TOPOLOGIA II

Agnieszka Bojanowska Stefan Jackowski

1. Wstęp

Topologia jest dziedziną matematyki wyrosłą z intuicji dotyczących własności obiektów geometrycznych, związanych jedynie z ich kształtem a nie z odległością punktów. Jest zdumiewającą tajemnicą matematyki, że bardzo proste aksjomaty przestrzeni topologicznej wystarczają do opisywania wielkiego bogactwa treści geometrycznych. Struktura topologiczna stanowi fundament na którym zbudowane są inne struktury matematyczne np. analityczne i algebraiczne. Jako przykład może służyć topologiczny dowód podstawowego twierdzenia algebry.

Podstawowym celem przedmiotu **Topologia II** jest rozwinięcie aparatu pojęciowego pozwalającego zrozumieć topologię powierzchni dwuwymiarowych, to znaczy przestrzeni lokalnie homeomorficznych z płaszczyzną euklidesową. Intuicyjnie jest jasne, że własności topologiczne sfery (powierzchni kuli) i torusa (powierzchni dętki) są odmienne, ale precyzyjne wyrażenie tej różnicy wymaga subtelniejszych narzędzi, niż te które występują w **Topologii I**. Inne ciekawe przykłady powierzchni to wstęga Möbiusa, płaszczyzna rzutowa, butelka Kleina.

Podstawowa dla naszego wykładu idea rozważania algebry klas homotopii krzywych na przestrzeni liczy nieco ponad 100 lat i została wprowadzona przez wielkiego francuskiego matematyka Henri Poincaré - pioniera algebraicznego podejścia do badania własności topologicznych. Główne tematy składające się na tegoroczny kurs to: homotopia dróg i dowolnych przekształceń; homotopijna równoważność; algebra dróg; grupa podstawowa przestrzeni; przestrzenie nakrywające i ich związek z grupą podstawową; realizacja dowolnej grupy jako grupy podstawowej przestrzeni; grupy podstawowe powierzchni; twierdzenie Jordana o rozcinaniu płaszczyzny.

Wiele dodatkowych wiadomości o topologii i literaturze przedmiotu Czytelnik znajdzie na stronach internetowej **Topologii II** oraz seminarium magisterskiego z topologii algebraicznej, dostępnych ze strony http://mimuw.edu.pl/ sjack .

Nasze opracowanie ma charakter skryptu do wykładu, a nie regularnego podręcznika. Jest podzielone na rozdziały odpowiadające ok. 1-2 wykładów. Poziom szczegółowości zapewne nie jest jednolity; zachęcamy Czytelnika do wypełnienia wszystkich skrótów w dowodach, a szczególnie tych oznaczonych ♡. Po wielu rozdziałach umieściliśmy zadania, również przy pomocy ♡ szczególnie zachęcając do rozwiązania niektórych z nich. W skrypcie, w odróżnieniu od wykładu nie ma ani jednego rysunku. Gorąco zachęcamy Czytelników do wykonania przy lekturze rysunków ilustrujących pojęcia i twierdzenia.

Serdecznie zapraszamy Czytelników do nadsyłania wszelkich uwag, zapytań, korekt itp. dotyczących tego skryptu na adres aboj@mimuw.edu.pl. Ewentualna errata, komentarze i dodatkowe wyjaśnienia będą na bieżąco publikowane na stronie 3W przedmiotu.

2/6/2008 20^{44}

2. Przestrzenie ilorazowe

Zaczniemy od opisania ogólnej konstrukcji wprowadzania topologii w zbiorze na którym określone są przekształcenia o wartościach w przestrzeniach topologicznych. Niech X będzie zbiorem a $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow Y_i\}$ rodziną przekształceń o wartościach w przestrzeniach topologicznych $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Definiujemy topologię $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ w zbiorze X jako najmniejszą topologię w której wszystkie odwzorowania $f_i : X \to Y_i$ są ciągłe. Łatwo zauważyć, że bazą tej topologii są zbiory postaci $\{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\}$ gdzie $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$.

2.1. Przykład. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni topologicznej, to topologia podprzestrzeni w A jest zadana przez odwzorowanie zanurzenia $i : A \subset X$.

2.2. Przykład. Jeśli X_1 , X_2 są przestrzeniami topologicznymi, to topologia w zbiorze $X_1 \times X_2$ jest zadana przez przekształcenia $p_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$ będące rzutowaniami na osie.

2.3. Stwierdzenie. *Niech Z będzie przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $g : Z \longrightarrow X$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $i \in I$ złożenie $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f_i} Y$ jest ciągłe.* ♡

Podobnie możemy zdefiniować topologię w zbiorze Y jeśli zadana jest rodzina odwzorowań $\mathcal{F} := \{f_i : X_i \longrightarrow Y\}$ z przestrzeni topologicznych $(X_i, \mathcal{T}_i)$ do Y. Topologię $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ w X definiujemy jako największą topologię w Y taką, że wszystkie odwzorowania $f_i : X_i \longrightarrow Y$ są ciągłe.

2.4. Definicja. *Niech $\{X\}_{j\in J}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych. Zdefiniujmy zbiór $Y := \coprod_{j\in J} X_j := \bigcup_{j\in J} X_j \times \{j\}$ Dla dowolnego $j \in J$ mamy zanurzenie $i_j : X_j \subset Y$. Zbiór Y z topologią zadaną przez rodzinę odwzorowań $\{i_j\}$ nazywamy* **sumą rozłączną** *przestrzeni topologicznych $\{X_j\}$ i oznaczamy $\coprod_{j\in J} X_j$.*

Zauważmy, że jeśli $\forall_{j\in J}\ X_j = X$ to $\coprod_{j\in I} X_j = X \times J$ gdzie w zbiorze wskaźników J rozpatrujemy topologię dyskretną.

2.5. Stwierdzenie. *Niech Z będzie przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $g : Y \longrightarrow Z$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $j \in J$ złożenie $X_j \xrightarrow{i_j} Y \xrightarrow{g} Z$ jest ciągłe.* ♡

Teraz opiszemy dokładniej wprowadzanie topologii w zbiorze klas abstrakcji relacji równoważności określonej na przestrzeni topologicznej.

2.6. Definicja. *Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, R relacją równoważności w zbiorze X, a $q : X \to X/R$ przekształceniem przypisującym punktowi jego klasę abstrakcji. Zbiór X/R z topologią $\mathcal{T}/R$ zdefiniowaną przez odwzorowanie q, nazywamy przestrzenią ilorazową.*

Zgodnie z definicją $\mathcal{T}/R$ jest największą topologią, dla której przekształcenie $q : X \longrightarrow X/R$ jest ciągłe. Ponadto przekształcenie $f : X/R \longrightarrow Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy złożenie $f \circ q$ jest ciągłe.

2.7. Stwierdzenie. $\mathcal{T}/R := \{U \subset X/R :\ q^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$. ♡

2.8. Definicja. *Przekształcenie ciągłe $q : X \to Y$ będące surjekcją nazywamy ilorazowym, jeżeli dla dowolnego przekształcenia $f : Y \to Z$ z ciągłości złożenia $f \circ q : X \to Z$ wynika ciągłość przekształcenia f.*

Przypomnijmy, że o przekształceniu ciągłym mówimy, że jest **otwarte** (odp. **domknięte**), jeśli obraz dowolnego zbioru otwartego (odp. domkniętego) jest otwarty (odp. domknięty).

2.9. Stwierdzenie. *Jeśli przekształcenie ciągłe $q : X \to Y$ jest surjekcją i jest otwarte lub jest domknięte, to q jest przekształceniem ilorazowym.* ♡

2.10. Stwierdzenie. *Przekształcenie $q : X \to Y$ jest ilorazowe, wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Y jest homeomorficzna z przestrzenią ilorazową X/R_q, gdzie $x_1 R_q x_2 \iff q(x_1) = q(x_2)$.* ♡

2.11. Przykład. Jeżeli $A \subset X$ jest podprzestrzenią, to przez X/A oznaczamy przestrzeń ilorazową relacji $x \sim_A x' \iff x = x'$ lub $x, x' \in A$. Zauważmy, że klasy abstrakcji punktów $x \in X \setminus A$ są jednoelementowe, natomiast klasą abstrakcji dowolnego punktu $a \in A$ jest cały zbiór A. Mówimy, że przestrzeń X/A powstaje z przestrzeni X z przez zgniecenie zbioru A do punktu.

2.12. Przykład. Jeżeli A jest przestrzenią topologiczną, to **stożkiem** nad A nazywamy przestrzeń $A \times I/A \times \{1\}$, gdzie I oznacza odcinek $[0, 1]$ z topologią euklidesową.

2.13. Przykład. Zdefiniujemy **bukiet** przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem. Niech X_j, $j \in J$ będą przestrzeniami topologicznymi, każda z wyróżnionym punktem $x_j \in X_j$. Niech $X = \coprod_{j\in J} X_i$ będzie ich sumą rozłączną zaś $A = \bigcup_{j\in J}\{x_j\} \subseteq X$. Wówczas X/A nazywamy **bukietem** przestrzeni X_j i oznaczamy symbolem $\bigvee_{j\in J} X_j$.Bukiet skończonej liczby przestrzeni oznaczamy także symbolem $X_1 \vee X_2 \ldots \vee X_n$. Zauważmy, że dla każdego j mamy włożenie $i_j : X_j \hookrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$. Konstrukcja ta spełnia następujący warunek uniwersalności: Niech Y będzie przestrzenią z wyróżnionym punktem y_0. Wówczas dla dowolnej rodziny przekształceń, $f_j : X_j \to Y$, $f_j(x_j) = y_0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $f : \bigvee_{j\in J} X_j \to Y$, dla którego dla każdego $j \in J$ $f \circ i_j = f_j$. To jedyne przekształcenie f będziemy oznaczać symbolem $\bigvee_{j\in J} f_j$.

przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej (łukowo spójnej) jest oczywiście spójna (łukowo spójna), gdyż jest jej obrazem przy przekształceniu ciągłym. Jednak wiele innych własności topologii przestrzeni X "psuje się" przy przechodzeniu do przestrzeni ilorazowej. Nie są zachowywane aksjomaty oddzielania, istnienia przeliczalnej bazy, czy też przeliczalnej bazy w punkcie. przestrzeń ilorazowa przestrzeni metrycznej może nie być metryzowalna.

2.14. Przykład. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. przestrzeń $\mathbb{R}/A$, która jest homeomorficzna z bukietem przeliczalnej liczby okręgów, nie ma przeliczalnej bazy w punkcie bukietowym.

Podamy teraz definicję precyzującą intuicję doklejania jednej przestrzeni do drugiej.

2.15. Definicja. *Niech $A \subseteq X$ i niech $f : A \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas sklejeniem przestrzeni X i Y wzdłuż przekształcenia f nazywamy przestrzeń ilorazową $(X \sqcup Y)/R$, gdzie R jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację $xRf(x)$ dla każdego $x \in A$. Otrzymaną przestrzeń oznaczamy symbolem $X \cup_f Y$. Mamy następujący przemienny diagram, w którym przekształcenia i oraz i' są włożeniami:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad i \quad} & X \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow{\quad i' \quad} & X \cup_f Y \end{array} .$$

Odnotujmy pewne szczególne przypadki tej konstrukcji:

2.16. Przykład. Jeśli odwzorowanie $f : A \to Y$ jest stałe w punkt y_0, to przestrzeń $X \cup_f Y$ jest homeomorficzna z bukietem $(X/A) \vee Y$. W szczególności jeśli $Y = pt$ to $X \cup_f \{pt\} = X/A$.

2.17. Przykład. Jeśli $i : A \to Y$ jest włożeniem podzbioru, to $X \cup_i Y = X \cup Y$ a podzbiór $V \subset X \cup Y$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy podzbiory $V \cap X$ oraz $V \cap Y$ są otwarte.

Zanotujmy ważną własność operacji doklejania:

2.18. Stwierdzenie. *Niech $A \subseteq X$ i niech $f : A \to Y$. Wówczas:*

a) Homeomorfizm $h : Y \to Y'$, definiuje homeomorfizm $X \cup_f Y \xrightarrow{\cong} X \cup_{h \circ f} Y$.

b) Jeśli $A' \subseteq X'$, zaś $g : X' \to X$ jest homeomorfizmem takim, że $g(A') = A$ to g definiuje homeomorfizm $X' \cup_{f \circ g} Y \xrightarrow{\cong} X \cup_f Y$. ♡

2.19. Przykład. Konstrukcję doklejania przestrzeni wzdłuż przekształcenia można uogólnić. Niech $f_1 : A \to X$ i $f_2 : A \to Y$ będą przekształceniami. Sklejeniem przestrzeni X i Y wzdłuż przekształceń f_1 i f_2 nazywamy przestrzeń ilorazową $(X \sqcup Y)/R$, gdzie R jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą $aRf_1(a)$ oraz $aRf_2(a)$, dla każdego $a \in A$. Otrzymaną przestrzeń oznaczamy symbolem $X \cup_{f_1,f_2} Y$. Mamy następujący przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & X \\ {\scriptstyle f_2}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_2'} \\ Y & \xrightarrow{\quad f_1' \quad} & X \cup_{f_1,f_2} Y \end{array} .$$

Przestrzenie powstające przez utożsamienia boków kwadratu

Zastosujemy wprowadzone pojęcia do skonstruowania bardzo ważnych przykładów przestrzeni, które będziemy nazywać powierzchniami. Niech $[-1,1] \times [-1,1]$ będzie kwadratem położonym na płaszczyźnie. Rozpatrzmy w zbiorze $[-1,1] \times [-1,1]$ relacje równoważności $R_1, ..., R_5$ takie, że klasy abstrakcji punktów wewnątrz kwadratu są jednoelementowe, natomiast na brzegu kwadratu dokonujemy następujących utożsamień:

1. $(-1,t) \sim_{R_1} (1,t)$
2. $(-1,t) \sim_{R_2} (1,-t)$
3. $(-1,t) \sim_{R_3} (1,t)$ oraz $(t,-1) \sim_{R_3} (t,1)$
4. $(-1,-t) \sim_{R_4} (1,t)$ oraz $(t,-1) \sim_{R_4} (t,1)$
5. $(-1,-t) \sim_{R_5} (1,t)$ oraz $(-t,-1) \sim_{R_5} (t,1)$

♡ Ile elementów mają poszczególne klasy abstrakcji tych relacji równoważności?

2.20. Stwierdzenie. *Przestrzenie ilorazowe* $[-1,1] \times [-1,1]/R_i, \quad i = 1,..,5$ *są przestrzeniami zwartymi. W przestrzeniach* $[-1,1] \times [-1,1]/R_i$ *dla* $i = 3,4,5$ *każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z* $\mathbb{R}^2$*.* ♡

Wskazówka: Dla dowodu zwartości przestrzeni ilorazowych wystarczy wykazać, że są one przestrzeniami Hausdorffa.

2.21. Stwierdzenie. *Przestrzenie* $[-1,1] \times [-1,1]/R_1$, $[-1,1] \times [-1,1]/R_2$, $[-1,1] \times [-1,1]/R_3$ *są kolejno homeomorficzne z następującymi podzbiorami przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*:*

1. **Powierzchnią walca** *tj. powierzchnią powstała przez obrót odcinka wokół osi równoległej do tego odcinka;*

2. **Wstęgą Möbiusa***, tj. powierzchnią powstałą przez jednoczesny obrót odcinka wokół osi i wokół środka obracanego odcinka o kąt* π*;*

2. **Torusem***, tj. powierzchnią powstała przez obrót okręgu wokół osi leżącej w płaszczyźnie zawierającej ten okrąg.* ♡

Uwaga: Przestrzenie $[-1,1] \times [-1,1]/R_4$ oraz $[-1,1] \times [-1,1]/R_5$ nie dadzą się zanurzyć w $\mathbb{R}^3$!
Przestrzeń $[-1,1] \times [-1,1]/R_4$ nazywa się **butelką Kleina**. Kilka innych przedstawień butelki Kleina opisano w zadaniach.

Przestrzeń $[-1,1] \times [-1,1]/R_5$ jest homeomorficzna z płaszczyzną rzutową $\mathbb{R}P(2)$, czyli przestrzenią powstającą ze zwykłej płaszczyzny przez uzupełnienie jej kierunkami prostych równoległych. Przypomnijmy - w przestrzeni $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ rozpatrujemy relację: $(x_0,x_1,x_2) \sim (y_0,y_1,y_2) \iff \exists_{r\in\mathbb{R}} (x_0,x_1,x_2) = (ry_0,ry_1,ry_2)$.
Przestrzeń ilorazową tej relacji nazywamy płaszczyzną rzutową $\mathbb{R}P^2$. Jej punkty oznaczamy $\{(x_0,x_1,x_2)\}$, a liczby x_0,x_1,x_2 współrzędnymi jednorodnymi punktu $\{(x_0,x_1,x_2)\}$. Jeżeli $x_0 \neq 0$, to $\{(x_0,x_1,x_2)\} = \{(1, x_1/x_0, x_2/x_0)\}$ i punkt ten utożsamiamy z punktem $(x_1/x_0, x_2/x_0) \in \mathbb{R}^2$, jeżeli zaś $x_0 = 0$ to punkt $\{(0,x_1,x_2)\}$ utożsamiamy z kierunkiem prostej wyznaczonym przez wektor $[x_1,x_2]$. Poniższe stwierdzenie wskazuje inną konstrukcję płaszczyzny rzutowej:

2.22. Stwierdzenie. *Płaszczyzna rzutowa* $\mathbb{R}P(2)$ *jest homeomorficzna z przestrzenią będącą przestrzenią ilorazową dysku* $D^2/\sim$ *gdzie* $z \sim z'$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $z = z'$ *lub* $|z| = 1$ *oraz* $z' = -z$. ♡ ♡

Wskazówka: Pokazać, że przekształcenie przyporządkowujące punktowi $(x_1,x_2) \in D^2$ punkt płaszczyzny rzutowej $\{(1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_1, x_2)\}$ wyznacza szukany homeomorfizm. Wówczas punkty wnętrza D^2 odpowiadają punktom płaszczyzny, a klasy abstrakcji punktów na sferze - kierunkom prostych.

Z powyższego stwierdzenia łatwo już widać, że przestrzeń $[-1,1] \times [-1,1]/R_5$ jest homeomorficzna z płaszczyzną rzutową $\mathbb{R}P(2)$.

2.23. Przykład. Niech $A, B \subset \operatorname{int}([-1,1] \times [-1,1])$ będą dwuwymiarowymi dyskami domkniętymi. Niech $X = T^2 \setminus (\operatorname{int} A)$ i $Y = T^2 \setminus (\operatorname{int} B)$. Niech przekształcenie $f : \partial A \longrightarrow Y$ będzie złożeniem pewnego homeomorfizmu $\partial A \longrightarrow \partial B$ i włożenia $\partial B \hookrightarrow Y$. Przestrzeń $X \cup_f Y$ nazywamy **sumą spójną** dwóch torusów lub dwupreclem i oznaczamy $T^2 \sharp T^2$. Można pokazać, że typ homeomorficzny takiej przestrzeni nie zależy od wybranych dysków i nie zależy od wybranego homeomorfizmu (co nie jest oczywiste.) Konstrukcję sumy spójnej torusów można iterować, otrzymując trzyprecle itd. Można też ją zastosować w ogólniejszej sytuacji, do czego powrócimy.

Zadania

Własności przestrzeni ilorazowych

Z 2.1. Niech $A \subset X$. Zbadać dla jakich podzbiorów A odwzorowanie ilorazowe $q : X \to X/A$ jest otwarte, dla jakich domknięte. Kiedy X/A jest przestrzenią Hausdorffa? W szczególności wykazać, że jeżeli X jest regularna oraz $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym, to X/A jest przestrzenią Hausdorffa.

Z 2.2. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym o wartościach w przestrzeni Hausdorffa. Udowodnić, że wtedy X/R_f, gdzie $xR_fx' \iff f(x) = f(x')$, jest przestrzenią Hausdorffa.

Z 2.3. Niech $q : X \to Y$ będzie odwzorowaniem ilorazowym i załóżmy, że dla każdego $y \in Y$ zbiór $q^{-1}(y)$ jest spójny. Pokazać, że zbiór otwarty (lub domknięty) A jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $q^{-1}(A)$ jest spójny. Jeżeli q jest odwzorowaniem otwartym, to założenie otwartości lub domkniętości zbioru A można pominąć.

♡ Z 2.4. Jeżeli $q : X \to Y$ jest przekształceniem ilorazowym oraz przestrzeń X jest lokalnie spójna to przestrzeń Y jest lokalnie spójna.

♡ Z 2.5. Niech $D^n = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_1^2 + ...x_n^2 \leq 1\}$ będzie dyskiem (kulą) o promieniu 1, zaś $S^{n-1} = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_1^2 + ...x_n^2 = 1\}$ sferą ograniczającą ten dysk. Wskazać homeomorfizm $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

Bukiet przestrzeni topologicznych

♡ Z 2.6. Niech X_i, $i = 1, \ldots , n$ będą przestrzeniami topologicznymi, każda z wyróżnionym punktem $x_i \in X_i$. Pokazać, że bukiet $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ jest homeomorficzny z podzbiorem produktu $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

$$\{(x_1, x_2, \ldots , x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots , x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n : z \in X_i,\ i = 1, \ldots , n\}.$$

Z 2.7. Wykazać, że produkt sfer n i m wymiarowej ze zgniecionym do punktu bukietem tych sfer $S^n \times S^m/S^n \vee S^m$ jest homeomorficzny ze sferą S^{n+m}.

Z 2.8. Niech $A \subseteq X$, $A' \subseteq X'$ i niech $f : A \to Y$. Załóżmy, że przestrzenie X i X' oraz A i A' są homeomorficzne. Niech $g : A \to A'$ będzie homeomorfizmem. Czy przestrzenie $X \cup_f Y$ oraz $X' \cup_{g \circ f} Y$ są homeomorficzne?

Przestrzenie powstające przez utożsamienia boków kwadratu

♡ Z 2.9. Niech $P := \{z \in \mathbb{C}\colon 1 \leq |z| \leq 2\}$ będzie pierścieniem na płaszczyźnie. Rozważmy w P relację równoważności R której klasy abstrakcji elementów spoza wewnętrznego okręgu są jednoelementowe, natomiast $z \sim_R -z$ jeśli $|z| = 1$. Wykazać, że P/R jest homeomorficzna ze wstęga Möbiusa.

♡ Z 2.10. Wykazać, że jeżeli dokonać utożsamienia punktów antypodycznych na obu brzegowych okręgach pierścienia $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 \le |z| \le 2\}$, to otrzymana przestrzeń jest homeomorficzna z X/R_4, czyli z butelką Kleina.

♡ Z 2.11. Znaleźć przekształcenia $I^2 \supset \partial I^2 \xrightarrow{f} S^1 \vee S^1$ takie, że $I^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$ jest homeomorficzna z torusem i z butelką Kleina.

♡ Z 2.12. Znaleźć zanurzenie wstęgi Möbiusa w $\mathbb{R}P(2)$ oraz pokazać, że istnieje rozkład $\mathbb{R}P(2) = D \cup M$ gdzie M jest podzbiorem domkniętym homemorficznym ze wstęgą Möbiusa, D jest homeomorficzny z dyskiem D^2 oraz $M \cap D$ jest homeomorficzny z okręgiem.

