f jest całkowalna w sensie Riemanna, więc jej całka dolna i całka górna Riemanna są równe całce (Riemanna!) $\int_a^b f(x) dx$. Dlatego całki Lebesgue'a i Riemanna funkcji f na $[a, b]$ są równe.

Zachodzi zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.19. *Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną, całkowalną w sensie Riemanna, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$. Obie całki – Riemanna i Lebesgue'a – funkcji f są równe.*

Wniosek 5.20. *Dla każdej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi wzór*

$$\int_a^b f d\lambda_1 = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest jakąkolwiek funkcją pierwotną f .

³Funkcja ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest zbiorem miary Lebesgue'a zero; nietrudno wykazać, że stąd wynika mierzalność: jeśli f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna, to zbiór $\{x \in [a, b]: f(x) > t\}$ jest sumą pewnego zbioru otwartego i zbioru miary zero.

Uwaga 5.21. Nietrudno wywnioskować stąd, że jeśli f jest funkcją *nieujemną* na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ i jej całka niewłaściwa Riemanna jest skończona, to f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na J .

Natomiast dla funkcji, które zmieniają znak, jest inaczej: ze zbieżności całki niewłaściwej Riemanna nie wynika całkowalność w sensie Lebesgue'a. Powód jest prosty: nie każda całka niewłaściwa, która jest zbieżna, jest bezwzględnie zbieżna (patrz np. Przykład 10.9 w skrypcie z Analizy Matematycznej I).

5.3 Zamiana zmiennych. Twierdzenie Fubiniego

Podamy teraz dwa bardzo ważne twierdzenia, które w połączeniu z Twierdzeniem 5.19 umożliwiają *obliczanie* wielu całek. Pierwsze z nich, twierdzenie o zamianie zmiennych, jest naturalnym uogólnieniem Twierdzenia 4.35 (o mierze liniowego obrazu zbioru mierzalnego) na przypadek odwzorowań nieliniowych. Twierdzenie Fubiniego orzeka natomiast, że całkę z funkcji wielu zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ całkowalnej względem miary Lebesgue'a można obliczać, całkując kolejno względem zmiennych x_k i miary Lebesgue'a $d\lambda_1(x_k)$ (a kolejność całkowań nie ma wpływu na wynik).

Podamy najpierw ściśle sformułowania obu twierdzeń, następnie zaś omówimy kilka przykładów ich zastosowań.

Twierdzenie 5.22 (o zamianie zmiennych). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, a $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ dyfeomorfizmem klasy C^1 zbioru Ω na $\Phi(\Omega)$. Załóżmy, że f jest funkcją całkowalną (lub mierzalną i nieujemną) względem miary Lebesgue'a λ_n na $\Phi(\Omega)$. Wtedy $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest całkowalna (odpowiednio, mierzalna i nieujemna) na zbiorze Ω i zachodzi równość

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n. \quad (5.12)$$

Biorąc $f = \chi_{\Phi(E)}$, gdzie $E \subset \Omega$ jest zbiorem mierzalnym, otrzymujemy

Wniosek 5.23. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, a $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ dyfeomorfizmem klasy C^1 , to

$$\lambda_n(\Phi(E)) = \int_E |\det D\Phi| \, d\lambda_n \quad (5.13)$$

dla każdego zbioru mierzalnego $E \subset \Omega$.

Twierdzenie 5.24 (Fubiniego). Niech $f: \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją całkowalną (lub mierzalną w sensie Lebesgue'a i nieujemną). Wówczas:

1. Dla λ_n -prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i λ_m -prawie wszystkich $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ funkcje $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ oraz $f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ są mierzalne odpowiednio względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$;
2. Funkcje

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_m(\mathbf{y}) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_n(\mathbf{x}) \in \overline{\mathbb{R}}$$

są mierzalne odpowiednio względem σ -ciał $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$;

3. Zachodzą równości

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{x}) \right) d\lambda_m(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Uwaga. Dla $m = n = 1$ i $f = \chi_P$, gdzie P jest przedziałem w \mathbb{R}^2 , (5.14) to po prostu wzór na pole prostokąta. Dla $f = \chi_{A \times B}$, gdzie $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, równość (5.14) przybiera postać

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_{A \times B} d\lambda_{n+m} = \int_A \left(\int_B 1 d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \lambda_n(A) \lambda_m(B).$$

W Twierdzeniu 4.37 wykazaliśmy, że faktycznie tak jest.

Dowody obu twierdzeń na razie odłożymy i wskażemy kilka przykładów zastosowań.

Przykład 5.25. Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}$ i $f(x, y) = x^2 y$. Obliczymy całkę $\int_{\Omega} f d\lambda_2$, korzystając z twierdzenia Fubiniego i związku między całkami Lebesgue'a i Riemanna. Czytelnik zechce naszkicować trójkąt Ω i prześledzić rachunki, patrząc na rysunek. Otóż,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y x^2 y dx \right) dy \\ &= \int_0^1 y \left(\int_0^y x^2 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 y \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^y dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^4 dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Całkując najpierw względem y , potem zaś względem x , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega} \cdot f d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\int_x^1 y dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1 - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Zgodnie z twierdzeniem Fubiniego, wynik jest za każdym razem taki sam. \square

Przykład 5.26. Pokażemy, że założenie całkowalności f w twierdzeniu Fubiniego jest istotne. Wybierzmy ciąg liczb $0 = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < 1$, $\lim a_j = 1$. Dla $j \in \mathbb{N}$ niech $g_j: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą na $[0, 1]$ (np. kawałkami liniową), znikającą poza przedziałem $I_j = [a_{j-1}, a_j]$ i taką, że całka $\int_0^1 g_j(x) dx = 1$. Połóżmy

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (g_j(x) - g_{j+1}(x)) g_j(y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Zauważmy, że dla każdego punktu $(x, y) \in [0, 1]^2$ szereg, określający f , ma co najwyżej jeden składnik niezerowy (trzeba dobrać j_0 tak, aby $y \in [a_{j_0-1}, a_{j_0}]$; dla $j \neq j_0$ jest $g_j(y) = 0$). Dlatego f jest dobrze określoną funkcją mierzalną.

Nietrudno zauważyć (proszę na rysunku zaznaczyć w kwadracie $[0, 1]^2$ zbiór, gdzie funkcja $f \neq 0$, a następnie zbadać całki z f po odcinkach $x = \text{const}$ i $y = \text{const}$), że

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} g_j(y) \left(\int_0^1 (g_j(x) - g_{j+1}(x)) dx \right) dy = 0,$$

jednak

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_j} \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_1} \int_{I_1} g_1(x)g_1(y) dx dy = 1.$$

Wyniki są różne, gdyż $\int_{[0,1]^2} |f| d\lambda_2 = \infty$, tzn. f nie jest całkowna na kwadracie $[0, 1]^2$. \square

Przykład 5.27. Sprawdźmy, że $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$. Oznaczmy tę całkę literą I . Z twierdzenia Fubiniiego

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) d\lambda_2(x, y).$$

Wprowadzimy teraz zmienne biegunowe w \mathbb{R}^2 . Niech

$$(0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni (r, \theta) \longmapsto \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \left([0, \infty) \times \{0\} \right);$$

przekształcenie Φ jest dyfeomorfizmem pasa $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$; uzupełnienie $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(\Omega)$ obrazu tego pasa jest półprostą, a więc ma miarę Lebesgue'a równą zero. Ponadto

$$\det D\Phi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

Dlatego, na mocy wzoru (5.12) i twierdzenia Fubiniiego,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\Phi(\Omega)} \exp(-x^2 - y^2) d\lambda_2(x, y) = \int_{\Omega} \exp(-r^2) \cdot r d\lambda_2(r, \theta) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) dr = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \cdot \left(-e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Przykład 5.28. Obliczymy miarę Lebesgue'a kuli $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$. Z uwagi na niezmienniczość miary Lebesgue'a względem przesunięć i Twierdzenie 4.35,

$$\lambda_n(B(x, r)) = \lambda_n(B(0, r)) = |\det(r \cdot \text{Id})| \cdot \lambda_n(B(0, 1)) = r^n \cdot \lambda_n(B(0, 1)). \quad (5.15)$$

Wystarczy więc obliczyć

$$\omega_n := \lambda_n(B(0, 1)). \quad (5.16)$$

Twierdzenie 5.29. Dla $n = 1, 2, \dots$ zachodzi wzór

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)} \quad (5.17)$$

gdzie

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

jest funkcją gamma Eulera.

Dowód. Przekrój kuli $B^n(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ‘płaszczyzną’ afiniczną $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$ jest $(n-1)$ -wymiarową kulą o promieniu $(1-t^2)^{1/2}$. Dlatego z twierdzenia Fubiniego i wzoru (5.15) wynika, że

$$\omega_n = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B^n(0,1)} d\lambda_n = \int_{-1}^1 \omega_{n-1} (1-t^2)^{(n-1)/2} dt = 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt.$$

Dokonując teraz zamiany zmiennych $s = t^2$, $dt = (\sqrt{s})' ds = \frac{1}{2}s^{-1/2} ds$, otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$\omega_n = \omega_{n-1} \int_0^1 (1-s)^{\frac{n+1}{2}-1} s^{\frac{1}{2}-1} ds = \omega_{n-1} \cdot B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (5.18)$$

w której

$$B(a, b) = \int_0^1 (1-s)^{a-1} s^{b-1} ds, \quad a, b > 0$$

oznacza funkcję beta Eulera. Wiadomo (patrz wykłady Analizy Matematycznej z I roku, podrozdział 10.2), że

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zatem rekurencję (5.18) można zapisać jako

$$\omega_n = \omega_{n-1} \cdot \pi^{1/2} \cdot \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}. \quad (5.19)$$

Wzór (5.17) zachodzi dla $n = 1$, gdyż

$$\omega_1 = \lambda_1((-1, 1)) = 2 = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\pi^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)};$$

dlatego teza twierdzenia łatwo wynika z (5.19) przez indukcję. \square

Dla $n = 2$ i $n = 3$ wzór (5.17) implikuje znane Czytelnikowi zależności

$$\omega_2 = \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(4/2)} = \frac{\pi}{(2-1)!} = \pi, \quad \omega_3 = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\pi.$$

Uwaga 5.30. Całkę $\int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt$ można obliczyć różnymi sposobami, niekoniecznie odwołując się do funkcji Γ i B Eulera. Można np. podstawić $t = \cos y$, $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ i potem przez części obliczać całki z potęg sinusa.

Ponadto, miarę ω_n kuli $B^n(0, 1)$ można obliczyć inaczej, np. całkując we współrzędnych biegunowych w \mathbb{R}^n . Czytelnik zechce rozwiązać następujące zadanie.

Zadanie 5.31. Niech, dla $r > 0$, $\theta_2 \in (0, 2\pi)$ i $|\theta_1| < \frac{\pi}{2}$,

$$x = r \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad y = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad z = r \sin \theta_1.$$

Proszę sprawdzić, że przekształcenie $\varphi: (r, \theta_1, \theta_2) \mapsto (x, y, z)$ określone powyższymi wzorami jest dyfeomorfizmem przedziału $(0, 1) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^3$ na podzbiór otwarty pełnej miary w kuli $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$. Obliczyć wyznacznik macierzy Jacobiego tego dyfeomorfizmu i objętość kuli.

5.3.1 Dowód twierdzenia o zamianie zmiennych

Idea dowodu jest prosta: rozkłada się dziedzinę Ω dyfeomorfizmu $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ na drobne, parami rozłączne zbiory borelowskie, tak, aby na każdym z nich różniczka $D\Phi$ tego dyfeomorfizmu była *niemalże stała*, równa z góry zadanemu automorfizmowi liniowemu przestrzeni \mathbb{R}^n , z dokładnością do ustalonego marginesu błędu. Następnie, korzysta się z Twierdzenia 4.35 (o mierze liniowego obrazu zbioru mierzalnego), sumuje otrzymane wyniki i przechodzi do granicy z marginesem błędu.

Szczegóły wymagają pewnej staranności.

Lemat 5.32 (o rozkładzie dziedziny dyfeomorfizmu). *Jeśli $\Phi: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem, a $c > 1$ ustaloną liczbą, to dla $j = 1, 2, \dots$ istnieją zbiory otwarte $U_j \subset \Omega$, których domknięcia \bar{U}_j są zwarte i $\bar{U}_j \subset \Omega$ dla $j \in \mathbb{N}$, oraz automorfizmy liniowe $s_j \in GL(n, \mathbb{R})$ przestrzeni \mathbb{R}^n , które spełniają następujące warunki:*

(i) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$;

(ii) *Zachodzą nierówności*

$$|\det D\Phi(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{c} |\det s_j| \quad \text{dla } \mathbf{x} \in U_j, j = 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

(iii) *Dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset U_j$, gdzie $j = 1, 2, \dots$, zbiór $\Phi(A)$ jest mierzalny, a ponadto*

$$\lambda_n(A) |\det s_j| \geq \frac{1}{c} \lambda_n(\Phi(A)). \quad (5.21)$$

Intuicja jest prosta: U_i to zbiór tych punktów \mathbf{x} , dla których $D\Phi(\mathbf{x}) \approx s_i$, gdzie s_i są automorfizmami, wybieranymi z pewnego przeliczalnego, gęstego w $GL(n, \mathbb{R})$ podzbioru automorfizmów liniowych \mathbb{R}^n . Liczba $c > 1$ służy do kontroli błędu przybliżenia i wynikających zeń oszacowań (5.20)–(5.21). Dowód tego lematu zawiera kluczowe trudności dowodu twierdzenia o zamianie zmiennych.

Dowód Lematu 5.32. Ustalmy $c > 1$. Wybierzmy przeliczalny gęsty podzbiór $\mathbb{S} \subset GL(n, \mathbb{R})$; można np. wziąć wszystkie automorfizmy liniowe, których macierze w standardowej bazie mają tylko wyrazy wymierne. Ustalmy automorfizm $s \in \mathbb{S}$ i liczbę $m \in \mathbb{N}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie małą liczbą, której wartość dobierzemy do c, s, n później.

Niech $k > m$, $k \in \mathbb{N}$. Określmy $Z(s, m, k)$ jako zbiór tych punktów $\mathbf{x} \in \Omega$, dla których spełnione są trzy warunki, (5.22)–(5.24) niżej: po pierwsze,

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \frac{1}{m} \quad \text{oraz} \quad \|\mathbf{x}\| < m, \quad (5.22)$$

a ponadto dla $A = D\Phi(\mathbf{x})$ jest

$$\|A \circ s^{-1} - \text{Id}\| + \|s^{-1} \circ A - \text{Id}\| + \|s \circ A^{-1} - \text{Id}\| + \|A^{-1} \circ s - \text{Id}\| < \varepsilon, \quad (5.23)$$

$$\frac{\|\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{x}) - D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in B(\mathbf{0}, 1/k), \quad (5.24)$$

Następnie, niech $Z(s, m) = \bigcup_{k>m} Z(s, m, k)$. Jest to zbiór otwarty: jeśli $\mathbf{x} \in Z(s, m)$, to warunki (5.22)–(5.23) zachodzą w pewnej kuli wokół \mathbf{x} , gdyż nierówności są ostre, a Φ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 . Jeśli warunek (5.24) jest spełniony w punkcie \mathbf{x} dla liczby $k > m$, to jest spełniony na małej kuli wokół \mathbf{x} dla pewnej liczby $k_1 > k$; nietrudno to uzasadnić, korzystając np. z ciągłości lewej strony nierówności (5.24) jako funkcji pary zmiennych \mathbf{x}, \mathbf{v} (dla $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oczywiście przyjmujemy wartość 0).⁴

Ponieważ $\Phi \in C^1$, więc rodzina wszystkich $Z(s, m)$ pokrywa zbiór Ω , a domknięcia zbiorów $Z(s, m)$ są zwartymi podzbiórmi Ω . Na zbiorze $Z(s, m)$ funkcja Φ nie tylko jest dyfeomorfizmem, ale spełnia warunek Lipschitza na każdej zawartej w nim kuli; stąd wynika, że dla mierzalnych $A \subset Z(s, m)$ zbiór $\Phi(A)$ jest mierzalny.⁵

Z oszacowań normy (5.23) otrzymujemy

$$\|D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{w} - s(\mathbf{w})\| \leq \varepsilon\|s(\mathbf{w})\|, \quad \|s(\mathbf{w}) - D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{w}\| \leq \varepsilon\|D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{w})\| \quad (5.25)$$

dla $\mathbf{x} \in Z(s, m)$ i wszystkich $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Stąd i z (5.23) wynika, że obraz kuli $B = B(0, 1)$ pod działaniem przekształceń liniowych $D\Phi(\mathbf{x})$ i s spełnia dla każdego $\mathbf{x} \in Z(s, m)$ zależności

$$D\Phi(\mathbf{x})(B) \subset (1 + \varepsilon) \cdot s(B), \quad s(B) \subset (1 + \varepsilon) \cdot D\Phi(\mathbf{x})(B), \quad (5.26)$$

gdzie $(1 + \varepsilon) \cdot X$ oznacza obraz zbioru X w jednokładności o środku w zerze i skali $1 + \varepsilon$. Z Twierdzenia 4.35 o mierze obrazu liniowego zbioru mierzalnego otrzymujemy więc

$$\frac{|\det s|}{(1 + \varepsilon)^n} \leq |\det D\Phi(\mathbf{x})| \leq (1 + \varepsilon)^n |\det s|, \quad \mathbf{x} \in Z(s, m). \quad (5.27)$$

Zatem dla $1 < (1 + \varepsilon)^n \leq c$ przeliczalna rodzina zbiorów $Z(s, m)$ spełnia tezę lematu, za wyjątkiem warunku (iii), którego jeszcze nie sprawdziliśmy.

Dalej pracujemy przy ustalonych s i m . Wybierzmy jeszcze $M > 1$ tak, aby

$$\|s\| + \|s^{-1}\| < M. \quad (5.28)$$

Ustalmy $k > m$. Oszacujemy miarę zbioru $f(Z(s, m, k) \cap U)$, gdzie U jest dowolnym otwartym podzbiorem $Z(s, m)$. Przedstawmy U jako sumę małych kostek domkniętych o wewnętrznych krawędziach parami rozłącznych. Niech Q będzie jedną z tych kostek, o krawędzi $d \lll 1/k$.

⁴Osoby zainteresowane dogłębnym rozumieniem wykładu proszone są o uzupełnienie szczegółów.

⁵Proszę sprawdzić, że lipschitzowski obraz zbioru miary zero jest zbiorem miary zero, a homeomorficzny obraz zbioru borelowskiego jest borelowski.

Wybierzmy $\mathbf{x} \in Z(s, m, k) \cap Q$. Porównamy wielkość zbiorów $\Phi(Q)$ i $s(Q)$. Niech $\mathbf{y} \in Q$ będzie dowolnym punktem. Z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - s(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| &\leq \|\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\quad + \|(D\Phi(\mathbf{x}) - s)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \varepsilon\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \varepsilon\|s(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\| \quad \text{wobec (5.24) i (5.25)} \\ &\stackrel{(5.28)}{\leq} 2\varepsilon M\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq 2\varepsilon M d\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Zatem $\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}) - s(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{w} = s(\mathbf{z})$ dla punktu \mathbf{z} takiego, że

$$\|\mathbf{z}\| \leq \|s^{-1}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \leq 2\varepsilon M^2 d\sqrt{n}.$$

Punkt $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ należy więc do kostki Q' współśrodkowej z Q i mającej krawędź $d' = d + 2 \cdot 2\varepsilon M^2 d\sqrt{n}$. Jest $d' < c^{1/n}d$, gdy do ustalonych $M > 1$ i $c > 1$ dobierzemy $\varepsilon > 0$ dostatecznie małe. Punkt $\Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x}) + s(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{p} + s(\mathbf{y} + \mathbf{z})$ należy do przesuniętego o ustalony wektor \mathbf{p} obrazu zbioru $s(Q')$. Stąd

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \leq \lambda_n(s(Q')) = |\det s| \cdot \lambda_n(Q') \leq c \cdot |\det s| \cdot \lambda_n(Q).$$

Sumując takie oszacowania, otrzymujemy

$$\lambda_n(\Phi(Z(s, m, k) \cap U)) \leq c \cdot |\det s| \cdot \lambda_n(U), \quad U \subset Z(m, s)$$

a następnie, przechodząc do granicy $k \rightarrow \infty$ (zbiory $Z(s, m, k)$ tworzą ciąg wstępujący!),

$$\lambda_n(\Phi(U)) \leq c \cdot |\det s| \cdot \lambda_n(U)$$

dla otwartych podzbiorów $U \subset Z(s, m)$. Stąd już łatwo uzyskać warunek (iii) tezy lematu najpierw dla zbiorów borelowskich typu G_δ , potem zaś dla wszystkich mierzalnych. \square

Uwaga. Drugą część dowodu tego lematu można nieco uprościć; trzeba w tym celu wykazać, że na odpowiednio drobnych podzbiórach zbioru $Z(s, m, k)$ funkcja $\Phi \circ s^{-1}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą θ odpowiednio bliską 1 (co jest dość łatwe) i *wiedzieć*, że wtedy $\lambda_n(\Phi(Q)) \leq \theta^n \lambda_n(Q)$. Intuicyjnie to w miarę jasne, ale dowód nie jest zupełnie trywialny.

DOWÓD TWIERDZENIA O ZAMIANIE ZMIENNYCH. Wystarczy przeprowadzić dowód dla funkcji mierzalnych, nieujemnych; dla funkcji całkowalnych dowolnego znaku twierdzenie wynika stąd natychmiast. Ustalmy zbiór mierzalny $E \subset \Omega$ i liczbę $c > 1$. Niech U_i oraz s_i oznaczają zbiory i przekształcenia z Lematu 5.32. Biorąc $A_1 = U_1$ i $A_j = U_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ dla $j \geq 2$, otrzymujemy rodzinę zbiorów borelowskich, parami rozłącznych, pokrywającą Ω . Jest

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i), \quad \Phi(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(E \cap A_i);$$

z Lematu 5.32 wynika, że wszystkie zbiory wyżej są mierzalne. Wobec addytywności całki i nierówności (5.20)–(5.21),

$$\begin{aligned} \int_E |\det D\Phi| d\lambda_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E \cap A_i} |\det D\Phi| d\lambda_n \\ &\geq \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} |\det(s_i)| \cdot \lambda_n(E \cap A_i) \geq \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(\Phi(E \cap A_i)) = \frac{1}{c^2} \lambda_n(\Phi(E)). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy $c \rightarrow 1$, otrzymujemy stąd

$$\int_E |\det D\Phi| d\lambda_n \geq \lambda_n(\Phi(E)), \quad (5.29)$$

lub równoważnie,

$$\int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| d\lambda_n \geq \int_{\Phi(\Omega)} f d\lambda_n, \quad (5.30)$$

gdzie $f = \chi_{\Phi(E)}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $\Phi(E)$. Wobec liniowości całki, (5.30) zachodzi nie tylko dla funkcji charakterystycznych, ale i dla wszystkich nieujemnych funkcji prostych. Z Twierdzenia 5.11 (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej) wynika natychmiast, że nierówność (5.30) ma miejsce dla każdej funkcji mierzalnej f nieujemnej na $\Phi(\Omega)$.

Dyfeomorfizm Φ i zbiór otwarty Ω też mogą być dowolne. Z tego teraz skorzystamy. Zapiszmy (5.30) dla zbioru $V = \Phi(\Omega)$, dyfeomorfizmu $\Psi = \Phi^{-1}: V \rightarrow \Omega = \Psi(V)$, oraz funkcji

$$g = (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|, \quad g \geq 0 \quad \text{na } \Omega = \Psi(V).$$

Otrzymamy

$$\int_V (g \circ \Psi) \cdot |\det D\Psi| d\lambda_n \geq \int_{\Psi(V)} g d\lambda_n = \int_\Omega (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| d\lambda_n. \quad (5.31)$$

Uprościmy funkcję podcałkową po lewej stronie. Jest

$$\begin{aligned} (g \circ \Psi)(\mathbf{x}) \cdot |\det D\Psi(\mathbf{x})| &= f(\Phi(\Psi(\mathbf{x}))) \cdot |\det D\Phi(\Psi(\mathbf{x}))| \cdot |\det D\Psi(\mathbf{x})| \\ &= f(\mathbf{x}) \cdot \left| \det (D\Phi(\Psi(\mathbf{x})) \cdot D\Psi(\mathbf{x})) \right| \\ &= f(\mathbf{x}) \cdot \left| \det (D(\Phi \circ \Psi)(\mathbf{x})) \right| = f(\mathbf{x}), \quad \text{gdyż } \Phi \circ \Psi = \text{Id}. \end{aligned}$$

Dlatego (5.31) jest w istocie nierównością przeciwną do (5.30). Znak nierówności można więc w obu warunkach zastąpić znakiem równości! Dowód twierdzenia o zmianie zmiennych jest zakończony. \square

5.3.2 Dowód twierdzenia Fubiniego

Dowód Twierdzenia 5.24 przeprowadzimy dla funkcji mierzalnych, nieujemnych. Wersja dla funkcji całkowalnych wynika stąd łatwo; zainteresowany Czytelnik sam zechce uzupełnić odpowiednie szczegóły.

Podzielimy rozumowanie na kilka kroków, stopniowo poszerzając klasę funkcji, dla których zachodzą poszczególne części tezy. Będziemy dowodzić tylko pierwszej z równości (5.14) i tych fragmentów pierwszej i drugiego punktu tezy, które są niezbędne do nadania sensu tej równości, tzn. mierzalności prawie wszystkich funkcji $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ względem σ -ciała $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ i mierzalności funkcji

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \longmapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \in \overline{\mathbb{R}},$$

będących całkami $f_{\mathbf{x}}$ względem λ_m . Aby uzyskać drugą z równości (5.14) i pozostałe fragmenty pierwszej i drugiego punktu tezy, wystarczy zamienić role zmiennych \mathbf{x} i \mathbf{y} w rozumowaniu.

Krok 1. Niech f będzie funkcją charakterystyczną $(n + m)$ -wymiarowego przedziału domkniętego $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{n+m}$, otwartego $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{n+m}$ lub domknięto-otwartego

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{n+m} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{a} \preceq \mathbf{z} \prec \mathbf{b}\}.$$

Każdy taki przedział jest produktem $I_n \times J_m$ pewnego przedziału n -wymiarowego I_n i pewnego przedziału m -wymiarowego J_m . Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ funkcja $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest albo równa χ_{J_m} (gdy $\mathbf{x} \in I_n$), albo jest funkcją stałą równą zero (gdy $\mathbf{x} \notin I_n$), więc jest mierzalna względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Stąd wynika, że

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \chi_{I_n}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_m(J_m)$$

jest funkcją mierzalną względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pierwsza z równości (5.14) przybiera więc w tym przypadku postać

$$\lambda_{n+m}(I_n \times J_m) = \lambda_n(I_n) \cdot \lambda_m(J_m),$$

co jest prawdą na mocy Twierdzenia 4.37.⁶

Krok 2. Niech teraz f będzie funkcją charakterystyczną zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Wiemy, że każdy taki zbiór jest sumą przeliczalnej rodziny kostek domkniętych o wnętrzach parami rozłącznych; nietrudno stąd wywnioskować, że $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, gdzie P_j są przedziałami otwarto-domkniętymi i parami rozłącznymi. Zatem

$$f = \chi_{\Omega} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j, \quad \text{gdzie } f_j = \chi_{P_j}.$$

Funkcja $\mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest więc mierzalna dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (jako granica zbieżnego ciągu funkcji mierzalnych), następnie, funkcja

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y})$$

wobec twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, a więc też jest mierzalna, wreszcie zaś,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_j d\lambda_{n+m} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right)}_{=f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\lambda_n(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

na mocy pierwszego kroku dowodu i kilkakrotnie zastosowanego twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.

Krok 3. Teraz niech $f = \chi_G$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest zbiorem ograniczonym typu G_{δ} . Wówczas $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ dla pewnego zstępującego ciągu zbiorów otwartych ograniczonych Ω_j . Niech

⁶Można też po prostu odwołać się do równości miary Lebesgue'a i objętości przedziału.

f_j oznacza funkcję charakterystyczną Ω_j ; wtedy oczywiście $f_j \searrow f$ dla $j \rightarrow \infty$. Ponownie więc funkcja $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_j f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mierzalna względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Ponadto, dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) < \infty$$

więc

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y})$$

na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Dlatego, wobec poprzedniego kroku dowodu, funkcja $\mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y})$ jest mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. Wiemy już, że

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_j d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots;$$

przechodząc do granicy $j \rightarrow \infty$ (trzeba w tym celu znów kilka razy skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej), otrzymujemy równość (5.14) dla $f = \chi_G = \lim f_j$.

Krok 4. Teraz udowodnimy tezę dla $f = \chi_A$, gdzie $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ jest dowolnym zbiorem mierzalnym ograniczonym. Z charakterystyki zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a (patrz Twierdzenie 4.26) wynika, że $A = G \setminus Z$, gdzie G jest ograniczonym zbiorem typu G_δ , zaś $Z \subset G$ jest zbiorem miary λ_{n+m} zero. Zbiór Z jest zawarty w pewnym zbiorze H typu G_δ i miary Lebesgue'a zero.⁷ Funkcja χ_H spełnia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_H d\lambda_{n+m} = \lambda_{n+m}(H) = 0,$$

więc

$$\int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in X, \text{ gdzie } \lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0.$$

Stąd wynika, że dla każdego $\mathbf{x} \in X$ istnieje zbiór $Y_{\mathbf{x}}$ taki, że

$$\chi_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{y} \in Y_{\mathbf{x}}, \text{ gdzie } \lambda_m(\mathbb{R}^m \setminus Y_{\mathbf{x}}) = 0.$$

Jednak $0 \leq \chi_Z \leq \chi_H$, więc

$$\chi_Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in X \text{ i } \mathbf{y} \in Y_{\mathbf{x}}. \quad (5.32)$$

Funkcja $f = \chi_A = \chi_G - \chi_Z$. Ustalmy $\mathbf{x} \in X$. Wobec (5.32) jest $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dla wszystkich $\mathbf{y} \in Y_{\mathbf{x}}$, tzn. na zbiorze pełnej miary w \mathbb{R}^m . Funkcja, która jest λ_m -prawie wszędzie równa funkcji mierzalnej, sama jest mierzalna; innymi słowy, $f_{\mathbf{x}}(\cdot) = f(\mathbf{x}, \cdot)$ jest mierzalna dla prawie wszystkich \mathbf{x} . Ponadto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in X. \quad (5.33)$$

⁷Można np. wziąć $H = \bigcap U_j$, gdzie U_j , dla każdego $j = 1, 2, \dots$, jest sumą rodziny przedziałów otwartych pokrywających Z , o łącznej mierze $< 1/j$.