Z 2.13. Znaleźć relację równoważności na butelce Kleina tak, by przestrzeń ilorazowa była homeomorficzna z płaszczyzną rzutową.

Z 2.14. Udowodnić, że przestrzenie X/R_i, $i = 1, 2, 3, 4$ nie są parami homeomorficzne.

3. Grupy topologiczne i ich działania

3.1. Definicja. **Grupą topologiczną** *nazywamy przestrzeń topologiczną G, w której zbiory jednopunktowe są domknięte, wraz ze strukturą grupy zdefiniowaną w zbiorze jej punktów. Zakładamy przy tym, że działania mnożenia* $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ *i brania elementu odwrotnego* $\nu : G \to G$, $\nu(g) = g^{-1}$ *są ciągłe.*

Homomorfizmem grup topologicznych nazywamy przekształcenie, które jest homomorfizmem i jest przekształceniem ciągłym.

Grupa topologiczna ma naturalnie wyróżniony punkt – jest nim element neutralny działania grupowego.

3.2. Stwierdzenie. *Podgrupa grupy topologicznej jest grupą topologiczną. Iloczyn kartezjański grup topologicznych $G_1 \times G_2$ jest grupą topologiczną.* $\square$

3.3. Przykłady.

a) Dowolna grupa jest grupą topologiczną, jeżeli w zbiorze jej elementów wprowadzimy topologię dyskretną – o takiej grupie mówimy, że jest grupą dyskretną.

b) Zbiory $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liczb rzeczywistych i liczb rzeczywistych różnych od zera z topologią euklidesową oraz z dodawaniem i mnożeniem odpowiednio są grupami topologicznymi. Analogicznie mamy grupy topologiczne $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^*$. Okrąg $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\} \leqslant \mathbb{C}^*$ jest podgrupą domkniętą.

c) **Torusem** n-wymiarowym nazywamy grupę $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ będącą iloczynem kartezjańskim n okręgów.

d) Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ macierzy odwracalnych o współczynnikach rzeczywistych z topologią podprzestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$ jest grupą topologiczną. Grupy $O(n)$ i $SO(n)$ przekształceń ortogonalnych i specjalnych ortogonalnych (czyli ortogonalnych o wyznaczniku równym 1) są jej podgrupami domkniętymi.

e) Grupa $GL(n, \mathbb{C})$ macierzy odwracalnych o współczynnikach zespolonych z topologią podprzestrzeni $\mathbb{C}^{n^2}$ jest grupą topologiczną. Grupy $U(n)$ i $SU(n)$ przekształceń unitarnych i specjalnych unitarnych są jej podgrupami domkniętymi. Grupy $U(n)$ i $SU(n)$ są zwarte i spójne. Grupa $U(n)$ zawiera torus n-wymiarowy a grupa $SU(n)$ zawiera torus $n-1$-wymiarowy.

Uogólnimy do kontekstu topologicznego podstawowe pojęcia związane z działaniami grup na zbiorach, znane z kursu Algebry I. Należy się spodziewać, że istnienie działania danej grupy topologicznej na przestrzeni ma związek z istotnymi własnościami topologicznymi tej przestrzeni.

3.4. Definicja. *Grupa topologiczna G działa na przestrzeni topologicznej X z* **prawej strony**, *jeżeli dane jest przekształcenie ciągłe* $\phi : X \times G \to X$, *takie, że* $\forall_{x \in X} \forall_{g, g' \in G} \quad \phi(\phi(x, g), g') = \phi(x, gg'), \quad \forall_{x \in X} \quad \phi(x, 1) = x.$
Analogicznie, grupa topologiczna G działa na przestrzeni topologicznej X z **lewej strony**, *jeżeli dane jest przekształcenie ciągłe* $\phi : G \times X \to X$, *takie, że* $\forall_{x \in X} \forall_{g, g' \in G} \quad \phi(g, \phi(g', x)) = \phi(gg', x), \quad \forall_{x \in X} \quad \phi(1, x) = x.$

3.5. Uwaga.. *Jeżeli* $\phi : X \times G \longrightarrow X$ *jest działaniem prawostronnym, to* $\phi' : G \times X \longrightarrow X$*,* $\phi'(g, x) = \phi(x, g^{-1})$ *jest działaniem lewostronnym i na odwrót.*

Jeżeli grupa topologiczna G działa na przestrzeni topologicznej X, z lewej (prawej) strony, to mówimy krótko, że X jest lewą (prawą) G– przestrzenią. Działanie elementu $g \in G$ na punkcie $x \in X$ zapisujemy $g(x)$ lub gx ($(x)g$ lub xg). Jeśli grupa G działa na X, to dowolna podgrupa $H \leq G$ też działa na X.

3.6. Przykład. Jeśli G jest grupą topologiczną a $H \leq G$ dowolną podgrupą to H działa z lewej strony na G przez **lewe przesunięcia** $\lambda : H \times G \longrightarrow G, \quad \lambda(h, g) := hg$ i przez **prawe przesunięcia** $\rho : G \times H \longrightarrow G, \quad \rho(g, h) := gh$. Zauważmy, że działania z lewej i prawej strony są wzajemnie przemienne $(hg)h' = h(gh')$.

3.7. Przykład. Jeśli G jest grupą topologiczną a $H \leq G$ dowolną podgrupą to G działa z lewej strony na przestrzeni warstw lewostronnych G/H przez **lewe przesunięcia** $\lambda : G \times G/H \longrightarrow G/H, \quad \lambda(g, xH) := gxH$.W dalszym ciągu mówiąc o G/H jako o G – przestrzeni będziemy mieli na myśli to działanie.

Analogicznie G działa z prawej strony na zbiorze warstw prawostronnych.

W dalszym ciągu będziemy podawać definicje i stwierdzenia dla działań z lewej strony. Sformułowania dla działań z prawej strony są analogiczne.

Zdefiniujemy teraz przekształcenia przestrzeni z działaniem ustalonej grupy G.

3.8. Definicja. *Niech* X *i* Y *będą* G *– przestrzeniami. Przekształcenie ciągłe* $f : X \longrightarrow Y$ *nazywamy* **ekwiwariantnym** *lub* **G – przekształceniem** *jeżeli*

$$\forall_{x \in X} \forall_{g \in G} \quad f(g(x)) = g(f(x)).$$

Mówimy, że przekształcenie jest G *– homeomorfizmem, jeżeli jest homeomorfizmem i jest ekwiwariantne (łatwo widać, że przekształcenie odwrotne jest także ekwiwariantne). Zbiór przekształceń ekwiwariantnych z przestrzeni* X *do* Y *oznaczamy symbolem* $\mathrm{Map}_G(X, Y)$*.*

3.9. Definicja. *Niech* X *będzie* G *– przestrzenią. Jeżeli* $x \in X$*, to:*

a) **Orbitą** *punktu* x *nazywamy podprzestrzeń*

$$G(x) = \{gx \colon g \in G\} \subseteq X$$

b) **Grupą izotropii** *lub* **stabilizatorem** *punktu* x G_x *nazywamy podgrupę*

$$G_x = \{g \in G \colon g(x) = x\} \leqslant G.$$

c) **Podprzestrzenią punktów stałych** *nazywamy podprzestrzeń*

$$X^G = \{x \in X \colon \forall_{g \in G} g(x) = x\} \subseteq X.$$

W wielu ważnych przypadkach grupa izotropii punktu $x \in X$ wyznacza topologię jego orbity.

3.10. Stwierdzenie. *Niech* X *będzie* G *– przestrzenią i niech* $x \in X$*. Przyporządkowanie elementowi* $g \in G$ *punktu* $g(x)$ *definiuje* G *– odwzorowanie* $G/G_x \longrightarrow G(x)$ *będące bijekcją. Jest ono* G *– homeomorfizmem jeżeli* G *jest grupą zwartą lub jeżeli* X *jest przestrzenią dyskretną.* $\heartsuit$

Jeśli dla pewnego punktu $x \in X$, $X = G(x)$, podgrupa izotropii $G_x \leqslant G$ jest domknięta i odwzorowanie $G/G_x \to G(x)$ jest G – homeomorfizmem, to mówimy, że X jest $G-$przestrzenią jednorodną z grupą izotropii G_x. Zbadamy teraz G – przekształcenia przestrzeni jednorodnych.

3.11. Stwierdzenie. *Jeżeli $H \leqslant G$ jest podgrupą, to dla dowolnej G – przestrzeni Y przyporządkowanie $\phi_H : \mathrm{Map}_G(G/H, Y) \to Y^H$, $\phi_H(f) = f(eH)$, gdzie Y^H oznacza zbiór punktów stałych podgrupy H, jest bijekcją.*

Dowód. Jest oczywiste, że jeżeli f jest przekształceniem ekwiwariantnym, to $f(eH) \in Y^H$ i przekształcenie f jest jednoznacznie wyznaczone przez wartość $f(eH)$, więc przyporządkowanie ϕ_H jest różnowartościowe. Jest ono także surjektywne, gdyż dla dowolnego $y \in Y^H$ wzór $f_y(gH) := gy$ jest dobrze określony i definiuje przekształcenie ciągłe $f_y : G/H \to Y$. □

3.12. Wniosek.

1. *Dla dowolnych podgrup $H, K \leq G$ istnieje bijekcja między zbiorem przekształceń ekwiwariantnych $\mathrm{Map}_G(G/H, G/K)$ a zbiorem punktów stałych $(G/K)^H = \{gK \colon H \leqslant gKg^{-1}\}$.*

   2. Grupa G-homeomorfizmów $\mathrm{Homeo}_G(G/H,\, G/H)$ jest izomorficzna z grupą $N_G(H)/H$, gdzie $N_G(H)$ oznacza normalizator podgrupy $H \leq G$. ♡

3.13. Definicja. **Przestrzenią orbit** *działania grupy G na X nazywamy przestrzeń ilorazową $X/G := X/\sim$ gdzie $x \sim x'$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje element $g \in G$ taki, że $gx = x'$.*

Dowolne G – odwzorowanie $f : X \to Y$ między G – przestrzeniami indukuje odwzorowanie ciągłe przestrzeni orbit $(f/G) : X/G \to Y/G$ dane wzorem $(f/G)([x]]) := [f(x)]$. Oczywiście nie każde przekształcenie przestrzeni orbit pochodzi od odwzorowania ekwiwariantnego.

3.14. Przykład. Jeśli podgrupa $H \leq G$ działa na grupie G przez lewe przesunięcia, to przestrzeń orbit jest zbiorem lewych warstw $H \setminus G = \{Hg : g \in G\}$ a grupa G działa na $H \setminus G$ przez przesunięcia z prawej strony: $(Hg)g' := H(gg')$; jeśli działa przez prawe przesunięcia, to przestrzeń orbit jest zbiorem prawych warstw $G/H = \{gH : g \in G\}$ a grupa G działa na G/H przez przesunięcia z lewej strony: $g'(gH) := (g'g)H$.

3.15. Stwierdzenie. *Jeżeli grupa topologiczna G działa na przestrzeni X, to odwzorowanie ilorazowe $X \longrightarrow X/G$ jest otwarte. Jeżeli grupa G jest zwarta oraz X jest przestrzenią Hausdorffa to:*

a) odwzorowanie definiujące działanie $\theta \colon G \times X \to X$ jest domknięte,

b) X/G jest przestrzenią Hausdorffa,

c) odwzorowanie $X \longrightarrow X/G$ jest domknięte,

d) odwzorowanie $X \longrightarrow X/G$ jest właściwe,

e) X jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy X/G jest zwarta,

f) X jest lokalnie zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy X/G jest lokalnie zwarta.
♡

Uwaga: Nie należy mylić oznaczenia X/A wprowadzonego w rozdziale 1 dla oznaczenia zgniecenia podzbioru do punktu z oznaczeniem X/G przestrzeni orbit. Szczególnie mylące może być oznaczenie przestrzeni warstw G/H. Jeśli w G nie byłoby struktury grupy ten symbol oznaczałby G ze zgniecionym do punktu podzbiorem H.

Wygodnie jest nazwać działania, które mają pewne szczególne własności.

3.16. Definicja. *Niech X będzie G – przestrzenią. Powiemy, że*

a) działanie G jest **trywialne**, *jeżeli dla każdego $x \in X$, grupa izotropii $G_x = G$, a zatem każdy element grupy wyznacza przekształcenie będące identycznością.*

b) działanie G jest **wolne**, *jeżeli dla każdego $x \in X$, grupa izotropii $G_x = \{1\}$ jest trywialna.*

c) działanie G jest **tranzytywne**, *jeżeli ma dokładnie jedna orbitę, to znaczy przestrzeń orbit X/G jest jednopunktowa.*

Zadania

Grupy topologiczne i ich przestrzenie jednorodne

♡ Z 3.1. Udowodnić, że jeżeli $H \leqslant G$ jest domkniętą podgrupą grupy topologicznej G, to przestrzeń warstw G/H jest regularna. W szczególności grupa topologiczna jest przestrzenią regularną.

Uwaga: *Przestrzeń topologiczną nazywamy regularną jeśli punkty są domknięte i można je oddzielać zbiorami otwartymi od podzbiorów domkniętych. W definicji grupy topologicznej założyliśmy, że punkty są domknięte.*

Z 3.2. Udowodnić, że jeżeli $H \trianglelefteq G$ jest dyskretną podgrupą normalną spójnej grupy topologicznej G, to H jest zawarta w centrum G.

Z 3.3. Niech $A \leqslant \mathbb{R}$ będzie domkniętą, dyskretną podgrupą. Wykazać, że istnieje izomorfizm grup topologicznych $\mathbb{R}/A \cong S^1$.

Z 3.4. Znaleźć zanurzenie grupy addytywnej $\mathbb{R}$ w torus $S^1 \times S^1$ i udowodnić, że odpowiednia przestrzeń warstw jest antydyskretna.

Z 3.5. Grupy $O(n)$, $SO(n)$ i $U(n)$ są zwarte, grupy $SO(n)$, $U(n)$ są spójna, zaś grupa $O(n)$ ma dwie składowe łukowe.

Z 3.6. Jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa i grupa topologiczna G działa na X, to grupy izotropii są podgrupami domkniętymi.

Powierzchnie jako przestrzenie orbit

♡ Z 3.7. Skonstruować działania wolne grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ tak, aby przestrzenie orbit były walcem oraz wstęgą Moebiusa.

♡ Z 3.8. Skonstruować działanie wolne grupy $\mathbb{Z}_2$ na walcu $S^1 \times \mathbb{R}$ którego przestrzenią orbit jest wstęga Möbiusa.

Z 3.9. Niech $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ będą wektorami liniowo niezależnymi . Niech $A =< v_1, v_2 >$ oznacza podgrupę generowaną przez v_1, v_2. Wykazać, że grupa ilorazowa $\mathbb{R}^2/A$ jest izomorficzna (jako grupa topologiczna) z torusem $S^1 \times S^1$. Wykazać, że dla dowolnej nietrywialnej dyskretnej podgrupy $A \leqslant \mathbb{R}^2$ grupa ilorazowa $\mathbb{R}^2/A$ jest homeomorficzna z walcem $S^1 \times \mathbb{R}$ lub z torusem.

♡ Z 3.10. Skonstruować działanie wolne grupy $\mathbb{Z}_2$ na torusie, tak by przestrzeń orbit była homeomorficzna z butelką Kleina.

Z 3.11. Niech G będzie podgrupą izometrii płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ generowaną przez przekształcenia $f(x, y) = (x + 1, y)$ i $g(x, y) = (1 - x, y + 1)$. Pokazać, że $g^{-1}fg = f^{-1}$ oraz działanie G jest wolne a jego przestrzenią orbit jest butelką Kleina. Wskazać podgrupy $H_1 \leqslant H_2 \leqslant G$ takie, że $\mathbb{R}^2/H_1$ jest walcem a $\mathbb{R}^2/H_2$ jest torusem.

Przestrzenie rzutowe

♡ Z 3.12. Wykazać, że następujące definicje (rzeczywistej) n-wymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P(n)$ są równoważne:

a) przestrzeń orbit działania grupy multyplikatywnej $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus 0$ na przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$.

b) przestrzeń orbit działania $\mathbb{Z}_2 := \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}^*$ na sferze S^n,

c) przestrzeń ilorazowa otrzymana z dysku (kuli) D^n przez utożsamienie punktów antypodycznych leżących na sferze.

Z 3.13. Skonstruować zanurzenie $\mathbb{R}P(n-1) \subset \mathbb{R}P(n)$ takie, że $\mathbb{R}P(n)/\mathbb{R}P(n-1)$ jest homeomorficzna z S^n. Udowodnić, że $\mathbb{R}P(n) \cong D^n \cup_p \mathbb{R}P(n-1)$, gdzie $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{p} \mathbb{R}P(n-1)$ jest przekształceniem ilorazowym;

Z 3.14. Znaleźć homeomorfizmy: $S^3 \cong SU(2)$, $\mathbb{R}P(1) \cong S^1 \cong U(1) \cong SO(2)$, $\mathbb{R}P(3) \cong SO(3)$.

4. Algebra dróg w przestrzeni topologicznej

Będziemy badać własności przestrzeni topologicznej poprzez analizę dróg w tej przestrzeni. Począwszy od tego miejsca jeżeli mówimy o przekształceniu przestrzeni topologicznych, to zakładamy, że przekształcenie to jest ciągłe.

4.1. Definicja. **Drogą** *ω w przestrzeni topologicznej X nazywamy przekształcenie $\omega : I \to X$, gdzie $I := [0,1]$ jest odcinkiem jednostkowym. Droga ω ma początek $o(\omega) := \omega(0)$ i koniec $e(\omega) := \omega(1)$. Dla drogi ω definiujemy drogę odwrotną ω^{-1}: $\omega^{-1}(t) := \omega(1-t)$. Zauważmy, że $o(\omega^{-1}) = e(\omega)$, $e(\omega^{-1}) = o(\omega)$ oraz $(\omega^{-1})^{-1} = \omega$. Drogą dla której $o(\omega) = e(\omega) = x$ nazywa się drogą zamkniętą lub* **pętlą** *zaczepioną w punkcie x. Pętlą stałą zaczepioną w punkcie x i oznaczaną ω_x nazywa się odwzorowanie stałe $\omega_x(t) = x$, dla każdego $t \in I$.*

Zbiór wszystkich dróg w X oznaczać będziemy symbolem $P(X)$. Podzbiór dróg o początku w punkcie $x \in X$ i końcu w punkcie $y \in X$ oznaczać będziemy symbolem $P(X; x, y)$. Mamy więc $P(X) = \bigcup_{(x,y)\in X\times X} P(X; x, y)$. W zbiorze $P(X)$ istnieje naturalne działanie - można złożyć dwie drogi, z których pierwsza kończy się w tym samym punkcie, w którym zaczyna druga.

4.2. Definicja. *Składaniem dróg nazywamy działanie:*

$$\star : P(X; x, y) \times P(X; y, z) \to P(X; x, z)$$

zdefiniowane dla dowolnych punktów $x, y, z \in X$ (niekoniecznie różnych)wzorem

$$(\omega \star \eta)(t) := \begin{cases} \omega(2t) & \textit{jeżeli } 0 \le t \le 1/2 \\ \eta(2t-1) & \textit{jeżeli } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Przyporządkowanie przestrzeni topologicznej X zbioru dróg $P(X)$ wraz z działaniem składania można rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że dowolne przekształcenie $f : X \to Y$ definiuje odwzorowanie zbiorów $f_\sharp : P(X) \to P(Y)$ polegające na "przeciąganiu" dróg: $f_\sharp(\omega) := f \circ \omega$. Przeciąganie dróg przez przekształcenie zachowuje składanie — $f_\sharp(\omega \star \eta) = f_\sharp(\omega) \star f_\sharp(\eta)$. Ponadto przyporządkowanie przekształceniu przestrzeni topologicznych odwzorowania odpowiednich zbiorów dróg spełnia zależność: $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ oraz $id_\sharp = id$.

Działanie $\star$ na zbiorze $P(X)$, choć jest naturalne, niestety nie ma dobrych własności algebraicznych – nie jest łączne, pętle stałe nie są elementami neutralnymi a droga odwrotna nie jest odwrotnością. Sytuacja zmienia się drastycznie jeśli podzielimy zbiór $P(X)$ przez relację równoważności zwaną homotopią.

4.3. Definicja. **Homotopią** *między drogami $\omega, \eta : I \to X$ o tym samym początku $o(\omega) = o(\eta) = x_0$ i tym samym końcu $e(\omega) = e(\eta) = x_1$ nazywamy przekształcenie $F : I \times I \to X$ takie, że dla każdego $t, s \in I$*

$$F(t,0) = \omega(t), \qquad F(0,s) = x_0,$$
$$F(t,1) = \eta(t), \qquad F(1,s) = x_1.$$

Mówimy, że drogi ω i η są homotopijne, co oznaczamy $\omega \sim \eta$, jeżeli istnieje miedzy nimi homotopia.

4.4. Definicja. *przestrzeń topologiczna nazywa się* **jednospójna** *jeżeli jest łukowo spójna oraz dowolne drogi o tym samym początku i tym samym końcu są homotopijne.*

4.5. Przykłady.

a) Dowolne dwie drogi leżące w podzbiorze wypukłym w $\mathbb{R}^n$ są homotopijne, a więc taki zbiór jest jednospójny. ♡

b) Jeżeli dwie drogi leżące w podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^n$ są dostatecznie bliskie (w metryce sup), to są homotopijne. ♡

c) Dowolna droga leżąca w podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^n$ jest homotopijna z leżącą w tym podzbiorze drogą kawałkami liniowa oraz z drogą gładką. ♡

4.6. Stwierdzenie. *Homotopia dróg jest relacją równoważności w zbiorze $P(X)$.*

Dowód. Pokażemy dla przykładu, że relacja homotopii dróg jest przechodnia. Jeżeli F jest homotopią między drogami ω i η, zaś H homotopią między drogami η i ζ. to łatwo sprawdzić, że przekształcenie $G : I \times I \longrightarrow X$ zdefiniowane wzorem

$$G(t,s) = \begin{cases} F(t,2s), & \text{dla } s \leq \frac{1}{2} \\ H(t,2s-1), & \text{dla } s \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

jest homotopią między drogami ω i ζ. □

Zbiór klas równoważności tej relacji oznaczamy symbolem $\Pi(X)$, a klasę abstrakcji drogi ω symbolem $[\omega]$. Zauważmy, że dobrze zdefiniowany jest początek i koniec klasy homotopii dróg – $o([\omega]) = o(\omega)$ i $e([\omega]) = e(\omega)$. Podobnie jak poprzednio zbiór klas homotopii dróg o początku w punkcie $x \in X$ i końcu w punkcie $y \in X$ oznaczamy symbolem $\pi(X;x,y)$ i mamy $\Pi(X) = \bigcup_{(x,y)\in X\times X} \pi(X;x,y)$. Zauważmy, że relacja homotopii zachowuje składanie dróg:

4.7. Stwierdzenie. *Jeżeli $\omega, \omega' \in P(X;x,y)$, $\eta, \eta' \in P(X;y,z)$ oraz $\omega \sim \omega'$ i $\eta \sim \eta'$, to $\omega \star \eta \sim \omega' \star \eta'$.*

Dowód. Niech F będzie homotopią między ω a η, zaś H homotopią między ω' a η'. Wówczas szukana homotopia między odpowiednimi złożeniami jest dana wzorem $K(t,s) = (F(\cdot,s) \star H(\cdot,s))(t)$. □

Możemy zatem zdefiniować składanie klas homotopii dróg, które będziemy oznaczać tym samym symbolem $\star$ i ma ono następujące własności.