Wynika stąd, że lewa strona tej równości jest mierzalną funkcją zmiennej $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Wreszcie, ponieważ X jest zbiorem pełnej miary w \mathbb{R}^n , więc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_G d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \stackrel{(5.33)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Krok 5: przypadek ogólny. Niech f będzie dowolną funkcją mierzalną nieujemną. Istnieje wtedy ciąg funkcji prostych $0 \leq f_j \nearrow f$ dla $j \rightarrow \infty$. Zauważmy, że wtedy

$$0 \leq g_j = f_j \cdot \chi_{B(\mathbf{0}, j)} \nearrow f.$$

Z poprzednich kroków dowodu i liniowości całki łatwo wynika, że teza twierdzenia Fubniego zachodzi dla wszystkich funkcji prostych nieujemnych, które znikają poza pewną kulą w \mathbb{R}^{n+m} , a więc w szczególności dla każdej z funkcji g_j . Dlatego, dla każdego $j = 1, 2, \dots$ istnieje taki zbiór $X_j \subset \mathbb{R}^n$, że

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus X_j) = 0, \quad \mathbf{y} \mapsto g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ jest funkcją mierzalną dla } \mathbf{x} \in X_j. \quad (5.34)$$

Ponadto, funkcje

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \quad \text{są mierzalne dla } j = 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

Położmy $X = \bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$. Zbiór X jest pełnej miary w \mathbb{R}^n i wszystkie funkcje $\mathbf{y} \mapsto g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ są mierzalne dla każdego $\mathbf{x} \in X$; dlatego $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_j g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jest funkcją mierzalną dla każdego $\mathbf{x} \in X$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej otrzymujemy teraz mierzalność funkcji

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \quad (5.36)$$

Ponieważ teza twierdzenia Fubniego zachodzi dla każdej funkcji g_j , więc

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} g_j d\lambda_{n+m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\lambda_m(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x});$$

stąd i z (5.36) otrzymujemy, raz jeszcze stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, równość (5.14) dla funkcji f . To kończy cały dowód. \square

Wniosek 5.33. Niech $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$. Dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ niech

$$A_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\}, \quad A^{\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\} \quad (5.37)$$

oznaczają tak zwane przekroje pionowe i poziome zbioru A . Wówczas $A_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ dla prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $A^{\mathbf{y}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dla prawie wszystkich $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Dowód. Stosujemy pierwszy punkt tezy twierdzenia Fubniego do $f = \chi_A$. \square

Uwaga 5.34. Jeśli $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$, to dla pewnych $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ przekrój $A_{\mathbf{x}}$ może być zbiorem niemierzalnym. Niech np. $n = m = 1$ i niech $V \subset [0, 1]$ będzie zbiorem niemierzalnym, skonstruowanym w Przykładzie 4.1. Zbiór $A = \{0\} \times V$ jest elementem σ -ciała $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, gdyż $\lambda_2(A) = 0$, jednak jego przekrój $A_0 = V$ nie jest mierzalnym podzbiorem \mathbb{R} ! Czytelnik sam wskaże inne, bardziej skomplikowane przykłady takiego zjawiska.

Wniosek 5.35 (zasada Cavalieri’ego). Jeśli $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ i równość $\lambda_m(A_{\mathbf{x}}) = \lambda_m(B_{\mathbf{x}})$ zachodzi dla prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to wówczas $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$. \square

Tej równości dla $n = 1, m = 2$ i ‘przyzwoitych’ brył $A, B \subset \mathbb{R}^3$ świadom był już Archimedes, który wiedział, że objętość kuli stanowi $\frac{2}{3}$ objętości opisanego na niej walca, dowodził zaś tego, rozpatrując poziome przekroje kuli i dwóch stożków wpisanych w walec.

Podamy kilka innych przykładów zastosowań twierdzenia Fubiniego i twierdzenia o zamianie zmiennych.

Przykład 5.36 (miara stożka nad zbiorem n -wymiarowym). Niech $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, gdzie \mathbb{R}^n utożsamiamy z $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, i niech $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ będzie punktem o współrzędnej $v_{n+1} \neq 0$. Stożkiem $C(A, \mathbf{v})$ o podstawie A (inaczej: nad zbiorem A) i o wierzchołku \mathbf{v} nazywa się zwykle zbiór

$$C(A, \mathbf{v}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{z} = t \cdot (\mathbf{x}, 0) + (1-t) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{x} \in A, t \in [0, 1]\},$$

będący sumą wszystkich odcinków o jednym końcu w punkcie $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, 0) \in A$ i drugim końcu w punkcie \mathbf{v} . Wykażemy, że

$$\lambda_{n+1}(C(A, \mathbf{v})) = \frac{1}{n+1} \cdot |v_{n+1}| \cdot \lambda_n(A). \quad (5.38)$$

(Czytelnik zechce zauważyć, że gdy $n = 2$ i A jest wielokątem w \mathbb{R}^2 , to (5.38) jest znanym wzorem na objętość ostrosłupa.) Niech

$$\Phi: \mathbb{R}^n \times (0, 1) \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{x}, t) = t \cdot (\mathbf{x}, 0) + (1-t) \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1};$$

macierzą różniczki $D\Phi$ przekształcenia Φ jest, jak łatwo zauważyć, następująca macierz $(n+1) \times (n+1)$:

$$\begin{pmatrix} t \cdot \text{Id}_{n \times n} & B \\ \mathbf{0} & -v_{n+1} \end{pmatrix},$$

gdzie B oznacza kolumnę liczb $x_i - v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dlatego $|\det D\Phi(\mathbf{x}, t)| = t^n \cdot |v_{n+1}|$. Mamy

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(C(A, \mathbf{v})) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_{C(A, \mathbf{v})} d\lambda_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times (0, 1)} \left(\chi_{C(A, \mathbf{v})} \circ \Phi \right) \cdot |\det D\Phi| d\lambda_{n+1} \quad \text{wobec Twierdzenia 5.22} \\ &= \int_0^1 \int_A t^n \cdot |v_{n+1}| d\lambda_n(\mathbf{x}) dt \quad \text{wobec Twierdzenia Fubiniego 5.24} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot |v_{n+1}| \cdot \lambda_n(A), \end{aligned}$$

a więc istotnie zachodzi wzór (5.38) .

Przykład 5.37 (zasada Cavalieri’ego, wersja II). Niech f będzie funkcją mierzalną nieujemną na \mathbb{R}^n . Wówczas dla każdej liczby $p \geq 1$ zachodzi wzór

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\lambda_n = p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \lambda_n(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > t\}) dt. \quad (5.39)$$

Istotnie, dzięki równości $z^p = p \int_0^z t^{p-1} dt$, stosując twierdzenie Fubini’ego, żeby zamienić kolejność całkowania względem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^p d\lambda_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(p \int_0^f t^{p-1} dt \right) d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} p t^{p-1} \cdot \chi_{\{(\mathbf{x}, t) : f(\mathbf{x}) > t > 0\}}(\mathbf{x}, t) d\lambda_{n+1}(\mathbf{x}, t) \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \lambda_n(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > t\}) dt. \end{aligned}$$

Innym przykładem zastosowania obu twierdzeń (o zamianie zmiennych i Fubini’ego) do obliczania objętości brył obrotowych w \mathbb{R}^3 jest tzw. reguła Pappusa–Guldina (znana także jako reguła Guldina lub twierdzenie Pappusa o środku ciężkości).

Definicja 5.38. Jeśli A jest zbiorem mierzalnym w \mathbb{R}^n , a μ miarą na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, dodatnią na A , to środkiem ciężkości zbioru A względem miary μ nazywamy punkt $s(A)$ o współrzędnych

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A x_i d\mu, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Jeśli któraś z powyższych całek nie istnieje, to środek ciężkości A względem μ nie jest określony). Używa się także zapisu wektorowego

$$s(A) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \mathbf{x} d\mu$$

Gdy $\mu = \lambda_n$, mówimy po prostu o środku ciężkości zbioru A .

Stwierdzenie 5.39 (reguła Pappusa–Guldina). Załóżmy, że zbiór A zawarty w półpłaszczyźnie $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$ jest mierzalny względem λ_2 i ma środek ciężkości. Niech B będzie zbiorem, który powstaje z A przez obrót o kąt 2π wokół prostej $x = y = 0$ w \mathbb{R}^3 . Wtedy

$$\lambda_3(B) = 2\pi r \cdot \lambda_2(A), \quad (5.40)$$

gdzie r oznacza odległość środka ciężkości zbioru A od osi obrotu.

Dowód. Połóżmy

$$\Phi(x, z, t) = (x \cos t, x \sin t, z) \quad \text{dla} \quad (x, z, t) \in \Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Czytelnik łatwo sprawdzi, że

$$|\det D\Phi(x, z, t)| = |x \cos^2 t + x \sin^2 t| = x, \quad (x, z, t) \in \Omega.$$

Zbiór $\Phi(A \times (0, 2\pi))$ to po prostu zbiór B z usuniętą półpłaszczyzną $\{x > 0, y = 0\}$, która jest zbiorem miary zero w \mathbb{R}^3 . Dlatego, wobec twierdzenia o zamianie zmiennych i twierdzenia Fubini’ego,

$$\lambda_3(B) = \lambda_3(\Phi(A)) = \int_{A \times (0, 2\pi)} |\det D\Phi| d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} \lambda_2(A) \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x d\lambda_2 \right) dt.$$

Całka wewnętrzna

$$\frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x d\lambda_2,$$

tzn. x -owa współrzędna środka ciężkości $s(A)$ zbioru A , jest równa r , odległości punktu $s(A)$ od osi obrotu $\{x = y = 0\}$. Dlatego

$$\lambda_3(B) = \int_0^{2\pi} \lambda_2(A) \cdot r dt = 2\pi r \cdot \lambda_2(A).$$

Przykład 5.40 (objętość torusa obrotowego). Niech $R > r > 0$. Obracając wokół osi z koło $K = \{(x, y, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$ położone w płaszczyźnie $y = 0$ otrzymamy pełny torus o objętości $2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$. To wynika z reguły Pappusa–Guldina: środek ciężkości koła K pokrywa się z jego geometrycznym środkiem i leży właśnie w odległości R od osi obrotu.

Zadanie 5.41. Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta prostokątnego i półkola. Sprawdzić znane wzory na objętość stożka, walca i kuli, posługując się regułą Guldina.

5.4 Przestrzeń L^1 funkcji całkowalnych.

Definicja 5.42. Niech (X, \mathcal{F}, μ) będzie przestrzenią z miarą. Dla $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mierzalnej względem μ połączmy

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu. \quad (5.41)$$

Oczywiście, wielkość $\|f\|_1$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $|f|$ jest całkowalna na X względem miary μ . Nietrudno zauważyć, że gdy f, g są całkowalne, zaś $\alpha \in \mathbb{R}$, to

$$\|\alpha \cdot f\|_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_1, \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

(druga nierówność wynika wprost z nierówności trójkąta $|f + g| \leq |f| + |g|$ i liniowości całki). Jednak, formalnie biorąc, odwzorowanie $f \mapsto \|f\|_1$ *nie jest* normą na przestrzeni liniowej wszystkich funkcji całkowalnych, gdyż z równości $\|f\|_1 = 0$ nie wynika wcale, że $f \equiv 0$ – wynika stąd jedynie, że $f = 0$ *prawie wszędzie* względem miary μ na X .

Aby ominąć tę drobną trudność i wyposażyć przestrzeń funkcji całkowalnych w naturalną normę (5.41), określa się na zbiorze funkcji całkowalnych na X relację

$$f \sim g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0. \quad (5.42)$$

Nietrudno sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Dwie funkcje są w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy są równe μ -prawie wszędzie. To nie ma wpływu na wartość całki.

Definicja 5.43 (przestrzeń funkcji całkowalnych). Symbolem $L^1(X, \mu)$ oznaczamy zbiór klas abstrakcji relacji (5.42), określonej na zbiorze tych funkcji mierzalnych $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dla których $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Z formalnego punktu widzenia, wg. powyższej definicji elementy przestrzeni funkcji całkowalnych nie są funkcjami, tylko klasami abstrakcji relacji \sim . W praktyce, utożsamia się funkcję f z jej klasą abstrakcji $[f]_{\sim}$ i traktuje elementy $L^1(X, \mu)$ jak funkcje. W typowych sytuacjach nie prowadzi to do żadnych nieporozumień.

Stwierdzenie 5.44. *Odwzorowanie $f \mapsto \|f\|_1$ jest normą na $L^1(X, \mu)$.*

Dowód. Jednorodność i nierówność trójkąta są oczywiste i już o nich mówiliśmy. Jeśli $f \sim 0 \in L^1(X, \mu)$, to $f = 0$ prawie wszędzie i $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = 0$. Na odwrót, jeśli $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = 0$, to $|f| = 0$ p.w., a więc $f \sim 0$, tzn. $f = 0 \in L^1(X, \mu)$. \square

Przestrzeń liniowa $L^1(X, \mu)$ wyposażona w metrykę

$$d(f, g) = \|f - g\|_1$$

staje się przestrzenią metryczną. Ma miejsce następujący ważny fakt.

Twierdzenie 5.45 (zupełność przestrzeni L^1). *Przestrzeń $L^1(X, \mu)$ z metryką $d(f, g) = \|f - g\|_1$ jest przestrzenią metryczną zupełną.*

Dowód. Wykażemy, że jeśli ciąg $(f_j) \subset L^1(X, \mu)$ spełnia warunek Cauchy'ego, to jest zbieżny do pewnej funkcji $f \in L^1(X, \mu)$.

Krok 1: identyfikacja funkcji f . Korzystając z warunku Cauchy'ego, można wybrać podciąg $f_{j_1}, f_{j_2}, f_{j_3}, \dots$ ciągu (f_j) taki, że

$$\|f_{j_k} - f_m\|_1 < \frac{1}{2^k} \quad \text{dla } m > j_k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.43)$$

Położmy

$$g_k = \sum_{s=1}^k |f_{j_{s+1}} - f_{j_s}|, \quad g = \sum_{s=1}^{\infty} |f_{j_{s+1}} - f_{j_s}| = \lim g_k.$$

Wobec (5.43) i liniowości całki $\|g_k\|_1 < \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z lematu Fatou,

$$\int_X |g| d\mu = \int_X \lim |g_k| d\mu = \int_X \liminf |g_k| d\mu \leq \liminf \int_X |g_k| d\mu \leq 1.$$

Zatem $g \in L^1(X, \mu)$, więc z pewnością g jest skończona prawie wszędzie. Szereg, definiujący g , jest więc zbieżny dla μ -prawie wszystkich $x \in X$. Dlatego szereg

$$S(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (f_{j_{s+1}}(x) - f_{j_s}(x)) \quad (5.44)$$

też jest zbieżny dla μ -prawie wszystkich $x \in X$, gdyż jest *bezwzględnie* zbieżny p.w. Niech

$$f(x) = \begin{cases} f_{j_1}(x) + S(x) & \text{gdy szereg (5.44) jest zbieżny} \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Zauważmy, że na zbiorze pełnej miary w X (tam, gdzie szereg $S(x)$ jest zbieżny) mamy

$$f(x) = f_{j_1}(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (f_{j_{s+1}}(x) - f_{j_s}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{j_k}(x).$$

To wynika wprost z definicji sumy szeregu. Ponadto, raz jeszcze korzystając z lematu Fatou, otrzymujemy

$$\|f - f_{j_s}\|_1 = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{j_k} - f_{j_s}| d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{j_k} - f_{j_s}\|_1 \leq \frac{1}{2^s}. \quad (5.45)$$

Krok 2: zbieżność ciągu f_j do f w przestrzeni L^1 . Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wybierzmy indeks j_s tak, aby

$$\frac{1}{2^s} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f_l - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } m, l \geq j_s.$$

Wówczas, dla dowolnego $m \geq j_s$ jest

$$\|f - f_m\|_1 \leq \|f - f_{j_s}\|_1 + \|f_{j_s} - f_m\|_1 \stackrel{(5.45)}{\leq} \frac{1}{2^s} + \|f_{j_s} - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a więc, wprost z definicji granicy, $f_m \rightarrow f$ w przestrzeni $L^1(X, \mu)$. \square

Odnotujmy oddzielnie ważny wniosek z pierwszej części powyższego dowodu.

Wniosek 5.46. *Jeśli $f_m \rightarrow f$ w przestrzeni $L^1(X, \mu)$, to ciąg (f_m) ma podciąg, który jest zbieżny do f prawie wszędzie na X .* \square

5.5 Splot

W tym podrozdziale symbol $L^1(\mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń funkcji całkownych na \mathbb{R}^n względem miary Lebesgue'a λ_n .

Definicja 5.47. Splotem funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nazywamy funkcję

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}).$$

Iloczyn dwóch funkcji całkownych wcale nie musi być funkcją całkowną (przykład: $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ na odcinku jednostkowym), więc nie jest rzeczą jasną, czy definicja splotu jest poprawna.⁸ Wykażemy jednak, że nie ma powodu do obaw.

Twierdzenie 5.48. *Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to ich splot $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i zachodzi nierówność*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \quad (5.46)$$

Dowód. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})|$ jest funkcją mierzalną na \mathbb{R}^{2n} . Wobec Twierdzenia Fubiniiego i niezmienniczości miary Lebesgue'a względem przesunięć,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_{2n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{x}) \right) |g(\mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\lambda_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1, \end{aligned} \quad (5.47)$$

gdyż całka $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{x})$ nie zależy od \mathbf{y} . Z drugiej strony, wprost z definicji splotu $f * g$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \| |f| * |g| \|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g| d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}) \right) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_{2n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\stackrel{(5.47)}{=} \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

⁸Łatwo natomiast zauważyć, że splot funkcji $f \in L^1$ z funkcją mierzalną, ograniczoną g jest dobrze określony.

Zatem $|f| * |g| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i, na mocy twierdzenia Fubiniego, całka $\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot g(\mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y})$, jest skończona dla *prawie wszystkich* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Tezę w ogólny przypadku otrzymujemy natychmiast z nierówności $|f * g| \leq |f| * |g|$, która zachodzi, gdyż $|\int_X h d\mu| \leq \int_X |h| d\mu$ dla dowolnej przestrzeni z miarą. \square

Stwierdzenie 5.49. Dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest $f * g = g * f$.

Dowód. To łatwo wynika z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie: przy ustalonym \mathbf{x} przekształcenie $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ jest dyfeomorfizmem \mathbb{R}^n na \mathbb{R}^n , a moduł wyznacznika macierzy Jacobiego tego przekształcenia jest (oczywiście) równy 1. Dlatego

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) = g * f(\mathbf{x}).$$

Dowód jest zakończony. \square

Podobnie można wykazać, że splot jest działaniem łącznym na $L^1(\mathbb{R}^n)$, ma więc pożądane cechy ‘mnożenia’. Jest to jednak mnożenie bez jedyńki:

Zadanie 5.50. Wykazać, że nie istnieje funkcja $\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\delta * f = f$ dla każdej $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wskazówka. Jaką wartość powinna mieć całka takiej funkcji δ ? Na jakim zbiorze powinna zachodzić równość $\delta = 0$?

5.5.1 Aproksymacja funkcji całkownych funkcjami gładkimi

Jednym z najważniejszych zastosowań splotu w różnych działach analizy jest aproksymowanie funkcji ‘nieporządnymi’ (tzn. być może bardzo nieregularnymi) funkcjami znacznie ‘porządniejszymi’, o lepszych własnościach. Wskażemy, jak się to robi.

Definicja 5.51 (jedyńka aproksymatywna). Niech $\varphi \in C_0^\infty(B(0, 1))$ będzie nieujemną funkcją gładką o nośniku zawartym w kuli $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, taką, że $\int_{B(0,1)} \varphi d\lambda_1 = 1$. Będziemy mówić, że rodzina funkcji

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

jest *jedyńką aproksymatywną*.

Lemat 5.52. Jeśli h jest funkcją klasy $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, to dla każdej funkcji $f \in L^1$ splot $f * h$ jest funkcją klasy C^∞ . Ponadto, dla każdego wielowskaźnika α zachodzi równość

$$D^\alpha(f * h) = f * (D^\alpha h).$$

Ostatnia równość oznacza po prostu, że różniczkowanie D^α można bez obaw o wynik wprowadzić pod całkę, definiującą splot. Jest to możliwe dzięki twierdzeniu Lebesgue’a o zbieżności zmajoryzowanej.

Dowód. Ciągłość funkcji $f * h$ oraz $f * (D^\alpha h)$ łatwo wynika z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej, gdyż każda funkcja gładka o zwartym nośniku jest ograniczona. Dowód

równości z tezy lematu wystarczy przeprowadzić w przypadku, gdy α jest wielowskaźnikiem długości $|\alpha| = 1$, tzn. dla pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Przypadek ogólny wynika stąd natychmiast przez indukcję.

Ustalmy $j \in \{1, \dots, n\}$ i punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$\frac{f * h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f * h(\mathbf{x})}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j - \mathbf{y}) - h(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{t} f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}). \quad (5.48)$$

Dla $t \rightarrow 0$ funkcje podcałkowe są punktowo zbieżne do $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y})$. Nośnik funkcji gładkiej h jest zbiorem zwartym, dlatego wobec twierdzenia o wartości średniej

$$\left| \frac{h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j - \mathbf{y}) - h(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{t} \right| \leq \frac{|t| \sup_{\mathbf{z}} \|Dh(\mathbf{z})\|}{|t|} = \sup_{\mathbf{z}} \|Dh(\mathbf{z})\| =: C.$$

Można więc, korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, przejść do granicy $t \rightarrow 0$ pod całką po prawej stronie równości (5.48); daje to wynik

$$\frac{\partial(f * h)}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \frac{\partial h}{\partial x_j} * f(\mathbf{x}) = f * \frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

(skorzystaliliśmy, jak widać, z przemienności spłotu). \square

Wniosek 5.53. *Jeśli (φ_ε) jest jedyneką aproksymatywną, to dla każdej funkcji $f \in L^1$ i każdego $\varepsilon > 0$ spłot $f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty$ i dla każdego wielowskaźnika α*

$$D^\alpha(f * \varphi_\varepsilon) = f * (D^\alpha \varphi_\varepsilon).$$

Zobaczmy teraz, że spłot $f * \varphi_\varepsilon$ funkcji $f \in L^1$ z jedyneką aproksymatywną przybliża f w normie L^1 . Zaczniemy od sprawdzenia tego w szczególnie prostej sytuacji.

Lemat 5.54. *Jeśli (φ_ε) jest jedyneką aproksymatywną, to dla każdej funkcji $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej na \mathbb{R}^n i znikającej poza pewną kulą $B(\mathbf{0}, r)$ mamy*

$$g * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows g \quad \text{dla } \varepsilon \rightarrow 0$$

*jednostajnie na \mathbb{R}^n . Ponadto, $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$ w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Dowód. Ustalmy liczbę $\eta > 0$. Ponieważ funkcja g jest ciągła i znika poza pewnym zbiorem zwartym, więc jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R}^n . Dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{z})| < \eta$ dla $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$. Niech $\varepsilon \in (0, \delta)$. Ponieważ nośnik funkcji φ_ε jest zwarty w kuli $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, a ponadto $\int \varphi_\varepsilon = 1$, więc

$$\begin{aligned} |g * \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| &= \left| \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) - g(\mathbf{x}) \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) \right| \\ &\leq \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} |g(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - g(\mathbf{x})| \cdot \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) < \eta \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}) = \eta. \end{aligned}$$

Zatem $g * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows g$ wprost z definicji zbieżności jednostajnej. Ponieważ dla $\varepsilon < 1$ nośnik funkcji $g * \varphi_\varepsilon$ zawiera się w kuli $B(\mathbf{0}, r + 1)$, więc ze zbieżności jednostajnej $g * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows g$ wynika także zbieżność $g * \varphi_\varepsilon \rightarrow g$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$. \square

Lemat 5.55. *Funkcje ciągłe o zwartym nośniku w \mathbb{R}^n tworzą zbiór gęsty w $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Dowód. Ustalmy $f \in L^1$. Niech $\eta > 0$ będzie dowolną liczbą. Przybliżając część dodatnią f_+ i część ujemną f_- funkcji f niemalejącymi ciągami funkcji prostych (patrz Twierdzenie 4.51), znajdziemy funkcję prostą h taką, że $\|f - h\|_1 < \eta$. Bez zmniejszenia ogólności, posługując się twierdzeniem o bezwzględnej ciągłości całki, można założyć, że h jest skończoną kombinacją liniową funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych ograniczonych.

Z uwagi na nierówność trójkąta w L^1 wystarczy więc wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $h = \chi_A$, gdzie $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest zbiorem ograniczonym, istnieje funkcja ciągła g , znikająca poza pewną kulą w \mathbb{R}^n i taka, że $\|h - g\|_1 < \varepsilon$.

Z Twierdzenia 4.26 wynika, że istnieje zbiór zwarty $K \subset A$ i zbiór otwarty $\Omega \supset A$ takie, że $\lambda_n(\Omega \setminus K) < \varepsilon$. Z lematu Urysohna wynika, że istnieje funkcja ciągła $g: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ taka, że $g \equiv 1$ na K i $g \equiv 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Mamy

$$\|h - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A - g| d\lambda_n = \int_{\Omega \setminus K} |\chi_A - g| d\lambda_n \leq \int_{\Omega \setminus K} 1 d\lambda_n = \lambda_n(\Omega \setminus K) < \varepsilon.$$

Dowód lematu jest zakończony. \square

Możemy teraz łatwo wykazać zapowiedziane wcześniej twierdzenie o aproksymacji funkcji całkowalnych za pomocą splotu z jedyneką aproksymatywną.

Twierdzenie 5.56. *Niech $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ będzie jedyneką aproksymatywną. Dla każdej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ splot $f * \varphi_\varepsilon \rightarrow f$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$ dla $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Dowód. Ustalmy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i liczbę $\eta > 0$. Posługując się Lematem 5.55, wybierzmy taką funkcję ciągłą o zwartym nośniku $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, żeby $\|f - g\|_1 < \frac{\eta}{3}$. Z nierówności trójkąta,

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \|(f - g) * \varphi_\varepsilon\|_{L^1} + \|g * \varphi_\varepsilon - g\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1}.$$

Trzeci składnik nie przekracza $\eta/3$ wskutek doboru g . Drugi składnik jest mniejszy od $\eta/3$ dla wszystkich ε dostatecznie małych wobec Lematu 5.54. Wreszcie, dla każdego $\varepsilon > 0$, na mocy nierówności (5.46) z tezy Twierdzenia 5.48,

$$\|(f - g) * \varphi_\varepsilon\|_1 \leq \|f - g\|_1 \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_1 = \|f - g\|_1 < \frac{\eta}{3}.$$

Ostatecznie,

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^1} < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.$$

Dowód twierdzenia jest zakończony. \square

Często wygodnie jest wiedzieć, że funkcje całkowalne można aproksymować nie tylko funkcjami gładkimi, ale także funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Nietrudno to wynioskować z ostatniego twierdzenia.

Wniosek 5.57. *Dla każdej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i każdej liczby $\eta > 0$ istnieje funkcja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\|f - \psi\|_1 < \eta$.*

Dowód. Niech $\zeta: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ będzie ustaloną funkcją klasy $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, taką, że $\zeta \equiv 1$ na kuli $B(\mathbf{0}, 1)$ i $\zeta \equiv 0$ poza kulą $B(\mathbf{0}, 2)$. Połóżmy $\zeta_R(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}/R)$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $R > 0$.

Ustalmy $\eta > 0$ i dobierzmy $\varepsilon > 0$ tak, aby $\|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 < \frac{\eta}{2}$. Nietrudno sprawdzić, że dla każdej funkcji $g \in L^1$ iloczyn $g \cdot \zeta_R \rightarrow g$ w L^1 dla $R \rightarrow \infty$. Istotnie,

$$\|g \cdot \zeta_R - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{0}, R)} |g \cdot \zeta_R - g| d\lambda_n \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{0}, R)} |g| d\lambda_n \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

gdyż $\int_{B(\mathbf{0}, R)} |g| d\lambda_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\lambda_n < \infty$.

Zatem, dla odpowiedniego małego $\varepsilon > 0$ i odpowiednio dużego $R > 0$ (dobranego do ε) jest

$$\|f - \zeta_R \cdot (f * \varphi_\varepsilon)\|_1 \leq \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 + \|f * \varphi_\varepsilon - \zeta_R \cdot (f * \varphi_\varepsilon)\|_1 < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Funkcja $\zeta_R \cdot (f * \varphi_\varepsilon)$ jest oczywiście gładka i ma zwarty nośnik. \square

5.5.2 Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji wielu zmiennych

Metodą bardzo podobną do opisanej w poprzednim podrozdziale można udowodnić ogólną wersję twierdzenia Weierstrassa o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami. Czytelnik zna ją już dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Twierdzenie 5.58 (Weierstrassa o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami). Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Dla każdej funkcji ciągłej $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian P taki, że

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} |f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

W dowodzie wykorzystamy jako narzędzie splot. Posłużymy się tak zwanymi *wielomianami Tonellego*. Zbiór wszystkich funkcji ciągłych na K o wartościach rzeczywistych będziemy oznaczać symbolem $C(K)$.

Dowód. Ponieważ złożenie wielomianu z funkcją afiniczną $\mathbf{x} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ jest wielomianem, więc wystarczy wykazać twierdzenie przy dodatkowym założeniu $K \subset B(\mathbf{0}, \frac{1}{4})$. Ustalmy $f \in C(K)$. Korzystając z twierdzenia Tietzego o przedłużaniu możemy założyć, że f jest określona na całej przestrzeni \mathbb{R}^n i znika poza kulą $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$.

Krok 1: definicja wielomianów Tonellego. Połóżmy

$$t_N(\mathbf{x}) = (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^N, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad N = 1, 2, \dots,$$

$$d_{N,n} = \int_{B^n(\mathbf{0}, 1)} t_N(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x})$$

Sprawdzimy, że

$$d_{N,n} \geq \frac{1}{N^n} \quad \text{dla } N > n. \quad (5.49)$$

W tym celu oszacujemy⁹ całkę, definiującą $d_{N,n}$, stosując twierdzenie Fubiniiego (podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 5.29). Oznaczając $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$, gdzie $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$, otrzymujemy po niezbyt skomplikowanym rachunku

$$\begin{aligned}
d_{N,n} &= \int_{B^n(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{x}) d\lambda_n(\mathbf{x}) \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},\sqrt{1-x_n^2})} (1-x_n^2 - \|\mathbf{x}'\|^2)^N d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
&= \int_{-1}^1 (1-x_n^2)^N \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},\sqrt{1-x_n^2})} \left(1 - \left\| \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-x_n^2}} \right\|^2 \right)^N d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
&= \int_{-1}^1 (1-x_n^2)^{N+\frac{n-1}{2}} \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},1)} (1-\|\mathbf{y}'\|^2)^N d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}') \right) dx_n \\
&= 2d_{N,n-1} \int_0^1 (1-x_n^2)^{N+\frac{n-1}{2}} dx_n \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Dokonałiśmy wyżej linowej zamiany zmiennych: w wewnętrznej całce, przy ustalonym x_n , podstawiliśmy $\mathbf{x}' = (1-x_n^2)^{1/2} \cdot \mathbf{y}'$; jest to przekształcenie liniowe przestrzeni \mathbb{R}^{n-1} , a jego jacobian wynosi $(1-x_n^2)^{(n-1)/2}$.