4.8. Stwierdzenie. *W zbiorze $\Pi(X)$ składanie klas homotopii dróg*

$$\star : \pi(X;x,y) \times \pi(X;y,z) \longrightarrow \pi(X;x,z)$$

zdefiniowane dla dowolnych punktów $x,y,z \in X$ ma następujące własności:

a) Dla każdej klasy homotopii dróg $[\omega] \in \pi(X;x,y)$ zachodzą równości:

$$[\omega] \star [\omega_y] = [\omega] \qquad [\omega_x] \star [\omega] = [\omega],$$
$$[\omega] \star [\omega^{-1}] = [\omega_x] \qquad [\omega^{-1}] \star [\omega] = [\omega_y].$$

b) Dla dowolnych $[\omega] \in \pi(X;x,y)$, $[\eta] \in \pi(X;y,z)$, $[\zeta] \in \pi(X;z,u)$ zachodzi równość:

$$([\omega] \star [\eta]) \star [\zeta] \;=\; [\omega] \star ([\eta] \star [\zeta]).$$

Dowód. a) Udowodnijmy na przykład, że $[\omega]\star[\omega^{-1}]=[\omega_x]$. Zanim wypiszemy wzór na homotopię (a takich możliwych homotopii jest oczywiście bardzo wiele) wyobraźmy sobie jak ona wygląda. Dla $s=0$ przebiegamy drogę ω tam i z powrotem, zaś dla $s=1$ "stoimy w miejscu" - zatem jeżeli dla dowolnego s dojdziemy do punktu $\omega(1-s)$ i zawrócimy, to otrzymamy szukaną ciągłą rodzinę dróg, czyli homotopię. Zapiszemy to wzorem:

$$H(t,s)=\begin{cases}\omega(2(1-s)t) \text{ dla } t\le\frac{1}{2}\\ \omega(2(s-1)t+2(1-s)) \text{ dla } t\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$$

b) Żeby udowodnić łączność musimy po prostu zmienić "tempo" przebiegania całej drogi od x przez y do z. Szukany wzór jest następujący:

$$H(t,s)=\begin{cases}\omega((\frac{4}{s+1})t) \text{ dla } t\le\frac{s+1}{4}\\ \eta(4t-(s+1)) \text{ dla } \frac{s+1}{4}\le t\le\frac{s+2}{4}\\ \zeta((\frac{4}{2-s})t+\frac{2+s}{4})) \text{ dla } \frac{s+2}{4}\le t\le 1.\end{cases}$$

4.9. Definicja. *Zbiór* $\Pi(X)$ *z działaniem* $\star$ *składania klas homotopii dróg nazywamy* **grupoidem podstawowym** *przestrzeni* X*.*

Z poprzedniego stwierdzenia wynika, że dla każdego punktu $x\in X$, zbiór $\pi(X;x,x)$ z działaniem $\star$ jest grupą – jej elementem neutralnym jest $[\omega_x]$, zaś elementem $[\omega]^{-1}$ odwrotnym do elementu $[\omega]$ jest element $[\omega^{-1}]$.

4.10. Definicja. **Grupą podstawową** *przestrzeni* X *z wyróżnionym punktem* $x\in X$ *nazywamy zbiór* $\pi(X;x,x)$ *klas homotopii pętli zaczepionych w punkcie* $x\in X$ *z działaniem składania pętli. Grupę tę oznacza się symbolem* $\pi_1(X,x)$ *lub krócej* $\pi(X,x)$

Odpowiemy teraz na narzucające się pytanie o zależność grupy podstawowej od wyróżnionego punktu.

4.11. Definicja. *Niech dane będą dwie pary punktów* $x,y\in X$ *oraz* $u,v\in X$ *(niekoniecznie różnych) i wybierzmy elementy* $[\eta]\in\pi(X;u,x)$ *i* $[\zeta]\in\pi(X;v,y)$ *reprezentowane przez drogi* η *i* ζ *o początkach w punktach* u *i* v *i końcach w punktach* x *i* y *odpowiednio. Elementy te definiują przekształcenie :*

$$h_{[\eta],[\zeta]}:\pi(X;x,y)\longrightarrow\pi(X;u,v)$$
$$h_{[\eta],[\zeta]}(\xi):=[\eta]\star[\xi]\star[\zeta^{-1}].$$

Własności przekształceń $h_{[\eta],[\zeta]}$ są podsumowane w następnym stwierdzeniu:

4.12. Stwierdzenie.

1. *Dowolne przekształcenie* $h_{[\eta],[\zeta]}$ *jest bijekcja.*
2. *Przekształcenia wyznaczone przez drogi* $[\eta]$, $[\zeta]$, $[\chi]$, $[\tau]$, *dla których* $e([\eta])=o([\chi])$ *i* $e([\zeta])=o([\tau])$ *spełniają zależność:*

$$h_{[\eta]\star[\chi],[\zeta]\star[\tau]}=h_{[\chi],[\tau]}\circ h_{[\eta],[\zeta]}$$

3. Niech $x, y, z \in X$ oraz $u, v, w \in X$ będą dwiema trójkami punktów (niekoniecznie różnych) i niech $[\eta] \in \pi(X; u, x)$, $[\zeta] \in \pi(X; v, y)$, $[\chi] \in \pi(X; w, z)$. Następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \pi(X;x,y) \times \pi(X;y,z) & \xrightarrow{\star} & \pi(X;x,z) \\ {\scriptstyle h_{[\eta],[\zeta]} \times h_{[\zeta],[\chi]}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle h_{[\eta],[\chi]}} \\ \pi(X;u,v) \times \pi(X;v,w) & \xrightarrow{\star} & \pi(X;x,w) \end{array}$$

Dowód.. Dowód wynika bezpośrednio z definicji przekształcenia $h_{[\eta],[\zeta]}$ oraz ze stwierdzeń 3.7 i 3.8. Na przykład łatwo się przekonać, że przekształcenie odwrotne do $h_{[\eta],[\zeta]}$ dane jest wzorem $h_{[\eta^{-1}],[\zeta^{-1}]}(\omega) = [\eta^{-1}] \star [\omega] \star [\zeta]$. □

Niech $x_0 \in X$ będzie ustalonym punktem. Z powyższych rozważań wynika, że dla przestrzeni łukowo spójnych grupa podstawowa $\pi_1(X, x_0)$ oraz punkty przestrzeni X wyznaczają już grupoid $\Pi(X)$. Mamy także następujący wniosek:

4.13. Wniosek. *Klasa homotopii dowolnej drogi $[\eta] \in \pi(X; x, y)$ definiuje izomorfizm grup*

$$h_{[\eta]} := h_{[\eta],[\eta]} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, y) \qquad h_{[\eta]}([\omega]) = [\eta] \star [\omega] \star [\eta^{-1}].$$

przy czym złożeniu dróg odpowiada złożenie tych izomorfizmów:

$$h_{[\eta]\star[\zeta]} = h_{[\zeta]} \circ h_{[\eta]}.$$

♡

Przyporządkowanie przestrzeni grupoidu podstawowego możemy rozszerzyć na przekształcenia. Zauważmy, że jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest przekształceniem, to przeciągnięcie $f_\sharp : P(X) \longrightarrow P(Y)$ zachowuje relację homotopii, a więc definiuje przekształcenie $f_\sharp : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$. Ponadto przekształcenie $f_\sharp$ zachowuje działania $f_\sharp([\omega] \star [\eta]) = f_\sharp([\omega]) \star f_\sharp([\eta])$ więc będziemy mówić, że przekształcenie $f_\sharp : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ jest **homomorfizmem grupoidów podstawowych**. Homomorfizm indukowany przez identyczność na przestrzeni X jest identycznością na grupoidzie $\Pi(X)$. Dla przekształceń $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ spełnione są zależności: $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ oraz $id_\sharp = id$

W szczególności wynika stąd, że przekształcenie $f : X \longrightarrow Y$ indukuje homomorfizm grup podstawowych $f_\sharp : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$. Homomorfizm indukowany przez identyczność jest identycznością i dla przekształceń $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow Z$, zachodzi równość $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, gf(x))$.

4.14. Wniosek. *Jeżeli $f : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to dla dowolnego punktu $x \in X$, $f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ jest izomorfizmem grup podstawowych.* ♡

Reasumując, przestrzeni topologicznej i wyróżnionemu w niej punktowi przypisaliśmy grupę - grupę podstawową tej przestrzeni w wybranym punkcie przy czym

♢ dla przestrzeni łukowo spójnych klasa izomorfizmu grupy podstawowej nie zależy od wyboru punktu

♢ przekształcenia przestrzeni definiują homomorfizmy grup podstawowych.

W dalszej części wykładu badać będziemy ten algebraiczny niezmiennik przestrzeni topologicznych. Chcielibyśmy wiedzieć, jakie topologiczne własności przestrzeni on wyraża i jak go obliczyć dla konkretnych przestrzeni.

Zadania

Homotopia dróg

♡ Z 4.1. Dowolna droga leżąca w $\mathbb{R}^n \setminus 0$ o końcach leżących na sferze $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$ jest homotopijna z drogą leżącą na sferze.

♡ Z 4.2. Pokazać, że dla $n > 1$ sfera S^n jest jednospójna.

Z 4.3. Niech drogi ω, ω' łączą punkty x_0 i x_1. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne: 1) $\omega \sim \omega'$; 2) $\omega^{-1} \star \omega' \sim \omega_{x_1}$; 3) $\omega \star (\omega')^{-1} \sim \omega_{x_0}$.

♡ Z 4.4. Niech $F : I \times I \to X$ będzie odwzorowaniem. Zdefiniujmy cztery drogi będące obcięciami F do boków kwadratu: $\omega_i(t) := F(i,t)$ oraz $\eta_i := F(t,i)$ dla $i = 0,1$. Wykazać, że $\omega_0 \star \eta_1 \sim \eta_0 \star \omega_1$.

Grupa podstawowa

♡ Z 4.5. Pokazać, że przyporządkowanie $([\alpha],[\beta]) \to ([\alpha \times \beta])$ definiuje naturalny homorfizm grup: $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X \times Y,(x,y))$. Pokazać, że jest on izomorfizmem wskazując homomorfizm odwrotny.

♡ Z 4.6. Jeżeli dla pewnych dwóch punktów $x, y \in X$ łukowo spójnej przestrzeni X, każde dwie drogi o początku w punkcie x i końcu w punkcie y są homotopijne, to dla każdego $z \in X$, grupa $\pi_1(X,z)$ jest trywialna.

♡ Z 4.7. Jeżeli G jest grupą topologiczną, to mnożenie w grupie G zadaje działanie grupowe w zbiorze $\pi_1(G,e)$. Udowodnić, że jest ono identyczne z działaniem zadanym przez składanie dróg i wykazać, że grupa $\pi_1(G,e)$ jest abelowa.

Z 4.8. Udowodnić, że w poprzednim zadaniu wystarczy założyć, że istnieje $\mu\colon G\times G \longrightarrow G$, które jest homotopijnie łączne i e jest homotopijnym (obustronnym) elementem neutralnym. (przestrzeń taka nazywa się H-przestrzenią.)

♡ Z 4.9. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Pokazać, że grupa podstawowa $\pi_1(X,x)$ działa na zbiorze $\pi(X;x,y)$ z lewej strony a grupa $\pi_1(X,y)$ z prawej strony. Pokazać, że oba działania są wolne i tranzytywne oraz wzajemnie przemienne.

Z 4.10. Udowodnić, że jeżeli na zbiorze S działa z lewej strony grupa G a z prawej grupa H oraz działania te są wolne, tranzytywne i wzajemnie przemienne, to dowolny element $s \in S$ definiuje izomorfizm grup $\phi_s : G \to H$. Zastosować tezę tego zadania do przykładu z poprzedniego zadania.

5. Homotopia przekształceń i homotopijna równoważność przestrzeni

Rozważania poprzedniego rozdziału zakończyliśmy obserwacją, że homeomorfizm przestrzeni indukuje izomorfizm ich grup podstawowych. Można podać, znacznie słabszy niż istnienie homeomorfizmu, warunek wystarczający na to, by dwie przestrzenie miały izomorficzne grupy podstawowe. Warunek ten uściśli geometryczną intuicję, że przez "zgniatanie i rozciąganie" można zdeformować jedną przestrzeń do drugiej. Zacznijmy od przykładu:

5.1. Przykład. Pokażemy, że włożenie $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ indukuje izomorfizm $i_\sharp : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$. Dowód wykorzystuje odwzorowanie $F : \mathbb{C}^* \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ zadane wzorem $F(z, s) = (1 - s)z + s\frac{z}{|z|}$ polegające na "zgniataniu" płaszczyzny bez punktu do okręgu. Homomorfizm $i_\sharp$ jest epimorfizmem, gdyż każda pętla ω w $\mathbb{C}^*$ zaczepiona w 1 jest homotopijna z leżącą na okręgu pętlą ω', gdzie $\omega'(t) = \frac{\omega(t)}{|\omega(t)|}$ i szukaną homotopią jest $H(t, s) = (1-s)\omega(t) + s\frac{\omega(t)}{|\omega(t)|}$. Podobnie dowodzimy, że $i_\sharp$ jest monomorfizmem, "spychając" przy pomocy F leżącą w $\mathbb{C}^*$ homotopię między pętlami na S^1, do homotopii między tymi pętlami ale już leżącej w S^1.

5.2. Definicja. *Przekształcenia $f, g : X \longrightarrow Y$ nazywają się* **homotopijne** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie $H : X \times I \longrightarrow Y$, zwane homotopią miedzy f a g takie, że dla każdego $x \in X$, , $H(x, 0) = f(x)$ oraz $H(x, 1) = g(x)$.*

Będziemy pisać $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje homotopia od przekształcenia f do przekształcenia g. Relacja $\sim$ w zbiorze przekształceń z przestrzeni X w przestrzeń Y jest relacją równoważności i jej klasy abstrakcji nazywać będziemy **klasami homotopii** i oznaczać symbolem $[X, Y]$.

Geometryczna intuicja pojęcia homotopii jest taka, że jest ona deformacją w czasie t od przekształcenia f w momencie t=0 do przekształcenia g w momencie t=1. W przykładzie powyżej mamy do czynienia z deformacją identyczności na $\mathbb{C}^*$ do retrakcji na okrąg.

Porównamy teraz homomorfizmy grupoidów podstawowych indukowane przez przekształcenia homotopijne.

5.3. Stwierdzenie. *Niech $x_0, x_1 \in X$ oraz $f, g : X \longrightarrow Y$ będą przekształceniami homotopijnymi. Niech $H : X \times I \longrightarrow Y$ będzie homotopią od f do g. Określmy drogi w Y wzorami $\eta(s) := H(x_0, s)$ oraz $\zeta(s) := H(x_1, s)$. Wówczas następujący diagram homomorfizmów jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd}
\pi(X; x_0, x_1) \arrow[r, "f_\sharp"'] \arrow[d, equal] & \pi(Y; f(x_0), f(x_1)) \arrow[d, "h_{[\eta],[\zeta]}"] \\
\pi(X; x_0, x_1) \arrow[r, "g_\sharp"'] & \pi(Y; g(x_0), g(x_1))
\end{tikzcd}$$

Dowód. Niech $[\omega] \in \pi(X; x_0, x_1)$. Rozpatrzmy przekształcenie $F : I \times I \longrightarrow Y$, $F = H \circ (\omega \times id_I)$. Teza wynika z zadania 3.4. $\square$

5.4. Definicja. *Przekształcenie $f : X \longrightarrow Y$ nazywa się* **homotopijną równoważnością***, jeżeli istnieje przekształcenie $g : Y \longrightarrow X$, nazywane homotopijną odwrotnością, takie że $g \circ f \sim id_X$ i $g \circ f \sim id_Y$.*

5.5. Definicja. *przestrzenie X i Y są* **homotopijnie równoważne***, co zapisujemy $X \approx Y$, jeżeli istnieje przekształcenie $f : X \longrightarrow Y$, które jest homotopijną równoważnością. przestrzeń homotopijnie równoważną z przestrzenią jednopunktową nazywamy przestrzenią* **ściągalną***.*

5.6. Przykład. Każdy gwiaździsty podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest ściągalny.

Relacja homotopijnej równoważności w klasie przestrzeni topologicznych jest relacją równoważności i jej klasy abstrakcji nazywamy **typami homotopijnymi**. Jeżeli mówimy, że przestrzeń X ma typ homotopijny okręgu S^1, to oznacza to po prostu, że przestrzeń X jest homotopijnie równoważna okręgowi. Każdy homeomorfizm jest homotopijna równoważnością, ale dwie przestrzenie homotopijnie równoważne nie muszą być bynajmniej homeomorficzne.

Zbadamy jakie operacje na przestrzeni topologicznej zachowują jej typ homotopii. Zauważmy następujące oczywiste własności homotopijnych równoważności:

5.7. Stwierdzenie. *Jeśli przekształcenia $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, $i = 1, 2$ są homotopijnymi równoważnościami, to ich suma prosta $f_1 \coprod f_2 : X_1 \coprod X_2 \longrightarrow Y_1 \coprod Y_2$ oraz produkt kartezjański $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ są także homotopijnymi równoważnościami.*

Z powyższego stwierdzenia wynika natychmiast, że produkt dowolnej liczby przestrzeni ściągalnych jest przestrzenią ściągalną, a suma rozłączna przestrzeni ściągalnych jest homotopijnie równoważna z przestrzenią dyskretną. Zauważmy też, że jeśli X_2 jest przestrzenią ściągalną, to rzutowanie $p_{X_1} : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ jest homotopijną równoważnością. Stwierdzenia, że przestrzenie homotopijnie równoważne mają izomorficzne grupy podstawowe nie można odwrócić. Na marginesie powiedzmy, że znalezienie takich niezmienników algebraicznych, które rozstrzygałyby, czy przestrzenie są homotopijnie równoważne jest niespełnionym marzeniem topologów algebraicznych.

5.8. Stwierdzenie. *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest homotopijną równoważnością, to*

a) dla dowolnych $x, y \in X$, $f_\sharp : \pi(X; x, y) \longrightarrow \pi(Y; f(x), f(y))$ jest bijekcją

b) dla dowolnego punktu $x \in X$, $f_\sharp : \pi_1(X; x) \longrightarrow \pi_1(Y; f(x))$ jest izomorfizmem grup podstawowych.

Dowód. Niech $H : X \times I \longrightarrow X$ będzie homotopią od $g \circ f$ do id_X. Niech $x, y \in X$, zaś $\eta(s) = H(x, 1 - s)$ i $\zeta(s) = H(y, 1 - s)$. Wówczas następujący diagram homomorfizmów jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \pi(X; x, y) & \xrightarrow[(g\circ f)_\sharp]{} & \pi(X; gf(x), gf(y)) \\ \Big\| & & \Big\downarrow h_{[\eta],[\zeta]} \\ \pi(X; x, y) & \xrightarrow[id]{} & \pi(X; x, y) \end{array} .$$

Wynika stąd, że złożenie $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ jest bijekcją, a więc $f_\sharp$ jest różnowartościowe, zaś $g_\sharp$ jest "na". Analogicznie pokazujemy, że $(f \circ g)_\sharp$ jest bijekcją a zatem $g_\sharp$ jest różnowartościowe, zaś $f_\sharp$ jest "na", co kończy dowód. $\square$

5.9. Wniosek. *Grupa podstawowa przestrzeni ściągalnej jest trywialna, czyli innymi słowy przestrzeń ściągalna jest jednospójna.*

Homotopia relatywna

Zauważmy, że definicja homotopii dróg nie jest szczególnym przypadkiem homotopii przekształceń zdefiniowanych na odcinku, bo zakładamy dodatkowo, że w trakcie deformowania drogi jej końce nie poruszają się. Rozważmy sytuację ogólną.

5.10. Definicja. *Niech $A \subset X$ i niech $f, g : X \longrightarrow Y$ będą takimi przekształceniami, że $\forall_{a \in A}\ f(a) = g(a)$. Przekształcenia f i g nazywają się* **homotopijnymi względem** *A jeśli istnieje homotopia $H : X \times I \longrightarrow Y$, $H_{|X\times\{0\}} = f$, $H_{|X\times\{1\}} = g$ i taka, że $\forall_{a\in A,\, t \in I}\, H(a,t) = f(a) = g(a)$.*

Jeżeli przekształcenia f i g są homotopijne względem A, to oznaczamy to symbolem $f \sim g \,\mathrm{rel}\, A$. W zbiorze tych przekształceń z X w Y, które pokrywają się na zbiorze A, relacja homotopii względem A jest relacją równoważności.

Homotopię dróg w Y otrzymujemy rozpatrując homotopie przekształceń z odcinka I względem $\{0, 1\} \subseteq I$. Inny ważny przypadek,w którym rozpatruje się homotopie względem podzbioru, to homotopie przekształceń zachowujące wyróżniony punkt. Dla dwóch przestrzeni z wyróżnionymi punktami (X, x_0) i (Y, y_0) będziemy oznaczać symbolem $[(X, x_0),(Y, y_0)]_*$ zbiór klas homotopii rel$\{x_0\}$ przekształceń $f : X \longrightarrow Y$ takich, że $f(x_0) = y_0$. Niekiedy, gdy wiadomo jakie punkty są wyróżnione, będziemy pisać krócej $[X, Y]_*$.

Pętle jako odwzorowania zdefiniowane na okręgu

Czasem bywa wygodniejsze interpretowanie pętli $\omega : I \longrightarrow X$ zaczepionych w punkcie x_0 jako odwzorowań zdefiniowanych na okręgu S^1. Przez S^1 będziemy zawsze oznaczać podprzestrzeń płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ składającą się z liczb o module 1. Istnieje bardzo ważne odwzorowanie $exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dane wzorem $exp(t) := e^{2\pi i t}$. Jego obcięcie do odcinka I zadaje homeomorfizm $I/\{0, 1\} \xrightarrow{\cong} S^1$.

5.11. Stwierdzenie. *Odwzorowanie $exp : I \longrightarrow S^1$ zadaje bijekcję*

$$e : P(X, x_0, x_0) \backsimeq \{f : S^1 \longrightarrow X : f(1) = x_0\},$$

zachowującą relację homotopii, a więc zadaje także bijekcję $\bar{e} : \pi_1(X, x_0) \simeq [S^1, X]_*$.

Opiszemy bezpośrednio działanie grupowe w zbiorze $[S^1, X]_*$. W tym celu przypomnijmy (zad.1.6), że bukiet $S^1 \vee S^1 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : z_1 = 1 \ lub\ z_2 = 1\}$. Zdefiniujemy *komnożenie* $\nu : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ wzorem

$$\nu(z) := \begin{cases} (z^2, 1) & \text{jeżeli } \mathrm{Im}(z) \geq 0; \\ (1, z^2) & \text{jeżeli } \mathrm{Im}(z) \leq 0. \end{cases}$$

Dla dwóch przekształceń $f, g : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$ definiujemy $f \star g := (f \vee g) \circ \nu$. Oczywiście $(f \star g) \circ exp = (f \circ exp) \star (g \circ exp)$, gdzie gwiazdka po prawej stronie oznacza złożenie dróg, a więc opisane "mnożenie" przekształceń określonych na S^1 odpowiada wcześniej opisanemu składaniu pętli.