Ponieważ $1-x_n^2 > 1-x_n$ na $(0,1)$, więc z (5.50) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
d_{N,n} &= 2d_{N,n-1} \int_0^1 (1-x_n^2)^{N+\frac{n-1}{2}} dx_n \geq 2d_{N,n-1} \int_0^1 (1-x_n)^{N+\frac{n-1}{2}} dx_n \\
&= \frac{2d_{N,n-1}}{N+\frac{n-1}{2}} > \frac{d_{N,n-1}}{N} \quad \text{dla } N > n > \frac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

Stąd, przez indukcję,

$$d_{N,n} \geq \frac{d_{N,1}}{N^{n-1}} = \frac{2}{N^{n-1}} \int_0^1 (1-x^2)^N dx > \frac{2}{N^{n-1}} \int_0^1 (1-x)^N dx = \frac{2}{(N+1)N^{n-1}} > N^{-n}.$$

Położmy teraz

$$T_N f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{N,n}} \cdot t_N * f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\mathbb{R}^n} t_N(\mathbf{x} - \mathbf{z}) f(\mathbf{z}) d\lambda_n(\mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}). \tag{5.51}$$

Przy ustalonym \mathbf{z} funkcja podcałkowa jest wielomianem zmiennej $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Dlatego funkcja $T_N f$ jest wielomianem zmiennej \mathbf{x} . Ponieważ $f \equiv 0$ poza kulą $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$, więc całkowanie w (5.51) odbywa się w istocie tylko po $B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$. Jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$, to $\mathbf{x} - \mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, 1)$. Dlatego, z przemienności spłotu,

$$T_N f(\mathbf{x}) = \frac{1}{d_{N,n}} \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) \tag{5.52}$$

Krok 2. Zbieżność wielomianów Tonnellego. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R}^n , więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta$ jest $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})| < \varepsilon$. Wprost z definicji funkcji t_N i liczb $d_{N,n}$ otrzymujemy

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{d_{N,n}} \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}),$$

⁹Można wyrazić $d_{N,n}$ przez funkcje Γ i B Eulera, posługując się regułą Cavalieri'ego.

więc dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ jest

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - T_N f(\mathbf{x})| &= \frac{1}{d_{N,n}} \left| \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) \cdot (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) d\lambda_n(\mathbf{y}) \right| \\ &\leq I_1 + I_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\|\mathbf{y}\| < \delta} t_N(\mathbf{y}) \cdot |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}), \\ I_2 &= \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\delta \leq \|\mathbf{y}\| \leq 1} t_N(\mathbf{y}) \cdot |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda_n(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Całkę I_2 szacujemy brutalnie, zastępując moduł różnicy sumą modułów, a następnie uwzględniamy oszacowanie (5.49) liczb $d_{N,n}$. Oto efekt:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \sup |f| \cdot \frac{1}{d_{N,n}} \int_{\delta \leq \|\mathbf{y}\| \leq 1} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &\leq 2 \sup |f| \cdot N^n \int_{\delta \leq \|\mathbf{y}\| \leq 1} (1 - \delta^2)^N d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &\leq 2\omega_n \sup |f| \cdot N^n (1 - \delta^2)^N \rightarrow 0 \quad \text{dla } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dlatego całka $I_2 < \varepsilon$ dla wszystkich $N > N_0 = N_0(\varepsilon, f, \delta, n)$; uzyskane oszacowanie I_2 jest jednostajne względem \mathbf{x} , więc oczywiście N_0 nie zależy od $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$.

Szacując I_1 , zauważamy, że w tej całce czynnik $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|$ jest mały wskutek doboru liczby δ . Dlatego

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\varepsilon}{d_{N,n}} \int_{\|\mathbf{y}\| < \delta} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{d_{N,n}} \int_{B(\mathbf{0},1)} t_N(\mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } N \in \mathbb{N} \text{ i } \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Ostatecznie więc, $\sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1/2)} |f(\mathbf{x}) - T_N f(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$ dla wszystkich $N > N_0$. \square

Czytelnik, który pamięta jeszcze definicję wielomianów Bernsteina i dowód twierdzenia Weierstrassa dla przestrzeni $C([0, 1])$, może zwrócić uwagę na podobieństwo obu dowodów. Mówiąc niezbyt precyzyjnie, uśredniamy w nich wartości f względem pewnej miary unormowanej (inaczej: probabilistycznej) μ_N , dobranej tak, aby wynik uśrednienia był wielomianem stopnia zależnego od N . Dla dużych N miara μ_N jest niemal skoncentrowana w jednym punkcie. Oszacowanie różnicy między funkcją f i wielomianem, który powstaje w wyniku jej uśredniania, wykonane jest w obu dowodach *tym samym sposobem*. Osoba, zainteresowana analizą, zetknie się z taką metodą szacowania sum lub całek w wielu innych zagadnieniach.

Rozdział 6

Miara powierzchniowa na rozmaitościach zanurzonych

W tym rozdziale zajmiemy się definicją tzw. *miary powierzchniowej* na m -wymiarowej rozmaitości zanurzonej $M \subset \mathbb{R}^n$ oraz opisem własności tej miary. Definicję wprowadzimy tak, aby dla $m = 1$ otrzymać długość krzywej, a dla $m = 2$ – pojęcie *poła* powierzchni gładkiej, odpowiadające naturalnym intuicjom.

Czytelnik pamięta zapewne, że na I roku studiów określiliśmy długość krzywej jako kres górny długości łamanych wpisanych w tę krzywą. Pomysł, stojący za definicją miary powierzchniowej, jest w istocie podobny. Zaczniemy jednak od przykładu, który świadczy o tym, że definiowanie pola powierzchni gładkiej wiąże się z pewnymi trudnościami.

Przykład 6.1 (chińska latarnia H. A. Schwarza, 1880). Dla danych liczb naturalnych $m, n > 1$ opiszemy powierzchnię wielościenną $L_{m,n}$, złożoną z $2mn$ przystających trójkątów równoramiennych o wierzchołkach położonych na powierzchni bocznej walca obrotowego o promieniu podstawy $r = 1$ i wysokości $h = 1$.

Poprowadźmy $n + 1$ płaszczyzn poziomych $\pi_0, \pi_2, \dots, \pi_n$; pierwsza z nich zawiera dolną podstawę walca, ostatnia – górną podstawę, a odległość sąsiednich płaszczyzn jest równa $1/n$. Płaszczyzny te przecinają powierzchnię boczną walca wzdłuż $n + 1$ okręgów. Na każdym okręgu ustalamy m punktów, stanowiących wierzchołki m -kąta foremnego; robimy to tak, aby punkty na $(j + 1)$ -szym okręgu leżały nad środkami łuków, wyznaczonych przez punkty na j -tym okręgu.¹ Liczba wszystkich punktów wynosi $(n + 1) \cdot m$.

Powierzchnia $L_{m,n}$ jest sumą wszystkich trójkątów, których podstawa łączy dwa sąsiednie punkty na tym samym okręgu, a trzeci wierzchołek znajduje się na sąsiednim okręgu, nad lub pod środkiem łuku wyznaczonego przez końce podstawy. Otrzymujemy w ten sposób $2m$ trójkątów między każdą parą sąsiednich okręgów. Razem trójkątów jest $2mn$. Rozwiązując dwa łatwe zadania z geometrii płaskiej, sprawdzamy, że każdy z tych trójkątów ma podstawę $a_{m,n}$ i wysokość $h_{m,n}$ dane wzorami

$$a_{m,n} = 2 \sin \frac{\pi}{m}, \quad h_{m,n} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$$

¹Czytelnik, dbający o pełną formalną ścisłość, może opisać współrzędne tych punktów w \mathbb{R}^3 . Rzeczą bardziej pouczającą jest jednak samodzielnie wykonanie kilku rysunków.

Dlatego pole $P_{m,n}$ chińskiej latarni $L_{m,n}$ wynosi

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= 2mn \cdot \frac{a_{m,n} h_{m,n}}{2} = 2mn \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m} \cdot \sqrt{1 + 4n^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że granica podwójna $\lim_{m,n \rightarrow \infty} P_{m,n}$ *nie istnieje*, z uwagi na zachowanie czynnika pod pierwiastkiem kwadratowym. Dla $m = n \rightarrow \infty$ otrzymujemy $P_{n,n} \rightarrow 2\pi$. Jednak np. dla $n = 2m^2$ jest

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{m,2m^2} = 2\pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m} \cdot \sqrt{1 + 16m^4 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} = 2\pi \sqrt{1 + \pi^4}.$$

Łatwo wskazać takie ciągi $n_j, m_j \rightarrow \infty$, dla których $P_{m_j, n_j} \rightarrow 2\pi \cdot A$, gdzie $A \geq 1$ jest z góry zadaną liczbą (zainteresowany Czytelnik zrobi to bez trudu sam). Wreszcie, $P_{m, m^3} \rightarrow \infty$ dla $m \rightarrow \infty$.

Widać więc, że wynik przybliżania powierzchni bocznej walca za pomocą trójkątów o bokach o coraz mniejszej długości zależy nie tylko od liczby tych trójkątów, ale i od proporcji ich boków. Różne wyniki uzyskuje się dlatego, że dla $n \gg m$ kąt między płaszczyzną trójkąta i powierzchnią walca jest *oddzielony od zera*. \square

6.1 Definicja miary powierzchniowej

6.1.1 Wyznacznik Grama. Intuicje geometryczne.

Przypomnijmy, że wyznacznikiem Grama wektorów $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \det \left(\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \right)_{i,j=1,\dots,m}. \quad (6.1)$$

Na wykładach Geometrii z Algebrą Liniową dowodzi się następujących własności wyznacznika Grama:

1. $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = 0$, gdy wektory $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$ są liniowo zależne.
2. Zachodzi wzór

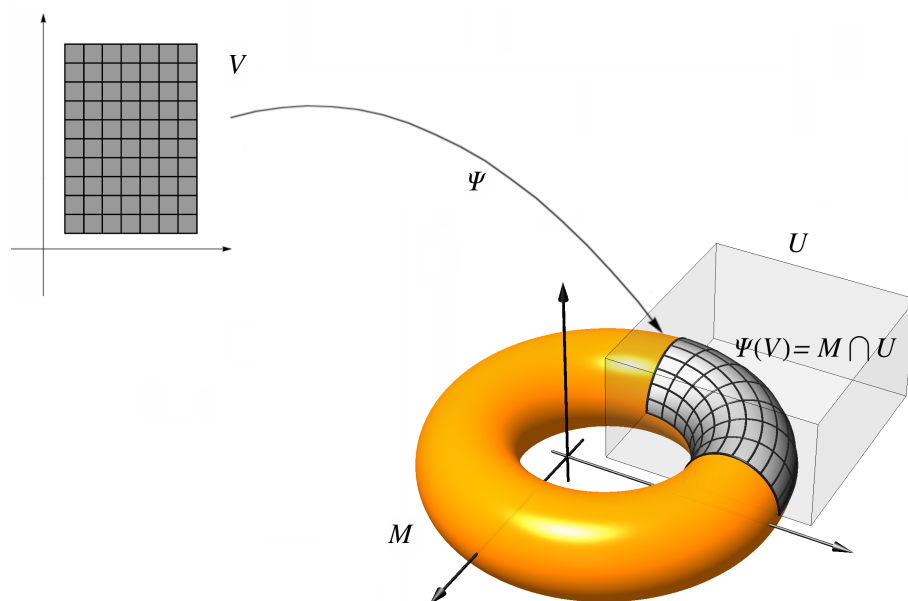
$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = h^2 \cdot G(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m),$$

gdzie $h = \text{dist}(\mathbf{w}_1, \text{span}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m))$ jest długością rzutu prostopadłego wektora \mathbf{w}_1 na podprzestrzeń \mathbb{R}^n prostopadłą do $\text{span}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$. W szczególności,

$$G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) = \|\mathbf{w}_1\|^2 \cdot G(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m),$$

gdzy wektor $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_j$ dla $j = 2, \dots, m$. (6.2)

Ponadto, wprost z definicji wyznacznika Grama i iloczynu dwóch macierzy wynika, że dla $m = n$ liczba $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ jest równa kwadratowi wyznacznika macierzy o kolumnach \mathbf{w}_i , a więc kwadratowi n -wymiarowej miary Lebesgue'a równoległościemu rozpiętego na wektorach \mathbf{w}_i .



Parametryzacja fragmentu rozmaitości dwuwymiarowej; obrazy małych kwadratów w dziedzinie V parametryzacji Ψ są krzywoliniowymi czworokątami na powierzchni M .

Posługując się wzorem (6.2) i definicją, nietrudno zauważyć, że dla $m = 2$ i $n = 3$ liczba $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ jest kwadratem pola równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^3$. Przyjmuje się, że m -wymiarowa objętość równoległoscianu, rozpiętego na wektorach $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$, jest równa *pierwiastkowi z wyznacznika Grama tych wektorów*. Z powyższych uwag wynika, że jest to interpretacja naturalna i sensowna.

Intuicje geometryczne

Opiszemy teraz intuicję, kryjącą się za definicją m -wymiarowej miary powierzchniowej na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że dla pewnego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ część wspólna $U \cap M$ jest równa $\Psi(V)$, gdzie V jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^m . Zakładamy, że przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \Psi(V) = M \cap U \subset \mathbb{R}^n$$

jest homeomorfizmem na obraz, klasy C^1 , a jego różniczka $D\Psi(\mathbf{x})$ ma maksymalny rząd m (tzn. jest monomorfizmem liniowym) w każdym punkcie $\mathbf{x} \in V$.

Dla uproszczenia pomyślmy najpierw o przypadku $m = 2, n = 3$; przekształcenie Ψ określa wtedy, jak należy umieścić (płaski, dwuwymiarowy) zbiór V jako (pobawioną zagięć i sklejeń) powyginaną powierzchnię w trójwymiarowej przestrzeni.² Obrazami kwadracików w dziedzinie V są krzywoliniowe czworokąty na powierzchni $M \cap U$. Jeśli $K \subset V$ jest małym kwadratem o wierzchołku $\mathbf{x} \in V$, to obraz $\Psi(K)$ jest – niemalże, z bardzo do-

²Z taką sytuacją spotkał się już Czytelnik np. w Przykładzie 1.61, gdzie opisywaliśmy powierzchnię torusa obrotowego jako obraz pewnego przekształcenia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Obcinając to przekształcenie do kwadratu $(0, 2\pi)^2$, otrzymamy parametryzację torusa z usuniętymi dwoma okręgami.

brym przybliżeniem! – równoległobokiem zawartym w (afinicznej) płaszczyźnie stycznej do M , o bokach równoległych do wektorów $D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ i $D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$, gdzie \mathbf{e}_i oznaczają wektory standardowej bazy w \mathbb{R}^2 . Zatem

$$\text{Pole } (\Psi(K)) \approx \text{pole równoległoboku} = \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} \cdot \lambda_2(K).$$

Proszę zauważyć, że przekształcenie liniowe $D\Psi(\mathbf{x}): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ przeprowadza kwadrat jednostkowy $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ na równoległobok rozpięty na wektorach $\mathbf{w}_1 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{w}_2 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$; kwadrat pola tego równoległoboku jest równy wyznacznikowi Grama $G(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))$, gdyż elementy macierzy $D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x})$ to właśnie iloczyny skalarne wektorów $\mathbf{w}_1 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{w}_2 = D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$.

Dlatego jest rzeczą naturalną przyjąć, dla $m = 2$ i $n = 3$ oraz zbiorów mierzalnych $A \subset V \subset \mathbb{R}^2$, definicję

$$\sigma_2(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} d\lambda_2(\mathbf{x}); \quad (6.3)$$

symbol σ_2 oznacza tu *dwuwymiarową miarę powierzchniową* na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^3$, parametryzowanej przez odwzorowanie Ψ .

W ogólnym przypadku, dla $1 \leq m \leq n$, postępuje się podobnie, przyjmując, że dla $M \cap U = \Psi(V)$, gdzie parametryzacja Ψ jest różnowartościowa i jej różniczka ma rząd m , miara powierzchniowa σ_m podzbiorów $M \cap U$ określona jest wzorem

$$\sigma_m(\Psi(A)) = \int_A \sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}) \quad \text{dla } A \subset V \subset \mathbb{R}^m, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m). \quad (6.4)$$

Sens powyższego wzoru jest następujący. W małej skali przekształcenie klasy C^1 jest z dobrym przybliżeniem liniowe. Dlatego miarę gładkiej, m -wymiarowej powierzchni przybliżamy za pomocą sumy m -wymiarowych objętości równoległoscianów, będących obrazami (pod działaniem różniczki parametryzacji) małych, m -wymiarowych kostek, zawartych w dziedzinie przekształcenia.

Cały powyższy opis należy jednak traktować wyłącznie jako pewną intuicję. Nie znamy na razie odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy każdy zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$, dopuszczający (lokalnie) podany wyżej *opis parametryczny*, rzeczywiście jest rozmaitością?
2. Czy definicja miary σ_m na $M \cap U$ nie zależy od *wyboru* parametryzacji Ψ ? Jak postąpić, gdy rozmaitość M jest sumą wielu części $M \cap U_i$, opisanych za pomocą różnych parametryzacji $\Psi_i: V_i \rightarrow M \cap U_i \subset \mathbb{R}^n$?

W kolejnym podrozdziałach (patrz 6.1.2 i 6.1.3 niżej) przekonamy się, że wzory (6.3)–(6.4) istotnie nie zależą od wyboru parametryzacji $\Psi: V \rightarrow M \cap U$. Zanim jednak przejdziemy do ogólnych, abstrakcyjnych rozważań, poczynimy dwie uwagi, które ułatwiają obliczanie pola gładkich powierzchni w \mathbb{R}^3 .

Uwaga 6.2. Niech $m = 2$, $n = 3$ i $\Psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, gdzie $f: \mathbb{R}^2 \supset V \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 . Rozmaitość (powierzchnia) $M = \Psi(V)$ jest wtedy wykresem funkcji f . Mamy

$$D\Psi^T D\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_{x_1} \\ 0 & 1 & f_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_{x_1} & f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} \\ f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

i dlatego

$$\sqrt{\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))} = \sqrt{1 + f_{x_1}^2(\mathbf{x}) + f_{x_2}^2(\mathbf{x})}. \quad (6.5)$$

Zadanie 6.3 (tożsamość Lagrange'a). Niech M będzie macierzą o trzech wierszach i dwóch kolumnach. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\det(M^T M) = A^2 + B^2 + C^2, \quad (6.6)$$

gdzie A , B i C oznaczają minory 2×2 macierzy M . Ogólniej, dla dowolnych wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (u_i v_j - v_i u_j)^2.$$

Przykład 6.4 (pole sfery). Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$ będzie połówką sfery jednostkowej. Wtedy M jest wykresem funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1$$

Łatwo obliczamy

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Dlatego, posługując się wzorem (6.3) i równością (6.5), a następnie przechodząc do całkowania we współrzędnych biegunowych (jak wtedy, gdy korzystając z twierdzenia Fubinięgo i twierdzenia o zamianie zmiennych obliczaliśmy całkę $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_2(M) &= \int_{\{(x,y): x^2+y^2 < 1\}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} \right) d\theta = 2\pi \cdot \left(-\sqrt{1 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi. \end{aligned}$$

Wynik, jak widać, jest zgodny z oczekiwaniami. \square

Przejdziemy teraz do uściślenia wszystkiego, co zostało powiedziane wyżej.

6.1.2 Parametryczny opis rozmaitości zanurzonych

W podrozdziale 3.5 definiowaliśmy m -wymiarowe rozmaitości zanurzone w \mathbb{R}^k jako zbiory, które lokalnie, w otoczeniu każdego ze swoich punktów, są wykresami $k - m$ pewnego układu funkcji m zmiennych. Do definiowania miary powierzchniowej i jej obliczania przyda się nam równoważny, tzw. *parametryczny opis* takich rozmaitości.

Definicja 6.5. Niech $1 \leq m < n$ i niech $V \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym. Będziemy mówić, że przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest *parametryzacją klasy* C^k wtedy i tylko wtedy, gdy $\Psi \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ jest homeomorfizmem na obraz, a ponadto przekształcenie $D\Psi(\mathbf{x})$ jest włożeniem liniowym dla każdego $\mathbf{x} \in V$.

Twierdzenie 6.6. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ i niech $\mathbf{p} \in M$ będzie ustalonym punktem. Następujące warunki są równoważne:

- (i) Istnieje kula $B(\mathbf{p}, r)$ w \mathbb{R}^n taka, że $M \cap B(\mathbf{p}, r)$ jest wykresem pewnej funkcji m zmiennych klasy C^k , tzn. istnieje m -wymiarowa podprzestrzeń liniowa

$$P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}) \subset \mathbb{R}^m,$$

zbiór Ω otwarty w P i funkcja $\varphi \in C^k(P, P^\perp)$ takie, że

$$M \cap B(\mathbf{p}, r) = \text{wykres } \varphi \cap B(\mathbf{p}, r),$$

gdzie

$$\text{wykres } \varphi = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n = P \oplus P^\perp : \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}.$$

- (ii) Punkt \mathbf{p} ma takie otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$, że $M \cap U = \Psi(V)$ dla pewnej parametryzacji $\Psi \in C^k$, $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pierwszy warunek powyższego twierdzenia pojawił się, dla $k = 1$, w definicji rozmaitości zanurzonej klasy C^1 (patrz podrozdział 3.5).

Dowód. Z pierwszego warunku wynika oczywiście drugi. Jeśli $M \cap B(\mathbf{p}, r)$ jest wykresem funkcji $\varphi: \mathbb{R}^m \cong P \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \cong P^\perp$, to wówczas przekształcenie

$$\Psi: \mathbb{R}^m \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in P \oplus P^\perp \cong \mathbb{R}^n$$

jest parametryzacją, tej samej klasy gładkości, co φ . Nietrudno sprawdzić, że Ψ jest homeomorfizmem na obraz. Wreszcie, macierz różniczki Ψ , która ma n wierszy i m kolumn, zawiera – w górnych wierszach – klatkę, która jest macierzą identycznościową $m \times m$. Dlatego rząd $D\Psi(\mathbf{x})$ jest maksymalny dla każdego \mathbf{x} .

Wykażemy, że drugi warunek pociąga za sobą pierwszy. Niech $M \cap U = \Psi(V)$ dla pewnej parametryzacji Ψ klasy C^k i niech $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Z definicji, pewien minor $m \times m$ macierzy $D\Psi(\mathbf{a})$ nie znika; to oznacza, że dla pewnych $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ przekształcenie

$$f = (\Psi_{i_1}, \Psi_{i_2}, \dots, \Psi_{i_m}): V \rightarrow \mathbb{R}^m$$

spełnia w punkcie $\mathbf{a} \in V$ założenia Twierdzenia 3.9 o funkcji odwrotnej. Zatem, f jest dyfeomorfizmem klasy C^k (patrz Uwaga 3.15) pewnego otoczenia V_1 punktu \mathbf{a} na otoczenie otwarte V_2 punktu $f(\mathbf{a})$.

Oznaczmy teraz $P = \text{span}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_m})$ (dla numerów i_k , użytych w definicji f); płaszczyzna P zawiera obraz V_2 dyfeomorfizmu f . Płaszczyzna P^\perp jest wówczas rozpięta na pozostałych $n - m$ wektorach standardowej bazy; oznaczmy je $\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_{n-m}}$. Niech π_1 oznacza rzut prostopadły na P , zaś $\pi_2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \pi_1$ – rzut prostopadły na P^\perp .

Nietrudno teraz wskazać funkcję $\varphi: P \rightarrow P^\perp$, której wykres pokrywa się ze zbiorem M w otoczeniu punktu \mathbf{p} . Połóżmy mianowicie

$$\varphi := \pi_2 \circ \Psi \circ f^{-1}: \mathbb{R}^m \cong P \supset V_2 \rightarrow P^\perp \cong \mathbb{R}^{n-m}.$$

Zauważmy, że dla każdego $\mathbf{y} = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}) \in V_2 \subset P$ jest $(\Psi \circ f^{-1})_{i_s}(\mathbf{y}) = y_{i_s}$; to wynika wprost z określenia f . Innymi słowy, $\pi_1 \circ \Psi \circ f^{-1}$ jest identycznością na V_2 . Dlatego wykres φ to zbiór punktów $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$, gdzie

$$\begin{aligned} P \supset V_2 \ni \mathbf{x} &= \pi_1 \circ \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}), \\ P^\perp \ni \varphi(\mathbf{x}) &= \pi_2 \circ \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Innymi słowy,

$$(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \Psi \circ f^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_2, \quad (6.7)$$

więc (w małym otoczeniu punktu \mathbf{p}) wykres funkcji φ jest tym samym, co obraz przekształcenia Ψ . \square

Definicja 6.7. Będziemy mówić, że $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością m -wymiarową klasy C^k , jeśli w każdym punkcie $\mathbf{p} \in M$ spełniony jest jeden z warunków równoważnych Twierdzenia 6.6. Jeśli $\Psi: V \rightarrow \Psi(V) = U \cap M$ jest parametryzacją części wspólnej zbioru otwartego U z rozmaitością M , to przekształcenie $\Psi^{-1}: M \cap U \rightarrow V$ nazywa się *mapą*. Zbiór map, których dziedziny pokrywają rozmaitość M , nazywa się *atlasem*.

Uwaga 6.8 (przestrzeń styczna). W Twierdzeniu 3.26 opisaliśmy przestrzeń styczną do rozmaitości M w punkcie \mathbf{p} . Przypomnijmy: jeśli w otoczeniu punktu \mathbf{p} rozmaitość M jest wykresem funkcji $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, to kładąc $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ i przyjmując $\mathbf{a} = \Phi^{-1}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$, otrzymujemy

$$T_{\mathbf{p}}M = \text{Im } D\Phi(\mathbf{a}).$$

Porównując ten wynik ze wzorem (6.7), wnioskujemy łatwo, że jeśli $U \cap M = \Psi(V)$, gdzie Ψ jest jakąkolwiek parametryzacją klasy C^k i $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \in M$ dla pewnego $\mathbf{a} \in V \subset \mathbb{R}^m$, to wówczas

$$T_{\mathbf{p}}M = \text{Im } D\Psi(\mathbf{a}),$$

gdyż różniczka $D(f^{-1})$ dyfeomorfizmu f^{-1} we wzorze (6.7) jest izomorfizmem liniowym.

6.1.3 Twierdzenie o rzędzie. Poprawność definicji miary σ_m .

Aby wykazać niezależność definicji miary powierzchniowej na rozmaitości M od wyboru parametryzacji, udowodnimy ważne twierdzenie, opisujące strukturę takich przekształceń klasy C^k , których różniczka ma stały rząd.

Twierdzenie 6.9 (o rzędzie). Załóżmy, że przekształcenie $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^k , a jego różniczka $D\Psi(\mathbf{x})$ ma we wszystkich punktach \mathbf{x} zbioru V rząd równy r , gdzie r jest ustaloną liczbą naturalną. Wówczas dla każdego punktu $\mathbf{a} \in V$ istnieją zbiory otwarte $U_1 \ni \mathbf{a}$ i $U_2 \ni \Psi(\mathbf{a})$ oraz dyfeomorfizmy klasy C^k ,

$$f_1: \mathbb{R}^m \supset U_1 \rightarrow f(U_1) \subset \mathbb{R}^m, \quad f_2: \mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow f_2(U_2) \supset \mathbb{R}^n,$$

takie, że

$$f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ zer}}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in f_1(U_1).$$

Dowód. Ustalmy $\mathbf{a} \in V$. Z założenia, pewien minor $r \times r$ macierzy $D\Psi(\mathbf{a})$ nie znika. Przenumerowując w razie potrzeby zmienne (w dziedzinie i w obrazie), możemy bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że

$$\det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

Położmy

$$f_1(\mathbf{x}) = (\Psi_1(\mathbf{x}), \dots, \Psi_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_m), \mathbf{x} \in V.$$

Nietrudno sprawdzić, że macierz Df_1 ma blokową postać

$$Df_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,r} & * \\ \mathbf{0} & \text{Id}_{(m-r) \times (m-r)} \end{pmatrix}.$$

Dlatego

$$\det Df_1(\mathbf{a}) = \det\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

Wybermy otoczenie U_1 punktu \mathbf{a} tak, aby f_1 było na U_1 dyfeomorfizmem klasy C^k na pewien m -wymiarowy przedział otwarty $f_1(U_1)$. Wprost z określenia f_1 wynika, że

$$\Psi \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_r, h_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, h_n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in f_1(U_1),$$

gdzie h_s są pewnymi funkcjami klasy C^k . Mamy

$$D(\Psi \circ f_1^{-1}) = D\Psi \circ D(f_1^{-1}),$$

a ponieważ różniczka $D(f_1^{-1})$ dyfeomorfizmu f_1^{-1} jest izomorfizmem liniowym, więc rząd przekształcenia $D(\Psi \circ f_1^{-1})$ jest taki sam, jak rząd $D\Psi$, tzn. równy r . Stąd łatwo wynika, że

$$\frac{\partial h_s}{\partial x_t}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{dla } s, t > r$$

– w przeciwnym razie rząd macierzy $D(\Psi \circ f_1^{-1})$ byłby większy od r . Zatem funkcje h_s na przedziale $f_1(U_1)$ zależą tylko od zmiennych x_1, \dots, x_r . Położmy teraz

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_n - h_n(x_1, \dots, x_r)).$$

Łatwo sprawdzić, że f_2 jest dyfeomorfizmem (dyfeomorfizm odwrotny uzyskujemy, zmieniając w powyższym wzorze minusy na plusy!) i że $f_2 \circ \Psi \circ f_1^{-1}$ przeprowadza punkt \mathbf{x} w $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. \square

Odnotujmy ważny wniosek z twierdzenia o rzędzie.

Lemat 6.10 (o funkcjach przejścia). *Jeśli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością m -wymiarową, zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, a przekształcenia*

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \supset V_i \rightarrow \Psi_i(V_i) = U \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

są parametryzacjami klasy C^k , to złożenie $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1: V_1 \rightarrow V_2$ jest dyfeomorfizmem klasy C^k zbiorów otwartych w \mathbb{R}^m .