Zadania

Homotopijna równoważność

♡ Z 5.1. Niech $A \subseteq X$ będzie podzbiorem ściągalnym, oraz $a_0 \in A$. Czy włożenie $X \setminus A \to X \setminus \{a_0\}$ jest homotopijną równoważnością?

♡ Z 5.2. Sklasyfikować drukowane litery alfabetu łacińskiego, traktowane jako podprzestrzenie płaszczyzny, według typu topologicznego (homeomorfizmu)i typu homotopii.

♡ Z 5.3. Wykazać, że przestrzenie otrzymane ze sfery S^2, torusa płaszczyzny rzutowej, butelki Kleina przez usunięcie $n > 0$ punktów są homotopijnie równoważne z bukietami okręgów (ilu?)

Z 5.4. Udowodnić, że przestrzeń $X := \mathbb{R}^3 \setminus \{L_1 \cup \cdots \cup L_n\}$, gdzie L_i są prostymi parami nie przecinającymi się, jest homotopijnie równoważna z bukietem okręgów (ilu?). Uogólnić to zadanie na przestrzenie powstałe z przestrzeni kartezjańskich przez wyjęcie nie przecinających się podprzestrzeni liniowych.

Z 5.5. Udowodnić, że dowolne dwa odwzorowanie $f, g : X \to U \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$, które są dostatecznie bliskie są homotopijne. Zauważyć, że otwarty podzbiór można zastąpić przez sferę lub ogólniej dowolny podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, który jest retraktem pewnego swojego otoczenia.

Z 5.6. Odwzorowanie $f : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ jest homotopijne z przekształceniem stałym wtedy i tylko wtedy gdy rozszerza się na dysk $D^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ tzn. istnieje $\bar{f} : D^2 \to X$ takie, ze $\bar{f}|S^1 = f$.

♡ Z 5.7. Niech $f : X \to S^n$ będą dowolnymi odwzorowaniami takimi, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) \neq -g(x)$. Wykazać, że f i g są homotopijne. Wywnioskować, że każde przekształcenie $f\colon X \longrightarrow S^n$, które nie jest "na" jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Grupoid podstawowy i grupa podstawowa

♡ Z 5.8. Wykazać, że przestrzeń X jest jednospójna wtedy i tylko wtedy gdy jest łukowo spójna oraz dla pewnego punktu $x_0 \in X$ zachodzi $\pi_1(X, x_0) = 0$

♡ Z 5.9. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Załóżmy, że dla dowolnej pętli ω zaczepionej w punkcie $x_0 \in X$ izomorfizm $\Phi_{[\omega]}\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ jest identycznością. Wykazać, że:

a) $\pi_1(X, x_0)$ jest grupą abelową;

b) Dla dowolnego punktu $x_1 \in X$ oraz dowolnej pętli ω o początku i końcu w punkcie x_1 izomorfizm $h_{[\omega]}\colon \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ jest także identycznością;

♡ Z 5.10. Udowodnić, że jeżeli $f, g : X \to Y$ są dwoma homotopijnymi przekształceniami takimi, że $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ oraz grupa $\pi_1(Y, y_0)$ jest abelowa to $f_\sharp = g_\sharp :$

$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Uwaga: Nie zakładamy, że rozpatrywane przekształcenia są homotopijne względem $\{x_0\}$.

♡ Z 5.11. Udowodnić, że jeżeli przekształcenie $\alpha : S^1 \longrightarrow X$, $\alpha(1) = x_0$ jest homotopijne z przekształceniem stałym w punkt x_0, to $[\alpha] = 0$ w $\pi_1(X, x_0)$.

6. Pary Borsuka

Wykazanie, że dwie przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne jest na ogół zadaniem niełatwym i często odbywa się etapami, to znaczy polega na skonstruowaniu ciągu przestrzeni i odwzorowań $X \overset{\simeq}{\longleftarrow} Z_1 \overset{\simeq}{\longrightarrow} Z_2 ... \overset{\simeq}{\longrightarrow} Y$, o których łatwo pokazać, że są homotopijnymi równoważnościami. Oczywistymi kandydatami na takie homotopijne równoważności są przekształcenia polegające na zgnieceniu do punktu pewnego ściągalnego podzbioru lub wklejeniu ściągalnego podzbioru. Rozważania tego rozdziału pozwolą między innymi na sformułowanie warunków wystarczających na to, by zgniecenie ściągalnego podzbioru lub wklejenie ściągalnego podzbioru nie zmieniało typu homotopii.

Zaczniemy od przypomnienia pojęcia retrakcji.

6.1. Definicja. *Niech $A \subseteq X$ i niech $i_A : A \hookrightarrow X$ będzie włożeniem.*

a) Przekształcenie $r : X \longrightarrow A$ nazywa się **retrakcją**, *jeżeli $r \circ i_A = id_A$.*

b) Retrakcja $r : X \longrightarrow A$ nazywa się **retrakcją deformacyjną**, *jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X. Podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się* **retraktem deformacyjnym** *jeśli istnieje retrakcja deformacyjna $r : X \longrightarrow A$.*

c)Retrakcja $r : X \longrightarrow A$ nazywa się **silną retrakcją deformacyjną**, *jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X względem A. Podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się* **silnym retraktem deformacyjnym** *jeśli istnieje silna retrakcja deformacyjna $r : X \longrightarrow A$.*

6.2. Uwaga. Jeżeli $A \subset X$ jest retraktem deformacyjnym, to włożenie $i_A : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością. ♡

6.3. Przykład. Podzbiór $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ jest silnym retraktem deformacyjnym.

6.4. Stwierdzenie. *Jeśli $A \subset X$ jest silnym retraktem deformacyjnym, to dla dowolnego przekształcenia $f : A \longrightarrow Y$ włożenie $Y \subset X \cup_f Y$ też jest silnym retraktem deformacyjnym.*

Dowód. Niech $r : X \longrightarrow A$ będzie retrakcją, zaś $H : X \times I \longrightarrow X$ będzie homotopią, o której mowa w definicji silnego retraktu deformacyjnego. Niech $\bar{r} : X \cup_f Y \longrightarrow Y$ będzie zdefiniowane wzorem $\bar{r}([x]) = [r(x)]$ dla $x \in X$ i $\bar{r}([y]) = [y]$ dla $y \in Y$. Zdefiniujemy nową homotopię $\bar{H} : (X \cup_f Y) \times I \longrightarrow X \cup_f Y$ wzorem : $\bar{H}(x,t) = H(x,t)$ dla $x \in X$ i $H(y,t) = y$ dla punktów $y \in Y$ i dowolnego $t \in I$. Łatwo sprawdzić, że $\bar{r}$ jest dobrze zdefiniowaną retrakcją zaś $\bar{H}$ dobrze zdefiniowaną homotopią, która ma własności wymienione w definicji silnego retraktu deformacyjnego. □

Przejdziemy teraz do badania typu homotopii ważnej konstrukcji tworzenia nowych przestrzeni, opisanej w definicji 1.15, jaką jest przyklejanie przestrzeni wzdłuż podprzestrzeni . Nasuwa się pytanie czy typ homotopii przestrzeni $X \cup_f Y$, gdzie $f : A \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$ zależy od klasy homotopii przekształcenia f. Zauważmy, że rozważania te jako szczególny przypadek dotyczą pytania, kiedy zgniecenie podprzestrzeni do punktu lub wklejenie podzbioru nie zmienia typu homotopii.

6.5. Definicja. *Włożenie $A \subseteq X$ nazywa się* **parą Borsuka** *lub* **korozwłóknieniem** *jeżeli ma następującą własność przedłużania homotopii: dla dowolnej przestrzeni Y, dla dowolnego przekształcenia $f : X \longrightarrow Y$ i dowolnej homotopii $H : A \times I \longrightarrow Y$, dla której $H_{|A\times\{0\}} = f_{|A}$ istnieje taka homotopia $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$, że $\tilde{H}_{|X\times\{0\}} = f$ i $\tilde{H}_{|A\times I} = H$.*

Innymi słowy istnieje przekształcenie $\tilde{H}$, dla którego poniższy diagram jest przemien-ny.

$$\begin{array}{ccccc} A \times \{0\} & \longrightarrow & A \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ X \times \{0\} & \longrightarrow & X \times I & \xrightarrow{\tilde{H}} & Y \end{array}.$$

Oczywiście jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest homeomorfizmem i $f(A) = B$, to jeśli $A \subset X$ jest parą Borsuka, to także $B \subset Y$ jest parą Borsuka.

6.6. Stwierdzenie. *Jeżeli para $A \subseteq X$ jest parą Borsuka, to podprzestrzeń $A \times I \cup X \times \{0\}$ jest retraktem $X \times I$.* ♡

6.7. Wniosek. *Jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa i $A \subseteq X$ jest parą Borsuka to $A \subseteq X$ jest podzbiorem domkniętym.* ♡

Parę Borsuka $A \subseteq X$, w której A jest podzbiorem domkniętym będziemy nazywać **zamkniętą parą Borsuka**. Z powyższego wniosku wynika, że założenie to możemy przyjmować bez istotnej straty ogólności naszych rozważań. Dla zamkniętych par Borsuka łatwo widać, że warunek konieczny sformułowany w stwierdzeniu 5.5 jest także dostateczny.

6.8. Stwierdzenie. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest podzbiorem domkniętym i $A \times I \cup X \times \{0\}$ jest retraktem $X \times I$, to $A \subseteq X$ jest parą Borsuka.* ♡

Powyższe stwierdzenie jest prawdziwe także bez założenia domkniętości $A \subseteq X$, ale dowód jest dużo trudniejszy (Strøm [1]).

6.9. Przykład. Niech ∂I^n oznacza brzeg kostki $I^n \subset \mathbb{R}^n$. Włożenie $\partial I^n \subset I^n$ jest parą Borsuka. Podobnie jeśli zamiast całego brzegu rozpatrzymy sumę tylko niektórych jego ścian. Ogólniej, włożenie podwielościanu w wielościan jest parą Borsuka.

6.10. Stwierdzenie. *Jeżeli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka, zaś $f : A \longrightarrow Y$ jest dowolnym przekształceniem, to $Y \subset X \cup_f Y$ jest zamkniętą parą Borsuka.*

Dowód.. Niech $r = (r_1, r_2) : X \times I \to A \times I \cup X \times \{0\}$ będzie retrakcją. Niech $f' : X \longrightarrow X \cup_f Y$ będzie kanonicznym odwzorowaniem. Z założenia o domkniętości A wynika, że Y jest domkniętym podzbiorem $Y \subset X \cup_f Y$, więc przekształcenie $r' : (X \cup_f Y) \times I \to (Y \times I) \cup (X \cup_f Y) \times \{0\}$ zadane wzorem:

$$r'([x], t) = ([f' r_1(x)], r_2(x)) \quad \text{dla } x \in X$$
$$r'([y], t) = ([y], t) \quad \text{dla } y \in Y$$

jest ciągłe i jest retrakcją. □

Zauważmy, że dla par Borsuka możemy odwrócić stwierdzenie sformułowane w Uwadze 5.2.

6.11. Uwaga. Jeżeli $A \subset X$ jest parą Borsuka i włożenie $i_A : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością, to podprzestrzeń A jest retraktem deformacyjnym przestrzeni X. ♡

Dowód tej uwagi pozostawiamy go czytelnikom jako łatwe zadanie. Okazuje się jednak, że dla zamkniętych par Borsuka można udowodnić stwierdzenie o wiele silniejsze:

6.12. Twierdzenie. *Jeśli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka i $A \subseteq X$ jest retraktem deformacyjnym, to $A \subseteq X$ jest silnym retraktem deformacyjnym.*

Przystąpimy do udowodnienia, że przy pewnych założeniach typ homotopijny przestrzeni powstającej przez przyklejenie zależy tylko od klasy homotopii przekształcenia doklejającego. Zaczniemy od przypadku zgniatania podzbioru do punktu. Wynika on wprawdzie z przypadku ogólnego, ale zamieszczamy jego dowód, gdyż jest prostszy i stanowi dobre wprowadzenie do dowodu następnego twierdzenia.

6.13. Stwierdzenie. *Jeśli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka oraz przestrzeń A jest ściągalna, to projekcja $q_A : X \longrightarrow X/A$ jest homotopijną równoważnością.*

Dowód. Trzeba skonstruować odwzorowanie homotopijnie odwrotne do q_A. Niech $H : A \times I \longrightarrow A$ będzie homotopią miedzy identycznością a odwzorowaniem stałym w $a_0 \in A$. Rozszerzmy ją do odwzorowania $H' : A \times I \cup X \times \{0\} \to X$ kładąc $H'(x, 0) = x$. Ponieważ $A \subset X$ jest parą Borsuka, to istnieje rozszerzenie $\tilde{H}' : X \times I \longrightarrow X$, takie że $\tilde{H}'(x, 0) = x, \quad \forall_{a \in A} \tilde{H}'(a, 1) = a_0, \quad \forall_{a \in A} \forall_{t \in I} \tilde{H}'(a, t) \in A$. Przekształcenie $\tilde{H}'(-, 1) : X \longrightarrow X$ definiuje homotopijną odwrotność $f : X/A \longrightarrow X$ zadaną wzorem $f([x]) := \tilde{H}(x, 1)'$. Z definicji $\tilde{H}'$ jest homotopią miedzy id_X a złożeniem $f \circ q_A$. Zauważmy, ze przekształcenie $\tilde{H}' : X \times I \longrightarrow X$ wyznacza przekształcenie ciągłe $\bar{H} : X/A \times I \longrightarrow X/A$ dane wzorem $\bar{H}([x], t) = \tilde{H}'(x, t)$, które jest homotopią między $id_{X/A}$ a złożeniem $q_A \circ f$. □

W celu udowodnienia przypadku ogólnego wykażemy wpierw prawdziwość następującego lematu.

6.14. Lemat. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to $X \times \{0\} \cup A \times I \subseteq X \times I$ jest silnym retraktem deformacyjnym.*

Dowód. Niech $r : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$ będzie retrakcją. Zdefiniujmy $G : X \times I \times I \longrightarrow X \times I$ wzorem:

$$G((x, t), s) = (r_1(x, (1 - s)t), (1 - s)r_2(x, t) + ts).$$

Łatwo widać, że G jest homotopią pomiędzy id a retrakcją r i ponadto dla $x \in A$ i dowolnego $s \in I$, $G((x, t), s) = (x, (1 - s)t + ts) = (x, t)$. □

6.15. Twierdzenie. *Jeżeli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka oraz przekształcenia $f_0, f_1 : A \to Y$ są homotopijne, to przestrzenie $X \cup_{f_0} Y$ oraz $X \cup_{f_1} Y$, są homotopijnie równoważne względem przestrzeni Y.*

Dowód. Niech $F : A \times I \longrightarrow Y$ będzie homotopia między f_0 i f_1. Wykażemy, że oba włożenia $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$ dla $k = 0, 1$ są retraktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do $k = 0$. Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech $r : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ będzie silną retrakcją deformacyjną zaś G homotopią definiującą silną deformację. Retrakcję r rozszerzamy do retrakcji $r_0 : (X \times I) \cup_F Y \longrightarrow X \cup_{f_0} Y$ kładąc identyczność na przestrzeni Y. Ponieważ homotopia G jest stała na $X \times \{0\} \cup A \times I$, to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii $\bar{G}$ kładąc identyczność na przestrzeni Y. □

6.16. Wniosek. *Jeśli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka a odwzorowanie $f : A \longrightarrow Y$ jest homotopijne ze stałym w punkt y_0, to przestrzeń $X \cup_f Y$ jest homotopijnie równoważna bukietowi $(X/A) \vee Y$.* ♡

6.17. Definicja. Stożkiem *nad przestrzenią A nazywamy przestrzeń ilorazową $A \times I / A \times \{1\}$. Niech $i : A \longrightarrow c(A)$ będzie włożeniem zadanym wzorem $i(a) = [(a, 0)]$.*

6.18. Przykład. Stożek nad sferą S^n jest homeomorficzny z dyskiem (kulą) D^{n+1}.

6.19. Stwierdzenie. *Stożek nad dowolna przestrzenią A jest ściągalny.*

Dowód.. Homotopia $H : c(A) \times I \longrightarrow c(A)$ miedzy $id_{c(A)}$ a odwzorowaniem stałym jest dana wzorem $H([a, s], t) := [a, (1 - t)s + t]$. □

Ze stwierdzenia 5.10 wynika, że jeżeli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to włożenie $c(A) \subseteq X \cup_i c(A)$ jest także parą Borsuka. Poniższy wniosek pokazuje, że (przy pewnych założeniach) zgniecenie podprzestrzeni do punktu można nie zmieniając typu homotopii zastąpić doklejeniem nad tą podprzestrzenią stożka.

6.20. Stwierdzenie. *Jeśli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to istnieje homotopijna równoważność $X \cup c(A) \xrightarrow{\approx} X/A$.*

Dowód. Skoro $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to także $c(A) \subset X \cup c(A)$ jest zamkniętą parą Borsuka, a zatem rzutowanie $X \cup c(A) \to X \cup c(A)/c(A)$ jest homotopijną równoważnością. Włożenie $X \subset X \cup c(A)$ definiuje homeomorfizm $X/A = X \cup c(A)/c(A)$. □

Zadania

Pary Borsuka

Z 6.1. Niech $i : A \hookrightarrow X$ będzie włożeniem, niech $Z_i = X \cup_{i_0} (A \times I)$, gdzie $i_0 : A \times \{0\} \xrightarrow{=} A \xrightarrow{i} X$. Niech $j : Z_i \longrightarrow X \times I$ będzie odwzorowaniem ciągłym zadanym przez $i \times id : A \times I \longrightarrow X \times I$ oraz $X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I$. Pokazać, że $A \subseteq X$ jest parą Borsuka wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r : X \times I \longrightarrow Z_i$, takie że $r \circ j = id_{Z_i}$. Pokazać, że jeżeli $A \subseteq X$ jest domknięty, to $j : Z_i \longrightarrow j(Z_i)$ jest homeomorfizmem.

Z 6.2. Wykazać, że jeśli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to dla dowolnej przestrzeni Y włożenie $A \times Y \subset X \times Y$ jest parą Borsuka.

Z 6.3. Wykazać, że jeśli $X = A \cup B$ gdzie A, B są podzbiorami domkniętymi oraz $A \cap B \subset A$ jest parą Borsuka, to włożenie $A \subset X$ jest parą Borsuka.

Z 6.4. Wykazać, że włożenie punktu w dowolny podzbiór otwarty $\mathbb{R}^n$ jest parą Borsuka.

♡ Z 6.5. Udowodnić, że jeżeli $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym, to włożenie $A \subset X$ jest parą Borsuka wtedy i tylko wtedy, gdy A jest silnym retraktem deformacyjnym pewnego swojego otoczenia otwartego U oraz istnieje funkcja $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$, taka że $\varphi^{-1}(1) = A$ i $X \setminus U \subseteq \varphi^{-1}(0)$. (Przypomnijmy, że jeżeli X jest przestrzenią metryczną, to funkcja φ o żądanych własnościach istnieje dla dowolnego domkniętego podzbioru A i jego dowolnego otwartego otoczenia U.)

⋆ Z 6.6. Udowodnić Twierdzenie 5.12: Jeżeli $A \subset X$ jest zamkniętą parą Borsuka i $A \subseteq X$ jest retraktem deformacyjnym, to $A \subseteq X$ jest silnym retraktem deformacyjnym. (Wskazówka:posłużyć się następującym lematem(Postnikow [1], str. 95-96):

Lemat. *Jeżeli $A \subseteq X$ jest zamkniętą parą Borsuka, to $X \times \{0\} \cup A \times I \cup X \times \{1\} \subseteq X \times I$ jest także parą Borsuka.)*

Doklejanie i homotopijna równoważność

Z 6.7. Podać przykład włożenia $A \hookrightarrow X$, które jest homotopijną równoważnością i takiego, że A nie jest retraktem deformacyjnym X.

Z 6.8. Podać przykład retraktu, który nie jest retraktem deformacyjnym. Podać przykład retraktu deformacyjnego, który nie jest silnym retraktem deformacyjnym.

♡ Z 6.9. Udowodnić stwierdzenie zawarte w uwadze 5.11, to jest pokazać, że jeżeli $A \subseteq X$ jest parą Borsuka i włożenie $i : A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością, to A jest retraktem deformacyjnym X.

Definicja. *Niech $f : X \to Y$. Cylindrem przekształcenia f nazywamy przestrzeń $Cyl(f) = (X \times I) \cup_f Y$, gdzie $X \times I \supset X \times \{0\} \xrightarrow{f} Y$.*

Z 6.10. Pokazać, że dla dowolnego przekształcenia $f : X \to Y$, włożenie $Y \hookrightarrow Cyl(f)$ jest homotopijną równoważnością.

Z 6.11. Pokazać, że przekształcenie $f : X \to Y$ jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $X = X \times \{1\} \subset Cyl(f)$ jest retraktem deformacyjnym.

Z 6.12. Niech X i Y będą przestrzeniami łukowo spójnymi. Niech $\{x_0\} \in X$ będzie punktem wyróżnionym takim, że $\{x_0\} \subset X$ jest parą Borsuka. Niech $\{y_0\} \in Y$ będzie punktem wyróżnionym. Pokazać, że dla każdego przekształcenia $f : X \to Y$ istnieje homotopijne z nim przekształcenie $g : X \to Y$, dla którego $g(x_0) = y_0$.

Z 6.13. Pokazać, że: $S^1 \times S^1 / S^1 \times \{s_0\} \approx S^2 \vee S^1$ oraz $S^1 \times D^2 / S^1 \times S^1 \approx S^3 \vee S^2$

Z 6.14. Wykazać, że $S^n / S^k \approx S^n \vee S^{k+1}$.

7. Przekształcenia nakrywające

Przekształcenia nakrywające (zwane też nakryciami) to przekształcenia ciągłe o szczególnie prostej strukturze lokalnej. Okazuje się, że istnieje bliski związek miedzy nakryciami danej przestrzeni a jej własnościami homotopijnymi, w szczególności algebrą dróg opisanych w poprzednich rozdziałach.

7.1. Definicja. *Niech F będzie niepustą przestrzenią dyskretną, a X dowolną przestrzenią topologiczną.*

a) Rzutowanie $p_1 : X \times F \longrightarrow X$. nazywamy **nakryciem produktowym** *nad X z włóknem F.*

b)Przekształcenie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ nazywa się **nakryciem trywialnym** *nad X z włóknem F jeżeli istnieje homeomorfizm $h : \tilde{X} \longrightarrow X \times F$ taki, że $p = p_1 \circ h$.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & X \times F \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

c)Przekształcenie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ nazywa się **nakryciem** *nad X jeżeli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje otoczenie $U_x \ni x$ takie, że $p : p^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x$ jest nakryciem trywialnym (z pewnym włóknem dyskretnym F_x.)*

Włóknem nakrycia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ nad punktem $x \in X$ nazywamy zbiór $p^{-1}(x)$, zaś krotnością nakrycia w punkcie $x \in X$ nazywamy moc włókna nad x. Przestrzeń $\tilde{X}$ nazywamy przestrzenią nakrycia.