Dowód. Ustalmy $\mathbf{a} \in V_1 \subset \mathbb{R}^m$. Z Twierdzenia 6.9 wynika, że dla pewnych dyfeomorfizmów f_1, f_2 równość

$$f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

zachodzi w otoczeniu punktu $f_1(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$. Obraz przekształcenia $f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1}$ można utożsamić z \mathbb{R}^m , a samo to przekształcenie — z identycznością na \mathbb{R}^m , która jest gładka i odwracalna. Zauważmy teraz, że

$$(f_1)^{-1} \circ (f_2 \circ \Psi_1 \circ f_1^{-1})^{-1} \circ f_2 \circ \Psi_2 = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$$

jest klasy C^k , bo lewa strona powyższej równości jest złożeniem przekształceń klasy C^k . Zamieniając Ψ_1 i Ψ_2 rolami w powyższym rozumowaniu, wnioskujemy, że również $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ jest klasy C^k . Ponieważ parametryzacje Ψ_i są homeomorfizmami, więc $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ (i przekształcenie doń odwrotne, $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$) jest dyfeomorfizmem. \square

Stwierdzenie 6.11 (niezależność miary powierzchniowej od wyboru parametryzacji). Załóżmy, że $M \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością m -wymiarową klasy C^1 , zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, a przekształcenia

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \supset V_i \rightarrow \Psi_i(V_i) = U \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

są parametryzacjami klasy C^1 . Niech $B = \Psi_1(A_1) = \Psi_2(A_2)$, gdzie $A_i \subset V_i$ dla $i = 1, 2$, będzie borelowskim podzbiorem M . Wówczas

$$\int_{A_1} \sqrt{\det(D\Psi_1(\mathbf{x})^T D\Psi_1(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_{A_2} \sqrt{\det(D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}))} d\lambda_m(\mathbf{x}).$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z tego, że wyznacznik iloczynu dwóch macierzy kwadratowych jest iloczynem wyznaczników tych macierzy, a następnie zastosować twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie. Oznaczmy $\Phi = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$; z ostatniego lematu wynika, że $\Phi: V_2 \rightarrow V_1$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 . Zatem $\Psi_2(\mathbf{x}) = \Psi_1(\Phi(\mathbf{x}))$; kładąc $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$, otrzymujemy ze wzoru na różniczkę złożenia

$$\begin{aligned} D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}) &= \left(D\Psi_1(\mathbf{y}) D\Phi(\mathbf{x}) \right)^T D\Psi_1(\mathbf{y}) D\Phi(\mathbf{x}) \\ &= D\Phi(\mathbf{x})^T \cdot \left(D\Psi_1(\mathbf{y})^T D\Psi_1(\mathbf{y}) \right) \cdot D\Phi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

stąd zaś i ze wzoru na wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych,

$$\sqrt{\det(D\Psi_2(\mathbf{x})^T D\Psi_2(\mathbf{x}))} = |\det D\Phi(\mathbf{x})| \cdot \sqrt{\det(D\Psi_1(\mathbf{y})^T D\Psi_1(\mathbf{y}))}, \quad \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}).$$

Oznaczając $f_i = \sqrt{\det(D\Psi_i^T \cdot D\Psi_i)}$, zapisujemy powyższą zależność krótko:

$$f_2 = |\det D\Phi| \cdot (f_1 \circ \Phi) \quad \text{na zbiorze } V_2.$$

Teza wynika natychmiast z Twierdzenia 5.22 o zamianie zmiennych. \square

Definicja miary σ_m

Nietrudno teraz podać formalną definicję miary powierzchniowej σ_m na rozmaitości m -wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^n$. Ponieważ topologia przestrzeni \mathbb{R}^n ma przeliczalną bazę, więc na M istnieje atlas złożony z co najwyżej przeliczalnie wielu map. Innymi słowy, istnieje co najwyżej przeliczalnie wiele parametryzacji

$$\Psi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \Psi_i(V_i) = U_i \cap M \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{gdzie } M \subset \bigcup U_i$$

Każdy zbiór borelowski $B \subset M$ można przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu zbiorów borelowskich parami rozłącznych B_i , zawartych w dziedzinach poszczególnych map, kładąc

$$B_1 = B \cap U_1, \quad B_2 = (B \cap U_2) \setminus U_1, \quad B_3 = (B \cap U_3) \setminus (U_1 \cup U_2), \quad \dots$$

Niech $V_i \supset A_i = \Psi_i^{-1}(B_i)$; przyjmujemy

$$\sigma_m(B_i) = \int_{A_i} \sqrt{\det(D\Psi_i^T D\Psi_i)} \, d\lambda_m, \quad (6.8)$$

$$\sigma_m(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_m(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \sqrt{\det(D\Psi_j^T D\Psi_j)} \, d\lambda_m. \quad (6.9)$$

Liczba $\sigma_m(B)$ nie zależy ani od wyboru poszczególnych parametryzacji Ψ_i , ani od wyboru zbiorów otwartych U_i , pokrywających rozmaitość M . To pierwsze wynika ze Stwierdzenia 6.11; druga własność bierze się stąd, że mając dwa otwarte pokrycia przeliczalne M , zbiorami U_i oraz U'_i , można rozważyć trzecie pokrycie, drobniejsze od nich obu, zbiorami $U_i \cap U'_j$ (a na każdym $U_i \cap M$ funkcja σ_m jest miarą).

Uwaga 6.12. Powyższą miarę σ_m , określoną na borelowskich podzbiórach M , można uzupełnić (tak, aby każdy podzbiór zbioru miary σ_m zero był mierzalny!), korzystając z twierdzenia Carathédory'ego.

6.2 Wzór Cauchy'ego–Bineta. Przykłady.

Twierdzenie Cauchy'ego–Bineta jest uogólnieniem tożsamości Lagrange'a. Można dzięki niemu obliczać wyznacznik Grama układu wektorów, nie obliczając iloczynów skalarnych tych wektorów.

Niech $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, gdzie $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, będzie dowolnym m -elementowym podzbiorem $\{1, 2, \dots, n\}$. Jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach, to przez $A(S)$ oznaczmy macierz kwadratową $m \times m$, która powstaje z A przez wybranie kolumn o numerach $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ (należących do zbioru S). Podobnie, jeśli B jest macierzą o n wierszach i m kolumnach, to przez $B(S)$ oznaczmy macierz kwadratową $m \times m$, która powstaje z B przez wybranie wierszy o numerach $i_1 < i_2 < \dots < i_m$.

Twierdzenie 6.13 (wzór Cauchy'ego–Bineta). *Jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach, zaś B — macierzą o n wierszach i m kolumnach, gdzie $1 \leq m \leq n$, to*

$$\det AB = \sum_{S=\{i_1, i_2, \dots, i_m\}} \det A(S) \cdot \det B(S). \quad (6.10)$$

Dowód. Niech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, gdzie pierwszy indeks oznacza numer wiersza, a drugi – kolumny. Wówczas

$$AB = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right).$$

Innymi słowy, k -ta kolumna macierzy AB jest kombinacją liniową kolumn macierzy A , ze współczynnikami b_{kj} :

$$(AB)_{\text{kol. } k} = \sum_j b_{jk} (A)_{\text{kol. } j}$$

Wyznacznik macierzy jest wieloliniową funkcją jej kolumn; dlatego, z powyższej równości otrzymujemy

$$\det AB = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} b_{j_1, 1} b_{j_2, 2} \dots b_{j_m, m} \det \left((A)_{\text{kol. } j_1}, (A)_{\text{kol. } j_2}, \dots, (A)_{\text{kol. } j_m} \right)$$

Jeśli któreś dwa indeksy w ostatniej sumie są równe, to wyznacznik macierzy, która ma dwie identyczne kolumny, znika. Zatem,

$$\det AB = \sum_{S=\{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}} \beta(B, S) \det A(S), \quad (6.11)$$

gdzie współczynniki $\beta(B, S)$ zależą od macierzy B i podzbioru $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$. Aby wyznaczyć $\beta(B, S)$, wypiszemy powyższą równość dla konkretnych A . Ustalmy $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$ i niech A będzie macierzą, której j_s -ta kolumna jest równa \mathbf{e}_s dla $s = 1, \dots, m$, a pozostałe kolumny są zerowe. Wówczas $\det A(S) = \det \text{Id} = 1$ i $\det A(S') = 0$ dla $S' \neq S$. Ponadto, $AB = B(S)$. Podstawiając te zależności do wzoru (6.11), otrzymujemy $\det B(S) = \beta(B, S)$ dla każdego $S = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$. \square

Przykład 6.14 (pole ‘płaskiego’ torusa w \mathbb{R}^4). W przestrzeni \mathbb{R}^4 rozważmy torus

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}.$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że \mathbb{T}^2 jest różniczkową dwuwymiarową. Niech

$$\Psi: (0, 2\pi)^2 \ni (t, s) \mapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s) \in \mathbb{T}^2;$$

obrazem parametryzacji Ψ jest torus \mathbb{T}^2 bez dwóch okręgów, tzn. zbiór pełnej miary powierzchniowej w \mathbb{T}^2 . Dlatego

$$\sigma_2(\mathbb{T}^2) = \int_{(0, 2\pi)^2} \sqrt{\det \left((D\Psi)^T \cdot D\Psi \right)} d\lambda_2.$$

Łatwo sprawdzamy, że

$$(D\Psi)^T = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Ze wzoru Cauchy’ego–Bineta otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det \left((D\Psi)^T \cdot D\Psi \right) &= \sin^2 t \sin^2 s + \sin^2 t \cos^2 s + \cos^2 t \sin^2 s + \cos^2 t \cos^2 s \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t = 1, \end{aligned}$$

więc

$$\sigma_2(\mathbb{T}^2) = \int_{(0,2\pi)^2} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_2 = \int_{(0,2\pi)^2} 1 \, d\lambda_2 = 4\pi^2.$$

Równość $\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi) = 1$ ma następujący sens geometryczny: parametryzacja Ψ zachowuje miarę podzbiorów kwadratu $(0, 2\pi)^2$.

Przykład 6.15. Wykażemy, że miara powierzchniowa $s_{n-1} := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1))$ sfery jednostkowej $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$ spełnia równość

$$s_{n-1} = n\omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)}, \quad (6.12)$$

gdzie $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2)$ jest miarą Lebesgue'a kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n (patrz Twierdzenie 5.29).

Niech, dla $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)$,

$$\varphi(\mathbf{x}') = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}'\|^2} = \sqrt{1 - \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i^2}.$$

Sfera jednostkowa $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$ z usuniętą płaszczyzną równika $\{x_n = 0\}$ jest sumą zbioru $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{(\mathbf{x}', x_n) \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x}' \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1), x_n = \varphi(\mathbf{x}')\}$ i jego lustrzanego odbicia względem hiperpłaszczyzny $\{x_n = 0\}$. Dlatego

$$\sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 2\sigma_{n-1}(\mathbb{S}_+^{n-1}) = 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_{n-1},$$

gdzie $\Psi(\mathbf{x}') = (\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$. Macierz $D\Psi$ składa się z klatki identityczności $(n-1) \times (n-1)$ i n -tego wiersza φ_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n-1$. Wobec wzoru Cauchy'ego–Bineta, wyznacznik macierzy $(D\Psi)^T D\Psi$ jest równy sumie kwadratów minorów $(n-1) \times (n-1)$; jeden z tych minorów jest równy 1, a pozostałe wynoszą $\pm\varphi_{x_i}$. Zatem

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{\det((D\Psi)^T \cdot D\Psi)} \, d\lambda_{n-1} \\ &= 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \sqrt{1 + \sum \varphi_{x_i}^2} \, d\lambda_{n-1} = 2 \int_{B^{n-1}(\mathbf{0}, 1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum x_i^2}} \, d\lambda_{n-1} =: 2I_{n-1}. \end{aligned}$$

Całkę I_n obliczymy rekurencyjnie, korzystając z funkcji B i Γ Eulera.³ Stosując twierdzenie Fubinięgo, a następnie liniową zamianę zmiennych

$$\mathbf{x}' = \sqrt{1 - x_n^2} \cdot \mathbf{y}', \quad \mathbf{y}' \in B^{n-1}(\mathbf{0}, 1),$$

³Podobną metodę wykorzystywaliśmy już wcześniej, całkując wielomiany Tonellego w dowodzie Twierdzenia 5.58, oraz obliczając miarę kuli jednostkowej.

otrzymujemy⁴

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{B^n(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{x}\|^2)^{-1/2} d\lambda_n(\mathbf{x}) \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},\sqrt{1-x_n^2})} (1 - x_n^2 - \|\mathbf{x}'\|^2)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
&= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{-1/2} \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},\sqrt{1-x_n^2})} \left(1 - \left\| \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{1-x_n^2}} \right\|^2 \right)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \right) dx_n \\
&= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} \left(\int_{B^{n-1}(\mathbf{0},1)} (1 - \|\mathbf{y}'\|^2)^{-1/2} d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}') \right) dx_n \\
&= I_{n-1} \cdot 2 \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_n. \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Podstawiając $x_n^2 = t$, sprawdzamy, że

$$2 \int_0^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_n = \int_0^1 (1 - t)^{\frac{n-2}{2}} t^{-1/2} dt = B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

Ostatnia równość zachodzi na mocy znanego związku między funkcjami Γ i B . Równość (6.13) można teraz przepisać jako

$$I_n = \frac{\Gamma(n/2) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \cdot I_{n-1};$$

stąd, przez łatwą indukcję, otrzymujemy

$$I_n = \frac{\Gamma(1/2)^{n-1}}{\Gamma((n+1)/2)} I_1 = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} I_1, \quad s_{n-1} = 2I_{n-1} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} s_1,$$

a ponieważ $s_1 = \sigma_1(\mathbb{S}^1(\mathbf{0}, 1)) = 2\pi$ jest po prostu długością okręgu jednostkowego, więc ostatecznie

$$s_{n-1} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot 2\pi = \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2) \cdot \Gamma(n/2)} = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma((n+2)/2)} = n\omega_n.$$

(Skorzystaliśmy ze związku $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ i równości $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2)$, wykazanej w Twierdzeniu 5.29). Wzór (6.12) został udowodniony. \square

Uwaga 6.16 (miara wykresu). Dokonując obliczeń w ostatnim przykładzie, sprawdziliśmy przy okazji następujący ogólniejszy fakt: *jeśli $\varphi \in C^1(V, \mathbb{R})$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym, a*

$$W = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in V\}$$

jest wykresem φ , to wówczas

$$\sigma_m(W) = \int_V \sqrt{1 + \|\mathbf{grad} \varphi\|^2} d\lambda_m.$$

Istotnie, $\Phi: V \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in W \subset \mathbb{R}^{m+1}$ jest naturalną parametryzacją wykresu, a ze wzoru Cauchy'ego–Bineta otrzymujemy

$$\det(D\Phi^T \cdot D\Phi) = 1 + \sum (\varphi_{x_i})^2 = 1 + \|\mathbf{grad} \varphi\|^2.$$

⁴Proszę porównać poniższy rachunek z (5.50): to tak, jakby w tamtym wzorze użyć $N = -1/2$.

Uwaga 6.17. Nietrudno stwierdzić, posługując się liniową zamianą zmiennych, że

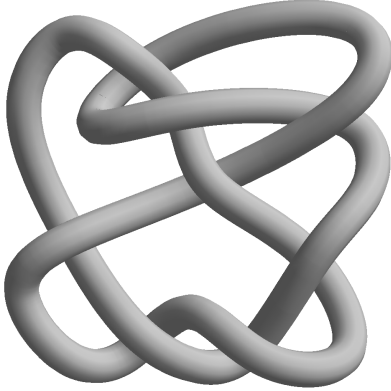
$$s(r) := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}(\mathbf{0}, r)) = n\omega_n r^{n-1}.$$

Jak wiemy, miara Lebesgue'a n -wymiarowej kuli o promieniu r wynosi $m(r) = \omega_n r^n$. Zachodzi więc równość

$$s(r) = m'(r), \quad r > 0.$$

Okazuje się, że nie jest to związek przypadkowy. Wyjaśnimy to nieco dokładniej w następnym podrozdziale.

6.3 Otoczenia tubularne i twierdzenie o materacu



W całym podrozdziale symbol X_ε oznacza zbiór $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{y}, X) < \varepsilon\}$ wszystkich punktów przestrzeni, odległych od ustalonego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ mniej niż o $\varepsilon > 0$. (Jeśli np. X jest gładką krzywą w \mathbb{R}^3 , to X_ε jest rurką o grubości 2ε wokół tej krzywej, patrz rysunek).

Twierdzenie 6.18 (o otoczeniu tubularnym). Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie m -wymiarową zanurzoną rozmaitością zwartą klasy C^2 . Wówczas, dla wszystkich dostatecznie małych $\varepsilon > 0$, zbiór M_ε spełnia zależność

$$M_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon), \quad (6.14)$$

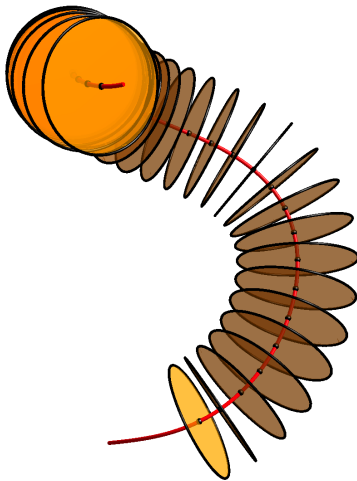
przy czym dyski

$$D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon) = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\| < \varepsilon, \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{p}}M\} \quad (6.15)$$

położone w przestrzeniach $(T_{\mathbf{p}}M)^\perp$, są parami rozłączne dla różnych punktów $\mathbf{p} \in M$.
Przekształcenie

$$P: M_\varepsilon \ni \mathbf{y} \mapsto P(\mathbf{y}) \in M,$$

gdzie $\|P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{z} \in M} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$, jest dobrze określonym przekształceniem klasy C^1 .



Fragment gładkiej krzywej zamkniętej w \mathbb{R}^3 i jej otoczenia tubularnego.

Przed przystąpieniem do dowodu spróbujemy wyjaśnić poglądowo treść tego ważnego twierdzenia. Przekształcenie P nazywane jest rzutowaniem na najbliższy punkt. Punkтови \mathbf{y} , należącemu do wąskiej tuby M_ε wokół rozmaitości M , przypisujemy ten punkt $\mathbf{z} = P(\mathbf{y}) \in M$, który jest najbliższy \mathbf{y} . Twierdzenie mówi, że dla zwartych rozmaitości klasy C^2 , przy dostatecznie małym $\varepsilon > 0$, istnieje dokładnie jeden taki punkt \mathbf{z} .

Czytelnik zechce pomyśleć najpierw o przypadkach, które względnie łatwo można sobie wyobrazić: $m = 1$ i $n = 2$, $m = 1$ i $n = 3$, wreszcie $m = 2$ i $n = 3$. W pierwszym z nich M jest gładką krzywą zamkniętą w \mathbb{R}^2 . Dyski $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ są po prostu odcinkami otwartymi długości 2ε , prostopadłymi do krzywej i mającymi środki w jej punktach. Twierdzenie o otoczeniu tubularnym orzeka, że dla małych $\varepsilon > 0$ takie odcinki są rozłączne, a ich suma jest zbiorem wszystkich punktów, odległych od krzywej mniej niż o ε . Przekształcenie P nietrudno opisać geometrycznie: każdy punkt zbioru M_ε należy do dokładnie jednego odcinka $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ i jeśli $\mathbf{y} \in D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$, to $P(\mathbf{y}) = \mathbf{p}$.

Dla $m = 1, n = 3$ mamy do czynienia z krzywą zamkniętą w \mathbb{R}^3 ; jej otoczenie tubularne to rurka, zbudowana z małych, płaskich, parami rozłącznych dysków, prostopadłych do tej krzywej i mających środki w jej punktach. Wreszcie, dla $m = 2$ i $n = 3$ rozmaitość $M \subset \mathbb{R}^3$ jest zwartą, gładką powierzchnią bez brzegu. Zbiór M_ε jest wtedy – jak gęsty ‘jeź’ – sumą parami rozłącznych odcinków o długościach równych 2ε ; każdy z tych odcinków ma środek na M i jest prostopadły do M (tj. do przestrzeni stycznej do M).

SZKIC DOWODU TWIERDZENIA 6.18. Dla każdego $\mathbf{y} \in M_\varepsilon$ istnieje (co najmniej jeden) punkt $P(\mathbf{y}) \in M$ taki, że $\|P(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \text{dist}(\mathbf{y}, M) = \min_{\mathbf{z} \in M} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$. To wynika stąd, że przy ustalonym \mathbf{y} funkcja $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$ osiąga swój kres dolny na zbiorze zwartym M . Zauważmy, że jeśli $\mathbf{p} = P(\mathbf{y})$, to wektor $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$ jest prostopadły do $T_{\mathbf{p}}M$ (gdyby tak nie było, odległość \mathbf{y} od M nie osiągałaby w punkcie \mathbf{p} najmniejszej wartości – Czytelnik ze chce to sprawdzić, posługując się np. prostopadłością gradientu do rozmaitości w punkcie ekstremum warunkowego). Inaczej mówiąc,

$$M_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon).$$

Sprawdzimy, że dla małych ε dyski $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon)$ są parami rozłączne dla różnych \mathbf{p} . Przypuśćmy, że jest przeciwnie: dla $\varepsilon_j = 1/j$, gdzie $j = 1, 2, \dots$ istnieją punkty $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{p}'_j \in M$ takie, że iloczyn $D^\perp(\mathbf{p}_j, \frac{1}{j}) \cap D^\perp(\mathbf{p}'_j, \frac{1}{j})$ jest niepusty. Wtedy $\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}'_j\| < 2/j \rightarrow 0$; dzięki zwartości M , przechodząc do odpowiedniego podciągu, można założyć, że $\lim \mathbf{p}_j = \lim \mathbf{p}'_j = \mathbf{p} \in M$.

Niech $\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow U \cap M \subset \mathbb{R}^n$ będzie parametryzacją klasy C^2 pewnego otoczenia \mathbf{p} w M . Bez zmniejszenia ogólności, obracając i przesuwając w razie potrzeby układ współrzędnych, założmy, że $\mathbf{p} = \mathbf{0} = \Psi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$,

$$T_0M = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m), \quad (T_0M)^\perp = \text{span}(\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Niech $I: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow (T_0M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ oznacza włożenie liniowe, polegające na utożsamieniu $\mathbf{v} = (v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ z wektorem $I(\mathbf{v}) = \sum_{i>m} v_i \mathbf{e}_i$ w $(n-m)$ -wymiarowej podprzestrzeni $(T_0M)^\perp$. Określmy odwzorowanie

$$F: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supset V \times B^{n-m}(\mathbf{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

następująco:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{x}) + \pi(\Psi(\mathbf{x}))(I(\mathbf{v})),$$

gdzie dla ustalonego $\mathbf{y} \in M$ przekształcenie $\pi(\mathbf{y})$ jest rzutem ortogonalnym \mathbb{R}^n na przestrzeń $(T_{\mathbf{y}}M)^\perp$. Jeśli $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{q} \in M$, to $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in D^\perp(\mathbf{q}, 1)$.

Można sprawdzić, że jeśli M jest klasy C^2 , to wyrazy macierzy rzutu $\pi(\Psi(\mathbf{x}))$ w standardowej bazie \mathbb{R}^n są funkcjami klasy C^1 zmiennej \mathbf{x} .⁵ Dlatego $F \in C^1$. Obliczmy jacobian F w punkcie $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Ponieważ $I(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, a $\pi(\mathbf{y})$ jest liniowe przy ustalonym \mathbf{y} , więc

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial F}{\partial v_i}(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_i = \frac{\partial F}{\partial v_i}(\mathbf{0}, \mathbf{v}).$$

⁵To niezbyt trudne zadanie; do jego rozwiązania trzeba wykorzystać geometryczną charakteryzację rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń liniową.

Zatem macierz $DF(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ma kolumny $\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \in T_0 M$ (dla $j = 1, \dots, m$) oraz $\mathbf{e}_j \in (T_0 M)^\perp$ dla $j = m+1, \dots, n$. Są to wektory liniowo niezależne w \mathbb{R}^n i dlatego $\det DF(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq 0$. Wobec twierdzenia o funkcji odwrotnej, F jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia otwartego $W = V_1 \times B^{n-m}(0, r) \subset V \times B(0, 1)$ punktu $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ na obraz $F(W) \subset \mathbb{R}^n$.

Dla dostatecznie dużych j dyski $D_j = D^\perp(\mathbf{p}_j, 1/j)$ i $D'_j = D^\perp(\mathbf{p}'_j, 1/j)$ są zawarte w $F(W)$. Mamy $\mathbf{p}_j = \Psi(\mathbf{x}_j)$ i $\mathbf{p}'_j = \Psi(\mathbf{x}'_j)$ dla $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}'_j \in V_1$. W punkcie wspólnym dysków D_j i D'_j spełniony jest warunek $F(\mathbf{x}'_j, \mathbf{v}_j) = F(\mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j)$, ale $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}'_j$. To jest sprzeczność z różnowartościowością F .

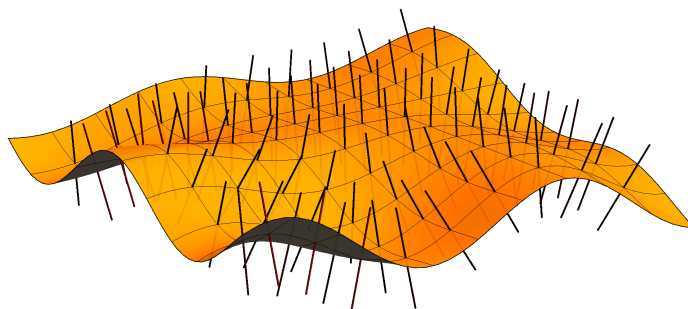
Zatem istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że wszystkie dyski $D^\perp(\mathbf{p}, \varepsilon_0)$ są rozłączne. Pokrywając rozmaitość M skończoną liczbą otoczeń takich, jak $F(W)$ przed chwilą, wnioskujemy, że rzut P z M_ε na najbliższy punkt M jest dobrze określony. Jeśli w opisanych wyżej współrzędnych $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, to $P(\mathbf{y}) = \Psi(\mathbf{x})$, tzn. $P = \Psi \circ F^{-1}$ jest klasy C^1 . \square

Uwaga 6.19. Jest rzeczą jasną, że teza ostatniego twierdzenia nie zachodzi dla wszystkich $\varepsilon > 0$. Jeśli np. $M \subset \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią torusa, powstającego przez obrót okręgu o promieniu $r > 0$ wokół prostej, położonej w płaszczyźnie tego okręgu i oddalonej o R od jego środka, to dla $\varepsilon > r$ teza twierdzenia nie zachodzi. Istotne jest też założenie, że M jest klasy C^2 . Czytelnik zechce rozpatrzyć wykres $y = h(x) := |x|^{3/2}$ w otoczeniu zera w \mathbb{R}^2 : punkt wykresu h najbliższy do $(0, \varepsilon)$ nie jest określony jednoznacznie.

Między objętością otoczenia tubularnego rozmaitości a jej miarą powierzchniową zachodzi naturalny, zgodny z intuicją związek.

Twierdzenie 6.20 (twierdzenie o materacu). Załóżmy, że M jest m -wymiarową rozmaitością zwartą klasy C^2 , zanurzoną w \mathbb{R}^n . Niech $M_\varepsilon = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{y}, M) < \varepsilon\}$. Wówczas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_n(M_\varepsilon)}{\omega_{n-m} \varepsilon^{n-m}} = \sigma_m(M).$$



Fragment rozmaitości $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Krótkie odcinki prostopadłe do M , które mają środki w M , są rozłączne.

Czytelnik zechce pomyśleć o przypadku $n = 3, m = 2$. Otoczenie tubularne $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ powierzchni M jest wtedy sumą rozłącznych odcinków długości 2ε , prostopadłych do M . Można myśleć o M_ε jako o ‘materacu’ grubości 2ε ; powierzchnia M biegnie przez środek materaca. Twierdzenie orzeka, że pole powierzchni M jest granicą ilorazu objętości materaca i grubości materaca,

$$\sigma_2(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_3(M_\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Ogólnie, dla $n = m + 1$ i rozmaitości $M = M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ klasy C^2 jest

$$\sigma_m(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_{m+1}(M_\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Przykład 6.21 (miara sfery \mathbb{S}^{n-1} raz jeszcze). Niech $M = \mathbb{S}^{n-1}(0, r)$. Nietrudno zauważyć, że dla $\varepsilon < r$ zbiór M_ε jest równy $B^n(0, r + \varepsilon) \setminus \overline{B^n(0, r - \varepsilon)}$. Dlatego

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_n(r + \varepsilon)^n - \omega_n(r - \varepsilon)^n}{2\varepsilon} \\ &= \frac{\omega_n}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(r + \varepsilon)^n - r^n}{\varepsilon} + \frac{r^n - (r - \varepsilon)^n}{\varepsilon} \right) = \frac{\omega_n}{2} \cdot 2 \frac{d}{dt}(t^n) \Big|_{t=r} = \omega_n \cdot nr^{n-1}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ponownie wynik, wspomniany już w Uwadze 6.17. \square

Dowód Twierdzenia 6.20. Dla uproszczenia podamy dowód tylko w przypadku $n = m + 1$. Wybierzmy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ taki, że $M \cap U$ jest wykresem funkcji $\varphi: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^m$ jest otwarty. Niech $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$ dla $\mathbf{x} \in V$ będzie parametryzacją $U \cap M$. Korzystając z twierdzenia o otoczeniu tubularnym, możemy zakładać, że

$$U = \{\mathbf{q} + \mathbf{v} \mid \mathbf{q} \in \Phi(V) \subset M, \mathbf{v} \perp T_{\mathbf{p}}M, \|\mathbf{v}\| < \varepsilon\}.$$

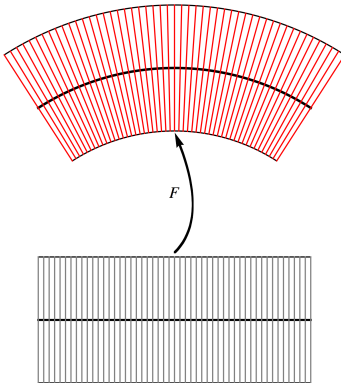
jest fragmentem otoczenia tubularnego rozmaitości M ; dokładniej $U = P^{-1}(\Phi(V))$, gdzie P oznacza rzutowanie otoczenia tubularnego rozmaitości na jej najbliższy punkt.

Jeśli $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$, to $T_{\mathbf{y}}M = \text{Im } D\Phi(\mathbf{x})$. Kolumny macierzy $D\Phi(\mathbf{x})$, tzn. wektory

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{miejsce } j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right)^T \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

tworzą bazę $T_{\mathbf{y}}M$. Wektor $N(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(\mathbf{x}), 1 \right)^T$ jest prostopadły do nich wszystkich, a więc rozpiną (jednowymiarową) przestrzeń $(T_{\mathbf{y}}M)^\perp$. Niech

$$\nu(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x})}{\|N(\mathbf{x})\|} = \frac{N(\mathbf{x})}{\sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}}$$



F przeprowadza $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ na fragment otoczenia tubularnego M .

oznacza (unormowany) wektor normalny do wykresu φ i niech $F: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ będzie dane wzorem $F(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) + t\nu(\mathbf{x})$. Ponieważ $\varphi \in C^2$, więc $\nu \in C^1$ i $F \in C^1$. Na mocy twierdzenia o otoczeniu tubularnym, F jest dyfeomorfizmem $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ na U , gdy liczba $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie mała. Wobec twierdzenia o zamianie zmiennych,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(U)}{2\varepsilon} &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_U 1 d\lambda_n \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_V \det F(\mathbf{x}, t) d\lambda_m(\mathbf{x}) \right) dt \quad (6.16) \\ &\rightarrow \int_V \det F(\mathbf{x}, 0) d\lambda_m(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

gdyż funkcja $t \mapsto h(t) = \int_V \det F(\mathbf{x}, t) d\lambda_m(\mathbf{x})$ zależy od t w sposób ciągły.⁶ Obliczmy wyznacznik $\det DF(\mathbf{x}, 0)$. Jest oczywiste

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) + t \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \mathbf{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \nu(\mathbf{x}).$$

Stąd łatwo wynika, że

$$DF(\cdot, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}/d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}/d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}/d \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} & 1/d \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } d = \sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}.$$

Zatem iloczyn liczby d i wyznacznika $\det DF(\cdot, 0)$ jest równy

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{1 + \sum \varphi_{x_i}^2}_{=d^2} \end{pmatrix} = d^2.$$

(Pierwszą równość uzyskujemy, dodając do ostatniego wiersza kolejno pierwszy wiersz pomnożony przez $-\varphi_{x_1}$, potem drugi wiersz pomnożony przez $-\varphi_{x_2}$, itd.). To oznacza, że

$$\det DF(\mathbf{x}, 0) = d = \sqrt{1 + \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_{x_i}^2(\mathbf{x})} = \sqrt{\det (D\Phi(\mathbf{x})^T D\Phi(\mathbf{x}))}.$$

Podstawiając ten wynik do równości (6.16), otrzymujemy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_{m+1}(U)}{2\varepsilon} = \int_V \det F(\mathbf{x}, 0) d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_V \sqrt{\det (D\Phi^T \cdot D\Phi)} d\lambda_m = \sigma_m(\Phi(V)).$$

Pokrywając rozmierność M takimi zbiorami otwartymi U i korzystając z addytywności miary, łatwo otrzymujemy tezę. \square

⁶Ciągłość h łatwo wywnioskować np. z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Dla każdej funkcji h ciągłej w otoczeniu zera mamy $(2\varepsilon)^{-1} \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} h(t) dt \rightarrow h(0)$.

Rozdział 7

Formy różniczkowe i twierdzenie Stokesa

Dalekosiędnym celem tego rozdziału będzie sformułowanie i udowodnienie wielowymiarowych odpowiedników wzoru Newtona–Leibniza $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$. Zostały one odkryte w pierwszej połowie XIX wieku i odegrały fundamentalną rolę w fizyce matematycznej, m.in. w matematycznej teorii pola elektromagnetycznego.¹ Bez tych wzorów – twierdzenia Greena, twierdzenia Gaussa o dywergencji i twierdzenia Stokesa – nie mogłaby się obyć ani teoria równań różniczkowych cząstkowych i jej zastosowania w fizyce, ani geometria różniczkowa, ani wiele innych działów współczesnej matematyki.

Z pewnego dystansu widać, że w tej partii materiału ceną za względną prostotę sformułowań twierdzeń i ich dowodów jest skomplikowany formalizm. Nie będziemy go od razu wprowadzać w pełnej ogólności; zaczniemy od sytuacji prostej.

Pisząc ten rozdział, korzystałem m.in. z notatek prof. Dietmara Salamona z Politechniki w Zurychu z wykładów o formach różniczkowych, prowadzonych w 2009 roku.²

7.1 Formy rzędu 1 i twierdzenie Greena

Definicja 7.1 (forma różniczkowa rzędu 1). Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^k(U)$, gdzie $k \geq 1$. Wyrażenie

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \quad (7.1)$$

nazywamy *formą różniczkową rzędu 1 i klasy C^k* , albo krótko *1-formą* na zbiorze U .

Definicja 7.2 (krzywa zorientowana). Rozmaitość jednowymiarową $M = M^1 \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^1 z ustalonym ciągłym polem niezerowych wektorów stycznych $\mathbf{v}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in M$, będziemy nazywać *krzywą zorientowaną*.

Jeśli $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ jest parametryzacją M , to dla każdego $t \in I$ wektor $\gamma'(t)$ jest styczny do M w punkcie $\mathbf{p} = \gamma(t)$. Są dwie możliwości: albo wektor $\gamma'(t)$ ma dla każdego $t \in I$ taki sam zwrot, jak wektor $\mathbf{v}(\gamma(t))$, określający orientację M , albo ma zawsze zwrot

¹Osobom zainteresowanym historią polecam tekst Victora J. Katza, *The History of Stokes' Theorem*, Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 3 (1979), str. 146–156.

²Oryginał w języku niemieckim można znaleźć w sieci.

przeciwny.³ W pierwszym przypadku będziemy mówić, że parametryzacja γ jest zgodna z orientacją M .

Definicja 7.3 (całka z 1-formy wzdłuż krzywej zorientowanej). Niech M będzie krzywą zorientowaną skończonej długości, zawartą w zbiorze otartym $U \subset \mathbb{R}^n$, zaś $\gamma: \mathbb{R} \supset I = (a, b) \rightarrow M$ – parametryzacją zgodną z orientacją M . Jeśli $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ jest formą klasy C^1 na U , to piszemy

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt. \quad (7.2)$$

Definicją można operować mnemotechnicznie: jeśli $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \gamma(t) \in M$, to $x_j = \gamma_j(t)$, ‘więc’ $dx_j = \gamma'_j(t) dt$. Podobnego formalizmu używaliśmy, całkując przez podstawienie funkcje jednej zmiennej.

Przytoczona definicja ma sens tylko dla krzywych *spójnych*. Formy różniczkowe rzędu 1 można całkować także po krzywych niespójnych (dodając całki po składowych spójności takiej krzywej).

Stwierdzenie 7.4 (poprawność definicji). *Wartość całki*

$$\int_M (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n)$$

nie zależy od wyboru parametryzacji $\gamma: I \rightarrow M$, zgodnej z orientacją.

Dowód. Załóżmy, że $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ i $\eta: (c, d) \rightarrow M$ są dwiema parametryzacjami M zgodnymi z orientacją. Przekształcenie $\psi = \eta^{-1} \circ \gamma$ jest wówczas, na mocy Lematu 6.10 o funkcjach przejścia, dyfeomorfizmem odcinka (a, b) na (c, d) . Mamy $\eta \circ \psi = \gamma$, stąd zaś

$$\eta'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = \gamma'(t), \quad t \in (a, b).$$

Ponieważ γ, η są zgodne z orientacją M , więc wektory $\eta'(\psi(t))$ i $\gamma'(t)$ mają ten sam zwrot. Zatem $\psi'(t) > 0$ dla każdego t , co oznacza, że ψ jest funkcją rosnącą. Z twierdzenia o zamianie zmiennych, używając podstawienia

$$(c, d) \ni s = \psi(t), \quad t \in (a, b),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_c^d f_j(\eta(s)) \eta'_j(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\eta(\psi(t))) \eta'_j(\psi(t)) \psi'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt. \end{aligned}$$

Wartość prawej strony wzoru (7.2) nie zależy więc od wyboru parametryzacji. \square

Uwaga 7.5. Gdy zmienimy orientację M na przeciwną, to liczba $\int_M \omega$ zmieni znak. \square

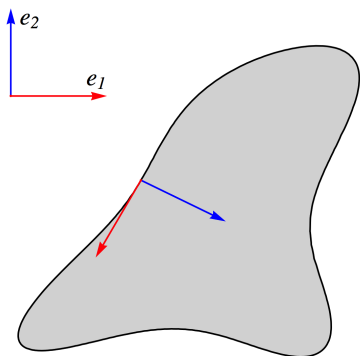
³Wynika to stąd, że funkcja ciągła $t \mapsto \langle \gamma'(t), \mathbf{v}(\gamma(t)) \rangle$ nie znika w żadnym punkcie $t \in I$.

Interpretacja fizyczna całki z 1-formy. Definicja 1-formy wydaje się, na pierwszy rzut oka, sztuczna; nie wiadomo, czym (tzn. jakimi obiektami matematycznymi) są symbole dx_j . Jednak całka z formy $\sum f_i dx_i$ ma naturalną interpretację fizyczną. Jeśli mianowicie przyjmiemy, że $f = (f_1, \dots, f_n)$ jest polem wektorowym w obszarze U , np. pewnym polem sił, to całka $\int_M \omega$ z formy $\omega = \sum f_i dx_i$ jest pracą sił pola wzdłuż krzywej γ . Istotnie,

$$\sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) = \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \cdot \|\gamma'(t)\|$$

i dlatego

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \left\langle f(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \cdot \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{d\sigma_1} dt = \int_M \langle f, \mathbf{w} \rangle d\sigma_1,$$



Naturalna orientacja brzegu obszaru w \mathbb{R}^2 : jedna z baz powstaje z drugiej przez obrót.

gdzie $\mathbf{w} = \gamma'/\|\gamma'\|$ jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej. Liczba $\langle f, \mathbf{w} \rangle$ jest długością składowej wektora f , stycznej do M ; to właśnie ta składowa wykonuje pracę wzdłuż krzywej.

Definicja 7.6. Mówimy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem z brzegiem klasy C^k , jeśli Ω jest zbiorem otwartym spójnym, którego brzeg $\partial\Omega$ jest rozmaitością zanurzoną klasy C^k w \mathbb{R}^n .

Definicja 7.7. Będziemy mówić, że brzeg obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ma naturalną orientację, jeśli baza (\mathbf{w}, ν) , gdzie $\mathbf{w} \in T_p(\partial\Omega)$ wyznacza orientację brzegu, a ν jest wektorem normalnym wewnętrznym w \mathbf{p} , wyznacza tę samą orientację \mathbb{R}^2 , co standardowa baza $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.⁴

Twierdzenie 7.8 (G. Green⁵). Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest obszarem ograniczonym z brzegiem klasy C^1 . Niech $f, g \in C^1(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty i $\bar{\Omega} \subset U$. Wreszcie, niech brzeg $\partial\Omega$ zbioru Ω ma naturalną orientację. Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} g dy = \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} d\lambda_2, \quad (7.3)$$

$$-\int_{\partial\Omega} f dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2. \quad (7.4)$$

Dowód w przypadku szczególnym. Załóżmy najpierw, dla uproszczenia, że dla pewnych przedziałów (a, b) , $(c, d) \subset \mathbb{R}$ i funkcji $\varphi, \psi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\eta, \zeta: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ jest

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in (c, d), \eta(y) < x < \zeta(y)\}, \end{aligned}$$

⁴Oto prosta, mnemotechniczna reguła: brzeg obszaru jest zorientowany naturalnie, gdy idąc wzdłuż niego we wskazanym przez orientację kierunku, mamy punkty obszaru z lewej strony.

⁵George Green, matematyk brytyjski, żył na przełomie XVIII i XIX wieku. W 1828 r. wydał słynną pracę *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*.

tzn. że brzeg Ω jest sumą dwóch wykresów funkcji (różniczkowalnych), niezależnie od tego, wzdłuż której osi układu współrzędnych patrzymy.⁶ Wówczas, na mocy twierdzenia Fubiniiego i wzoru Newtona–Leibniza,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x} d\lambda_2 = \int_c^d \left(\int_{\eta(y)}^{\zeta(y)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left(g(\zeta(y), y) - g(\eta(y), y) \right) dy. \quad (7.5)$$

Niech M_1 oznacza część $\partial\Omega$, będącą wykresem ζ . Parametryzacja $(c, d) \ni y \mapsto \gamma(y) = (\zeta(y), y)$ krzywej M_1 jest zgodna z orientacją; dlatego

$$\int_c^d g(\zeta(y), y) dy = \int_{M_1} g dy, \quad (7.6)$$

gdyż druga współrzędna parametryzacji ma pochodną 1. Reszta brzegu, $M_2 = \partial\Omega \setminus \overline{M_1}$, ma parametryzację

$$(c, d) \ni y \mapsto (\eta(y), y),$$

która wyznacza orientację *przeciwną do naturalnej orientacji* M_2 . Dlatego

$$- \int_c^d g(\eta(y), y) dy = \int_{M_2} g dy. \quad (7.7)$$

Dodając (7.6) do (7.7), otrzymujemy z (7.5) pierwszą część tezy twierdzenia Greena.

Podobnie, biorąc $M_3 = \{(x, y) \in \partial\Omega : x \in (a, b), y = \varphi(x)\}$ oraz $M_4 = \{(x, y) \in \partial\Omega : x \in (a, b), y = \psi(x)\}$ (z naturalną orientacją brzegu $\partial\Omega!$), otrzymujemy

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 &= - \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b f(x, \psi(x)) dx = \int_{M_3} f dx + \int_{M_4} f dx = \int_{\partial\Omega} f dx. \end{aligned}$$

(Tym razem *pierwsza* współrzędna parametryzacji ma pochodną jeden, a zmiana znaku przy drugim składniku wiąże się z wyborem orientacji).

Dowód w przypadku ogólnym poprzedzimy pomocniczym lematem (patrz dodatek A, Lemat A.2).

Lemat 7.9 (gładki rozkład jedności). *Załóżmy, że suma zbiorów otwartych Q_1, \dots, Q_N pokrywa domknięcie $\overline{\Omega}$ obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Istnieją wówczas funkcje nieujemne $\psi_l \in C_0^\infty(Q_l)$ takie, że $\sum_{l=1}^N \psi_l \equiv 1$ na pewnym zbiorze otwartym W , zawierającym $\overline{\Omega}$.*

DOWÓD TWIERDZENIA GREENA W PRZYPADKU OGÓLNYM. Dla każdego punktu $\mathbf{p} \in \overline{\Omega}$ wybierzmy prostokąt otwarty $Q_{\mathbf{p}}$ o środku w \mathbf{p} tak, aby

- $\overline{Q_{\mathbf{p}}} \subset \Omega$ dla $\mathbf{p} \in \Omega$;
- dla $\mathbf{p} \in \partial\Omega$ i $Q_{\mathbf{p}} = (a, b) \times (c, d)$ zbiór $\partial\Omega \cap Q_{\mathbf{p}}$ był wykresem funkcji $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, ew. funkcji $x = \varphi(y)$, $y \in (c, d)$.

⁶Tak jest np. dla obszarów wypukłych, ale nie tylko.

Wobec zwartości $\bar{\Omega}$, istnieje pokrycie $\bar{\Omega}$, złożone z N takich prostokątów, Q_1, \dots, Q_N . Ponumerujmy je tak, aby Q_1, \dots, Q_k stanowiły pokrycie brzegu, zaś Q_{k+1}, \dots, Q_N były (wraz z domknięciami) zawarte w Ω . Niech ψ_l będą funkcjami z Lematu 7.9. Wówczas $\sum_l \frac{\partial \psi_l}{\partial y} = 0$, a stąd

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 &= \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap \Omega} \psi_l \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda_2 = \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 \\ &= \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 + \sum_{l=k+1}^N \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Aby sprawdzić ostatnią równość, zauważmy, że dla każdego $l > k$ i prostokąta $\bar{Q}_l = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$ funkcja $\psi_l f$ znika na ∂Q_l (bo ψ_l znika na brzegu tego prostokąta!), a więc

$$\int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{Q_l} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} dy \right) dx = 0.$$

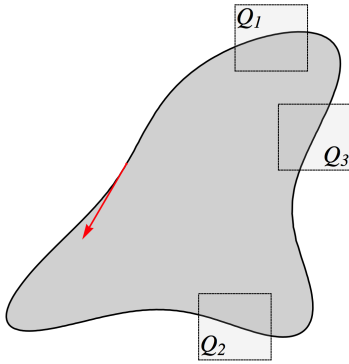
Teraz obliczymy każdą z całek w sumie po prawej stronie wzoru (7.8), rozważając kilka przypadków. Dla prostoty, ustalimy indeks l i będziemy często pisać $F = \psi_l f$, $Q = Q_l$.

Przypadek 1. Niech

$$\Omega \cap Q = \{(x, y) : c < y < \varphi(x), x \in (a, b)\}.$$

Wtedy $F = \psi_l f$ znika dla $x \in (a, b), y = c$. Zatem

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial F}{\partial y} d\lambda_2 &= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b F(x, \varphi(x)) dx \\ &= - \int_{\partial \Omega \cap Q_l} F dx. \end{aligned}$$



Prostokąt Q_i odpowiada i -temu z rozpatrywanych przypadków.

Ostatnią równość zachodzi na mocy definicji całki z 1-formy. Zauważmy, że w tym przypadku fragment $\partial \Omega \cap Q_l$ jest zorientowany *przeciwnie* do kierunku osi x .

Przypadek 2. Załóżmy, że $\Omega \cap Q = \{(x, y) : \varphi(x) < y < d, x \in (a, b)\}$. Wtedy $F = \psi_l f$ znika dla $x \in (a, b), y = d$. Zatem

$$\int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial F}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^d \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) dx = - \int_a^b F(x, \varphi(x)) dx = - \int_{\partial \Omega \cap Q_l} F dx.$$

(Tym razem orientacja $\partial \Omega \cap Q_l$ jest zgodna z kierunkiem osi x .)

W tych dwóch przypadkach postąpiliśmy w istocie tak samo, jak wcześniej dla obszarów szczególnej postaci. Dodatkowego chwytu wymagają pozostałe przypadki.

Przypadek 3. Załóżmy, że $\Omega \cap Q = \{(x, y) : y \in (c, d), a < x < \varphi(y)\}$. Wtedy $F = \psi_l f$ znika dla $y \in (c, d), x = a$. Bez zmniejszenia ogólności, (gładko) przedłużając F zerem, zakładamy, że F jest określona dla wszystkich $x < \varphi(y)$. Piszemy, dokonując przy ustalonym y

zamiany zmiennych $x = t + \varphi(y)$,

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) d\lambda_2(x, y) &= \int_c^d \left(\int_{-\infty}^{\varphi(y)} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial F}{\partial y}(t + \varphi(y), y) dt \right) dy =: I. \end{aligned}$$

Oznaczmy $\Phi(t, y) = F(t + \varphi(y), y)$ dla $t \leq 0$ i $y \in [c, d]$. Mamy wówczas

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(t + \varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t + \varphi(y), y).$$

Zauważmy ponadto, że Φ znika na półprostych $t \leq 0$, $y \in \{c, d\}$. Dlatego

$$\int_{-\infty}^0 \int_b^d \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, y) dy dt = 0,$$

stąd zaś (i z twierdzenia Fubniego) po ponownej, odwrotnej zamianie zmiennych⁷ otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_b^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F}{\partial y}(t + \varphi(y), y) dt dy = - \int_b^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F}{\partial x}(t + \varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) dt dy \\ &= - \int_b^d \varphi'(y) \int_{-\infty}^{\varphi(y)} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx dy = - \int_b^d F(\varphi(y), y) \varphi'(y) dy = - \int_{\partial \Omega \cap Q_i} F dx, \end{aligned}$$

gdyż na brzegu $x = \varphi(y)$, a w tym przypadku naturalna orientacja brzegu jest zgodna z kierunkiem osi y .

W ostatnim przypadku brzeg obszaru jest wykresem funkcji $x = \varphi(y)$, obszar zaś leży 'z prawej strony' tego wykresu. Postępując tak samo, jak w przypadku 3, otrzymujemy ostatecznie

$$\int_{Q_l \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_l f)}{\partial y} d\lambda_2 = - \int_{\partial Q_l \cap \Omega} \psi_l f dx, \quad l = 1, \dots, k, \quad (7.9)$$

niezależnie od przypadku. Sumując takie wzory i pamiętając o (7.8), otrzymujemy równość (7.4) z tezy twierdzenia Greena, gdyż $\sum_{l=1}^k \psi_k = 1$ na $\partial \Omega$.

Dowód wzoru (7.3) jest taki sam. \square

Wniosek 7.10. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem $\partial \Omega$ klasy C^1 . Wówczas

$$\lambda_2(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x dy - y dx) = \int_{\partial \Omega} x dy = - \int_{\partial \Omega} y dx,$$

gdzie całki krzywoliniowe oblicza się, biorąc naturalną orientację brzegu.

Dowód. Stosujemy twierdzenie Greena do $f(x, y) = -y$ i $g(x, y) = x$; wtedy $\frac{1}{2}(g_x - f_y) = -f_y = g_x = 1$. \square

⁷Pierwszą z wykonanych w tym przypadku zamian zmiennych nazywa się czasem *prostowaniem brzegu*: zauważmy, że dla $t = x - \varphi(y)$ zbiór opisany równaniem $x = \varphi(y)$ przeszedł na zbiór $t = 0$.

Przykład 7.11. Obliczymy pole koła jednostkowego K , posługując się Wnioskiem 7.10. Parametryzacją brzegu koła (bez jednego punktu), dającą naturalną orientację brzegu, jest

$$(0, 2\pi) \ni t \longmapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2,$$

zatem

$$\frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi.$$

Uwaga 7.12. Wzory Greena zachodzi w istocie dla ogólniejszych klas obszarów, np. dla obszarów ograniczonych z brzegiem $\partial\Omega$ kawałkami klasy C^1 , tzn. takich, że $\partial\Omega$ jest obrazem pewnej różnowartościowej funkcji ciągłej $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = \gamma(T)$, przy czym odcinek $[0, T]$ jest sumą skończonej liczby odcinków $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ o rozłącznych wnętrzach i $\gamma|_{I_j}$ jest klasy C^1 na I_j , zaś $\|\gamma'\| > 0$ na I_j .

W szczególności, można korzystać z twierdzenia Greena i Wniosku 7.10 dla wszystkich wielokątów na płaszczyźnie.

Kiedy pole wektorowe jest gradientem funkcji?

Opiszemy jeszcze związek wzoru Greena z następującym naturalnym pytaniem: *Dane są dwie funkcje $f, g \in C^1(\Omega)$, gdzie Ω jest obszarem w \mathbb{R}^2 ; kiedy istnieje funkcja $h \in C^2(\Omega)$ taka, że $\text{grad } h = (f, g)$ w Ω ? Równoważnie: kiedy pole wektorowe $V = (f, g)$ klasy C^1 w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest gradientem pewnej funkcji klasy C^2 ?*

Nietrudno zauważyć, jaki jest warunek konieczny istnienia takiej funkcji h . Jeśli $h \in C^2$ i $h_x = f$, $h_y = g$ w Ω , to dzięki równości pochodnych mieszanych drugiego rzędu funkcji h otrzymujemy

$$f_y = (h_x)_y = (h_y)_x = g_x \quad \text{w } \Omega. \quad (7.10)$$

Wprowadźmy dodatkowy symbol: gdy U, Ω są otwarte w \mathbb{R}^n i \bar{U} jest zwartym podzbiorem Ω , to piszemy $U \Subset \Omega$. Załóżmy też milcząco, że odtąd wszystkie rozważane otwarte podzbiory obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mają brzeg kawałkami klasy C^1 . Dla dowolnego takiego zbioru $U \Subset \Omega$ z warunku (7.10) po zastosowaniu twierdzenia Greena otrzymujemy

$$\int_{\partial U} f dx + g dy = 0. \quad (7.11)$$

Na odwrót, jeśli (7.11) zachodzi dla każdego $U \Subset \Omega$, to wówczas $f_y = g_x$ w Ω . Istotnie, wtedy

$$0 = \int_{\partial K} f dx + g dy = \int_K (f_y - g_x) d\lambda_2 \quad \text{dla każdego kwadratu } K \Subset \Omega,$$

stąd zaś wynika, że $f_y - g_x \equiv 0$ w Ω .⁸

Okazuje się, że ten warunek można nieznacznie wzmocnić: jeśli $(f, g) = \text{grad } h$, to całka z formy $\omega = f dx + g dy$ znika dla każdej krzywej zamkniętej w Ω , nie tylko dla takiej, która jest brzegiem jakiegoś obszaru $U \Subset \Omega$.

⁸Proszę samodzielnie wykazać, że jeśli $\int_K \varphi d\lambda_2 = 0$ dla wszystkich kwadratów $K \Subset \Omega$ i φ jest funkcją mierzalną, to $\varphi = 0$ p.w.

Stwierdzenie 7.13. Niech $f, g \in C^1(\Omega)$, gdzie Ω jest obszarem w \mathbb{R}^2 . Jeśli istnieje funkcja $h \in C^2(\Omega)$ taka, że $h_x = f$, $h_y = g$ w Ω , to dla dowolnej krzywej zamkniętej $\gamma \subset \Omega$ kawałkami klasy C^1 jest

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = 0. \quad (7.12)$$

Dowód. Oznaczmy $\omega = f dx + g dy$. Jeśli $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [0, 1] \rightarrow \Omega$ jest krzywą (kawałkami) klasy C^1 , a ponadto $f = h_x$ i $g = h_y$ w Ω , to z definicji całki z 1-formy i wzoru na pochodną złożenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 \left(f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(h_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + h_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (h \circ \gamma(t)) dt = h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)). \end{aligned}$$

(Interpretacja geometryczna tej równości jest prosta: całkując wzdłuż krzywej iloczyn skalarny gradientu i jednostkowego wektora stycznego, tzn. pochodną funkcji w kierunku stycznym, otrzymujemy przyrost funkcji wzdłuż tej krzywej). Jeśli krzywa γ jest zamknięta, to $\gamma(1) = \gamma(0)$, więc $\int_{\gamma} \omega = 0$. \square

Uwaga 7.14. Czytelnik zechce zauważyć, że rachunek w ostatnim dowodzie nie wymaga założenia, że $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ jest funkcją różnowartościową. Funkcje $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, które są kawałkami klasy C^1 , nazywa się czasem – nie wymagając ich różnowartościowości – *drogami* (w obszarze Ω) i definiuje się całkę z 1-formy wzdłuż drogi (tak samo, jak zdefiniowaliśmy całkę wzdłuż krzywej zorientowanej). Tezę stwierdzenia można zatem wzmocnić: jeśli $\text{grad } h = (f, g)$ w Ω , to $\int_{\gamma} f dx + g dy = 0$ dla każdej drogi zamkniętej.

Okazuje się natomiast, że żaden z równoważnych warunków (7.10) i (7.11) nie gwarantuje istnienia takiej funkcji $h \in C^2(\Omega)$, że $h_x = f$, $h_y = g$.

Przykład 7.15. Niech $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Połóżmy

$$f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega.$$

Wtedy, jak łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem,

$$f_y(x, y) = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = g_x(x, y) \quad \text{w } \Omega$$

Jednak nie istnieje taka funkcja $h \in C^2(\Omega)$, dla której f, g byłyby pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu, gdyż jeśli γ jest okręgiem jednostkowym (zorientowanym przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara), to

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi \neq 0,$$

tzn. nie zachodzi warunek konieczny (7.12), podany w ostatnim stwierdzeniu. Zauważmy: okrąg jednostkowy *nie jest brzegiem obszaru*, który byłby zawarty w Ω .

Stwierdzenie 7.16. *Jeśli Ω jest obszarem na płaszczyźnie, $f, g \in C^1(\Omega)$ i warunek*

$$\int_{\gamma} f dx + g dy = 0$$

zachodzi dla każdej drogi zamkniętej γ w Ω , to istnieje $h \in C^2(\Omega)$ taka, że $h_x = f$ i $h_y = g$ w Ω .

Szkic dowodu. Ustalmy punkt $\mathbf{p}_0 \in \Omega$. Ponieważ Ω jest zbiorem otwartym spójnym, więc każdy inny punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ można połączyć z \mathbf{p}_0 pewną łamaną $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})$. Z założenia wynika, że liczba

$$h(\mathbf{p}) := \int_{\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})} f dx + g dy \quad (7.13)$$

nie zależy od wyboru tej łamanej.

Ustalmy $\mathbf{p} = (x, y) \in \Omega$. Funkcja $[0, t] \ni s \mapsto \mathbf{p} + s\mathbf{e}_1 \in \Omega$ parametryzuje odcinek $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + t\mathbf{e}_1]$. Nietrudno sprawdzić, że dla małych t jest

$$h(\mathbf{p} + t\mathbf{e}_1) - h(\mathbf{p}) = \int_{[\mathbf{p}, \mathbf{p} + t\mathbf{e}_1]} f dx + g dy = \int_0^t f(x + s, y) ds.$$

Stąd

$$h_x(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{p} + t\mathbf{e}_1) - h(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x + s, y) ds = f(x, y).$$

Tak samo sprawdzamy, że $h_y(x, y) = g(x, y)$ w Ω (ćwiczenie). Oczywiście, $h \in C^2$, gdyż $h_x, h_y \in C^1$. \square

Warunek dostateczny na to, by istniała funkcja $h \in C^2(\Omega)$, dla której $h_x = f$ i $h_y = g$, jest w istocie połączeniem warunku *topologicznego*, nałożonego na obszar Ω , z warunkiem koniecznym $f_y = g_x$. Aby sformułować twierdzenie, które o tym mówi, będziemy potrzebować jeszcze jednej definicji.

Definicja 7.17. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem i niech $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Omega$. Mówimy, że drogi $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$ i $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ takie, że $\gamma_i(0) = \mathbf{p} \in \Omega$ i $\gamma_i(1) = \mathbf{q} \in \Omega$ dla $i = 0, 1$ są *homotopijne w Ω* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja ciągła $H: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ taka, że

- (i) $H(i, s) = \gamma_i(s)$ dla wszystkich $s \in [0, 1]$ oraz $i = 0, 1$;
- (ii) $H(t, 0) = \mathbf{p}$ i $H(t, 1) = \mathbf{q}$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$.

Sens tej definicji jest następujący: drogę γ_0 można w sposób ciągły zdeformować w zbiorze Ω do γ_1 , nie poruszając jej końców. O drogach γ_0, γ_1 takich, jak w powyższej definicji, będziemy mówić, że są *krzywymi o wspólnych końcach*.