Zbiór otwarty $U \subseteq X$ spełniający warunek c) powyższej definicji nazywamy prawidłowo nakrytym.

Z definicji wynika natychmiast, że nakrycie jest przekształceniem "na" oraz jest lokalnym homeomorfizmem, a więc w szczególności przekształceniem otwartym.

7.2. Uwaga. Jeżeli przekształcenie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem nad spójną przestrzenią X, to włókna nad dowolnymi dwoma punktami przestrzeni X są homeomorficzne, a zatem homeomorficzne z pewną ustaloną przestrzenią dyskretną F, którą nazywamy **włóknem nakrycia**. Moc przestrzeni F nazywamy **krotnością nakrycia**. Nakrycie, którego włókno jest zbiorem skończonym nazywamy nakryciem skończonym.

Dowód:. Niech $x_0 \in X$ będzie ustalonym punktem. Z definicji nakrycia łatwo widać, że zbiór $\{x \in X \colon p^{-1}(x) \cong p^{-1}(x_0)\}$ jest otwarty i jego uzupełnienie też jest otwarte. $\square$

7.3. Stwierdzenie. *Przekształcenie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem trywialnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieją parami rozłączne podzbiory otwarte $\tilde{U}_i \subset \tilde{X}$ takie, że $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ oraz $p_{|_{\tilde{U}_i}} : \tilde{U}_i \longrightarrow X$ jest homeomorfizmem.* $\heartsuit$

Zauważmy, że jeżeli X jest przestrzenią spójną, to zbiory $\tilde{U}_i$ są wyznaczone jednoznacznie, bo są one spójnymi składowymi przestrzeni $\tilde{X}$.

Morfizmy nakryć

7.4. Definicja. *Morfizmem nakrycia* $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X_1$ *w nakrycie* $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X_2$ *nazywamy parę przekształceń* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *i* $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ *takie, że* $p_2 \circ \tilde{f} = f \circ p_1$, *to znaczy przemienny jest diagram:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

Jeżeli rozpatrujemy nakrycia nad ustaloną przestrzenią X, *to morfizmem nakrycia* $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ *w nakrycie* $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ *nazywamy przekształcenie* $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$, *dla których* $p_2 \circ \tilde{f} = p_1$,, *to znaczy takich, że przemienny jest diagram:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle p_2} \\ & X & \end{array}$$

Zbiór morfizmów nakrycia $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ *w nakrycie* $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ *oznaczamy symbolem* $\mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Identyczność oraz złożenie morfizmów nakryć są oczywiście morfizmem nakryć. Izomorfizmem nakryć nazywamy morfizm, który posiada morfizm odwrotny. Oczywiście morfizm $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ nakryć nad X jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{f}$ jest homeomorfizmem.

7.5. Stwierdzenie. *Jeżeli* $p_i : \tilde{X}_i \longrightarrow X$, $i = 1, 2$ *są nakryciami trywialnymi z włóknami* F_1, F_2 *odpowiednio, to istnieje bijekcja zbioru morfizmów* $\mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ *w zbiór odwzorowań ciągłych* $X \longrightarrow \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$, *gdzie* $\mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ *oznacza przestrzeń dyskretną odwzorowań z* F_1 *w* F_2.

Dowód:. Jeżeli $\tilde{X}_i$ są nakryciami produktowymi, to $\tilde{f}(x, a) = (x, h(x, a))$, gdzie $h : X \times F_1 \longrightarrow F_2$ jest odwzorowaniem ciagłym, które jednoznacznie wyznacza ciągłe przekształcenie $\bar{h} : X \longrightarrow \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$, $\bar{h}(x)(a) = h(x, a)$. Teza dla nakryć trywialnych jest już natychmiastowa. $\square$

7.6. Wniosek. *Jeżeli* $p_i : \tilde{X}_i \longrightarrow X$, $i = 1, 2$ *są nakryciami trywialnymi, przekształcenie* $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ *ich morfizmem, który jest surjekcją, to* $\tilde{f}$ *jest nakryciem.*

Dowód:. Wystarczy udowodnić tezę dla nakryć produktowych. Niech $(x, b) \in X \times F_2$. Niech zgodnie z tezą stwierdzenia morfizmowi $\tilde{f}$ odpowiada ciągłe przekształcenie $\bar{h} : X \longrightarrow \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$. Oznaczmy $\bar{h}(x) = \varphi$. Przestrzeń $\mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ jest dyskretna, więc $U = \bar{h}^{-1}(\varphi) \times \{b\}$ jest otwartym otoczeniem (x, b) w $\tilde{X}_2$ i $\tilde{f}^{-1}(U) = U \times \varphi^{-1}(b)$. $\square$

Zauważmy, że jeżeli przestrzeń X jest spójna, to $\bar{h} : X \to \mathrm{map}\,(F_1, F_2)$ jest przekształceniem stałym i morfizm nakryć jest nakryciem trywialnym na każdej składowej spójnej przestrzeni $\tilde{X}_2$.

7.7. Stwierdzenie. *Jeżeli $\tilde{f} \in \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ jest morfizmem nakryć i jest surjekcją, to $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ jest nakryciem. Jeżeli przestrzeń nakrycia $\tilde{X}_2$ jest spójna, to każdy morfizm nakryć jest surjekcją.*

Dowód:. Niech $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$ i niech $U \subset X$ będzie otoczeniem punktu $p_2(x)$ prawidłowo nakrytym przez p_1 i przez p_2. Wówczas $\tilde{f} : p_1^{-1}(U) \to p_2^{-1}(U)$ jest morfizmem nakryć trywialnych i teza wynika z poprzedniego wniosku.

7.8. Wniosek. *Morfizm dowolnych nakryć nad tą samą przestrzenią jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy jest bijekcją na każdym włóknie.*

Podamy teraz bardzo ważne przykłady nakryć, związane z teorią funkcji analitycznych, które będą służyły do konstrukcji wielu następnych ważnych przykładów.

7.9. Przykład. Dla dowolnej liczby całkowitej $n \neq 0$ rozpatrzmy odwzorowanie $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dane wzorem $p_n(z) = z^n$. Zbiorami otwartymi nad którymi p_n jest nakryciem trywialnym są: $U_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \colon \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ lub } \mathrm{Re}(z) < 0\}$ oraz $U_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \colon \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ lub } \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Krotność nakrycia p_n jest równa $|n|$. Nakrycia p_n nie są trywialne, bowiem Przestrzeń nakrywająca $\mathbb{C}^*$ jest spójna. Zauważmy, że nakrycia p_n oraz p_{-n} są izomorficzne, a izomorfizm jest zadany przez odwzorowanie $f(z) = z^{-1}$. Zauważmy także, że dla dowolonych $n, m \in \mathbb{Z}$, $p_n \circ p_m = p_{nm}$. Wynika z tego, że dla $k|n$ istnieje morfizm nakrycia p_n w nakrycie p_k.

7.10. Przykład. Odwzorowanie wykładnicze $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $p(z) = \exp(z)$ jest nakryciem. Podobnie jak poprzednio przekształcenie p jest trywialne nad zbiorami U_i, $i = 1, 2$ opisanymi w poprzednim przykładzie. Krotność nakrycia p jest przeliczalna.

Nakrycia pochodzące od działań grup

Niech grupa dyskretna G działa z prawej strony na przestrzeni topologicznej Y. Następujący warunek zapewnia, że rzutowanie na przestrzeń orbit $q : Y \to Y/G$ jest nakryciem.

7.11. Definicja. *Mówimy, że działanie grupy dyskretnej G na przestrzeni topologicznej Y jest* **właściwie dyskretne** *jeżeli*

$$\forall_{y \in Y}\ \exists_{U \ni y}\ \forall_{g \neq e}\ U \cap Ug = \emptyset.$$

7.12. Stwierdzenie. *Jeżeli działanie grupy dyskretnej G na przestrzeni topologicznej Y jest właściwie dyskretne, to*

a) rzutowanie na przestrzeń orbit $q : Y \longrightarrow Y/G$ jest nakryciem

b) dla dowolnej podgrupy $H \subset G$ odwzorowanie ilorazowe $q : Y/H \longrightarrow Y/G$ jest nakryciem.

7.13. Uwaga. Jeżeli grupa G jest skończona, to działanie jest właściwie dyskretne wtedy i tylko wtedy, gdy jest wolne.

7.14. Przykład. Rozpatrzmy działanie grupy $\mathbb{Z}_2 = \{1, t\}$ na sferze $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $t(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Przestrzeń $S^n/\mathbb{Z}_2$ nazywamy n-wymiarowa przestrzenią rzutową i oznaczamy symbolem $\mathbb{RP}^n$. Mamy więc dwukrotne nakrycie $p : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$.

Konstrukcje nakryć

Opiszemy teraz kilka konstrukcji, pozwalających z danych nakryć konstruować nowe.

Suma rozłączna i iloczyn kartezjański. Niech $p : \tilde{X}_i \longrightarrow X_i,\ i = 1, 2$ będą dwoma nakryciami. Wtedy suma rozłączna odwzorowań $p_1 \coprod p_2 : \tilde{X}_1 \coprod \tilde{X}_2 \longrightarrow X_1 \coprod X_2$ oraz ich iloczyn kartezjański $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ są też nakryciami.

Obcinanie nakryć. Niech $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ będzie nakryciem oraz $Y \subseteq X$ dowolną podprzestrzenią. Wówczas obcięcie $p_{|_Y} : p^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ jest też nakryciem. Zauważmy, że jeżeli $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ jest morfizmem nakryć nad X, to definuje on morfizm tych nakryć po obcięciu do dowolnego podzbioru $Y \subset X$.

Sklejanie nakryć. Niech $X = U_1 \cup U_2$ będzie sumą podzbiorów otwartych i niech nad każdym z nich będzie dane nakrycie $p_i : \tilde{U}_i \longrightarrow U_i,\ i = 1, 2$, zaś nad ich częścią wspólną $U_1 \cap U_2$ niech będzie zadany izomorfizm obcięć tych nakryć $h : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Wtedy przekształcenie $p : \tilde{X}_1 \cup_h \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ dane wzorem $p(\tilde{x}_i) = p_i(\tilde{x}_i)$ dla $\tilde{x}_i \in \tilde{U}_i$ jest nakryciem.

Nakrycia nad bukietem przestrzeni. Nakrycie nad bukietem $X_1 \vee X_2$, $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$ można skleić jak wyżej z nakryć $p_i : \tilde{X}_i \longrightarrow X_i,\ i = 1, 2$. Wtedy izomorfizm h jest po prostu bijekcją włókien $h : p_1^{-1}(x_0) \xrightarrow{\cong} p_2^{-1}(x_0)$.

Produkt włóknisty i przeciąganie nakryć. Uogólnimy konstrukcję obcinania nakrycia opisaną w powyżej.

7.15. Definicja. *Niech $f : Y \longrightarrow X$ i $p : Z \longrightarrow X$ będą dowolnymi przekształceniami.* **Produktem włóknistym** *przekształceń f i p nazywamy przestrzeń $f^*Z := \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = p(z)\}$ wraz z odwzorowaniami $p' : f^*Z \longrightarrow Y$, $p'(y, z) := y$ oraz $f' : f^*Z \longrightarrow Z$, $f'(y, z) := z$. Odwzorowania te wpisują się w* *przemienny diagram:*

$$\begin{tikzcd} f^*Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & Z \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

7.16. Uwaga. Łatwo sprawdzić, że ${p'}^{-1}\{y_0\} = \{y_0\} \times p^{-1}(f(y_0)) \cong p^{-1}(f(y_0))$.

Uwaga. Produkt włóknisty jest także oznaczany symbolem $Y \times_X Z$. Produkt włóknisty ma następującą, charakteryzującą go własność:

7.17. Stwierdzenie. *Niech $f : Y \to X$, $p : Z \to X$ oraz $g : W \to Y$, $h : W \to Z$ będą przekształceniami takimi, że $f \circ g = p \circ h$. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie $k : W \to f^*Z$, dla którego $p' \circ k = g$ i $f' \circ k = h$.*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr] & & \\ & f^*Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ & Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Dowód. Przekształcenie $k : W \to f^*Z$ jest zadane wzorem $k(w) = (g(w), h(w))$ — jego ciągłość i jednoznaczność są oczywiste. $\square$

7.18. Uwaga. Z powyższej własności łatwo widzieć, że jeżeli $f : Y \to X$ i przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

to indukuje on przemienny diagram

$$\begin{tikzcd} f^*\tilde{X}_1 \arrow[rr, "f^*(\tilde{g})"] \arrow[dr, "p'_1"'] & & f^*\tilde{X}_2 \arrow[dl, "p'_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

przy czym jeżeli $\tilde{g}$ jest homeomorfizmem. to $f^*(\tilde{g})$ także homeomorfizmem. ♡

Odnotujmy jeszcze dwie własności operacji indukowania.

7.19. Stwierdzenie. *Niech $p : \tilde{X} \to X$.*

a) jeżeli p jest nakryciem trywialnym, a $f : Y \to X$, dowolnym przekształceniem, to $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ jest nakryciem trywialnym.

b) jeżeli $i : Y \hookrightarrow X$, jest włożeniem podzbioru, to $i' : i^*\tilde{X} \to i'(i^*\tilde{X}) = p^{-1}(Y)$ jest homeomorfizmem.

Dowód. Jeżeli p jest nakryciem produktowym z włóknem F, to wprost z definicji wynika, że p' jest także nakryciem produktowym z włóknem F. Dla nakryć trywialnych teza wynika z uwagi powyżej. Punkt b) jest oczywisty. □

7.20. Wniosek. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ *jest nakryciem, a* $f : Y \longrightarrow X$*, dowolnym przekształceniem, to* $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ *jest nakryciem. Ponadto jeżeli* p *jest nakryciem z włóknem* F*, to przestrzeń* F *jest także włóknem nakrycia* p'

Nakrycie $p' : f^*\tilde{X} \longrightarrow Y$ nazywa się nakryciem indukowanym z nakrycia p przez przekształcenie f lub przeciągnięciem nakrycia p przy pomocy przekształcenia f.

Zadania

Własności nakryć.

Z 7.1. Jeżeli X jest lokalnie spójna, to następujące warunki są równoważne:

a) Odwzorowanie $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem.

b) Dla każdej składowej spójnej $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ obcięcie $p|\tilde{C} : \tilde{C} \to C$ jest nakryciem.

c) Dla każdej składowej spójnej $C \subset X$ obcięcie $p : p^{-1}(C) \to C$ jest nakryciem.

Z 7.2. Pokazać, że jeżeli przestrzeń E jest lokalnie łukowo spójna, to $p\colon E \longrightarrow B$ jest nakryciem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej składowej łukowej $A \subseteq B$, $p_{|p^{-1}(A)}\colon p^{-1}(A) \longrightarrow A$ jest nakryciem. Pokazać, że wówczas przekształcenie p ograniczone do dowolnej składowej łukowej przestrzeni E jest nakryciem pewnej składowej łukowej przestrzeni B. Czy założenie lokalnej łukowej spójności przestrzeni E jest potrzebne?

Z 7.3. Pokazać, że jeżeli nakrycie jest homotopijną równoważnością, to jest homeomorfizmem.

Z 7.4. Udowodnić stwierdzenie 6.5. Podać przykład ilustrujący, że założenie lokalnej spójności przestrzeni X jest istotne.

Z 7.5. Udowodnić, że nakrycie skończone (to znaczy nakrycie, którego włókno jest zbiorem skończonym) jest przekształceniem domkniętym. Podać przykład, że założenie o skończoności włókna jest istotne.

Z 7.6. Niech p_1, p_2 będą dwoma przekształceniami dla których zdefiniowane jest złożenie $p_3 = p_1 \circ p_2$. Zbadać, kiedy stąd, że p_i , p_j są nakryciami dla dwóch wskaźników i, j wynika, że p_k jest nakryciem dla trzeciego wskaźnika k.

Z 7.7. Udowodnić, że jeżeli $p_i : E_i \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$ są nakryciami to $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ też jest nakryciem. Wyrazić krotność nakrycia $p_1 \times p_2$, w terminach krotności p_1 i p_2. Czy iloczyn kartezjański nieskończenie wielu nakryć jest nakryciem?

Z 7.8. Niech Y będzie spójną przestrzenią Hausdorffa zaś przestrzeń X niech będzie spójna, lokalnie łukowo spójna i zwarta. Udowodnić, że jeżeli $p : X \longrightarrow Y$ jest lokalnym homeomorfizmem, to $p(X) = Y$ i p jest nakryciem. Podać przykład lokalnego homeomorfizmu $p : \mathbb{R} \xrightarrow{na} S^1$, który nie jest nakryciem.

Z 7.9. Pokazać, że jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem a $f : Y \to X$ przekształceniem ciągłym i nakrycie $p : X \to Y$ jest trywialne, to nakrycie $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ jest trywialne. Czy z trywialności nakrycia $p' : f^*\tilde{X} \to Y$ wynika trywialność nakrycia p? (podać przykład)

Z 7.10. Podać przykład ilustrujący, że w konstrukcji sklejania nakryć, opisanej w tym rozdziale, założenie otwartości podzbiorów $U_1 \subseteq X$ i $U_2 \subseteq X$ jest istotne.

Przykłady nakryć.

Z 7.11. Wykazać, że przekształcenie $p\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ dane wzorem: $p(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^3)$ jest nakryciem. Znaleźć jego krotność.

♡ Z 7.12. Niech $f \in \mathbb{C}[X]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia. Niech $A \subseteq \mathbb{C}$, $A = f(\{z \in \mathbb{C}\colon f'(z) = 0\})$. Pokazać, że $f : \mathbb{C} \setminus f^{-1}(A) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus A$ jest nakryciem. Jaka jest jego krotność?

Z 7.13. Uogólnić poprzednie zadanie na przypadek dowolnej funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

♡ Z 7.14. Wykazać z definicji, że dowolne nakrycie kostki I^n jest trywialne.

Z 7.15. Załóżmy, że grupa dyskretna G działa na przestrzeni X w sposób całkowicie dyskretny. Udowodnić, że dla dowolnej podgrupy $H \leqslant G$ naturalne przekształcenie $X/H \longrightarrow X/G$ jest nakryciem.

Z 7.16. Niech $\mathbb{H} = \{r + xi + yj + zk\}$ będzie algebrą kwaternionów. Utożsamiamy S^3 z grupą kwaternionów o normie 1, zaś $\mathbb{R}^3$ ze zbiorem urojonych kwaternionów $\{xi + yj + zk\}$. Niech dla $q \in S^3$, $p(q)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $p(q)(v) = qvq^{-1}$. Pokazać, że $p(q) \in SO(3)$ oraz $p\colon S^3 \longrightarrow SO(3)$ jest homomorfizmem grup i dwukrotnym nakryciem.

Z 7.17. Jeżeli L jest grupą topologiczną a $H \leqslant G \leqslant L$ są jej domkniętymi podgrupami dyskretnymi, to naturalne odwzorowanie $q : L/H \to L/G$ jest nakryciem z włóknem G/H.

8. Podnoszenie przekształceń i własność podnoszenia homotopii

W tym rozdziale udowodnimy własność przekształceń nakrywających podstawową dla ich powiązań z algebrą dróg w przestrzeni.

8.1. Definicja. *Podniesieniem przekształcenia $f : Y \to X$ względem przekształcenia $p : \tilde{X} \to X$ nazywa się przekształcenie $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ takie, że $p \circ \tilde{f} = f$, czyli takie, dla którego diagram*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Przekrojem przekształcenia $p : \tilde{X} \to X$ nazywa się podniesienie identyczności id_X, a więc przekształcenie $s : X \to \tilde{X}$ takie, że $p \circ s = id_X$.

8.2. Stwierdzenie. *Dla dowolnych przekształceń $f : Y \to X$ i $p : \tilde{X} \to X$ istnieje bijekcja między zbiorem podniesień przekształcenia f względem przekształcenia p, a zbiorem przekrojów przekształcenia $p' : f^*\tilde{X} \to Y$.*

Dowód. Wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między przekrojami przekształcenia s a podniesieniami $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ przekształcenia f, zadana jest wzorem $s(y) = (y, \tilde{f}(y))$. $\square$

Zajmiemy się istnieniem i jednoznacznością podniesień przekształceń względem przekształcenia będącego nakryciem.

8.3. Stwierdzenie. *Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem, a $f : Y \to X$ przekształceniem określonym na przestrzeni spójnej Y. Jeżeli $\tilde{f}, \tilde{f}' : Y \to \tilde{X}$ są dwoma podniesieniami przekształcenia f takimi, że dla pewnego punktu $y_0 \in Y$ zachodzi równość $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$, to $\tilde{f} = \tilde{f}'$.*

Dowód. Łatwo sprawdzić korzystając z lokalnej trywialności nakrycia, że zbiór $\{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ jest domknięty i otwarty. Ponieważ zawiera punkt y_0, więc jest niepusty, a zatem jest całą przestrzenią Y. $\square$

Twierdzenie o podnoszeniu homotopii

8.4. Definicja. *Mówimy, że odwzorowanie $p : \tilde{X} \to X$ ma* **własność (jednoznacznego) podnoszenia homotopii***, jeżeli dla dowolnej przestrzeni Y i dla dowolnej homotopii $H : Y \times I \to X$ oraz podniesienia $\tilde{h}_0 : Y \times \{0\} \to \tilde{X}$, przekształcenia $H \circ i_0 : Y \times \{0\} \to X$ istnieje (dokładnie jedna) homotopia $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ taka, że $\tilde{H}_{|_{Y \times \{0\}}} = \tilde{h}_0$ oraz $p \circ \tilde{H} = H$. Wszystkie te przekształcenia wpisują się w* *przemienny diagram:*

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, "i_0"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

8.5. Definicja. *Mówimy, że odwzorowanie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ ma* **własność (jednoznacznego) podnoszenia dróg**, *jeżeli dla dowolnej drogi $\omega : I \longrightarrow X$ oraz dowolnego punktu $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, dla którego $p(x_0) = \omega(0)$, istnieje (dokładnie jedna)droga $\tilde{\omega} : I \longrightarrow \tilde{X}$ taka, że $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0$ oraz $p \circ \tilde{\omega} = \omega$.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] & X \end{tikzcd}$$

Jest jasne, że jeżeli przekształcenie posiada własność (jednoznacznego) podnoszenia homotopii, to posiada własność (jednoznacznego) podnoszenia dróg.

Następujące twierdzenie jest kluczem do związku nakryć nad ustaloną przestrzenią a grupoidem podstawowym tej przestrzeni.

8.6. Twierdzenie. *Nakrycia posiadają własność jednoznacznego podnoszenia homotopii.*

8.7. Wniosek. *Nakrycia posiadają własność jednoznacznego podnoszenia dróg.*

Zauważmy, że jeżeli podniesienie danej homotopii istnieje, to jest ono jednoznaczne.