Twierdzenie 7.18 (warunek dostateczny całkowalności 1-formy). *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem. Jeśli $f, g \in C^1(\Omega)$ spełniają warunek $f_y = g_x$, a ponadto każde dwie drogi o wspólnych końcach są homotopijne w Ω , to istnieje funkcja $h \in C^2(\Omega)$ taka, że*

$$h_x = f, \quad h_y = g \quad \text{w } \Omega.$$

W pełni ścisły dowód tego twierdzenia wymaga dość żmudnych i technicznych rozważań, dlatego ograniczymy się do poglądowego szkicu.

Szkic dowodu. Krok 1. Jeśli dowolne dwie drogi o wspólnych końcach są homotopijne w Ω , to dowolne dwie łamane o wspólnych końcach są homotopijne w Ω i można tę homotopię zrealizować za pomocą takiej funkcji H , że drogi $H(t, \cdot)$ są łamanymi dla wszystkich t . Wystarczy w tym celu zauważyć, że $H: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ jest *jednostajnie* ciągła, a następnie podzielić $[0, 1]^2$ na drobne prostokąty P_j , $j = 1, \dots, N^2$, których obrazy są zawarte w dyskach $D_\varepsilon \Subset \Omega$ o małym promieniu $\varepsilon > 0$. Zostawiając wartości H w wierzchołkach P_j i odpowiednio modyfikując H w pozostałych punktach kwadratu $[0, 1]^2$ – dyski D_ε są wypukłe, więc punkty w nich można łączyć odcinkami – otrzymujemy żadaną homotopię.



Zauważmy ponadto, że można tę homotopię zbudować tak – dzieląc boki na odpowiednio krótkie odcinki i stopniowo przemieszczając je wewnątrz dysków D_ε zawartych w Ω – aby dla pewnego skończonego ciągu chwil $t_i \in [0, 1]$, przy dowolnym ustalonym i , łamane $\ell_i = H(t_i, \cdot)$ oraz $\ell_{i+1} = H(t_{i+1}, \cdot)$ miały ten sam zbiór boków, z dokładnością do co najwyżej dwóch boków każdej łamanej (przykład takiej sytuacji jest na rysunku).

Krok 2. Jeśli dwie łamane ℓ_0 i ℓ_1 o wspólnych końcach są homotopijne w Ω , to (przy założeniu $f_y = g_x$) zachodzi równość

$$\int_{\ell_0} f dx + g dy = \int_{\ell_1} f dx + g dy.$$

To wynika z twierdzenia Greena i naszkicowanego wyżej opisu homotopii. (Proszę najpierw pomyśleć o dwóch łamanych, które pokrywają się niemal w całości, za wyjątkiem dwóch odcinków, patrz rysunek. Różnica całek po takich łamanych jest całką po obwodzie czworokąta z formy $f dx + g dy$).

Krok 3. Odtąd postępujemy tak, jak w dowodzie Stwierdzenia 7.16, definiując funkcję h wzorem (7.13), ustaliliśmy wcześniej dowolny punkt początkowy $\mathbf{p}_0 \in \Omega$, z którego wędruje się do innych punktów wzdłuż łamanych. \square

Uwaga 7.19. Nietrudno zauważyć, że założenie o homotopijności dróg o wspólnych końcach jest spełnione np. w każdym obszarze wypukłym (a także w każdym obszarze, który jest dyfeomorficzny z wypukłym). Ogólnie, obszary, w których to założenie jest spełnione, nazywa się *jednospójnymi*.

7.2 Formy wieloliniowe antysymetryczne

W tym podrozdziale S_k oznacza grupę permutacji. Przypomnijmy: znakiem permutacji $\sigma \in S_k$ nazywa się liczbę

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p(\sigma)}, \quad \text{gdzie } p(\sigma) = \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq k, \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Znak permutacji σ jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy σ jest złożeniem parzystej liczby transpozycji; jeśli σ jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji, to $\varepsilon(\sigma) = -1$. Przekształcenie $\varepsilon: S_k \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ jest homomorfizmem grup.

Definicja 7.20. Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{R} . Przekształcenie k -liniowe $\omega: X^k = X \times \dots \times X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się k -formą antysymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy równość

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_j, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_i, \xi_{j+1}, \dots, \xi_k) = -\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \quad (7.14)$$

zachodzi dla wszystkich $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i < j$, oraz wszystkich wektorów $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$.

Zbiór wszystkich k -form antysymetrycznych oznacza się symbolem $\Lambda^k X^*$. Dla $k = 0$ przyjmujemy $\Lambda^0 X^* = \mathbb{R}$. Dla $k = 1$ warunek z definicji jest zawsze spełniony; wtedy $\Lambda^1 X^* = X^*$ jest przestrzenią wszystkich funkcjonałów liniowych na X .

Uwaga 7.21. Zbiór $\Lambda^k X^*$ jest przestrzenią liniową. Jeśli forma $\omega \in \Lambda^k X^*$ i permutacja $\sigma \in S_k$, to

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

dla wszystkich wektorów $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$. Wynika to z faktu, że każda permutacja jest złożeniem transpozycji.

Stwierdzenie 7.22. Jeśli $\omega \in \Lambda^k X^*$ i wektory $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ są liniowo zależne, to $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$. W szczególności, $\Lambda^k X^* = \{0\}$ dla $k > \dim X$.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności założmy, że $\xi_1 = a_2 \xi_2 + \dots + a_k \xi_k$. Z liniowości ω względem pierwszego argumentu wynika, że

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{j=2}^k a_j \omega(\xi_j, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

Wobec (7.14), każdy składnik sumy jest zerem (dwa spośród argumentów ω są równe!).
□

Przykład 7.23 (baza i wymiar przestrzeni $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$). Ustalmy $k \in \{1, \dots, n\}$. Niech $X = \mathbb{R}^n$. Dla każdego uporządkowanego zestawu k różnych liczb

$$J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n \quad (7.15)$$

określimy odwzorowanie liniowe $dx_J: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$dx_J(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \det \left((\xi_{\mu, j_\nu})_{\mu, \nu=1, \dots, k} \right). \quad (7.16)$$

Ponieważ wyznacznik jest antysymetryczną funkcją kolumn (wierszy) macierzy, więc rzeczywiście $dx_J \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Zbiór wszystkich zestawów J , określonych w (7.15), oznaczymy symbolem $\mathcal{J}_k(n)$. Jest rzeczą jasną, że $\mathcal{J}_k(n)$ ma $\binom{n}{k}$ elementów.

Wykażemy, że formy dx_J , gdzie $J \in \mathcal{J}_k(n)$, stanowią bazę $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)^*$. Niech e_1, \dots, e_n będą wektorami standardowej bazy w \mathbb{R}^n . Zauważmy, że dla $I, J \in \mathcal{J}_k(n)$, $J = (j_1, \dots, j_k)$,

$$dx_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wartości formy $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ wystarczy określić na wszelkich układach wektorów bazy w \mathbb{R}^n (i każda forma jest przez te wartości określona jednoznacznie). Dlatego równość $\omega = \sum_J a_J dx_J$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\omega(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = a_J \quad \text{dla wszystkich } J \in \mathcal{J}_k(n). \quad (7.17)$$

Zatem formy dx_J istotnie są bazą $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)^*$ i mamy

$$\dim \Lambda_k(\mathbb{R}^n)^* = \#\mathcal{J}_k(n) = \binom{n}{k} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n. \quad (7.18)$$

Interpretacja geometryczna. Zanim przejdziemy do kolejnej abstrakcyjnej definicji, wspomnijmy o geometrycznej interpretacji form dx_I . Otóż, k liniowo niezależnych wektorów $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ rozpina k -wymiarowy równoległoscian w \mathbb{R}^n . Wobec wzoru (7.16) oraz geometrycznej interpretacji wyznacznika, liczba $dx_I(\xi_1, \dots, \xi_k)$ jest, z dokładnością do znaku, k -wymiarową objętością rzutu tego równoległoscianu na k -wymiarową podprzestrzeń $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^n$, rozpiętą na wektorach $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$, gdzie zestaw numerów $(i_1, \dots, i_k) = I$. Znak zależy od tego, czy rzuty wektorów ξ_j na \mathbb{R}^I tworzą bazę zorientowaną zgodnie ze standardową bazą \mathbb{R}^I , czy nie.

Definicja 7.24 (iloczyn zewnętrzny). Niech $k, l \in \mathbb{N}$. Iloczynem zewnętrznym form $\alpha \in \Lambda^k X^*$ i $\beta \in \Lambda^l X^*$ nazywamy formę $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} X^*$ określoną wzorem

$$\alpha \wedge \beta(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)})$$

gdzie $S_{k,l}$ oznacza podzbiór grupy permutacji S_{k+l} złożony z tak zwanych (k, l) -tasowań,

$$S_{k,l} = \{ \sigma \in S_{k+l} : \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \quad \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l) \}.$$

Dla $c \in \Lambda^0 X^* \equiv \mathbb{R}$ i $\alpha \in \Lambda^k X^*$ przyjmujemy $c \wedge \alpha = c\alpha \in \Lambda^k X^*$.

Na przykład, dla $\alpha, \beta \in \Lambda^1 X^*$ oraz $\gamma \in \Lambda^2 X^*$ mamy wprost z definicji

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) &= \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi), \\ (\alpha \wedge \gamma)(\xi, \eta, \zeta) &= \alpha(\xi)\gamma(\eta, \zeta) - \alpha(\eta)\gamma(\xi, \zeta) + \alpha(\zeta)\gamma(\xi, \eta) \\ &= \alpha(\xi)\gamma(\eta, \zeta) + \alpha(\eta)\gamma(\zeta, \xi) + \alpha(\zeta)\gamma(\xi, \eta) \end{aligned}$$

(ostatnia równość wynika z antysymetrii 2-formy γ).

Wprost z definicji wynika też, że iloczyn zewnętrzny $\alpha \wedge \beta$ jest przekształceniem dwuliniowym, tzn. zależy liniowo od każdego z czynników α, β z osobna.

Lemat 7.25 (własności iloczynu zewnętrznego). Niech $k, l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wówczas:

(i) dla $\alpha \in \Lambda^k X^*$ i $\beta \in \Lambda^l X^*$ jest

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha;$$

(ii) iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn.

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad \text{dla } \alpha \in \Lambda^k X^*, \beta \in \Lambda^l X^*, \gamma \in \Lambda^m X^*;$$

(iii) dla wszystkich $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{J}_k(n)$ jest

$$dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Dowód. Własność (i) wynika łatwo wprost z definicji; trzeba zauważyć, że każde tasowanie $\sigma \in S_{k,l}$ można zmienić w tasowanie ze zbioru $S_{l,k}$ za pomocą kl transpozycji (przeobrażeń).

Aby wykazać łączność, wprowadzimy zbiór ‘potrójnych tasowań’

$$S_{k,l,m} = \left\{ \sigma \in S_{k+l+m} \left| \begin{array}{l} \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \\ \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l), \\ \sigma(k+l+1) < \dots < \sigma(k+l+m) \end{array} \right. \right\}$$

Zarówno $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+m})$, jak i $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+m})$ są, z definicji iloczynu zewnętrznego i własności znaku permutacji, równe liczbie

$$\sum_{\sigma \in S_{k,l,m}} \varepsilon(\sigma) \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}) \gamma(\xi_{\sigma(k+l+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l+m)}).$$

Stąd wynika łączność mnożenia zewnętrznego. Iterując powyższy wzór, otrzymuje się przez indukcję, dla wszystkich 1-form $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X^* = \Lambda^1 X^*$ i wektorów $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$, równość

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha_1(\xi_{\sigma(1)}) \cdot \alpha_2(\xi_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \alpha_k(\xi_{\sigma(k)}) \\ &= \det \left((\alpha_\nu(\xi_\mu))_{\mu, \nu=1, \dots, k} \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Kładąc $X = \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha_\nu = dx_{j_\nu}$, otrzymujemy punkt (iii) tezy lematu. \square

Definicja 7.26 (przecignięcie formy). Jeśli $A: X \rightarrow Y$ jest przekształceniem liniowym i $\omega \in \Lambda^k Y^*$, to formę $A^* \omega \in \Lambda^k X^*$, nazywaną *przecignięciem ω za pomocą A* , definiujemy wzorem

$$A^* \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(A\xi_1, \dots, A\xi_k), \quad \xi_j \in X \text{ dla } j = 1, \dots, k.$$

Przyporządkowanie $\omega \mapsto A^* \omega$ jest przekształceniem liniowym z $\Lambda^k Y^*$ w $\Lambda^k X^*$. Odnajmy inne jego własności.

Stwierdzenie 7.27. (i) Jeśli $A: X \rightarrow Y$ i $B: Y \rightarrow Z$ są przekształceniami liniowymi, to $(B \circ A)^* \omega = A^*(B^* \omega)$ dla każdej k -formy $\omega \in \Lambda^k Z^*$.

(ii) Wzór $A^*(\alpha \wedge \beta) = A^* \alpha \wedge A^* \beta$ zachodzi dla wszystkich $A: X \rightarrow Y$ liniowych oraz wszystkich $\alpha \in \Lambda^k Y^*$, $\beta \in \Lambda^l Y^*$.

(iii) Jeśli $A = (a_{ij})$, gdzie $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, jest przekształceniem liniowym z przestrzeni \mathbb{R}^m w \mathbb{R}^n , przy czym współrzędnymi w \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m są, odpowiednio, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ i $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, to wówczas

$$A^*(dy_J) = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} \det A(J, I) dx_I \quad \text{dla } J \in \mathcal{J}_k(n), \quad (7.20)$$

gdzie symbol $A(J, I)$ oznacza macierz $k \times k$, powstającą z A przez wybór wierszy o numerach ze zbioru $J \in \mathcal{J}_k(n)$ oraz kolumn o numerach ze zbioru $I \in \mathcal{J}_k(m)$.

Dowód. Pierwsze dwie własności wynikają wprost z definicji; (i) jest praktycznie oczywista, natomiast dowód (ii) jest prostym ćwiczeniem, polegającym na wypisaniu definicji przeciągnięcia, definicji iloczynu zewnętrznego i raz jeszcze definicji przeciągnięcia. Szczegóły pozostawimy Czytelnikowi.

Dla dowodu (iii) skorzystamy z rachunków przeprowadzonych w Przykładzie 7.23: jeśli $\omega = A^*(dy_J)$, to równość

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} c_I dx_I,$$

wyrażająca formę ω w bazie dx_I , $I \in \mathcal{J}_k(m)$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zestawu $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ jest

$$\begin{aligned} c_I &= \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) = (A^*dy_J)(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) \\ &= dy_J(A\mathbf{e}_{i_1}, \dots, A\mathbf{e}_{i_k}) \\ &= \det \left(((A\mathbf{e}_{i_\mu})_{j_\nu})_{\mu, \nu=1, \dots, k} \right) = \det A(J, I), \end{aligned}$$

gdyż wektory $A\mathbf{e}_{i_\mu}$ są po prostu kolumnami macierzy przekształcenia A . \square

7.3 Formy różniczkowe

Definicja 7.28 (forma różniczkowa rzędu k). Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Formą różniczkową rzędu k i klasy C^∞ na zbiorze U , lub krótko: gładką k -formą różniczkową na U , nazywamy przekształcenie

$$\omega: U \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$$

klasy C^∞ , takie, że dla każdego punktu $\mathbf{x} \in U$ przekształcenie

$$(\mathbb{R}^n)^k \ni (\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k) \mapsto \omega(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k) \in \mathbb{R} \quad (7.21)$$

jest k -formą antysymetryczną, tzn. elementem przestrzeni $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^k$.

Uwaga. Jeśli $\omega: U \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ jest k -formą różniczkową, to odwzorowanie (7.21) oznacza się symbolem $\omega_{\mathbf{x}}$, tzn.

$$\omega_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k) = \omega(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k)$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{R}^n$. Można więc utożsamić ω z przekształceniem gładkim

$$U \ni \mathbf{x} \mapsto \omega_{\mathbf{x}} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$$

o wartościach w przestrzeni k -form antysymetrycznych. Zgodnie z Przykładem 7.23, dla każdego $\mathbf{x} \in U$ formę $\omega_{\mathbf{x}}$ można wyrazić jako kombinację form bazowych dx_I ,

$$\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(n)} a_I(\mathbf{x}) dx_I, \quad a_I \in C^\infty(U),$$

przy czym $a_I(\mathbf{x}) = \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ dla $I = (i_1, \dots, i_k)$, na mocy wzoru (7.17) na współczynniki formy w bazie.

Zbiór wszystkich k -form różniczkowych na $U \subset \mathbb{R}^n$ oznacza się

$$\Omega^k(U) := C^\infty(\Omega, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*).$$

Uwaga. Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych będziemy oznaczać tak samo, jak iloczyn zewnętrzny form liniowych; dla $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^\ell(U)$ przyjmujemy

$$(\alpha \wedge \beta)_x := \alpha_x \wedge \beta_x \in \Lambda^{k+\ell}(\mathbb{R}^n)^*.$$

We współrzędnych pisze się po prostu

$$\left(\sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_J b_J dx_J \right) = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

7.3.1 Przeciąganie form różniczkowych. Różniczka zewnętrzna.

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami otwartymi, zaś $f: V \rightarrow U$ – przekształceniem gładkim.

Definicja 7.29. Jeśli $\omega \in \Omega^k(U)$ jest k -formą różniczkową na $U \subset \mathbb{R}^n$, to *przecignięciem* ω za pomocą f nazywamy formę $f^*\omega \in \Omega^k(V)$, określoną wzorem

$$f^*\omega(\mathbf{x}; \xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(f(\mathbf{x}); Df(\mathbf{x})\xi_1, \dots, Df(\mathbf{x})\xi_k), \quad \mathbf{x} \in V, \quad \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^m.$$

Przeciąganie form różniczkowych, traktowane – dla ustalonego odwzorowania f – jako przekształcenie

$$\Omega^k(U) \ni \omega \mapsto f^*\omega \in \Omega^k(V),$$

jest, podobnie jak przeciąganie form liniowych za pomocą odwzorowań liniowych, przekształceniem liniowym z $\Omega^k(U)$ w $\Omega^k(V)$. Oto jego najważniejsze własności.

Stwierdzenie 7.30. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ i $W \subset \mathbb{R}^p$ będą zbiorami otwartymi, zaś $f: V \rightarrow U$, $g: W \rightarrow V$ – odwzorowaniami gładkimi.

(i) Dla $\omega \in \Omega^k(U)$ jest $(f \circ g)^*\omega = g^*f^*\omega$.

(ii) Dla $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$ mamy

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta) \in \Omega^{k+\ell}(V).$$

(iii) Jeśli współzrędnymi w \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m są, odpowiednio, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ i $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, zaś $\omega = b_J dy_J \in \Omega^k(U)$, gdzie $J \in \mathcal{J}_k(n)$ i $b_J \in C^\infty(U)$ są dane, to wówczas

$$f^*\omega = \sum_{I \in \mathcal{J}_k(m)} (b_J \circ f) \det \left(\frac{\partial f_J}{\partial x_I} \right) dx_I, \quad (7.22)$$

gdzie symbol

$$\frac{\partial f_J}{\partial x_I} = \left(\frac{\partial f_{j_\nu}}{\partial x_{i_\mu}} \right)_{\mu, \nu=1, \dots, k}, \quad I = (i_1, \dots, i_k), \quad J = (j_1, \dots, j_k)$$

oznacza macierz $k \times k$, powstającą z macierzy Jacobiego Df przez wybór wierszy o numerach $j_\nu \in J$ i kolumn o numerach $i_\mu \in I$.

Dowód. Punkty (i) oraz (ii) otrzymujemy, podobnie jak odpowiadające im części Stwierdzenia 7.27, wprost z definicji. Wzór (7.22) wynika od razu ze wzoru (7.20) w Stwierdzeniu 7.27 i Definicji 7.29. Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego przemyślenia tych zdań i (mechanicznego, w gruncie rzeczy) wypisania odpowiednich wzorów. \square

Przykład 7.31. (a) Niech $\omega \in \Omega^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas, zgodnie z podanym wcześniej opisem bazy w przestrzeni $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ 1-form antysymetrycznych,

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j, \quad \text{gdzie } \omega_j \in C^\infty(\Omega).$$

Zastosujmy wzór (7.22) do formy ω i funkcji gładkiej $f: [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ (parametryzacji pewnej krzywej w U). Oznaczając zmienną na odcinku $[0, 1]$ literą t , otrzymamy

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum_{j=1}^n f^*(\omega_j dx_j) \quad \text{wobec liniowości } \omega \mapsto f^*\omega \\ &\stackrel{(7.22)}{=} \sum_{j=1}^n (\omega_j \circ f) \frac{df_j}{dt} dt. \end{aligned}$$

Proszę porównać ten wynik z definicją całki z 1-formy.

(b) Niech $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $V = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, zaś $f: V \rightarrow U$ niech będzie dane wzorem

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Inaczej mówiąc, $x = f_1(r, \theta) = r \cos \theta$ i $y = f_2(r, \theta) = r \sin \theta$ to zwykle współrzędne kartezjańskie wyrażone za pomocą współrzędnych biegunowych $(r, \theta) \in V$. Wzór (7.22) daje w tym przypadku

$$\begin{aligned} f^*(dx) &= \frac{\partial f_1}{\partial r} dr + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ f^*(dy) &= \frac{\partial f_2}{\partial r} dr + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Stosując Stwierdzenie 7.30 (ii), otrzymujemy po nieskomplikowanym rachunku, wykorzystując zależności $dr \wedge dr = 0 = d\theta \wedge d\theta$, $dr \wedge d\theta = -d\theta \wedge dr$, wynik

$$f^*(dx \wedge dy) = f^*(dx) \wedge f^*(dy) = r dr \wedge d\theta.$$

Zauważmy, że to po prostu *inny sposób wyrażenia zależności* $\det Df(r, \theta) = r$. \square

Definicja 7.32 (różniczka zewnętrzna). Operator

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U),$$

określony wzorem

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \omega(\mathbf{x} + s\xi_i, \xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^i \xi_{i,\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}, \xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k), \end{aligned} \quad (7.23)$$

gdzie $\mathbf{x} \in \Omega$, $\xi_0, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ oraz $\xi_i = (\xi_{i,\nu})_{\nu=1, \dots, n}$, nazywa się *różniczką zewnętrzną*.

Przykład 7.33. Niech $k = 0$; każda 0-forma różniczkowa $f \in \Omega^0(U)$ to po prostu funkcja gładka $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. W tym przypadku wzór na różniczkę zewnętrzną oznacza, że

$$(df)_x(\xi) = df(\mathbf{x}; \xi) = \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\xi.$$

Różniczką zewnętrzną formy $f \in \Omega^0(U)$ przyporządkowuje więc punktowi $\mathbf{x} \in U$ przekształcenie liniowe $(df)_x = Df(\mathbf{x}) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^*$, które dobrze znamy: zwykłą różniczkę funkcji f w punkcie \mathbf{x} . Stosuje się często zapis

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Podstawiając $f(\mathbf{x}) = x_j$, odnajdzie Czytelnik jedno z możliwych wyjaśnień, dlaczego rzut na j -tą oś oznaczaliśmy w poprzednim podrozdziale symbolem dx_j . \square

Twierdzenie 7.34 (własności różniczkii zewnętrznej). Niech U będzie zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n . Operator $d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ jest liniowy. Ponadto:

(i) Jeśli $\omega = a_J dx_J$, gdzie $a_J \in C^\infty(U)$ i $J \in \mathcal{J}_k(n)$, to wówczas

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_J = da_J \wedge dx_J; \quad (7.24)$$

(ii) Dla $\alpha \in \Omega^k(U)$ oraz $\beta \in \Omega^\ell(U)$ mamy

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta; \quad (7.25)$$

(iii) Dla każdej formy $\omega \in \Omega^k(U)$ jest $d(d\omega) = 0$;

(iv) Dla każdego $f \in C^\infty(V, U)$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^m$ jest otwarty, mamy $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Dowód. Liniowość różniczkii zewnętrznej jest oczywista. Najpierw udowodnimy punkt (i). Niech $\omega = a_J dx_J$. Z definicji,

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^i \xi_{i,\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}, \xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_k) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^i \xi_{i,\nu} \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu} dx_J(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_k) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_{i,\nu} dx_J(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_k) \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_J}{\partial x_\nu} \cdot (dx_\nu \wedge dx_J)(\xi_0, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Pisząc ostatnią równość, skorzystaliśmy z definicji iloczynu zewnętrznego form liniowych $dx_\nu \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ oraz $dx_J \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$.

Własność (ii), dzięki liniowości d , wystarczy wykazać dla $\alpha = a dx_I$ i $\beta = b dx_J$, gdzie $a, b \in C^\infty(U)$ są funkcjami gładkimi, $I \in \mathcal{J}_k(n)$, $J \in \mathcal{J}_\ell(n)$. Ze wzoru na pochodną iloczynu oraz punktu (i) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(ab dx_I \wedge dx_J) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(ab)}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_\nu} b dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_\nu} a dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \right) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_\nu} a dx_\nu \wedge dx_J \right) \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika ze wzoru (7.24), zaś w przedostatniej znak $(-1)^k$ pojawia się dlatego, że $I \in \mathcal{J}_k(n)$: wtedy

$$dx_\nu \wedge dx_I = dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = (-1)^k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_\nu = (-1)^k dx_I \wedge dx_\nu,$$

patrz Lemat 7.25 (i).

Udowodnimy teraz własność (iii), tzn. równość $d \circ d = 0$. Dla 0-form, tj. funkcji $f \in C^\infty(U)$, otrzymujemy dzięki twierdzeniu Schwarz'a o symetrii $D^2 f$ równość

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu\right) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right) dx_\mu \wedge dx_\nu \\ &= \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right) dx_\mu \wedge dx_\nu = 0. \end{aligned}$$

Z definicji, $d(dx_J) = 0$ dla każdego $J \in \mathcal{J}_k(n)$, więc dla $\omega = a dx_J \in \Omega^k(U)$, gdzie $a \in C^\infty(U)$ jest dowolną funkcją, otrzymujemy dzięki udowodnionym już własnościom (i) oraz (ii)

$$d(d\omega) = d(da \wedge dx_J) = d(da) \wedge dx_J + 0 = d(da) = 0.$$

Stąd już wynika, że $d \circ d = 0$ na $\Omega^k(U)$.

Pozostaje wykazać (iv). Niech $f = (f_1, \dots, f_n)$, gdzie $f_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy $C^\infty(V)$. Jeśli $\omega \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ jest 0-formą, czyli funkcją gładką, to $f^*\omega = \omega \circ f$. Wzór

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega) \tag{7.26}$$

wynika wtedy od razu ze wzoru na różniczkę złożenia. Dla $\omega(\mathbf{y}) = y_j$ otrzymujemy stąd w szczególności

$$f^*(dy_j) = df_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

a następnie, korzystając ze Stwierdzenia 7.30 (ii),

$$d(f^*dy_J) = df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_k} \quad \text{dla wszystkich zestawów } J \in \mathcal{J}_k(n).$$

Z tej równości, stosując własność (ii) i równość $d \circ d = 0$, otrzymujemy

$$d(f^*(dy_J)) = 0 \quad \text{dla wszystkich zestawów } J \in \mathcal{J}_k(n). \tag{7.27}$$

Niech teraz $\omega = \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} \omega_J dy_J$, gdzie współczynniki $\omega_J \in C^\infty(U)$ są funkcjami. Zachodzą wtedy równości

$$\begin{aligned}
 d(f^*\omega) &\stackrel{\text{Stw. 7.30 (ii)}}{=} d\left(\sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} (f^*\omega_J) f^*(dy_J)\right) \\
 &\stackrel{(7.25), (7.27)}{=} \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} d(f^*\omega_J) \wedge f^*(dy_J) \\
 &\stackrel{(7.26)}{=} \sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} f^*(d\omega_J) \wedge f^*(dy_J) \\
 &\stackrel{\text{Stw. 7.30 (ii)}}{=} f^*\left(\sum_{J \in \mathcal{J}_k(n)} (d\omega_J) \wedge dy_J\right) \stackrel{(7.24)}{=} f^*(d\omega).
 \end{aligned}$$

Dowód całego twierdzenia jest zakończony. \square

Definicja 7.35. Mówimy, że forma $\omega \in \Omega^k(U)$ jest *zamknięta*, jeśli $d\omega = 0$. Mówimy, że forma $\omega \in \Omega^k(U)$ jest *dokładna*, jeśli $\omega = d\eta$ dla pewnego $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$.

Przy użyciu tego języka część własności różniczki zewnętrznej, opisanych w ostatnim twierdzeniu wypowiada się krótko:

Stwierdzenie 7.36. Każda forma dokładna $\omega \in \Omega^k(U)$ jest zamknięta. Ponadto, jeśli $f: \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ jest klasy C^∞ , a forma $\omega \in \Omega^k(U)$ jest zamknięta (odpowiednio: dokładna), to forma $f^*\omega \in \Omega^k(V)$ też jest zamknięta (odpowiednio: dokładna).

Dowód. Pierwsza część wynika z równości $d \circ d = 0$, a druga z przemienności przeciągania form i różniczkowania zewnętrznego. \square

7.3.2 Formy różniczkowe w \mathbb{R}^3

O formach różniczkowych w \mathbb{R}^3 mówi się często, używając nieco innego (choć też dość formalnego) języka. Otóż, wobec wzoru (7.18), przestrzenie $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$ i $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ mają wymiar równy $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$, a więc każda z nich jest izomorficzna z \mathbb{R}^3 . Dlatego dla obszarów $U \subset \mathbb{R}^3$ istnieją izomorfizmy liniowe

$$I_k: C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^k(U) = C^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^3)^*), \quad k = 1, 2.$$

Innymi słowy, zarówno 1-formy, jak i 2-formy różniczkowe w \mathbb{R}^3 można utożsamiać z funkcjami gładkimi o wartościach w \mathbb{R}^3 , a więc z polami wektorowymi. Polu wektorowemu $\mathbf{v} = (f, g, h): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ odpowiednie izomorfizmy – *zależne* od wyboru baz w przestrzeniach 1-form i 2-form antysymetrycznych – przypisują następujące formy różniczkowe:

$$\mathbf{v} = (f, g, h) \mapsto I_1(\mathbf{v}) := \alpha_{\mathbf{v}} = f dx + g dy + h dz \quad (7.28)$$

oraz

$$\mathbf{v} = (f, g, h) \mapsto I_2(\mathbf{v}) := \beta_{\mathbf{v}} = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy. \quad (7.29)$$

Zgodnie ze wzorem na różniczkę zewnętrzną,

$$d\alpha_{\mathbf{v}} = (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx + (g_x - f_y) dx \wedge dy.$$

Zauważmy, że

$$d\alpha_{\mathbf{v}} = I_2(\mathbf{w}), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{w} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$$

Pole wektorowe $\mathbf{w} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$ nazywa się *rotacją* pola $\mathbf{v} = (f, g, h)$. Pisze się czasem

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} h_y - g_z \\ f_z - h_x \\ g_x - f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{v},$$

postępując z symbolem $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ tak, jakby chodziło o wektor.