8.8. Lemat. *Niech $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ będzie nakryciem, $H : Y \times I \longrightarrow X$ homotopią zaś $\tilde{H}, \tilde{H}' : Y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ jej podniesieniami takimi, że $\tilde{H}_{|_{Y\times\{0\}}} = \tilde{H}'_{|_{Y\times\{0\}}}$. Wynika z tego, że $\tilde{H} = \tilde{H}'$.*

Dowód. Dla dowolnego punktu $y \in Y$ przekształcenia $\tilde{H}_{|_{\{y\}\times I}} : \{y\} \times I \longrightarrow \tilde{X}$ oraz $\tilde{H}'_{|_{\{y\}\times I}} : \{y\} \times I \longrightarrow \tilde{X}$ są podniesieniami przekształcenia $H_{|_{\{y\}\times I}} : (\{y\} \times I) \longrightarrow X$, przyjmującymi tę samą wartość w punkcie $\{y\} \times \{0\}$. Zatem, wobec spójności odcinka, ze stwierdzenia 7.3 wynika, że dla każdego $t \in I$, $\tilde{H}(y,t) = \tilde{H}'(y,t)$. $\square$

Dowód istnienia podniesienia dowolnej homotopii poprzedzimy lematem, z którego wynika, że twierdzenie jest prawdziwe "lokalnie", albo inaczej dla "małych" homotopii tzn. takich, których obrazy leżą w "małym zbiorze" nad którym nakrycie jest trywialne.

8.9. Lemat. *Nakrycie trywialne posiada własność jednoznacznego podnoszenia homotopii.*

Dowód. Zachowując oznaczenia użyte w definicji 8.4, pokażemy najpierw tezę lematu dla nakrycia produktowego $p_X : X \times F \longrightarrow X$. Podniesienie $\tilde{H}$ definiujemy wzorem $\tilde{H}(x,t) := (H(x,t), p_F(\tilde{h}_0(x)))$, gdzie p_F jest rzutowaniem na F. Jeżeli nakrycie jest trywialne to istnieje homeomorfizm $f : \tilde{X} \longrightarrow X \times F$ nakryć nad X. Podniesienie definiujemy wówczas wzorem: $\tilde{H}(x,t) := f^{-1}(H(x,t), (p_F \circ f \circ \tilde{h}_0)(x))$. □

Dowód twierdzenia 8.6. Ciągłość homotopii H oraz zwartość odcinka implikują, że dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje otoczenie $V_y \ni y$ oraz (zależna od y) liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że $H(V_y \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$, $0 \le i \le n-1$ jest zawarty w podzbiorze X nad którym nakrycie p jest trywialne. Konstruujemy indukcyjnie $\tilde{H}^i_y : V_y \times [0, \frac{i}{n}] \longrightarrow \tilde{X}$ spełniające tezę twierdzenia. Istnienie $\tilde{H}^1_y$ wynika bezpośrednio z lematu. Jeżeli $\tilde{H}^i_y : V_y \times [0, \frac{i}{n}] \longrightarrow \tilde{X}$ jest już określone, to stosujemy lemat do odwzorowania $H : V_y \times [\frac{i}{n}, \frac{i}{n+1}] \longrightarrow X$ oraz podniesienia $\tilde{H}^i_y|_{V_y \times \{\frac{i}{n}\}}$. Otrzymujemy podniesienie przekształcenia $H : V \times [\frac{i}{n}, \frac{i}{n+1}] \longrightarrow \tilde{X}$ zgodne z zadanym $\tilde{H}^i_y$ na zbiorze $V \times \{\frac{i}{n}\}$ co definiuje podniesienie $\tilde{H}^{i+1}_y : V_y \times [0, \frac{i}{n+1}] \longrightarrow \tilde{X}$. W ten sposób otrzymujemy dla każdego $y \in Y$ odwzorowanie $\tilde{H}_y : V_y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ spełniające tezę twierdzenia. Wystarczy teraz zauważyć, że rodzina odwzorowań $\{\tilde{H}_y\}_{y \in Y}$ definiuje szukane ciągłe podniesienie $\tilde{H}$, gdyż z lematu 8.3 wynika, że na częściach wspólnych zbiorów rodziny $\{V_y\}_{y \in Y}$ odwzorowania $\{\tilde{H}_y\}_{y \in Y}$ pokrywają się. □

Korzystając z własności jednoznacznego podnoszenia homotopii udowodnimy bardzo ważne twierdzenie o strukturze nakryć nad "walcami", czyli przestrzeniami postaci $X \times I$, powiadające, że nakrycie walca jest walcem.

8.10. Wniosek. *Niech X będzie przestrzenią lokalnie spójną. Niech przekształcenie $p : E \longrightarrow X \times I$ będzie nakryciem i niech $p_0 : E_0 \longrightarrow X$ oznacza obcięcie nakrycia p do podprzestrzeni $X \times \{0\} \subset X \times I$. Istnieje dokładnie jeden izomorfizm nakryć*

$$\begin{tikzcd} E_0 \times I \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "p_0 \times id_I"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X \times I & \end{tikzcd}$$

taki, że $\tilde{f}(e,0) = e$.

Dowód. Rozpatrzmy diagram:

$$\begin{tikzcd} E_0 \times \{0\} \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "i_0"] & E \arrow[d, "p"] \\ E_0 \times I \arrow[r, "p_0 \times id_I"] & X \times I, \end{tikzcd}$$

w którym $j_0(e,0) = e$. Na mocy twierdzenia 8.6 istnieje dokładnie jedno podniesienie $\tilde{f} : E_0 \times I \longrightarrow E$ takie, że $\tilde{f}(e,0) = j_0(e,0) = e$ i $p\tilde{f}(e,t) = (p(e), t)$. Wystarczy pokazać, że $\tilde{f}$ jest homeomorfizmem. Przekształcenie $\tilde{f}$ jest morfizmem nakryć nad przestrzenią $X \times I$, więc z wniosku 7.8 wynika, że wystarczy sprawdzić, iż $\tilde{f}$ jest bijekcją na każdym włóknie. Tak jest dla włókien nad dowolnym punktem postaci $(x,0)$, a stąd dzięki jednoznaczności podnoszenia dróg łatwo wynika, że także nad dowolnym punktem $(x,t) \in X \times I$. □

Zadania

Z 8.1. Udowodnić, że jeżeli $f : Y \longrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością, to dla dowolnego nakrycia $\tilde{X} \longrightarrow X$ odwzorowanie $\tilde{f} : f^*\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ jest homotopijną równoważnością.

Z 8.2. Udowodnić, że jeżeli $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ jest takim morfizmem nakryć nad łukowo spójną i lokalnie spójną przestrzenią X, że $\tilde{f}$ jest bijekcją włókien nad pewnym punktem $x_0 \in X$, to $\tilde{f}$ jest izomorfizmem nakryć.

9. Nakrycia i grupoid podstawowy

Wiemy już, że nakrycia posiadają własność jednoznacznego podnoszenia dróg. Zauważmy także, że z twierdzenia o podnoszeniu homotopii wynika, że homotopijne drogi mają homotopijne podniesienia, co formułujemy w następującym twierdzeniu.

9.1. Twierdzenie. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest nakryciem, to dla dowolnych punktów $x_0, x_1 \in X$ oraz punktu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ odwzorowanie indukowane*

$$p_\sharp : \coprod_{\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)} \pi(\tilde{X}; \tilde{x}_0, \tilde{x}_1) \to \pi(X; x_0, x_1)$$

jest bijekcją.

Dowód. Pokażemy, że przekształcenie odwrotne do $p_\sharp$ jest zadane przez podnoszenie dróg, to znaczy określamy przekształcenie g, $g([\omega]) = [\tilde{\omega}]$, gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem drogi ω o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Zaczynamy od sprawdzenia, że przekształcenie g jest zdefiniowane poprawnie na klasach homotopii dróg. Niech drogi $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ będą rozpoczynającymi się w punkcie $\tilde{x}_0$ podniesieniami dróg ω, $\omega' \in P(X; x_0, x_1)$, takich że $[\omega] = [\omega']$ w $\pi(X; x_0, x_1)$. Niech $H : I \times I \to X$ będzie homotopią ustalającą tę równość. Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccc} I \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \tilde{X} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ I \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Z własności podnoszenia homotopii wynika, że istnieje podniesienie $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ takie, że $p \circ \tilde{H} = H$ oraz $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\omega}$. Pokażemy że homotopia $\tilde{H}$ ustala równość $[\tilde{\omega}] = [\tilde{\omega}']$. Niech $\tilde{\omega}(1) = \tilde{x}_1$. Zauważmy, że homotopia $\tilde{H}$ jest stała na końcach, to jest dla każdego $s \in I$, $\tilde{H}(0, s) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{H}(1, s) = \tilde{x}_1$, bowiem droga zawarta we włóknie musi być stała. Wynika z tego, że droga $\tilde{H}(\cdot, 1)$ jest podniesieniem drogi ω' o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Z jednoznaczności podniesienia mamy zatem równość $\tilde{H}(\cdot, 1) = \omega'$, co kończy dowód tego, że $[\tilde{\omega}] = [\tilde{\omega}']$, więc przekształcenie g jest dobrze określone. To, że jest ono odwrotne do przekształcenia $p_\sharp$ jest oczywiste. $\square$

Własność jednoznaczności podnoszenia dróg implikuje następujący ważny związek podnoszenia ze składaniem dróg.

9.2. Stwierdzenie. *Dla dowolnych dróg $\omega \in P(X; x_0, x_1)$ oraz $\eta \in P(X; x_1, x_2)$ i ich podniesień $\tilde{\omega} \in P(\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ oraz $\tilde{\eta} \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zachodzi równość*

$$\widetilde{\omega \star \eta} = \tilde{\omega} \star \tilde{\eta}$$

$$\widetilde{\omega^{-1}} = \tilde{\omega}^{-1}.$$

Dla dowolnych klas homotopii dróg $[\omega] \in \pi(X; x_0, x_1)$ oraz $[\eta] \in \pi(X; x_1, x_2)$ i ich podniesień $[\tilde{\omega}] \in \pi(\tilde{X}; \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ oraz $[\tilde{\eta}] \in \pi(\tilde{X}; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zachodzi równość

$$\widetilde{[\omega] \star [\eta]} = [\tilde{\omega}] \star [\tilde{\eta}]$$

$$\widetilde{[\omega^{-1}]} = [\tilde{\omega}^{-1}].$$

♡

Z powyższego twierdzenia i stwierdzenia wynika od razu bardzo ważny wniosek, który ze względu na jego wagę nazwiemy twierdzeniem.

9.3. Twierdzenie. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ *jest nakryciem, to dla punktów* $x_0 \in X$ *i* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ *homomorfizm grup podstawowych* $p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ *jest monomorfizmem. Ponadto*

a) podgrupa $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leqslant \pi_1(X, x_0)$ *składa się dokładnie z klas homotopii tych pętli, których podniesienie jest pętlą.*

b) jeżeli $\tilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$ *jest innym punktem we włóknie nad punktem* x_0*, zaś* $\omega \in P(\tilde{X}; \tilde{x}'_0, \tilde{x}_0)$ *drogą w przestrzeni* $\tilde{X}$ *o początku w punkcie* $\tilde{x}'_0$ *a końcu w punkcie* $\tilde{x}_0$*, to*

$$p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) = p_\sharp(\omega) \star (p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) \star p_\sharp(\omega)^{-1}.$$

♡

9.4. Wniosek. *Jeżeli* $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ *jest nakryciem i* $\tilde{X}$ *jest przestrzenią łukowo spójną, to nakrycie p wyznacza klasę sprzężoności podgrup grupy* $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$*.*

Ponadto krotność nakrycia p jest równa indeksowi $|\pi_1(X, x_0) \colon p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))|$*.*

Dowód. Pierwsza część wniosku jest natychmiastowa konsekwencja punktu b) powyższego twierdzenia.

Punktowi $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ przyporządkowujemy prawostronną warstwę $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[p \circ \tau]$ pętli $[p \circ \tau]$, gdzie τ jest drogą o początku w punkcie $\tilde{x}_0$ i końcu w punkcie $\tilde{x}$. Ze stwierdzenia 9.2 i punktu a) twierdzenia 9.3 wynika, że przyporządkowanie to jest bijekcją zbioru $p^{-1}(x_0)$ i zbioru warstw prawostronnych $\pi_1(X, x_0) \backslash p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Zauważmy także, że powyższa bijekcja nie zależy od wyboru drogi łączącej punkt $\tilde{x}_0$ z punktem $\tilde{x}$. □

9.5. Przykład. Rozpatrzmy nakrycie $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$. Dla $n \geq 2$, S^n jest przestrzenią jednospójną, więc z wniosku powyżej wynika, że $|\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)| = 2$, a zatem dla $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2$.

Algebraiczne kryterium istnienia podniesienia

Podamy kryterium, w terminach grupy podstawowej, na to by przekształcenie $f : Y \longrightarrow X$ posiadało podniesienie względem nakrycia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$.

9.6. Twierdzenie. *Niech* $p : (\tilde{X}, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *będzie nakryciem,* $f : Y \longrightarrow X$ *przekształceniem. Niech* $y_0 \in Y$*,* $x_0 = f(y_0)$ *i niech* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$*. Wówczas:*

a) jeżeli przekształcenie $f : Y \longrightarrow X$ *ma podniesienie* $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ *względem nakrycia p, dla którego* $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ *to zachodzi inkluzja*

$$f_\sharp(\pi_1(Y, y_0)) \leqslant p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

b) jeżeli przestrzeń Y jest spójna i lokalnie łukowo spójna oraz $f_\sharp(\pi_1(Y,y_0)) \leqslant p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$, to istnieje dokładnie jedno podniesienie $\tilde{f}: Y \longrightarrow \tilde{X}$ względem nakrycia p, dla którego $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Dowód. Jeżeli istnieje podniesienie $\tilde{f}: (Y,y_0) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x}_0)$, to mamy równość homomorfizmów indukowanych $p_\sharp \circ \tilde{f}_\sharp = (p\circ\tilde{f})_\sharp = f_\sharp$, a stąd wynika, że $\mathrm{im}\, f_\sharp \subset \mathrm{im}\, p_\sharp$. Odwrotnie, załóżmy, że zachodzi inkluzja obrazów homomorfizmów indukowamych. Zdefiniujemy przekształcenie $\tilde{f}: (Y,y_0) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x}_0)$ w następujący sposób: dla dowolnego punktu $y \in Y$ wybierzmy drogę η_y o początku w punkcie y_0 a końcu w punkcie y, a następnie rozważmy drogę $\omega_y = f\circ\eta_y : (I,0) \longrightarrow (X,x_0)$ i znajdźmy jej podniesienie $\tilde{\omega}_y : (I,0) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x}_0)$. Zdefiniujmy $\tilde{f}(y) := \tilde{\omega}_y(1)$. Zaczniemy od sprawdzenia, że wartość $\tilde{f}(y)$ nie zależy od wyboru drogi ω_y. Niech η'_y będzie inną drogą łączącą y_0 z y. Wtedy $[\eta'_y] = [\alpha] \star [\eta_y]$, gdzie $[\alpha] \in \pi_1(Y,y_0)$, a więc $f_\sharp([\eta'_y]) = f_\sharp([\alpha]) \star f_\sharp([\eta_y])$. Z założenia wynika, że istnieje pętla $[\tilde{\beta}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ taka, że $f_\sharp([\alpha]) = p_\sharp([\tilde{\beta}])$. Z wniosku 8.2 otrzymujemy, że $[\tilde{\omega}'_y] = [\tilde{\beta}\star\tilde{\omega}_y]$, a więc w szczególności $\tilde{\omega}_y(1) = \tilde{\omega}'_y(1)$. Aby pokazać ciągłość $\tilde{f}$ skorzystamy z lokalnej łukowej spójności. Dla dowolnego otoczenia $\tilde{U} \ni \tilde{f}(y)$ trzeba znaleźć otoczenie $V \ni y$ takie, że $\tilde{f}(V) \subset U$. Możemy założyć, że $p: \tilde{U} \longrightarrow U \subset X$ jest homeomorfizmem oraz istnieje łukowo spójne otoczenie $V \ni y$ takie, że $f(V) \subset U$. Ustalmy drogę η_y łączącą y_0 z y a dla dowolnego punktu $y' \in Y$ wybierzmy drogę $\gamma_{y'} : (I,0) \longrightarrow (V,y)$ taką, że $\gamma_{y'}(1) = y'$. Rozpatrzmy drogę $\omega_{y'} = f\circ\eta_{y'} = \omega_y \star f\circ\gamma_{y'}$ oraz jej podniesienie $\tilde{\omega}_{y'} = \tilde{\omega}_y \star \widetilde{f\circ\gamma_{y'}}$. Z definicji podniesienia wynika, że $\tilde{f}(y') = \widetilde{f\circ\gamma_{y'}}(1) = p^{-1}(f(y')) \in \tilde{U}$ a więc $\tilde{f}$ jest przekształceniem ciągłym. $\square$

9.7. Wniosek. *Jeżeli Y jest przestrzenią jednospójną i lokalnie łukowo spójną zaś $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem, to dla dowolnego przekształcenia $f: Y \longrightarrow X$ i dowolnych dwóch punktów, $y_0 \in Y$ oraz $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(f(y_0))$ istnieje podniesienie $\tilde{f}: Y \longrightarrow \tilde{X}$ względem nakrycia p, dla którego $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.* $\heartsuit$

Zadania

Z 9.1. Analizując podnoszenie dróg w nakryciu ósemki przy pomocy bukietu trzech okręgów (nad jednym okręgiem z^3, nad drugim z^2 i id) wykazać, że grupa podstawowa ósemki jest nieprzemienna.

Z 9.2. Niech $p: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ będzie nakryciem danym wzorem: $p(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^3)$. Niech $(1,1) \in S^1 \times S^1$ będzie punktem wyróżnionym.

a) Znaleźć krotność tego nakrycia i podgupę $p_*(\pi_1(S^1 \times S^1, (1,1))) \leq \pi_1(S^1 \times S^1, (1,1))$.

b) Niech $q: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ będzie nakryciem danym wzorem: $q(z_1, z_2) = (z_1^3, z_2^2)$. Zbadać, czy istnieje $h: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ będące morfizmem nakrycia q w nakrycie p, tzn. $ph = q$.

c) Znaleźć grupę automorfizmów nakrycia p.

Z 9.3. Udowodnić, że dla dowolnej jednospójnej przestrzeni Y, każde spójne nakrycie $p : \tilde{X} \to X$ indukuje bijekcję $p_\sharp : [(Y, y_0), (\tilde{X}, \tilde{x}_0)] \xrightarrow{\simeq} [(Y, y_0), (X, x_0)]$. Zauważyć, że jeżeli przestrzeń $\tilde{X}$ jest ściągalna, to każde odwzorowanie $Y \to X$ jest ściągalne.

♡ Z 9.4. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Pokazać, że dowolna droga $\omega : I \to X$ zadaje bijekcję $h_\omega : p^{-1}(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1))$, przy czym złożeniu dróg odpowiada złożenie bijekcji.

♡ Z 9.5. Wykazać, że przekształcenie $f : Y \to X$ przestrzeni spójnych, lokalnie łukowo spójnych indukuje izomorfizm $f_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, x_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy nakrycie indukowane przez f z nakrycia uniwersalnego przestrzeni X jest nakryciem uniwersalnym przestrzeni Y.

♡ Z 9.6. Niech G będzie spójną, lokalnie łukowo spójną grupą topologiczną i niech $e \in G$ będzie elementem neutralnym G. Niech $\tilde{G}$ będzie spójne i $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ będzie nakryciem. Niech $h_0 \in \tilde{G}$ będzie takie, że $p(h_0) = e$. Pokazać, że:

a) istnieje dokładnie jedna struktura grupy topologicznej na $\tilde{G}$ taka, że h_0 jest elementem neutralnym i p jest homomorfizmem.

b) jeżeli G jest abelowa, to $\tilde{G}$ także

c) $ker\, p \leq Z(\tilde{G})$

d) grupa automorfizmów nakrycia $p: \tilde{G} \longrightarrow G$ jest izomorficzna z $kerp$.

Z 9.7. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie skończonym spójnym nakryciem. Pokazać, że istnieje pętla w przestrzeni X, której żadne podniesienie nie jest pętlą.

Test

T 9.1. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Jeżeli dwie drogi w przestrzeni X są homotopijne względem swoich końców, to ich podniesienia o tym samym początku mają ten sam koniec.

T 9.2. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Jeżeli dwie drogi w przestrzeni X mają taką własność, że ich dowolne podniesienia o tym samym początku mają ten sam koniec, to drogi te są homotopijne względem swoich końców.

T 9.3. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Jeżeli podniesienia dwóch dróg w przestrzeni X o początku w tym samym punkcie mają ten sam koniec, to podniesienia tych dróg o początku w dowolnym innym punkcie mają ten sam koniec.

T 9.4. Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Jeżeli pewne podniesienie pętli w przestrzeni X jest pętlą, to każde podniesienie tej pętli jest pętlą.

T 9.5. Niech $p: E \longrightarrow B$ będzie spójnym nakryciem. Niech X będzie przestrzenią spójną i lokalnie łukowo spójną oraz $f, g : X \longrightarrow B$ będą przekształceniami homotopijnymi. Jeżeli przekształcenie f ma podniesienie $\tilde{f} : X \longrightarrow E$, $p \circ \tilde{f} = f$, to przekształcenie g także ma podniesienie.

T 9.6. Niech $p: E \longrightarrow B$ będzie spójnym nakryciem. Niech X będzie przestrzenią spójną i lokalnie łukowo spójną oraz $f, g : X \longrightarrow B$ będą przekształceniami homotopijnymi. Jeżeli przekształcenie f ma podniesienie $\tilde{f} : X \longrightarrow E$, $p \circ \tilde{f} = f$, $f(x_0) = e_0$, to istnieje podniesienie $\tilde{g}$ przekształcenia g takie, że $\tilde{g}(x_0) = e_0$.

T 9.7. Jeżeli $p : E \longrightarrow X$ jest nakryciem uniwersalnym, to podniesienie dowolnej nietrywialnej pętli nie jest pętlą.

T 9.8. Jeżeli nakrycie $p: S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ jest dane wzorem: $p(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^3)$, to dla każdego przekształcenia ciągłego $f: \mathbb{R}P^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$ istnieje podniesienie $\tilde{f}: \mathbb{R}P^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$, takie że $p\tilde{f} = f$.

T 9.9. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest n-krotnym, $n > 1$, spójnym nakryciem regularnym przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej B, to liczba automorfizmów tego nakrycia zawsze wynosi $n!$.

T 9.10. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest n-krotnym, $n > 1$, spójnym nakryciem regularnym przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej B, to liczba automorfizmów tego nakrycia zawsze wynosi n.

T 9.11. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest n-krotnym, $n > 1$, spójnym nakryciem regularnym przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej B, to może się zdarzyć, że jedynie identyczność jest automorfizmem $p: E \longrightarrow B$.

10. Klasyfikacja nakryć nad ustaloną przestrzenią

Założenie Ze względu na wagę twierdzenia 8.4 od tego miejsca będziemy zakładać, że wszystkie przestrzenie nad którymi rozpatrywane są nakrycia są **lokalnie łukowo spójne i spójne**. Nie będziemy powtarzać tego założenia w sformułowaniach twierdzeń, ale ono obowiązuje w tym i następnych rozdziałach. Zauważmy, że przestrzeń lokalnie łukowo spójna i spójna jest łukowo spójna.