W podobnej konwencji,

$$d\beta_{\mathbf{v}} = (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle dx \wedge dy \wedge dz,$$

gdzie tym razem napis $\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$ oznacza formalnie rozumiany iloczyn skalarny “wektora” ∇ i wektora \mathbf{v} . Funkcję $f_x + g_y + h_z = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$ nazywa się *dywergencją* pola wektorowego $\mathbf{v} = (f, g, h)$; piszemy

$$\text{div } \mathbf{v} := f_x + g_y + h_z \quad \text{dla} \quad \mathbf{v} = (f, g, h): U \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Mamy więc, dla funkcji $F \in C^\infty(U)$ oraz pól wektorowych $\mathbf{v} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$, następujące utożsamienia:

$$\begin{aligned} dF &= \alpha_{\text{grad } F} = I_1(\text{grad } F), \\ d(I_1(\mathbf{v})) &= d\alpha_{\mathbf{v}} = \beta_{\text{rot } \mathbf{v}} = I_2(\text{rot } \mathbf{v}), \\ d(I_2(\mathbf{v})) &= d\beta_{\mathbf{v}} = (\text{div } \mathbf{v}) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Inaczej mówiąc, izomorfizmy I_k , $k = 1, 2$, pozwalają utożsamiać różniczkę zewnętrzną na formach stopnia 0, 1 i 2 odpowiednio z gradientem, rotacją i dywergencją. Własność $d^2 = 0$, wykazana w Twierdzeniu 7.34, oznacza, że

$$\text{rot}(\text{grad } F) = 0, \quad \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0$$

dla wszystkich $F \in C^\infty(U)$ i $\mathbf{v} \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$.

Definicja 7.37. Operator różniczkowy

$$C^2(U) \ni f \mapsto \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \text{div}(\text{grad } f)$$

nazywa się *laplasjanem*.

Uwaga 7.38. Ogólniej, dla obszarów $U \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $n \geq 2$, dywergencję pola wektorowego $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ i laplasjan funkcji $f \in C^2(U)$ określa się wzorami

$$\text{div } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \tag{7.30}$$

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}. \tag{7.31}$$

Jak Czytelnik będzie miał szansę przekonać się podczas dalszych studiów, laplasjan pojawia się w wielu równaniach fizyki matematycznej, a także w pewnych zagadnieniach geometrii i rachunku prawdopodobieństwa.

7.4 Orientacja rozmaitości. Całka z formy różniczkowej

Przypomnijmy, że orientacja przestrzeni liniowej \mathbb{R}^m to, formalnie biorąc, wybór jednej z dwóch klas abstrakcji następującej relacji równoważności, określonej na bazach \mathbb{R}^m : bazy

$$\xi_1, \dots, \xi_m \quad \text{oraz} \quad \eta_1, \dots, \eta_m$$

są w tej relacji wtedy i tylko wtedy, gdy zapisana w tych bazach macierz przekształcenia identycznościowego ma dodatni wyznacznik.

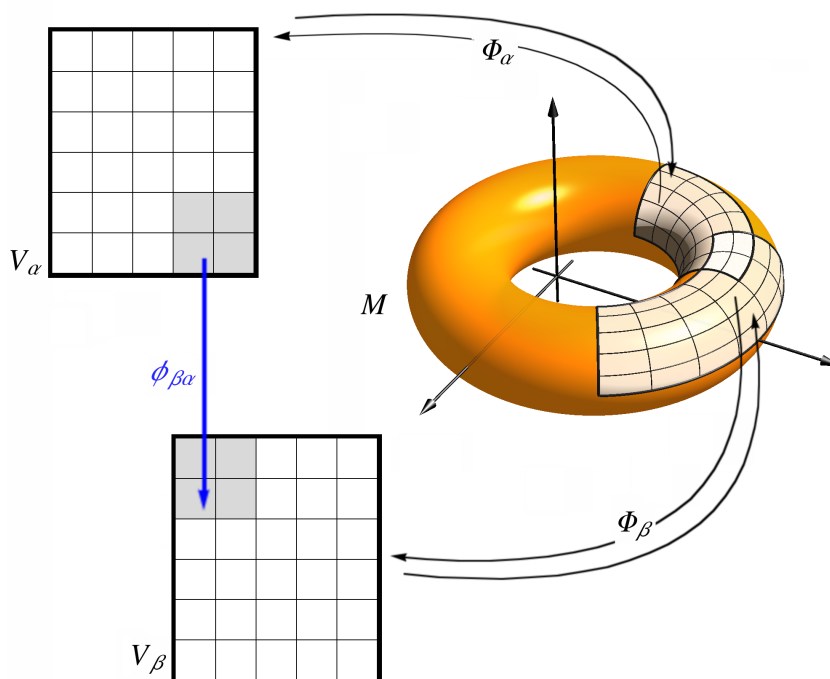
Powiemy teraz, co to znaczy, że dana rozmaitość gładka $M^m \subset \mathbb{R}^n$ jest zorientowana. Wprowadźmy odpowiednie oznaczenia. Niech $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ będzie rodziną zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n , pokrywającą M . Załóżmy, że dla wszystkich indeksów $\alpha \in A$ zbiór⁹ $U_\alpha \cap M$ jest obrazem parametryzacji gładkiej

$$\Psi_\alpha: \mathbb{R}^m \supset V_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M = \Psi_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbb{R}^n,$$

a funkcja

$$\Phi_\alpha = (\Psi_\alpha)^{-1}: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$$

jest tzw. mapą. Zbiór map $\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ jest, zgodnie z terminologią z Definicji 6.7, atlasem.



Funkcje przejścia $\phi_{\beta\alpha} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}: V_\alpha \supset \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow V_\beta$.

⁹Proszę zauważyć: z definicji, jest to zbiór otwarty w topologii indukowanej M .

Definicja 7.39 (atlas zorientowany). Powiemy, że atlas $\{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$, gdzie

$$\Phi_\alpha = (\Psi_\alpha)^{-1} : U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$$

są mapami na rozmaitości gładkiej M , jest *zorientowany*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha, \beta \in A$ takich, że dziedziny map Φ_α, Φ_β przecinają się, przekształcenie

$$\phi_{\beta\alpha} := \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^m$$

(nazywane *funkcją przejścia*) spełnia warunek

$$\det D\phi_{\beta\alpha} > 0 \tag{7.32}$$

w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja 7.40. Rozmaitość $M \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się *orientowalna*, jeśli istnieje na niej atlas zorientowany.

Definicja 7.41. Dwa atlasy zorientowane na danej rozmaitości M są *zgodne*, jeśli ich suma jest atlasem zorientowanym.

Nietrudno sprawdzić, że zgodność jest relacją równoważności na zbiorze wszystkich atlasów zorientowanych danej rozmaitości orientowalnej. Wyborem orientacji danej rozmaitości nazywa się, formalnie biorąc, wybór klasy abstrakcji tej relacji. Pozostawimy Czytelnikowi sprawdzenie, że na każdej rozmaitości orientowalnej istnieją tylko dwa różne wybory orientacji.

Uwaga 7.42. Wygodne jest także następujące spojrzenie: orientacja M to wybór orientacji każdej z przestrzeni stycznych $T_p M$, przy czym owe wybory są dopasowane tak, żeby dla każdego punktu $p \in M$ istniała taka dziedzina mapy $\Phi_\alpha : U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, że $p \in U_\alpha \cap M$ i różniczka parametryzacji $\Psi_\alpha = (\Phi_\alpha)^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M$ przeprowadza standardową bazę e_1, \dots, e_m w *dodatnio zorientowaną* bazę przestrzeni $T_p M$.

Przykład 7.43. Torus

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\},$$

którego pole wyznaczyliśmy w Przykładzie 6.14, jest rozmaitością orientowalną. Zbiór \mathbb{T}^2 jest obrazem przekształcenia

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s) \in \mathbb{T}^2.$$

Nietrudno wprowadzić na \mathbb{T}^2 atlas złożony np. z czterech map $\Phi_\alpha, \alpha = 1, 2, 3, 4$, będących przekształceniami odwrotnymi do

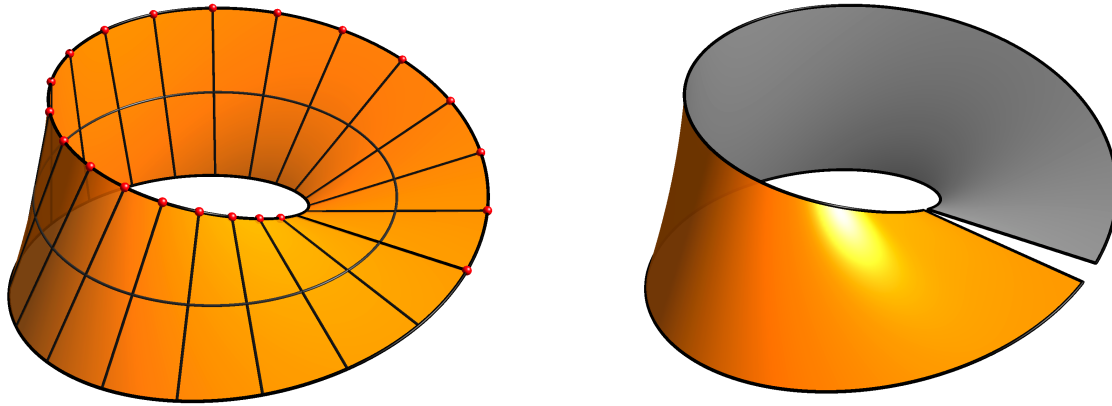
$$\Psi|_{(0,2\pi) \times (0,2\pi)}, \quad \Psi|_{(0,2\pi) \times (\pi,3\pi)}, \quad \Psi|_{(\pi,3\pi) \times (0,2\pi)}, \quad \Psi|_{(\pi,3\pi) \times (\pi,3\pi)}.$$

Funkcje przejścia dla tego atlasu są po prostu przesunięciami $(t, s) \mapsto (t \pm a, s \pm b)$, gdzie $a, b \in \{0, \pi\}$, a każdy z wyznaczników w (7.32) jest równy 1.

Tak samo sprawdza się, że n -wymiarowy torus

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$$

jest rozmaitością orientowalną.



Wstęga Möbiusa to obraz przekształcenia (7.33): powierzchnia zakreślana przez odcinek długości 2, którego środek porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu 2, podczas gdy sam odcinek, zawarty przez cały czas w płaszczyźnie normalnej do okręgu, obraca się o kąt π . Z topologicznego punktu widzenia, wstęga Möbiusa powstaje przez sklejenie dwóch końców prostokątnego, elastycznego paska, przy czym jeden z końców zostaje przed sklejeniem obrócony o 180 stopni.

Zadanie 7.44. Sprawdzić, że sfera $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$ jest orientowalna.

Wskazówka. Można użyć atlasu, w którym są tylko dwie mapy: rzuty stereograficzne z dwóch przeciwnych biegunów; jeden z tych rzutów można złożyć z odbiciem lustrzanym.

Nieorientowalna jest np. wstęga Möbiusa, $M = \Psi(\mathbb{R} \times (-1, 1)) \subset \mathbb{R}^3$, gdzie

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, t) &= 2(\cos 2\theta, \sin 2\theta, 0) + t(\cos \theta \cos 2\theta, \cos \theta \sin 2\theta, \sin \theta) \\ &= ((2 + t \cos \theta) \cos 2\theta, (2 + t \cos \theta) \sin 2\theta, t \sin \theta) \end{aligned} \quad (7.33)$$

Zadanie 7.45. Wskazać atlas wstęgi Möbiusa, złożony z dwóch map. Sprawdzić, że nie jest to atlas zorientowany.

Zadanie 7.46. Udowodnić następujący fakt: jeśli atlas $\mathcal{A} = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ rozmaitości $M^m \subset \mathbb{R}^n$ jest zorientowany i obraz mapy $\Phi : U \cap M \rightarrow V$ jest spójny w \mathbb{R}^m , to któryś z atlasów $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} \cup \{\Phi\}$ oraz $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} \cup \{L \circ \Phi\}$, gdzie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest odbiciem lustrzanym, tzn. $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$, jest zorientowany.

Wskazówka. Zbiory $D_\alpha^+ = \{\mathbf{x} \in V : \det D(\Phi_\alpha \circ \Phi^{-1})(\mathbf{x}) > 0\}$ oraz D_α^- zdefiniowany analogicznie, za pomocą przeciwnej nierówności, są otwarte. Sprawdzić, że każdy punkt V należy do jednego z tych zbiorów. Skorzystać ze spójności V .

Zadanie 7.47. Z dwóch poprzednich zadań wywnioskować, że wstęga Möbiusa nie jest orientowalna.

Bez dowodu, który wykracza poza ramy wykładu, podamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.48. Jeśli rozmaitość $M^m = \partial\Omega$ klasy C^1 jest brzegiem obszaru ograniczonego $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$, to M jest orientowalna.

7.4.1 Całka z formy różniczkowej

Definicja 7.49. Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $\omega \in \Omega^m(U)$, $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, gdzie $f \in C_0^\infty(U)$ jest funkcją gładką o zwartym nośniku w U . Przyjmujemy wówczas

$$\int_U \omega = \int_U f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m := \int_U f d\lambda_m.$$

Definicja 7.50. Niech $M^m \subset \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością zorientowaną. Jeśli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $U \cap M \neq \emptyset$, a parametryzacja

$$\Psi: \mathbb{R}^m \supset V \longrightarrow U \cap M = \Psi(V)$$

jest zgodna z orientacją M , to dla formy $\omega \in \Omega^m(U)$ o zwartym nośniku w U przyjmujemy

$$\int_M \omega := \int_V \Psi^* \omega \quad (7.34)$$

Wypada oczywiście sprawdzić, że powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru parametryzacji. Jeśli nośnik formy ω jest zawarty w przecięciu dziedzin dwóch map Z tego samego atlasu zorientowanego, $\Phi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha$ oraz $\Phi_\beta: U_\beta \cap M \rightarrow V_\beta$, to funkcja przejścia

$$\phi_{\beta\alpha}: \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow W_\beta := \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$$

jest dyfeomorfizmem W_α na W_β , o dodatnim jakobianie. Dla parametryzacji $\Psi_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}$ oraz $\Psi_\beta = \Phi_\beta^{-1}$ mamy

$$\Psi_\alpha = \Psi_\beta \circ \phi_{\beta\alpha} \quad \text{na } W_\alpha.$$

Niech (y_1, \dots, y_m) będą współrzędnymi w W_β , a (x_1, \dots, x_m) – współrzędnymi w W_α . Wówczas $\Psi_\beta^* \omega = f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$, gdzie nośnik funkcji gładkiej f jest zwarty w zbiorze W_β . Zgodnie ze Stwierdzeniem 7.30 (i) oraz (iii),

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^* \omega &= (\Psi_\beta \circ \phi_{\beta\alpha})^* \omega = \phi_{\beta\alpha}^* (\Psi_\beta^* \omega) \\ &= \phi_{\beta\alpha}^* (f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m) \\ &= (f \circ \phi_{\beta\alpha}) \det D\phi_{\beta\alpha} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \end{aligned}$$

Dlatego z twierdzenia o zamianie zmiennych otrzymujemy

$$\int_{V_\alpha} \Psi_\alpha^* \omega = \int_{W_\alpha} (f \circ \phi_{\beta\alpha}) \det D\phi_{\beta\alpha} d\lambda_m = \int_{W_\beta} f d\lambda_m = \int_{V_\beta} \Psi_\beta^* \omega.$$

Proszę zauważyć: skorzystaliśmy z tego, że na M ustalono atlas *zorientowany*; dlatego mogliśmy w powyższym rachunku użyć samego jakobianu funkcji przejścia, a nie wartości bezwzględnej tego jakobianu.

Zdefiniujemy teraz całkę z m -formy różniczkowej po orientowalnej rozmaitości zwartej $M^m \subset \mathbb{R}^n$. Taka rozmaitość ma atlas zorientowany, złożony ze skończenie wielu map $\Phi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, $\alpha = 1, \dots, N$. Niech funkcje $\zeta_\alpha \in C_0^\infty(U_\alpha)$ tworzą tzw. *gładki rozkład jedynek na M wpisany w pokrycie (U_α)* , tzn. niech

$$\zeta_1 + \dots + \zeta_N \equiv 1 \quad \text{w pewnym otoczeniu zbioru } M, \quad \zeta_j \equiv 0 \quad \text{poza } U_j.$$

Istnienie takiego rozkładu jedynek gwarantuje Lemat A.2 (patrz Dodatek A). Przy takich oznaczeniach przyjmujemy następujące określenie.

Definicja 7.51. Załóżmy, że W jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n i rozmaitość $M^m \subset W$. Dla formy $\omega \in \Omega^m(W)$ kładziemy

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha=1}^N \int_{M \cap U_\alpha} \zeta_\alpha \omega. \quad (7.35)$$

Ponownie, wypada sprawdzić, że ta definicja nie zależy od wyboru atlasu zorientowanego i rozkładu jedyinki. Jeśli inne zbiory $U'_\beta \subset \mathbb{R}^n$ pokrywają M , $\beta = 1, \dots, N'$, mapy $\Phi'_\beta: U'_\beta \cap M \rightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^m$ tworzą atlas zorientowany, a funkcje $\zeta'_\beta \in C_0^\infty(U'_\beta)$ są gładkim rozkładem jedyinki na M wpisanym w pokrycie (U'_β) , to zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$\sum_{\alpha} \int_{M \cap U_\alpha} \zeta_\alpha \omega = \sum_{\alpha, \beta} \int_{M \cap U_\alpha \cap U'_\beta} \zeta_\alpha \zeta'_\beta \omega = \sum_{\beta} \int_{M \cap U'_\beta} \zeta'_\beta \omega.$$

Stąd już wynika poprawność definicji.

Uwaga 7.52. Analogicznie definiuje się całkę z formy różniczkowej po zwartym podzbiore dowolnej rozmaitości zorientowanej.

7.5 Twierdzenie Stokesa

Niech $M^m \subset \mathbb{R}^n$ będzie m -wymiarową rozmaitością zorientowaną. Aby sformułować twierdzenie Stokesa, powiemy najpierw, jak orientuje się *brzeg* podzbioru rozmaitości.

Niech G będzie takim zwartym podzbiorem M , którego brzeg ∂G (w topologii indukowanej)¹⁰ na M jest rozmaitością $(m-1)$ -wymiarową. Wówczas dla dowolnej mapy $\Phi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ zbiór $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap G)$ też jest rozmaitością $(m-1)$ -wymiarową (dowód: ćwiczenie dla Czytelnika).

Orientację ∂G (tzw. *orientację brzegu dziedziczoną z M*) określa się następująco. Jeśli $\mathbf{p} \in \partial G$, to w $T_{\mathbf{p}}M$ istnieje wektor normalny zewnętrzny do ∂G , tzn. istnieje jednoznacznie określone przekształcenie $\nu: \partial G \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\nu(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M, \quad \nu(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}(\partial G)$$

i wreszcie dla każdej krzywej gładkiej $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ takiej, że $\gamma(0) = \mathbf{p}$ i $\gamma'(0) = \nu(\mathbf{p})$ warunek $\gamma(t) \notin G$ spełniony jest dla wszystkich $t > 0$ dostatecznie małych. Przyjmujemy, że baza $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$ przestrzeni $T_{\mathbf{p}}(\partial G)$ jest zorientowana dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nu(\mathbf{p}), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$$

jest dodatnio zorientowaną bazą $T_{\mathbf{p}}M$.

Czytelnik zechce porównać to określenie orientacji brzegu z określeniem, którym posłużyliśmy się, formułując w podrozdziale 7.1 twierdzenie Greena na płaszczyźnie (wtedy $m = 2$, $m-1 = 1$). Nietrudno stwierdzić, że oba są równoważne.

¹⁰Inaczej mówiąc, punkt $\mathbf{p} \in \partial G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(\mathbf{p}_j) \subset G$ zbieżny do \mathbf{p} oraz ciąg $(\mathbf{q}_j) \subset M \setminus G$ zbieżny do \mathbf{p} .

Twierdzenie 7.53. Niech $M^m \subset \mathbb{R}^n$ będzie m -wymiarową rozmaitością zorientowaną klasy C^1 i niech $G \subset M$ będzie zwartym podzbiorem M , którego brzeg ∂G (w topologii indukowanej na M przez zanurzenie w \mathbb{R}^n) jest $(m-1)$ -wymiarową podrozmaitością \mathbb{R}^n , wyposażoną w orientację brzegu, dziedziczoną z M .

Załóżmy, że $M \subset W$, gdzie W jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n . Wówczas dla każdej $(m-1)$ -formy różniczkowej $\omega \in \Omega^{m-1}(W)$ zachodzi wzór

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega. \quad (7.36)$$

Uwaga 7.54. Przy założeniach twierdzenia Stokesa zbiór ∂G ma $(m-1)$ -wymiarową miarę powierzchniową równą zero.

Dowód tego ważnego twierdzenia przeprowadzimy w trzech zasadniczych krokach. Pierwszy z nich to samodzielne ‘twierdzenie z nazwiskiem’.

Lemat 7.55 (twierdzenie Gaussa o dywergencji). Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem klasy C^1 . Oznaczmy przez $\nu: \partial G \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ wektor normalny zewnętrzny do ∂G .

Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym takim, że $\overline{G} \subset W$. Wówczas dla każdego pola wektorowego $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n): W \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1 zachodzi wzór

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\lambda_n = \int_{\partial G} \langle \mathbf{w}, \nu \rangle \, d\sigma_{n-1}, \quad (7.37)$$

gdzie $\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$ jest dywergencją pola \mathbf{w} , zaś σ_{n-1} oznacza miarę powierzchniową na rozmaitości ∂G .

Interpretacja fizyczna równości z tezy lematu jest następująca: prawa strona to tzw. strumień pola wektorowego przez powierzchnię ∂G . Jeśli np. \mathbf{v} jest polem prędkości cieczy w (pewnym obszarze) przestrzeni \mathbb{R}^s , to $\int_{\Sigma} \langle \mathbf{v}, \nu \rangle \, d\sigma_2$ jest ilością cieczy, przepływającej przez powierzchnię Σ w jednostce czasu.¹¹ Twierdzenie Gaussa orzeka, że przepływ pola przez powierzchnię zamkniętą jest równy całce dywergencji pola po obszarze ograniczonym tą powierzchnią.

DOWÓD TWIERDZENIA GAUSSA. Dowód jest bardzo podobny do dowodu twierdzenia Greena: wykorzystuje się gładki podział jedności. Z uwagi na liniowy charakter tezy, wystarczy przeprowadzić dowód dla pola wektorowego, które ma tylko jedną współrzędną niezerową. Przyjmijmy więc $\mathbf{w} = (0, \dots, 0, w_n)$ (w pozostałych przypadkach dowód jest identyczny).

Dla każdego punktu $\mathbf{p} \in \overline{G}$ wybierzmy przedział otwarty $Q_{\mathbf{p}}$ o środku w \mathbf{p} tak, aby

- $\overline{Q_{\mathbf{p}}} \subset G$ dla $\mathbf{p} \in G$;
- dla $\mathbf{p} \in \partial G$ zbiór $\partial G \cap Q_{\mathbf{p}}$ był, dla pewnego indeksu $i \in \{1, \dots, n\}$, wykresem funkcji $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, określonej na przedziale $(n-1)$ -wymiarowym, będącym ścianą $Q_{\mathbf{p}}$.

¹¹Czytelnik zechce sprawdzić, że jednostki się zgadzają.

Korzystając ze zwartości \overline{G} , wybierzmy pokrycie skończone \overline{G} , złożone z N takich przedziałów, Q_1, \dots, Q_N . Jak w dowodzie twierdzenia Greena, przyjmijmy, że Q_1, \dots, Q_k stanowią pokrycie brzegu, zaś Q_{k+1}, \dots, Q_N są (wraz z domknięciami) zawarte w G .

Weźmy funkcje $\zeta_l \in C_0^\infty(Q_l)$ takie, żeby $\zeta_1 + \dots + \zeta_N \equiv 1$ w pewnym otoczeniu \overline{G} . Wówczas suma pochodnych $\sum_l (\zeta_l)_{x_n} = 0$ na G i dlatego

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\lambda_n &= \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap G} \zeta_l \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \, d\lambda_n = \sum_{l=1}^N \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} \, d\lambda_n \\ &= \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} \, d\lambda_n + \sum_{l=k+1}^N \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} \, d\lambda_n = \sum_{l=1}^k \int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} \, d\lambda_n. \end{aligned} \quad (7.38)$$

(Jak w dowodzie twierdzenia Greena, nietrudno wywnioskować, posługując się twierdzeniem Fubiniego i definicją całki oznaczonej, że każdy składnik drugiej sumy w ostatniej linijce jest zerem, gdyż $\zeta_l w_n$ znika na brzegu przedziału Q_l).

Każdą z całek w sumie po prawej stronie wzoru (7.38) obliczymy oddzielnie. Ustalmy indeks l ; dla krótkości zapisu, niech $u = \zeta_l w_n$, $Q = Q_l$. Wtedy

Przypadek 1. Załóżmy, że iloczyn $Q \cap \partial G$ jest wykresem funkcji $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ zmiennej $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, gdzie Q' jest $(n-1)$ -wymiarową ścianą Q . Przyjmijmy, bez zmniejszenia ogólności, że $Q \cap G = \{(\mathbf{x}', x_n) : x_n < \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}' \in Q'\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap G} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, d\lambda_n &= \int_{Q'} \left(\int_{-\infty}^{\varphi(\mathbf{x}')} \frac{\partial u}{\partial x_n} \, dx_n \right) d\lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \\ &= \int_{Q'} u(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \lambda_{n-1}(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Wektor normalny zewnętrzny do ∂G w punkcie $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ dany jest wzorem

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x}')}{\|N(\mathbf{x}')\|} = \frac{N(\mathbf{x}')}{\sqrt{1 + \sum (\varphi_{x_i})^2}},$$

gdzie $N(\mathbf{x}') = (-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}'), \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}'), 1)^T$. Miarę powierzchniową na wykresie funkcji φ określamy, całkując funkcję $\|N(\mathbf{x}')\|$ względem λ_{n-1} (patrz Uwaga 6.16). Dlatego

$$\begin{aligned} \int_{Q'} u(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \lambda_{n-1}(\mathbf{x}') &= \int_{Q'} u(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \frac{1}{\|N(\mathbf{x}')\|} \|N(\mathbf{x}')\| \lambda_{n-1}(\mathbf{x}') \\ &= \int_{Q \cap \partial G} \langle \zeta_l \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma_{n-1}, \end{aligned}$$

gdyż, z uwagi na szczególną postać pola \mathbf{w} , jest $\langle \zeta_l \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \zeta_l w_n / \|N\| = u / \|N\|$. Ostatecznie więc, otrzymujemy

$$\int_{Q_l \cap G} \frac{\partial(\zeta_l w_n)}{\partial x_n} \, d\lambda_n = \int_{Q_l \cap \partial G} \zeta_l \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma_{n-1}. \quad (7.39)$$

Przypadek 2. Załóżmy, że $\partial G \cap Q$ jest wykresem funkcji $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ dla pewnego $i < n$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $i = 1$ oraz

$$Q \cap G = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : \mathbf{x}' \in Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}, -d < x_1 < \varphi(\mathbf{x}') < 0\},$$

gdzie Q' jest ścianą Q , położoną w płaszczyźnie $x_1 = \text{const}$. Wtedy $u = \zeta_l w_n$ znika dla $\mathbf{x}' \in \partial Q'$, $-d < x_1 < 0$. Bez zmniejszenia ogólności, (gładko) przedłużając u zerem, zakładamy, że u jest określona dla wszystkich $x_1 < \varphi(\mathbf{x}')$. Piszemy, dokonując przy ustalonym \mathbf{x}' zamiany zmiennych $x_1 = t + \varphi(\mathbf{x}')$,

$$\int_{Q \cap \Omega} \frac{\partial u}{\partial x_n} d\lambda_n = \int_{Q'} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') dt \right) d\mathbf{x}' =: I.$$

Oznaczmy $v(t, \mathbf{x}') = u(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}')$ dla $t \leq 0$ i $\mathbf{x}' \in Q'$. Mamy wówczas

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(t, \mathbf{x}') = \frac{\partial u}{\partial x_1}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}').$$

Zauważmy ponadto, że v znika w punktach $t \leq 0$, $\mathbf{x}' \in \partial Q'$. Dlatego

$$\int_{-\infty}^0 \int_{Q'} \frac{\partial v}{\partial x_n}(t, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' dt = 0,$$

stąd zaś (i z twierdzenia Fubniego) po ponownej, odwrotnej zamianie zmiennych¹² otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_{Q'} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_n}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') dt \right) d\mathbf{x}' \\ &= - \int_{Q'} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial u}{\partial x_1}(t + \varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}') dt \right) d\mathbf{x}' \\ &= - \int_{Q'} u(\varphi(\mathbf{x}'), \mathbf{x}') \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{Q'} u \cdot \boldsymbol{\nu}_n d\sigma_{n-1} = \int_{Q'} \zeta_l \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1} \end{aligned}$$

(proszę zerknąć ponownie na wzór przypomniany wcześniej w dowodzie, wyrażający wektor normalny do wykresu funkcji). Widzimy więc, że także i w tym przypadku zachodzi wzór (7.39).

Sumując takie wzory względem l i wykorzystując równość (7.38), otrzymujemy tezę twierdzenia Gaussa. \square

DOWÓD TWIERDZENIA 7.53. Część I. Najpierw przeprowadzimy dowód w przypadku, gdy $m = n$, $M = \mathbb{R}^n$ i G jest obszarem ograniczonym w \mathbb{R}^n . Okazuje się, że wtedy twierdzenie Stokesa jest zmyślnie przeformułowanym twierdzeniem Gaussa o dywergencji.

Niech W będzie zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n , $\bar{G} \subset W$, $\omega \in \Omega^{n-1}(W)$. Bez zmniejszenia ogólności można przyjąć, że

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} v_i(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Posługując się wzorem na różniczkę zewnętrzną, łatwo jest sprawdzić, że wówczas

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \text{div } \mathbf{v} \quad \text{na } W,$$

¹²Zauważmy: pierwsza zamiana zmiennych polega, podobnie jak w dowodzie twierdzenia Greena, na “wyprostowaniu brzegu”.

gdzie $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n): W \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest pewnym polem wektorowym na zbiorze W . Dlatego, z definicji,

$$\int_G d\omega = \int_G \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\lambda_n. \quad (7.40)$$

Pokażemy, że

$$\int_{\partial G} \omega = \int_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma_{n-1}, \quad (7.41)$$

gdzie σ_{n-1} jest miarą powierzchniową na brzegu obszaru G . Ze wzorów (7.40) i (7.41) twierdzenie Stokesa wynika natychmiast, dzięki twierdzeniu Gaussa.