Dla ustalonej przestrzeni X będziemy rozważać wszystkie nakrycia $p : \tilde{X} \to X$ oraz odwzorowania między nimi. Wybierzmy punkt $x_0 \in X$. Pokażemy, że jeżeli X spełnia pewne lokalne warunki, to nakrycia nad X odpowiadają $\pi_1(X, x_0)$-zbiorom. Oznacza to, że

- każde nakrycie wyznacza $\pi_1(X, x_0)$ zbiór
- morfizmy nakryć są w bijekcji z odwzorowaniami ekwiwariantnymi i co więcej ta bijekcja jest zgodna ze składaniem morfizmów i odwzorowań ekwiwariantnych
- każdy $\pi_1(X, x_0)$ zbiór odpowiada pewnemu nakryciu

Powyższe stwierdzenie można precyzyjnie wyrazić w języku teorii kategorii i brzmi ono:

Twierdzenie. Kategoria nakryć nad spójną i lokalnie łukowo spójną przestrzenią X jest równoważna kategorii $\pi_1(X,x_0)$-zbiorów.

Włókno jako $\pi_1(X, x_0)$-zbiór

Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem i niech $x_0 \in X$ będzie wybranym punktem. Rozpatrzmy zbiór $S := p^{-1}(x_0)$. Zdefiniujemy na nim działanie grupy podstawowej $\pi_1(X, x_0)$ z prawej strony w następujący sposób:

$$\Phi : S \times \pi_1(X, x_0) \to S$$
$$\Phi(\tilde{x}, [\omega]) = \tilde{x} \cdot [\omega] := \tilde{\omega}(1) \in S,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω takim, że $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$. Z rozważań poprzedniego rozdziału wynika, że jest to dobrze zdefiniowane działanie i że ma ono następujące własności:

10.1. Stwierdzenie. *Grupą izotropii punktu $\tilde{x} \in S$ jest podgrupa $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, a jego orbitą wszystkie punkty $\tilde{x}' \in S$ należące do tej samej składowej łukowej przestrzeni $\tilde{X}$, co punkt $\tilde{x}$. W szczególności przestrzeń $\tilde{X}$ nakrycia $p : \tilde{X} \to X$ jest spójna wtedy i tylko wtedy gdy włókno $p^{-1}(x_0)$ jest tranzytywnym $\pi_1(X, x_0)$-zbiorem.* ♡

Jeżeli $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to X_2$ jest morfizmem nakryć nad X, to jego obcięcie do włókna nad punktem x_0 wyznacza odwzorowanie $\tilde{f} : S_1 \to S_2$, gdzie S_1, S_2 oznaczają włókna nad punktem $x_0 \in X$ w nakryciach $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$ odpowiednio. Okazuje się, że odwzorowanie $\tilde{f}$ jest $\pi_1(X, x_0)$-ekwiwariantne i co więcej każdemu ekwiwariantnemu odwzorowaniu $\pi_1(X, x_0)$-zbiorów S_1 i S_2 odpowiada pewien morfizm nakryć.

10.2. Twierdzenie. *Dla dowolnych nakryć $p_i : \tilde{X}_i \to X,\ i = 1, 2$ obcięcie $res : \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \to \mathrm{Map}_{\pi_1(X,x_0)}(S_1, S_2)$ jest bijekcją.*

Dowód. Sprawdzimy najpierw, że obcięcie wyznacza ekwiwariantne odwzorowanie włókien. Istotnie, jeżeli $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem ω o początku w $\tilde{x}$, to $\tilde{f}\circ\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{f}(\tilde{x})$. Stąd z definicji wynika, że $\tilde{f}(\tilde{x})\cdot[\omega] = (\tilde{f}\circ\tilde{\omega})(1) = \tilde{f}(\tilde{\omega}(1)) = f(\tilde{x}\cdot[\omega])$. Zauważmy, że morfizm nakryć jest podniesieniem p_1 względem p_2. Aby wykazać, że res jest różnowartościowe wystarczy zauważyć, że jeżeli $\tilde{f}_{|S_1} = \tilde{f}'_{|S_2}$, to z jednoznaczności podniesienia wynika, że $\tilde{f} = \tilde{f}'$. (Zauważmy, że $\tilde{X}_1$ nie musi być spójne, lecz włókno przecina wszystkie składowe!)

Dla zadanego przekształcenia $\pi_1(X,x_0)$-ekwiwariantnego $f : S_1 \longrightarrow S_2$ musimy skonstruować rozszerzenie $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$. Ponieważ $\tilde{X}_1$ jest lokalnie łukowo spójna, więc składowe łukowej spójności $\tilde{X}_1$ są otwarte i wystarczy zdefiniować $\tilde{f}$ na każdej składowej. Niech $\tilde{x}_1 \in S_1$ oraz $\tilde{x}_2 = f(\tilde{x}_1)$. Ponieważ f jest przekształceniem $\pi_1(X,x_0)$-ekwiwariantnym, więc podgrupa izotropii punktu $\tilde{x}_1$ musi być zawarta w podgrupie izotropii punktu $\tilde{x}_2$, a zatem (na mocy 9.1) $p_\sharp\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1) \leqslant p_\sharp\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$. Z twierdzenia 8.4 wynika istnienie odwzorowania $\tilde{f}$ na składowej łukowej zawierającej punkt $\tilde{x}_1$ takiego, że $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Z jednoznaczności podnoszenia łatwo sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób rozszerzenie przekształcenia f. □

Wykorzystamy powyższe twierdzenie do uczynienia ważnej dygresji dotyczącej automorfizmów ustalonego nakrycia. Dla nakrycia $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ przez $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ będziemy oznaczać grupę jego automorfizmów. Rozpatrzmy przypadek, gdy przestrzeń nakrywająca $\tilde{X}$ jest spójna. Wówczas $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) = \mathrm{Cov}_X(\tilde{X},\tilde{X})$. Można się łatwo o tym przekonać - wystarczy skorzystać z twierdzenia 10.2 i zauważyć, że każdy ekwiwariantny morfizm tranzytywnego $\pi_1(X,x_0)$ zbioru jest automorfizmem. Dla nakryć spójnych twierdzenie 10.2 pozwala na łatwe opisanie grupy $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$. Wybór punktu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, wyznacza izomorfizm $p^{-1}(x_0)$ jako $\pi_1(X,x_0)$ zbioru ze zbiorem warstw prawostronnych $\pi_1(X,x_0)\setminus p_\sharp\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ z działaniem mnożenia z prawej strony. Jego automorfizmy ekwiwariantne zostały opisane we wniosku 2.15 i wobec tego mamy:

10.3. Wniosek. *Jeżeli $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem spójnym, to wybór punktu $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, wyznacza izomorfizm grup*

$$\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \cong (N_{\pi_1(X,x)}p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})))/(p_\sharp(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})))$$

.

W szczególności, jeżeli $\tilde{X}$ jest przestrzenią jednospójną, to istnieje izomorfizm $\pi_1(X,x_0) \cong \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$.

Ostatni wniosek ma kluczowe znaczenie dla obliczania grupy podstawowej; zamiast analizować klasy homotopii pętli w X wystarczy zbadać grupę symetrii jednospójnego nakrycia! Jeżeli prześledzimy określenie izomorfizmów z twierdzenia 10.2 i wniosku 2.15, to izomomorfizm $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \cong \pi_1(X,x_0)$ przyporządkowuje automorfizmowi $\tilde{f}$ klasę pętli $[p\circ\omega_{\tilde{f}}] \in \pi_1(X,x_0)$, gdzie droga $\tilde{\omega}_{\tilde{f}} : I \longrightarrow \tilde{X}$ łączy $\tilde{x}_0$ z $f(\tilde{x}_0)$. (Zauważmy , że klasa homotopii drogi $\tilde{\omega}_{\tilde{f}}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez końce, bo zakładamy, że $\tilde{X}$ jest jednospójna!).

10.4. Przykład. Rozpatrzmy $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$. przestrzeń nakrycia jest ściągalna, a więc tym bardziej jednospójna. Odwzorowanie $\mathbb{Z} \ni n \rightsquigarrow T_n \in \mathrm{Aut}_{S^1}(\mathbb{R})$, gdzie $T_n(t) := t + 2\pi n$ jest oczywiście izomorfizmem. Otrzymujemy stąd, że przyporządkowanie $\mathbb{Z} \ni n \rightsquigarrow [\omega_n] \in \pi_1(S^1, 1)$, gdzie $\omega_n(t) := e^{2\pi i n t}$ jest izomorfizmem grup.

10.5. Przykład. Rozpatrzmy nakrycie $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$. Dla $n \geq 2$, S^n jest przestrzenią jednospójną i przekształcenie antypodyczne jest jedynym nietrywialnym automorfizmem nakrycia. Mamy więc inny dowód faktu $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$

Grupa $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ działa oczywiście z lewej strony na przestrzeni $\tilde{X}$, a także na każdym włóknie $p^{-1}(x)$, $x \in X$.

10.6. Twierdzenie. *Niech $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ będzie spójnym nakryciem. Działanie grupy $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ na przestrzeni $\tilde{X}$ jest właściwie dyskretne a nakrycie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ jest złożeniem nakryć: $\tilde{X} \xrightarrow{q} \tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \xrightarrow{p'} X$. Ponadto następujące warunki są równoważne:*

a) odwzorowanie p' jest homeomorfizmem,

b) działanie $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ na dowolnym włóknie nakrycia jest tranzytywne;

c) dla dowolnego $\tilde{x} \in \tilde{X}$ podgrupa $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \trianglelefteq \pi_1(X, p(\tilde{x}))$ jest normalna.

Dowód:. Niech $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Grupa $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ permutuje składowe $p^{-1}(U)$, gdzie U jest spójnym dobrze nakrytym otoczeniem $p(\tilde{x})$. Wystarczy więc pokazać, że działanie $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ na włóknie zawierającym $\tilde{x}$ jest wolne, lub równoważnie, że działanie $(N_{\pi_1(X,x)} p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})))/(p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})))$ na zbiorze warstw prawostronnych $\pi_1(X, x) \diagdown p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ jest wolne. To ostatnie stwierdzenie jest jednak oczywiste.

Mamy więc nakrycie $\tilde{X} \xrightarrow{q} \tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ i odwzorowanie ciągłe $\tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \xrightarrow{p'} X$. Przekształcenie p' jest ciągłe otwarte i "na". Dowód, że jest nakryciem pozostawiamy czytelnikowi (patrz zadanie). Przekształcenie p' jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowe, czyli wtedy, gdy q utożsamia wszystkie punkty dowolnego włókna, co jest równoważne warunkowi b).

Z twierdzenia 10.2 i wniosku 10.3 wynika od razu, że warunki b) i c) są równoważne. □

10.7. Definicja. *Nakrycie spójne $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ nazywamy* **nakryciem regularnym**, *jeżeli dla pewnego (a zatem dla każdego) punktu $\tilde{x} \in \tilde{X}$, podgrupa $p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \trianglelefteq \pi_1(X, p(\tilde{x}))$ jest normalna.*

10.8. Wniosek. *Jeżeli $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem regularnym, to grupa $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ jest izomorficzna z $\pi_1(X, p(\tilde{x}))/p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.*

Widzimy więc, że nakrycie regularne jest rzutowaniem na przestrzeń orbit działania grupy. W następnym paragrafie zobaczymy, że każde całkowicie dyskretne działanie grupy na przestrzeni spójnej prowadzi do nakrycia regularnego. Szczególnie ważne są nakrycia regularne, dla których przestrzeń nakrywająca jest jednospójna.

10.9. Definicja. *Nakrycie przestrzenią jednospójną nazywamy* **nakryciem uniwersalnym.**

10.10. Wniosek. *Jeżeli $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem oraz $\tilde{X}$ jest przestrzenią jednospójną, to grupa $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$ działa na $\tilde{X}$ z lewej strony oraz*
$\tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \xrightarrow{p'} X$ jest homeomorfizmem.

10.11. Stwierdzenie. *Nakrycie uniwersalne przestrzeni X jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu nakryć.* ♡

Następujące stwierdzenie tłumaczy nazwę "uniwersalne".

10.12. Stwierdzenie. *Niech $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ będzie dowolnym nakryciem uniwersalnym przestrzeni X, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, zaś $p' : \tilde{X}' \longrightarrow X$ jest dowolnym nakryciem spójnym, $\tilde{x}_0' \in \tilde{X}'$ i $p(\tilde{x}_0) = p'(\tilde{x}_0')$. Wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm nakryć $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ dla którego $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$* ♡

Dowody obu twierdzeń są jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności podniesienia przekształceń.

Powracamy do rozważań o odpowiedniości nakryć nad ustaloną przestrzenią X i $\pi_1(X, x_0)$ – zbiorów. Pozostało nam pokazanie, że dla dowolnego $\pi_1(X, x_0)$ – zbioru S istnieje nakrycie $p_S : \tilde{X}_S \longrightarrow X$ takie, że istnieje ekwiwariantna bijekcja $p^{-1}(x_0) \simeq S$. W tym celu sformułujemy najpierw twierdzenie o istnieniu nakrycia uniwersalnego.

10.13. Definicja. *Powiemy, że w przestrzeni X małe pętle są ściągalne, jeżeli istnieje pokrycie przestrzeni X zbiorami otwartymi $\{V_i\}_{i \in I}$ takie, że dowolna pętla $\omega : I \longrightarrow V_i$ leżąca w pewnym zbiorze V_i jest ściągalna w X.*

Uwaga: W literaturze taka przestrzeń nazywa się *pół-lokalnie jednospójną (semi-locally 1-connected)*, ale zaproponowana wyżej nazwa wydaje się bardziej intuicyjna.

10.14. Uwaga.. *Jeżeli $\tilde{X} \longrightarrow X$ jest nakryciem uniwersalnym, to w przestrzeni X małe pętle są ściągalne.* ♡

10.15. Twierdzenie. *Jeżeli w przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej małe pętle są ściągalne, to istnieje nakrycie uniwersalne $p : \tilde{X} \longrightarrow X$.*

Dowód tego twierdzenia odłożymy do nastepnego rozdziału a obecnie wykorzystamy istnienie nakrycia uniwersalnego do skonstruowania nakrycia odpowiadającego dowolnemu $\pi_1(X, x_0)$ – zbiorowi.

"Skręcony" produkt G-przestrzeni

10.16. Definicja. *Niech G będzie grupą działającą z prawej strony na przestrzeni S oraz z lewej strony na przestrzeni T. Na zbiorze $S \times T$ definiujemy działanie z prawej strony wzorem $(s, t)g := (sg, g^{-1}t)$.* **Produktem skręconym G-przestrzeni**

nazywamy przestrzeń orbit tego działania: $S \times_G T := (S \times T)/G$. *Produkt skręcony oznaczamy symbolem* $S \times_G T$.

Uwaga: Zauważmy, że równoważnie można określić produkt skręcony $S \times_G T$ jako przestrzeń otrzymaną w wyniku podzielenia $S \times T$ przez najmniejszą relację równoważności zawierającą relacje $(sg, t) \sim (s, gt)$ dla $s \in S$, $t \in T$, $g \in G$.

10.17. Przykłady. Jeżeli $S = G \diagdown H$ jest zbiorem warstw prawostronnych względem podgrupy H z działaniem mnożenia z prawej strony, to $G \diagdown H \times_G T \cong T/H$. W szczególności jeżeli $H = \{1\}$, to $G \times_G T \cong T$, a jeżeli $H = G$, to $\{*\} \times_G T \cong T/G$. Analogicznie, jeżeli $T = G/H$, to $S \times_G G/H \cong S/H$ jest przestrzenią orbit działania podgrupy H na przestrzeni S.

10.18. Uwaga.. *Niech* $p : T \longrightarrow T/G$ *będzie przekształceniem na przestrzeń orbit działania* G *na* T. *Zauważmy, że dobrze zdefiniowane jest przekształcenie* $p_S : S \times_G T \longrightarrow T/G$ *zadane wzorem* $p_S([(s,t)]) = [t]$ *i* $p_S^{-1}([t]) = S \times_G p^{-1}([t])$. *Wybór punktu* $t_0 \in [t]$ *w orbicie definiuje izomorfizm* $p_S^{-1}([t]) \cong S \times_G G/G_{t_0} \cong S/G_{t_0}$.

Odnotujmy szczególny przypadek powyższych rozważań. Załóżmy, że działanie grupy G na przestrzeni T jest wolne i rozpatrzmy $p_S : S \times_G T \longrightarrow T/G$. Wówczas dla każdego punktu $[t] \in T/G$, $p_S^{-1}([t]) \cong S$. Możemy więc powiedzieć, że operacja skręconego produktu w miejsce każdej wolnej orbity "wstawiła" przestrzeń S.

Wykorzystamy teraz "skręcony" produkt do zbudowania nakrycia odpowiadającego danemu $\pi_1(X, x_0)$-zbiorowi. Dla uproszczenia zapisu grupę $\pi_1(X, x_0)$ oznaczać będziemy dalej przez π. Niech $p : \tilde{X}_\pi \longrightarrow X$ będzie nakryciem uniwersalnym. Zgodnie z twierdzeniem 10.7, przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest lewym π – zbiorem i $\tilde{X}_\pi/\pi \cong X$. Dla danego prawego $\pi_1(X, x_0)$ – zbioru S zdefiniujemy przestrzeń
$\tilde{X}_S := S \times_\pi \tilde{X}_\pi$ oraz odwzorowanie $p_S : \tilde{X}_S \longrightarrow X$ wzorem $p_S([s, \tilde{x}]) := p(\tilde{x})$.

10.19. Stwierdzenie. *Odwzorowanie* $p_S : \tilde{X}_S \longrightarrow X$ *jest nakryciem. Ponadto* π*-zbiór przyporządkowany nakryciu* $p_S : \tilde{X}_S \longrightarrow X$ *jest izomorficzny z* S.

Dowód. Z definicji natychmiast wynika, że dla dowolnego podzbioru $U \subset X$, $p_S^{-1}(U) = S \times_\pi p^{-1}(U)$. Jeżeli U jest zbiorem, nad którym nakrycie uniwersalne p jest trywialne, to mamy ekwiwariantny homeomorfizm π – przestrzeni $h : p^{-1}(U) = U \times \pi$. Definiujemy przekształcenie $h_U : S \times_\pi p^{-1}(U) \longrightarrow U \times S$ wzorem $h_U([s, \tilde{x}]) := (p(\tilde{x}), s \cdot pr_2 h(\tilde{x}))$. Łatwo sprawdzić, że przekształcenie h_U jest homeomorfizmem i $\pi_u \cong h_U = p_S$, co dowodzi, że odwzorowanie p_S jest nad U nakryciem trywialnym z włóknem S. Niech $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ będzie ustalonym punktem we włóknie nad punktem x_0. Mamy oczywistą bijekcję zbiorów $\varphi : S \longrightarrow p_S^{-1}(x_0)$ zadaną wzorem $\varphi(s) = [s, \tilde{x}_0]$. Pozostaje pokazać, że bijekcja φ jest ekwiwariantna. Niech $\omega : I \longrightarrow X$ będzie pętlą zaczepioną w punkcie $x_0 \in X$ a $\tilde{\omega} : I \longrightarrow \tilde{X}$ jej podniesieniem do $\tilde{X}_\pi$ o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Wzór $\tilde{\omega}_S(t) = [s_0, \tilde{\omega}(t)]$ definiuje podniesienie pętli ω do $\tilde{X}_S$ o początku w punkcie $[s_0, \tilde{x}_0]$. Zgodnie z definicją działania π na $p_S^{-1}(x_0)$, $[s_0, \tilde{x}_0]\omega = \tilde{\omega}_S(1) = [s_0, \tilde{\omega}(1)] = [s_0\,, [\omega]\tilde{x}_0] = [s_0[\omega]\,, \tilde{x}_0]$. $\square$

Na koniec sformułujmy będące wnioskiem z powyższych rozważań twierdzenie o klasyfikacji spójnych nakryć nad przestrzenia spójna, lokalnie łukowo spójną w której małe pętle są ściągalne. Czynimy to ze względu na podobieństwo (nie przypadkowe!) ze sformułowaniem twierdzenia Galois o rozszerzeniu ciał.

10.20. Twierdzenie. *Niech $p : \tilde{X}_\pi \longrightarrow X$ będzie ustalonym nakryciem uniwersalnym przestrzeni X. Niech $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_\pi$, $p(\tilde{x}_0) = x_0$ wyznacza izomorfizm grupy $Aut\tilde{X}_\pi$ i $\pi_1(X, x_0)$.*

a) Niech H będzie podgrupą grupy $\pi_1(X, x_0)$. Niech $p_H : \tilde{X}_\pi/H \longrightarrow X$ będzie przekształceniem indukowanym przez p i lewostronne działanie $\pi_1(X, x_0)$ na $\tilde{X}$. Wówczas $p_H : \tilde{X}_\pi/H \longrightarrow X$ jest nakryciem i H jest obrazem homomorfizmu $p_{H\sharp} : \pi_1(\tilde{X}_\pi/H, p_H(\tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$.

b) Nakrycie $p_H : \tilde{X}_\pi/H \longrightarrow X$ jest regularne wtedy i tylko wtedy gdy H jest normalną podgrupą $pi_1(X, x_0)$.

c) Jeżeli $q : \tilde{Y} \longrightarrow X$ jest spójnym nakryciem, $q(y_0) = x_0$ i H jest obrazem homomorfizmu $q_sharp : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, to istnieje dokładnie jeden izomorfizm nakryć $\tilde{f} : \tilde{X}_\pi/H \longrightarrow \tilde{Y}$ dla którego $\tilde{f}(p_H(\tilde{x}_0)) = \tilde{y}_0$.

Dowód jest oczywisty, gdyż $G\diagdown H \times_G \tilde{X}_\pi = \tilde{X}_\pi/H$.

Konstrukcja nakrycia uniwersalnego

Podamy teraz dowód twierdzenia 9.11, a więc konstrukcję jednospójnego nakrycia dowolnej spójnej, lokalnie łukowo spójnej przestrzeni, w której małe pętle są ściągalne. Nadal grupę $\pi_1(X, x_0)$ oznaczać będziemy przez π. Aby lepiej umotywować konstrukcję użytą w dowodzie załóżmy, że $p : \tilde{X}_\pi \to X$ jest jednospójnym nakryciem i spróbujemy odtworzyć przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ z danych o przestrzeni X. Wybierzmy punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_\pi$ i niech $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Rozpatrzmy zbiór $P(X, x_0)$ składający się ze wszystkich dróg, które zaczynają się w punkcie x_0. Rozpatrzmy odwzorowanie zbiorów $q : P(X, x_0) \to \tilde{X}_\pi$ zdefiniowane jak następuje: dla drogi $\omega \in P(X, x_0)$ wybieramy jej podniesienie $\tilde{\omega}$ o początku w punkcie $\tilde{x}_0$. Połóżmy $q(\omega) := \tilde{\omega}(1)$. Ponieważ przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest łukowo spójna, więc odwzorowanie q jest surjekcją. Zbadajmy kiedy $\tilde{\omega}(1) = q(\omega) = q(\eta) = \tilde{\eta}(1)$. Zauważmy, że skoro początki i końce podniesień są równe a przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest jednospójna, to drogi $\tilde{\omega}$ i $\tilde{\eta}$ są homotopijne, a więc także drogi $\omega = p \circ \tilde{\omega}$ oraz $\eta = p \circ \tilde{\eta}$ są homotopijne. Odwrotnie, z twierdzenia 8.1 wynika, że jeżeli drogi ω i η są homotopijne, to ich podniesienia mają wspólny koniec.

Podsumowując powyższe otrzymujemy bijekcję $q : P(X, x_0)/\sim \xrightarrow{\simeq} \tilde{X}_\pi$, gdzie $\sim$ jest relacją homotopii dróg względem końców.