Przejdźmy zatem do dowodu (7.41). Załóżmy najpierw, że $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, a $\Psi: \mathbb{R}^{n-1} \supset V \rightarrow U \cap \partial G$ jest gładką, zorientowaną parametryzacją $U \cap \partial G$. Sprawdzimy najpierw, że wektor normalny $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ do ∂G spełnia zależność

$$\nu_j(\Psi(\mathbf{y})) \sqrt{(\det D\Psi(\mathbf{y})^T D\Psi(\mathbf{y}))} = (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.42)$$

gdzie Ψ_{I_j} oznacza przekształcenie, które powstaje z Ψ przez opuszczenie j -tej współrzędnej, tzn.

$$\Psi_{I_j} = (\Psi_1, \dots, \Psi_{j-1}, \Psi_{j+1}, \dots, \Psi_n).$$

Ustalmy punkt $\mathbf{y} \in V$. Niech $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ oznacza wektor w $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, równy prawej stronie (7.42), tzn. niech

$$\eta_j = (-1)^{j+1} \det D\Psi_{I_j}(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Niech $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym wektorem. Rozważmy macierz kwadratową $A_{\boldsymbol{\xi}}$, której kolumnami są wektory

$$\boldsymbol{\xi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(\mathbf{y}), \quad \dots, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}}(\mathbf{y}). \quad (7.43)$$

Rozwijając wyznacznik $A_{\boldsymbol{\xi}}$ względem pierwszej kolumny, sprawdzamy, że

$$\det A_{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \xi_j \det D\Psi_{I_j}(\mathbf{y}) = \sum_j \xi_j \eta_j = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle.$$

Jeśli wektor $\boldsymbol{\xi}$ należy do przestrzeni liniowej $\operatorname{Im} D\Psi(\mathbf{y})$, to kolumny macierzy $A_{\boldsymbol{\xi}}$ są liniowo zależne i lewa strona powyższej równości jest zerem. Dlatego $\boldsymbol{\eta} \perp \operatorname{Im} D\Psi(\mathbf{y}) = T_{\Psi(\mathbf{y})}\partial G$. Podstawiając $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$, otrzymujemy

$$\det A_{\boldsymbol{\eta}} = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 > 0.$$

Zatem dla $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$ baza (7.43) przestrzeni \mathbb{R}^n jest zorientowana dodatnio, a ponieważ wektory $\partial \Psi / \partial y_j$, $j = 1, \dots, n-1$ tworzą dodatnio zorientowaną bazę przestrzeni stycznej $T_{\Psi(\mathbf{y})}\partial G$, więc zgodnie z przyjętym określeniem orientacji brzegu wektor $\boldsymbol{\eta}$ wskazuje na zewnątrz G . Ponadto,

$$A_{\boldsymbol{\eta}}^T A_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D\Psi^T(\mathbf{y})D\Psi(\mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

stąd zaś

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 \det (D\Psi^T(\mathbf{y})D\Psi(\mathbf{y})) = \det (A_{\boldsymbol{\eta}}^T A_{\boldsymbol{\eta}}) = (\det A_{\boldsymbol{\eta}})^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^4,$$

tzn. ostatecznie

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = \det(D\Psi^T(\mathbf{y})D\Psi(\mathbf{y})).$$

Widzimy więc, że równoważnym zapisem równości (7.42) jest $\|\boldsymbol{\eta}\|\nu(\Psi(\mathbf{y})) = \boldsymbol{\eta}$, tzn. istotnie ν jest wektorem normalnym zewnętrznym do ∂G .

W przypadku $\text{supp } \mathbf{v} \cap \partial G \subset \Psi(V) = U \cap \partial G$ (tzn. dla pól wektorowych o zwartym, odpowiednio małym nośniku) ze wzoru (7.42) otrzymujemy, posługując się definicją miary powierzchniowej, następujące równości:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1} &= \int_{\Psi(V)} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_{n-1} \\ &= \int_V \langle \mathbf{v}(\Psi(\mathbf{y})), \boldsymbol{\nu}(\Psi(\mathbf{y})) \rangle \sqrt{(\det D\Psi(\mathbf{y})^T D\Psi(\mathbf{y}))} d\lambda_{n-1}(\mathbf{y}) \\ &\stackrel{(7.42)}{=} \int_V \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} v_j(\Psi(\mathbf{y})) \det(D\Psi_{I_j}(\mathbf{y})) dy_1 \dots dy_{n-1} \\ &= \int_V \Psi^* \omega \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\Psi(V)} \omega = \int_{\partial G} \omega. \end{aligned}$$

Przypadek, gdy \mathbf{v} , tzn. forma ω , nie ma nośnika zawartego w dziedzinie jednej mapy, łatwo sprowadzić do powyższego, posługując się rozkładem jedyńki; szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Część II. Niech teraz $m < n$. Wybierzmy pokrycie skończone G zbiorami otwartymi $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, takimi, że $U_\alpha \cap M$ są obrazami zgodnych z orientacją parametryzacji

$$\Psi_\alpha: \mathbb{R}^m \supset V_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Wybierzmy gładki rozkład jedności (ζ_α) ,

$$\text{supp } \zeta_\alpha \subset U_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^N \zeta_\alpha \equiv 1 \quad \text{na } W \supset \bar{G}.$$

Wprowadźmy skrócone oznaczenia:

$$\omega_\alpha := \Psi_\alpha^*(\zeta_\alpha \omega) \in \Omega^{m-1}(V_\alpha), \quad G_\alpha = \Psi_\alpha^{-1}(G).$$

Wówczas zbiór $\Psi_\alpha^{-1}(\partial G)$ jest brzegiem G_α w topologii indukowanej na V_α przez zanurzenie w \mathbb{R}^m . Z części pierwszej dowodu otrzymujemy

$$\int_{G_\alpha} d\omega_\alpha = \int_{\partial G_\alpha} \omega_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

lub równoważnie, zgodnie z definicjami całki i własnościami przekształcenia Ψ^* ,

$$\int_{G \cap U_\alpha} d(\zeta_\alpha \omega) = \int_{\partial G \cap U_\alpha} \zeta_\alpha \omega, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

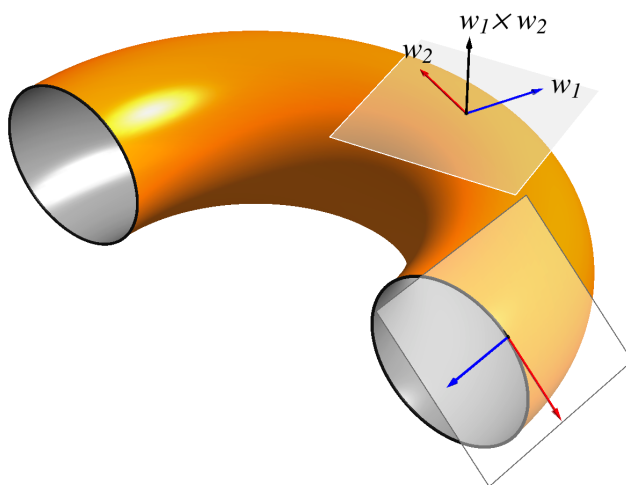
Sumując takie wzory i korzystając z równości $1 = \sum_\alpha \zeta_\alpha$, otrzymujemy tezę. \square

Przykład 7.56 (przypadek szczególny: klasyczny wzór Stokesa). Znamy już dwa ważne przypadki szczególne twierdzenia Stokesa, mianowicie twierdzenie Greena i twierdzenie Gaussa o dywergencji. Omówimy teraz jeszcze jeden.

Założmy, że rozmaitość orientowalna dwuwymiarowa M^2 jest zawarta w \mathbb{R}^3 . Niech $G \in M$ będzie zbiorem zwartym z brzegiem (w topologii indukowanej) ∂G , który jest rozmaitością jednowymiarową, tzn. po prostu sumą skończenie wielu krzywych zamkniętych klasy C^1 . Weźmy zbiór otwarty $W \subset \mathbb{R}^3$ taki, że $G \in W$, oraz 1-formę

$$\omega = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \in \Omega^1(W).$$

Tak, jak opisaliśmy w podrozdziale 7.3.2, 1-formę ω można w \mathbb{R}^3 utożsamić z gładkim polem wektorowym $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3): W \rightarrow \mathbb{R}^3$.



Orientacja powierzchni w \mathbb{R}^3 polega w istocie na wskazaniu jej *dodatniej* strony. Na rysunku M jest torusem (niewidocznym w całości); strona zewnętrzna, wskazywana przez iloczyn wektorowy wektorów dodatnio zorientowanej bazy przestrzeni stycznej, jest dodatnia. Zbiór G jest wygiętą rurką; ∂G składa się z dwóch okręgów. Zaznaczony wektor styczny do ∂G wskazuje orientację brzegu dziedziczoną z M .

Krążeniem pola \mathbf{v} wzdłuż krzywej (zorientowanej) $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy całkę

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau} \rangle d\sigma_1,$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}: \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$ oznacza jednostkowy wektor *styczny* do krzywej γ , zgodny z jej ustaloną orientacją, zaś σ_1 jest długością łuku (tzn. jednowymiarową miarą powierzchniową). Okazuje się, że z twierdzenia Stokesa wynika następujący klasyczny wzór (zwany także wzorem Stokesa):

$$\int_{\partial G} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau} \rangle d\sigma_1 = \int_G \langle \text{rot } \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_2 \quad (7.44)$$

gdzie $\boldsymbol{\nu}$ jest jednostkowym wektorem normalnym do M , *wskazującym jej dodatnio zorientowaną stronę* , zaś $\boldsymbol{\tau}$ jest jednostkowym wektorem stycznym do ∂G , wskazującym dziedziczoną orientację brzegu G w M . Inaczej mówiąc, krążenie pola wektorowego wzdłuż krzywej zamkniętej jest równe strumieniowi rotacji tego pola wektorowego przez (dowolną) powierzchnię rozpiętą na tej krzywej.

Wyjaśnijmy sprawę orientacji poglądowo (patrz załączony rysunek). Wybór orientacji M oznacza, że możemy wskazać dodatnio zorientowaną bazę $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ przestrzeni $T_{\mathbf{p}}M$. Iloczyn wektorowy $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ jest prostopadły do $T_{\mathbf{p}}M$; przyjęte jest mówić, że wskazuje on *dodatnią* stronę M . Przy ustalonym $\mathbf{p} \in M$ wektor jednostkowy

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|}$$

nie zależy od wyboru dodatnio zorientowanej bazy przestrzeni stycznej. Wektor styczny $\boldsymbol{\tau}$ w punkcie $\mathbf{p} \in \partial G$ wybieramy tak, aby para $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$, gdzie $\mathbf{n} \in T_{\mathbf{p}}M$ jest wektorem normalnym zewnętrznym do ∂G , stanowiła dodatnio zorientowaną bazę $T_{\mathbf{p}}M$. Nietrudno się przekonać, że wybór $\boldsymbol{\tau}$ opisuje następująca poglądowa reguła: *wędrując wzdłuż ∂G kierunku wskazanym przez $\boldsymbol{\tau}$, tak, aby widzieć dodatnią stronę M (tzn. tak, aby wektor $\boldsymbol{\nu}$ wskazywał kierunek “do góry”), widzimy zbiór G z lewej strony.*

Przekonajmy się, że wzór (7.44) istotnie wynika z ogólnego twierdzenia Stokesa. Bez zmniejszenia ogólności założmy, że $\partial G = \gamma$ jest jedną krzywą zamkniętą; niech

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

będzie jej (zorientowaną) parametryzacją. Wprost z definicji całki z 1-formy wynika, iż

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \sum_{j=1}^3 v_j(\phi(t)) \phi'_j(t) dt \\ &= \int_a^b \left\langle \mathbf{v}(\phi(t)), \underbrace{\frac{\phi'(t)}{\|\phi'(t)\|}}_{\text{wektor dł. 1}} \right\rangle \cdot \underbrace{\|\phi'(t)\|}_{\text{długość łuku}} dt = \int_{\gamma} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau} \rangle d\sigma_1. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Różniczkę $\eta = d\omega$ formy $\omega = \sum v_i dx_i$,

$$\eta = \eta_1 dx_2 \wedge dx_3 + \eta_2 dx_3 \wedge dx_1 + \eta_3 dx_1 \wedge dx_2 = \sum_{\text{znak}(i,j,k)=1} \eta_i dx_j \wedge dx_k,$$

gdzie, zgodnie ze wzorem na różniczkę zewnętrzną, $\eta_i = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$, można – dzięki izomorfizmowi opisanemu w podrozdziale 7.3.2 – utożsamić z rotacją $\text{rot } \mathbf{v} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ pola \mathbf{v} . Niech $\Psi: \mathbb{R}^2 \supset O \rightarrow M$ będzie parametryzacją zorientowaną. Zgodnie z wzorami na przeciąganie form, patrz Stwierdzenie 7.30 (iii),

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(O)} d\omega &= \int_{\Psi(O)} \eta = \int_{\Psi(O)} \sum_{\text{znak}(i,j,k)=1} \eta_i dx_j \wedge dx_k \\ &= \int_O \sum_{i=1}^3 \eta_i(\Psi(u, v)) \cdot \Delta_i d\lambda_2(u, v) \end{aligned}$$

gdzie symbole Δ_i oznaczają wyznaczniki

$$\Delta_i = \frac{\partial \Psi_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial u},$$

a znak permutacji (i, j, k) jest równy 1. Zatem wektor

$$\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}$$

jest iloczynem wektorowym wektorów stycznych $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$ i $\frac{\partial \Psi}{\partial v}$, tworzących dodatnio¹³ zorientowaną bazę $T_{\Psi(u,v)}M$. Inaczej mówiąc, Δ wskazuje *dodatnią* stronę M .

Kontynuując rozpoczęty rachunek, piszemy – pamiętając, że $\text{rot } \mathbf{v} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ – równości

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(O)} d\omega &= \int_O \sum_{i=1}^3 \eta_i(\Psi(u,v)) \cdot \Delta_i d\lambda_2(u,v) \\ &= \int_O \left\langle \text{rot } \mathbf{v}, \frac{\Delta}{\|\Delta\|} \right\rangle \underbrace{\sqrt{(\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 + (\Delta_3)^2}}_{\text{miara powierzchniowa}} d\lambda_2(u,v) = \int_{\Psi(O)} \langle \text{rot } \mathbf{v}, \boldsymbol{\nu} \rangle d\sigma_2. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Jak widać, posłużyliśmy się na koniec wzorem Cauchy’ego–Bineta i definicją miary powierzchniowej. Uzyskane równości (7.45) i (7.46) świadczą, że wzór (7.44) istotnie wynika z twierdzenia Stokesa.

Zadanie 7.57. Niech $\gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ i niech $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dyfeomorfizmem. Oznaczmy $\gamma_1 = F(\gamma)$. Wykazać, że jeśli \mathbf{v} jest gładkim polem wektorowym na \mathbb{R}^3 o zerowej rotacji, to \mathbf{v} nie może być styczne w każdym punkcie do krzywej γ_1 . (Inaczej: krzywa γ_1 nie jest *linią sił* pola \mathbf{v}).

Zadanie 7.58. Wyprowadzić wzór (7.44) z twierdzenia Greena w przypadku, gdy M jest wykresem funkcji gładkiej $x_3 = g(x_1, x_2)$.

Uwaga 7.59 (przypadek niegładkiego brzegu). Założenia o gładkości brzegu w twierdzeniach Greena i Gaussa można znacząco osłabić. Opiszemy tu jedno z takich uogólnień.

Założmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty i ograniczony, zaś $\partial\Omega = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup Z$, gdzie M_k , $k \in \mathbb{N}$, są rozmaitościami klasy C^1 o skończonej sumie miar powierzchniowych,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{n-1}(M_k) < \infty,$$

zaś Z jest zbiorem *miary Hausdorffa* \mathcal{H}^{n-1} zero, tzn. spełnia warunek: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje pokrycie zbioru Z kulami $B(\mathbf{x}_i, r_i)$, $i \in \mathbb{N}$, takie, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1} < \varepsilon.$$

Opisane założenia oznaczają, że brzeg Ω jest gładki, za wyjątkiem zaniedbywalnego zbioru kątów, ostrzy itp. Nietrudno zauważyć, że takimi zbiorami Ω są np. wszystkie wielościany w \mathbb{R}^3 . Herbert Federer¹⁴ wykazał, że jeśli Ω spełnia powyższe warunki, a $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $\bar{\Omega}$ i różniczkowalna w Ω , to

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} f \boldsymbol{\nu}_j d\sigma_{n-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.47)$$

gdzie $\int_{\partial\Omega} f \boldsymbol{\nu}_j d\sigma_{n-1} := \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f \boldsymbol{\nu}_j d\sigma_{n-1}$, a $\boldsymbol{\nu}_j$ jest j -tą współrzędną wektora normalnego zewnętrznego, określonego w punktach zbioru $\partial\Omega \setminus Z$. Zauważmy, że podstawiając $f = f_j$ i sumując wzory (7.47), uzyskuje się twierdzenie Gaussa o dywergencji.

¹³Orientacja tej bazy jest dodatnia, gdyż $\frac{\partial \Psi}{\partial u} = D\Psi(\mathbf{e}_1)$, $\frac{\partial \Psi}{\partial v} = D\Psi(\mathbf{e}_2)$, a baza $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ wyznacza standardową orientację \mathbb{R}^2 .

¹⁴H. Federer, Coincidence functions and their integrals. Trans. Amer. Math. Soc. **59**, (1946), str. 441–466; patrz także monografia Federera *Geometric measure theory*.

Dodatek A

Gładki rozkład jedności

Lemat A.1. Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, $U \subset \mathbb{R}^n$ – zbiorem otwartym. Jeśli $K \Subset U$, to istnieje funkcja $\eta \in C_0^\infty(U)$ taka, że $0 \leq \eta \leq 1$ i $\eta \equiv 1$ w otoczeniu zbioru K .

Dowód. Wybierzmy liczbę dodatnią $\varepsilon < \frac{1}{5} \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$. Niech

$$K_{2\varepsilon} = K + B(0, 2\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{x}, K) < 2\varepsilon\}.$$

Zbiór $K_{2\varepsilon}$ jest otwarty; nietrudno sprawdzić, że funkcja

$$\eta := \chi_{K_{2\varepsilon}} * \varphi_\varepsilon,$$

gdzie φ_ε jest jakąkolwiek jedyneką aproksymatywną (patrz Definicja 5.51), ma wszystkie żądane własności. Gładkość η wynika z Wniosku 5.53; ponadto, jeśli $\text{dist}(\mathbf{x}, K) > 2\varepsilon$, to $\eta(\mathbf{x}) = 0$, gdyż

$$\eta(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_{2\varepsilon}}(\mathbf{y}) \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y})$$

i jeśli pierwszy czynnik pod całką nie jest zerem, tzn. $\mathbf{y} \in K_{2\varepsilon}$, to wtedy $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > \varepsilon$ dla $\text{dist}(\mathbf{x}, K) > 2\varepsilon$, więc drugi czynnik pod całką, $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, znika – dlatego całka jest zerem. \square

Lemat A.2. Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym i niech $K \Subset U_1 \cup \dots \cup U_N$, gdzie zbiory U_j są otwarte dla $j = 1, \dots, N$. Istnieją wtedy funkcje nieujemne $\zeta_j \in C_0^\infty(U_j)$ takie, że

$$\zeta_1 + \dots + \zeta_N = 1 \quad \text{na pewnym zbiorze otwartym } W \subset \mathbb{R}^n,$$

takim, że $K \subset W \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$.

Dowód. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue’a pokrycia U_1, \dots, U_N zbioru K . Ustalmy $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{3}$. Połóżmy

$$K_j := \{\mathbf{x} \in K : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus U_j) \geq \varepsilon\}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Zbiór $K_j \subset K$ jest domknięty, więc jest zwarty, gdyż K jest zwarty. Jeśli $\mathbf{x} \in K$, to – z definicji liczby Lebesgue’a – kula $B(\mathbf{x}, \lambda)$ jest zawarta w którymś ze zbiorów U_j , zatem tym bardziej $B(\mathbf{x}, 3\varepsilon) \subset U_j$, a więc $\mathbf{x} \in K_j$ dla tego indeksu j . Stąd $K = K_1 \cup \dots \cup K_N$.

Ponadto, $K_j \Subset U_j$, gdyż jeśli $\mathbf{x} \notin U_j$, to $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus U_j) = 0$.

Położmy $V_j = K_j + B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Zbiory V_j są otwarte, a ich domknięcia są zwarte i $\bar{V}_j \in U_j$. Zbiór $V = V_1 \cup \dots \cup V_N$ jest otwartym otoczeniem $K_1 \cup \dots \cup K_N = K$. Z Lematu A.1 wnioskujemy, że istnieją funkcje nieujemne

$$\eta \in C_0^\infty(V), \quad \varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$$

takie, że $\eta \equiv 1$ w pewnym otoczeniu W zbioru K , takim, że $W \Subset V$, zaś $\varphi_j \equiv 1$ w otoczeniu G_j zbioru \bar{V}_j , takim, że $G_j \Subset U_j$. Przyjmijmy teraz

$$h = \sum_{j=1}^N \varphi_j, \quad \zeta_j = \frac{\eta \varphi_j}{h}.$$

Ponieważ $h \geq 1$ na sumie zbiorów G_j , więc definicja funkcji ζ_j jest poprawna, gdyż i tak $\eta \equiv 0$ poza zbiorem $V \Subset \bigcup G_j$. Oczywiście, na zbiorze W , tzn. tam, gdzie $\eta \equiv 1$, mamy

$$\sum_{j=1}^N \zeta_j = \sum_{j=1}^N \frac{\eta \varphi_j}{h} = \frac{\eta}{h} \sum_{j=1}^N \varphi_j = 1.$$

Dowód lematu jest zakończony. \square

Dodatek B

Lemat Poincarégo w obszarach gwiaździstych

Opiszemy jeszcze uogólnienie warunków całkowalności, sformułowanych dla 1-form w Twierdzeniu 7.18.

Definicja B.1. Obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazywa się *gwiaździsty względem punktu* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{x} \in \Omega$ odcinek $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ zawiera się w Ω .

Twierdzenie B.2 (lemat Poincarégo). Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem zera i niech $k = 1, \dots, n$. Wówczas każda forma zamknięta $\omega \in \Omega^k(U)$ jest dokładna. Co więcej, jeśli dla $k = 1, \dots, n$ operator liniowy $H: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ określony jest wzorem

$$H(f dx_I) = \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} x_{i_l} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) dx_{I \setminus \{l\}}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie, dla $I = (i_1, \dots, i_k)$ symbol $I \setminus \{l\} = (i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_k)$ oznacza zestaw I z pominiętym l -tym elementem i_l , to wówczas

$$\omega = H(d\omega) + d(H\omega) \quad (\text{B.2})$$

dla każdej k -formy, niekoniecznie zamkniętej; w szczególności, gdy $d\omega = 0$, to $\omega = d(H\omega)$.

Dowód. Obliczymy najpierw różniczkę formy $H(f dx_I)$. Stosując wzór (7.24), otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(H(f dx_I)) &= \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) dx_{i_l} \wedge dx_{I \setminus \{l\}} \\ &\quad + \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} x_{i_l} d \left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) \wedge dx_{I \setminus \{l\}} \\ &= k \left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) dx_I + \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} x_{i_l} d \left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt \right) \wedge dx_{I \setminus \{l\}}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

gdyż $(-1)^{l-1} dx_{i_l} \wedge dx_{I \setminus \{l\}} = dx_I$ (aby ‘wstawić dx_{i_l} we właściwe miejsce’, wykonujemy $(l-1)$ przestawień). Całkując przez części, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} k \int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt &= t^k f(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 t^k \sum_{\nu=1}^n x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt \\ &= f(\mathbf{x}) - \sum_{\nu=1}^n x_\nu \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt. \end{aligned}$$

Różniczka zewnętrzna całki w (B.3) jest równa

$$d\left(\int_0^1 t^{k-1} f(t\mathbf{x}) dt\right) = \sum_{\nu=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt\right) dx_\nu$$

Podstawiając te wyniki do (B.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(H(f dx_I)) &= f(\mathbf{x}) dx_I - x_\nu \left(\int_0^1 t^k \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt\right) dx_I \\ &\quad + \sum_{l=1}^k \sum_{\nu=1}^n (-1)^{l-1} x_{i_l} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt\right) dx_\nu \wedge dx_{I \setminus \{l\}}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Teraz, dla $\omega = f dx_I$, wyznaczmy $H(d\omega) = H(df \wedge dx_I)$. Ponieważ

$$d\omega = df \wedge dx_I = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l},$$

więc, wobec liniowości H , otrzymujemy wprost z definicji tego operatora

$$\begin{aligned} H(df \wedge dx_I) &= \sum_{\nu=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt\right) x_\nu dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^n \sum_{l=1}^k (-1)^l \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) dt\right) x_{i_l} dx_\nu \wedge dx_{I \setminus \{l\}}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

(proszę przemyśleć, dlaczego w drugiej sumie figuruje znak $(-1)^l$, a nie $(-1)^{l-1}$). Dodając (B.4) i (B.5) stronami, otrzymujemy tezę. \square

Uwaga B.3. Proszę zauważyć, że w dowodzie korzystamy jedynie z tego, że współczynniki formy ω są klasy C^1 .

Wniosek B.4. Jeśli $g_1, \dots, g_n \in C^1(U)$, zbiór $U \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty i gwiaździsty względem zera w \mathbb{R}^n , a ponadto zachodzi warunek

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \text{na } U \text{ dla wszystkich } i, j = 1, \dots, n, \tag{B.6}$$

to istnieje $h \in C^2(U)$ taka, że $h_{x_i} = g_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Dowód. Z założenia (B.6) wynika, że

$$d(g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Dla formy $\omega = g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$ znika więc składnik $H(d\omega)$ po prawej stronie wzoru (B.2). Kładąc $h = H\omega$, gdzie H jest operatorem z Lematu Poincarégo, otrzymujemy funkcję klasy C^2 taką, że $dh = g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$, tzn. $h_{x_i} = g_i$. \square

Zadanie B.5. Udowodnić tezę powyższego wniosku, zakładając jedynie, że obszar U jest dyfeomorficzny z kulą $B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$.

Wskazówka. Skorzystać z Twierdzenia 7.34 (iv).

Dodatek C

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

Na zakończenie, pokażemy, że z twierdzenia Stokesa wynika twierdzenie Brouwera o punkcie stałym i twierdzenie o nieistnieniu retrakcji kuli do brzegu.

W tym podrozdziale symbol $B(0, r)$ oznacza kulę *domkniętą* w \mathbb{R}^n o środku w zerze i promieniu r . Niech $B = B(0, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$

Twierdzenie C.1 (Brouwera o punkcie stałym). *Jeśli przekształcenie $f: B \rightarrow B$ jest ciągle, to ma punkt stały, tzn. istnieje punkt $\mathbf{x} \in B$ taki, że $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.*

Twierdzenie C.2. *Nie istnieje odwzorowanie ciągle $g: B \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial B$ takie, że $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ dla wszystkich $\mathbf{x} \in \partial B$.*

DOWÓD TWIERDZENIA C.2. Załóżmy, że teza jest fałszywa. Niech $g: B \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ będzie ciągle i niech $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ na sferze jednostkowej \mathbb{S}^{n-1} .

Krok 1. Wykażemy, że bez zmniejszenia ogólności można założyć, że przekształcenie g jest gładkie, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ i $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ na \mathbb{S}^{n-1} . Istotnie, przedłużmy najpierw g do przekształcenia ciągłego $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, kładąc $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ dla $\|\mathbf{y}\| > 1$. Następnie, rozpatrzmy splot $g_1 := \varphi_\varepsilon * g$ przekształcenia g z jedyneką aproksymatywną

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \text{gdzie } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\lambda_n = 1.$$

Przekształcenie g_1 jest dobrze określone i gładkie, patrz podrozdział 5.5.1. Jeśli ε jest dostatecznie małe, to $g_1 \neq 0$ w kuli $B(0, 2)$; ponadto, jeśli wybierzemy funkcję $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zależną jedynie od $\|\mathbf{x}\|$, to wówczas

$$g_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda_n(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \quad \text{dla } \|\mathbf{x}\| \geq \frac{3}{2}, \quad (\text{C.1})$$

gdyż dla $j = 1, \dots, n$ całki $\int_{\mathbb{R}^n} y_j \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) d\lambda_n$ znikają wobec nieparzystości funkcji podcałkowych. Dlatego $g_1 \neq 0$ w całej przestrzeni \mathbb{R}^n .

Położmy teraz

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{g_1(2\mathbf{x})}{\|g_1(2\mathbf{x})\|}.$$

Wówczas $g_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ i $g_2 \in C^\infty$. Wreszcie, $g_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ na \mathbb{S}^{n-1} wobec warunku (C.1).

Krok 2. Niech $g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ będzie przekształceniem gładkim, takim, że $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ na \mathbb{S}^{n-1} . Wówczas, dwukrotnie korzystając z twierdzenia Stokesa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lambda_n(B) &= \int_B dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_B d(x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g_1 dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n \\ &= \int_B d(g_1 dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n) = \int_B dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n = 0, \end{aligned}$$

gdyż

$$\int_B dg_1 \wedge \dots \wedge dg_n = \int_B \det Dg d\lambda_n = 0$$

(ostatnia równość wynika stąd, że g obniża wymiar: n kolumn macierzy Dg to wektory styczne do $(n-1)$ -wymiarowej sfery, więc macierz Dg musi mieć rząd mniejszy od n .)

Uzyskana sprzeczność $\pi^{n/2}/\Gamma((n+2)/2) = \lambda_n(B) = 0$ kończy dowód. \square

Dowód Twierdzenia C.1. Załóżmy, że przekształcenie ciągłe $f: B \rightarrow B$ nie ma punktu stałego. Zdefiniujmy odwzorowanie $g: B \rightarrow \partial B$ następująco: jeśli $\mathbf{x} \in B$, to $g(\mathbf{x})$ jest tym punktem, w którym półprosta o początku $f(\mathbf{x})$, przechodząca przez \mathbf{x} , przecina sferę $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B$.

Przekształcenie g jest dobrze określone, gdyż $f: B \rightarrow B$ i $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$. Ciągłość g wynika z ciągłości f . Wreszcie, $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ na ∂B . Jednak istnienie takiego przekształcenia B przeczy udowodnionemu wcześniej Twierdzeniu C.2. Dlatego założenie, że f nie ma punktu stałego, musi być fałszywe. \square