Dowód twierdzenia 10.6. Określmy zbiór $\tilde{X}_\pi := P(X, x_0)/\sim$ i odwzorowanie $p(\omega) = \omega(1)$. Pozostaje zdefiniować topologię w zbiorze $\tilde{X}_\pi$ tak, aby p było nakryciem i wykazać jednospójność $\tilde{X}_\pi$ w tej topologii.

Dla zbioru otwartego $U \subset X$ oraz drogi $\omega \in P(X, x_0)$ takiej, że $\omega(1) \in U$ definiujemy zbiór $\langle \omega, U \rangle := \{\omega \star \eta : \eta : I \to U\,,\, \eta(0) = \omega(1)\}$; tak samo będziemy oznaczać jego obraz w zbiorze ilorazowym $\tilde{X}_\pi$.

Sprawdzimy, że zbiory $\{\langle\omega, U\rangle : \omega \in P(X, x_0)\,, U \ni \omega(1)\}$ tworzą bazę pewnej topologii w $\tilde{X}_\pi$. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnych dwóch zbiorów $\langle\omega, U\rangle$, $\langle\omega', V\rangle$ oraz drogi $\alpha \in \langle\omega, U\rangle \cap \langle\omega', V\rangle$ zachodzi inkluzja $\alpha \in \langle\alpha, U \cap V\rangle \subset \langle\omega, U\rangle \cap \langle\omega', V\rangle$. Odwzorowanie p jest surjekcją i jest ciągłe w tej topologii, bowiem dla każdego $U \ni p(\omega) = \omega(1)$ mamy $\langle\omega, U\rangle \subset p^{-1}(U)$. Odwzorowanie p jest także otwarte, bo jeżeli U jest otoczeniem łukowo spójnym to $p(\langle\omega, U\rangle) = U$. Co więcej, jeżeli U jest podzbiorem łukowo spójnym takim, że pętle mieszczące się w U są ściągalne w X, to $p : \langle\omega, U\rangle \to U$ jest bijekcją.

Stąd już łatwo wynika, że p jest nakryciem. Niech $U \subset X$ będzie łukowo spójnym podzbiorem otwartym, takim że każda pętla w U jest ściągalna w X. Istnieje bijekcja $p^{-1}(U) = \coprod_{\gamma\in\pi} \langle\gamma \star \omega, U\rangle$, gdzie $\omega \in P(X, x_0)$ jest dowolną drogą kończącą się w U. Ponieważ p jest homeomorfizmem na każdym zbiorze $\langle\gamma \star \omega, U\rangle$, więc wynika stąd, że p jest nakryciem trywialnym nad U. Pozostaje sprawdzić, że przestrzeń $\tilde{X}_\pi$ jest jednospójna. Jest ona łukowo spójna, bowiem dowolną klasę drogi $[\omega]$ można połączyć z klasą drogi stałej $[\omega_{x_0}]$ w x_0 przy pomocy drogi $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}(t)(s) = [\omega\,(ts)]$ (sprawdzić ciągłość odwzorowania $\tilde{\omega}: I \longrightarrow \tilde{X}_\pi$).

Żeby zakończyć dowód jednospójności $\tilde{X}_\pi$, na mocy wniosku 8.3 a), wystarczy pokazać, że podniesienie dowolnej pętli w X, która nie jest ściągalna, nie jest pętlą. Zauważmy, że zdefiniowana wyżej droga $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem drogi ω, bo $p([\tilde{\omega}(t)]) = \tilde{\omega}(t)(1) = \omega(t)$. Jeżeli pętla ω nie jest ściągalna, to pętla stała $\tilde{\omega}(0) = [\omega_{x_0}]$ nie jest homotopijna z pętlą $[\omega] = \tilde{\omega}(1)$, co oznacza, że $\tilde{\omega}(0) \neq \tilde{\omega}(1)$. $\square$

Zadania

Z 10.1. Niech $\tilde{X} \to X$ będzie nakryciem uniwersalnym. Wówczas na włóknie $p^{-1}(x_0)$ działa grupa $Aut_X(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$ z lewej strony. Grupa $\pi_1(X, x_0)$ działa na włóknie nad x_0 także z prawej strony. Pokazać, że działania te pokrywaja sie wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $\pi_1(X, x_0)$ jest przemienna.

Z 10.2. Niech $p: \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem przestrzeni spójnej odpowiadającym π – zbiorowi S. Niech $f: Y \to X$ będzie przekształceniem ciągłym, $f(y_0) = x_0$. Wykazać, że nakrycie indukowane przez f odpowiada zbiorowi S z działaniem grupy podstawowej $\pi_1(Y, y_0)$ wyznaczonym przez homomorfizm indukowany $f_\sharp: \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Podać warunek konieczny i dostateczny na to, by nakrycie indukowane było spójne. Pokazać, że homotopijne odwzorowania indukują izomorficzne nakrycia.

Z 10.3. Znaleźć nakrycie $S^1 \vee S^1$ odpowiadające komutantowi $\pi_1(S^1 \vee S^1, *)$.
Wskazówka: rozpatrzeć nakrycie $S^1 \vee S^1$ indukowane przez włożenie $S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ i nakrycie uniwersalne torusa.

Z 10.4. * Podać przykład przestrzeni łukowo spójnej o trywialnej grupie podstawowej, która posiada nietrywialne nakrycie spójne. Pokazać, że dla przestrzeni lokalnie łukowo spójnej takiego przykładu podać nie można (twierdzenie o podnoszeniu przekształceń wymaga założenia lokalnej łukowej spójności).

Z 10.5. Opisać nakrycie uniwersalne $S^1 \vee S^1$.

Z 10.6. Opisać wszystkie spójne nakrycia następujących przestrzeni: S^1, S^2, $S^1 \vee S^2$, $S^1 \times S^1$.

Z 10.7. Niech G będzie podgrupą izometrii płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ generowaną przez przekształcenia $f(x, y) = (x + 1, y)$ i $g(x, y) = (1 - x, y + 1)$. (patrz zad.3.12)

a) Znaleźć nakrycie odpowiadające podgrupie generowanej przez f. Czy jest ono regularne? Jaka jest jego krotność?

b) Znaleźć dwukrotne nakrycie butelki Kleina, tak by przestrzenią nakrywającą był torus. Jakiej podgrupie grupy G odpowiada znalezione nakrycie? Czy każde dwa dwukrotne nakrycia butelki Kleina torusem są izomorficzne?

c) Czy dla każdego dwukrotnego nakrycia butelki Kleina przestrzeń nakrywająca jest homeomorficzna z torusem?

d) Znaleźć nieregularne nakrycie butelki Kleina.

f) Czy istnieje nakrycie butelki Kleina przy pomocy płaszczyzny rzutowej?

g) Znaleźć nakrycie butelki Kleina odpowiadające komutantowi $[G, G]$.

Z 10.8. Udowodnić, że jeżeli przestrzeń spójna, lokalnie łukowo spójna w której małe pętle są ściągalne posiada nakrycie, którego przestrzeń jest homotopijnie równoważna z grafem, to nakrycie uniwersalne tej przestrzeni jest ściągalne.

Test

T 10.1. Każde nakrycie skończone jest nakryciem regularnym.

T 10.2. Każde nakrycie regularne jest skończone.

T 10.3. Każde nakrycie dwukrotne jest regularne.

T 10.4. Każda spójna i lokalnie ściągalna przestrzeń posiada nakrycie uniwersalne.

T 10.5. Nakrycie uniwersalne przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej, o ile istnieje, to ma nieskończoną krotność.

T 10.6. Istnieją dwa różne spójne nakrycia $S^2 \times S^2$.

T 10.7. Każde przekształcenie $S^2 \to K$, gdzie K jest butelką Kleina jest homotopijne stałemu.

T 10.8. Niech $p: E \longrightarrow B$ będzie nakryciem skończonym. Wówczas liczba jego automorfizmów jest skończona i co najwyżej równa jego krotności.

T 10.9. Istnieje nakrycie $f: S^2 \longrightarrow K$, gdzie K jest butelką Kleina.

T 10.10. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest nakryciem nad przestrzenią lokalnie łukowo spójną, to dla dowolnej permutacji $\sigma: p^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$, gdzie $b \in B$ istnieje automorfizm $f: E \longrightarrow E$ taki, że $f_{|p^{-1}(b)} = \sigma$.

T 10.11. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest nakryciem regularnym nad przestrzenią lokalnie łukowo spójną, to dla dowolnej permutacji $\sigma: p^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$, gdzie $b \in B$ istnieje automorfizm $f: E \longrightarrow E$ taki, że $f_{|p^{-1}(b)} = \sigma$.

T 10.12. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest spójnym, skończonym nakryciem przestrzeni lokalnie łukowo spójnej takim, że liczba jego automorfizmów jest równa jego krotności, to $p: E \longrightarrow B$ jest nakryciem uniwersalnym;

T 10.13. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest spójnym, skończonym nakryciem przestrzeni lokalnie łukowo spójnej takim, że liczba jego automorfizmów jest równa jego krotności, to $p: E \longrightarrow B$ jest nakryciem regularnym.

T 10.14. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest spójnym, skończonym nakryciem przestrzeni lokalnie łukowo spójnej takim, że liczba jego automorfizmów jest równa jego krotności, to dla każdej pętli $\omega \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ jej podniesienie o początku w dowolnym punkcie $p^{-1}(b_0)$ jest pętlą.

T 10.15. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest spójnym dwukrotnym nakryciem przestrzeni lokalnie łukowo spójnej, to istnieje działanie bez punktów stałych grupy $\mathbb{Z}_2$ na przestrzeni E, takie że $E/\mathbb{Z}_2 = B$.

T 10.16. Jeżeli $p: E \longrightarrow B$ jest spójnym dwukrotnym nakryciem przestrzeni lokalnie łukowo spójnej, to nakrycie uniwersalne przestrzeni B, o ile istnieje, to jest nieskończone lub jego krotność jest parzysta.

T 10.17. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją nie izomorficzne spójne n – krotne nakrycia torusa.

T 10.18. Jeżeli $p\colon E \longrightarrow S^1 \times S^1$ jest spójnym nakryciem skończonym, to E jest torusem.

T 10.19. Istnieje nakrycie $S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1 \# S^1 \times S^1)$.

T 10.20. Można tak zdefiniować relację równoważności $\sim$ na butelce Kleina K aby $K/\sim$ było homeomorficzne z RP^2.

T 10.21. Istnieje przekształcenie ciągłe $f\colon K \longrightarrow RP^2$, gdzie K oznacza butelkę Kleina, takie że przekształcenie indukowane na grupie podstawowej jest nietrywialne.

T 10.22. Istnieje nakrycie $K \longrightarrow RP^2$, gdzie K oznacza butelkę Kleina.

T 10.23. Istnieje przekształcenie ciągłe $p : S^1 \times S^2 \longrightarrow S^3$ będące lokalnym homeomorfizmem.

T 10.24. Istnieje nakrycie $S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$

T 10.25. Istnieje nakrycie $S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1$

T 10.26. Istnieje działanie grupy Z_2 na $S^1 \vee S^1$, takie że $S^1 \vee S^1/Z_2 = S^1$.

T 10.27. W spójnym i skończonym nakryciu $S^1 \vee S^1$ przestrzeń nakrywająca ma typ homotopijny bukietu parzystej liczby okręgów.

T 10.28. Dla dowolnych dwóch spójnych nakryć $S^1 \vee S^1$ tej samej krotności przestrzenie nakrywające są homotopijnie równoważne.

T 10.29. Każde dwa spójne dwukrotne nakrycia $S^1 \vee S^1$ są izomorficzne.

T 10.30. Dla dowolnego n istnieją co najmniej dwa nie izomorficzne spójne nakrycia $S^1 \vee S^1$ krotności n.

T 10.31. Niech $a, b \in R^2$ będą różnymi punktami. Istnieje nakrycie $R^2 \setminus \{a, b\} \longrightarrow R^2 \setminus \{a\}$.

T 10.32. Istnieje nieskończone nakrycie $RP^2 \times RP^2$.

T 10.33. Liczba morfizmów nakrycia $p\colon S^1 \longrightarrow S^1$, $p(z) = z^6$ w nakrycie $q\colon S^1 \longrightarrow S^1$, $q(z) = z^3$ wynosi ______.

T 10.34. Istnieje nakrycie $p\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$.

11. G – nakrycia

W poprzednich rozdziałach badaliśmy wszystkie nakrycia nad ustaloną przestrzenią X. Teraz zajmiemy się bardziej szczególnym geometrycznym pytaniem. Dla danej grupy G będziemy szukać działań lewostronnych, których przestrzenie orbit są homeomorficzne z ustalona przestrzenią X. Najprostszy przykład jest następujący: rozważamy przestrzeń $X \times G$ z działaniem danym wzorem: $g(x, h) := (x, gh)$.

11.1. Definicja. *Niech G będzie grupą a $p : \tilde{X} \to X$ będzie nakryciem. Powiemy, że p jest G-nakryciem jeżeli na przestrzeni $\tilde{X}$ jest zadane wolne działanie (z lewej strony) grupy G, oraz istnieje homeomorfizm $h : \tilde{X}/G \xrightarrow{\cong} X$ taki, że $h \circ q = p$, gdzie $q : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ jest rzutowaniem na przestrzeń orbit działania.*

Zauważmy, że wolne działanie spełniające warunki powyższej definicji musi być całkowicie dyskretne.

11.2. Stwierdzenie. *Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest spójnym G – nakryciem, to jest ono nakryciem regularnym i istnieją naturalne izomorfizmy grup $G \simeq \mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X, p(\tilde{x}))/p_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$.*

Dowód. Zdefiniujemy odwzorowanie $G \ni g \rightsquigarrow \tilde{X} \xrightarrow{g} \tilde{X} \in \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$, które z definicji działania grupy jest homomorfizmem, a ponieważ działanie jest wolne, także monomorfizmem. Sprawdzimy, że jest to epimorfizm. Niech $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ będzie automorfizmem nakrycia. Wybierzmy punkt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ i jego obraz $f(\tilde{x}_0)$. Działanie grupy G na włóknie $p^{-1}(x_0)$ jest tranzytywne, więc istnieje element $g \in G$ taki, że $g\tilde{x}_0 = f(\tilde{x}_0)$. Ze spójności $\tilde{X}$ i z twierdzenia o jednoznaczności podniesienia wynika, że $f = g$. Zatem przestrzeń orbit $\tilde{X}/\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ jest homeomorficzna z X. Teza wynika z Twierdzenia 10.6 i Wniosku 10.8. □

Zatem spójne G – nakrycie nad X wyznacza normalną podgrupę grupy podstawowej, dla której grupa ilorazowa jest izomorficzna z G. Odpowiedniość ta, jak się przekonamy, nie jest wzajemnie jednoznaczna: "różnym" G– nakryciom może odpowiadać ta sama podgrupa normalna. Zacznijmy od definicji.

11.3. Definicja. *Morfizmem G-nakryć (lub G– morfizmem) nad X nazywamy G-ekwiwariantne przekształcenie $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ takie, że $p_1 = p_2 \circ f$. Zbiór G – morfizmów będziemy oznaczać $\mathrm{Cov}_{G,X}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.*

Morfizm G-nakryć nad X nazywamy G – izomorfizmem, jeżeli ma G – morfizm odwrotny.

Jest jasne, że $\mathrm{Cov}_{G,X}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \subseteq \mathrm{Cov}_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. Zauważmy też, że każdy G – morfizm nakryć spójnych jest G – izomorfizmem, bo wyznacza bijekcję na włóknach i morfizm odwrotny jest oczywiście ekwiwariantny.

Rozpatrzmy przykłady:

11.4. Przykład. Jeżeli oba G-nakrycia $\tilde{X}_i \to X$, i=1,2 są nakryciami trywialnymi $X_i = X \times G$, to dowolne przekształcenie zbioru $G \to G$ wyznacza ich morfizm.

G – morfizmów jest jednak znacznie mniej, bo tyle ile elementów grupy G, gdyż obraz dowolnego punktu np. postaci $(x, 1)$ wyznacza już przekształcenie ekwiwariantne.

11.5. Przykład. Niech $\mathbb{Z}_3 = \{1, \rho, \rho^2\}$. Niech $\zeta = exp\frac{2\pi i}{3}$. Rozważmy dwa działania $\mathbb{Z}_3$ na sferze S^1: w pierwszym automorfizm wyznaczony przez generator ρ jest mnożeniem przez ζ a w drugim mnożeniem przez ζ^2. Oba działania prowadzą do trzykrotnego nakrycia regularnego $S^1 \to S^1$ odpowiadającego podgrupie $3\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$. Nakrycia te są izomorficzne, ale nie jako G– nakrycia, gdyż żaden z trzech izomorfizmów nie jest ekwiwariantny.

Dla dalszych rozważań ustalmy grupę G, przestrzeń X i wyróżnijmy punkt $x_0 \in X$. Niech $\tilde{X}_0 \to X$ będzie nakryciem uniwersalnym przestrzeni X z wyróżnionym punktem $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$.

11.6. Twierdzenie. *Niech $p : \tilde{X} \to X$ będzie G-nakryciem. Wówczas*

a) Wybór punktu $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ definiuje homomorfizm $\varphi_{\tilde{x}} \colon \pi_1(X, x_0) \to G$. Odwrotnie, dla każdego homomorfizmu $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$ istnieje G– nakrycie $p : \tilde{X} \to X$ i punkt wyróżniony $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, dla którego $\varphi_{\tilde{x}} = \varphi$.

b) Jeżeli $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}$, $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x_0)$, to wyznaczone przez te punkty homomorfizmy różnią się o automorfizm wewnętrzny grupy G, to znaczy istnieje element $g \in G$, taki że $\varphi_{\tilde{x}'} = (g \cdot g^{-1}) \circ \varphi_{\tilde{x}}$.

c) Jeżeli $p : \tilde{X} \to X$ jest G-nakryciem spójnym i $\varphi_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x_0) \to G$ homomorfizmem wyznaczonym przez $\tilde{x} \in \tilde{X}$, to podgrupą wyznaczającą klasę izomorfizmu nakrycia p (zapominamy o działaniu G!) jest $\ker \varphi_{\tilde{x}} \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$.

d) Jeżeli $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$,$p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ są G-nakryciami z wyróżnionymi punktami $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ i wyznaczone przez te punkty homomorfizmy $\varphi_{\tilde{x}_1}$ i $\varphi_{\tilde{x}_2}$ są równe, to istnieje G-izomorfizm nakryć $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, dla którego $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. .

Dowód. a) Wybór punktu $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ pozwala określić bijekcję $G \to p^{-1}(x_0)$ w której elementowi $g \in G$ przyporządkowany jest punkt $g(\tilde{x})$. Jej odwrotność oznaczymy symbolem $\nu_{\tilde{x}}$. Homomorfizm $\varphi_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x_0) \to G$ definiujemy wzorem $\varphi_{\tilde{x}}([\omega]) = \nu_{\tilde{x}}(\tilde{\omega}(1))$ gdzie $\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{x}$. Pozostaje sprawdzić, że istotnie jest to homomorfizm, co pozostawiamy czytelnikowi. Jeżeli mamy dany homomorfizm $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$, to definiuje on działanie $\pi_1(X, x_0)$ na zbiorze G przez prawe przesunięcia. Definiujemy G-nakrycie $p_\phi : \tilde{X}_\phi \to X$ wzorem $\tilde{X}_\phi := G \times_\pi \tilde{X}_0$. Działanie grupy G na X_ϕ zadane jest wzorem $g[h, \tilde{x}] = [gh, \tilde{x}]$, a wyróżnionym punktem jest $\tilde{x} = [e, \tilde{x}_0]$. Sprawdzenie, że $\varphi_{\tilde{x}} = \varphi$ pozostawiamy czytelnikowi,

b) Niech $g \in G$ będzie takim elementem, że $g(\tilde{x}) = \tilde{x}'$. Wówczas $\nu_{\tilde{x}} = \nu_{\tilde{x}'} g$. Niech $\tilde{\omega}$ będzie podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{x}$. Wówczas $g\tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli ω o początku w punkcie $\tilde{x}'$. Mamy $\varphi_{\tilde{x}'}([\omega]) = \nu_{\tilde{x}'}(g\tilde{\omega}(1)) = g\nu_{\tilde{x}'}(\tilde{\omega}(1)) = g\nu_{\tilde{x}}(\tilde{\omega}(1))g^{-1} = g\varphi_{\tilde{x}}([\omega])g^{-1}$.

c) Z określenia homomorfizmu $\varphi_{\tilde{x}}$ jest jasne, że $\ker \varphi_{\tilde{x}} = p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, co dowodzi tezy.

d) Z poprzedniego punktu wynika, że $p_{1\sharp}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)) = p_{2\sharp}(\pi_2(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$, co w świetle kryterium istnienia podniesienia oznacza, że istnieje dokładnie jeden morfizm nakryć $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$, dla którego $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Z równości homomorfizmów $\varphi_{\tilde{x}_1} = \varphi_{\tilde{x}_2}$ wynika natomiast, że jest on przekształceniem ekwiwariantnym.

Dla grupy G oznaczmy przez $\mathrm{Inn}(G)$ grupę automorfizmów wewnętrznych grupy G. Grupa ta działa przez składanie na zbiorze $\mathrm{Hom}\,(H,\,G)$, gdzie H.jest dowolna grupą. Przez $\mathrm{Rep}(H,G)$ oznaczamy zbiór orbit $\mathrm{Hom}\,(H,\,G)/\,\mathrm{Inn}(G)$.

Dla grupy G i przestrzeni X przez $\mathrm{Cov}_G(X)$ oznaczamy zbiór klas G– izomorfizmu G–nakryć nad X.

11.7. Wniosek. *Niech G będzie grupą a (X,x_0) przestrzenią z wyróżnionym punktem. Istnieje naturalna bijekcja zbiorów*
$$\mathrm{Cov}_G(X) \longrightarrow \mathrm{Rep}\,(\pi_1(X,x_0)\,,\,G).$$

11.8. Przykład. Dla nakrycia trywialnego $X \times G \longrightarrow X$ i dowolnego punktu $\tilde{x} \in X \times G$ wyznaczony przezeń homomorfizm jest trywialny.

11.9. Przykład. Wróćmy do przykładu 11.5. Niech $1 \in S^1$ będzie punktem wyróżnionym zarówno w przestrzeni nakrywanej jak i nakrywającej, Dla pierwszego działania homomorfizm $\pi_1(S^1,1) = \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ posyła generator grupy $\mathbb{Z}$ na element ρ, dla drugiego działania na element ρ^2. Dla obu homomorfizmów jądro jest równe podgrupie $3\mathbb{Z}$, więc nakrycia są izomorficzne. Homomorfizmy te nie różnią się o automorfizm wewnętrzny ($\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}_3) = 1$) więc rozpatrywane $\mathbb{Z}_3$- nakrycia nie są $\mathbb{Z}_3$–izomorficzne.

Zadania

Z 11.1. Wykazać, że nakrycie indukowane z G-nakrycia jest G-nakryciem.

Z 11.2. Wykazać, że operację sklejania nakryć opisaną w rozdziale 7 można przenieść na G – nakrycia.

Z 11.3. Niech $\psi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Niech $\tilde{X} \to X$ będzie G–nakryciem. Pokazać, że $H \times_\psi \tilde{X} \to X$ jest H nakryciem.

Definicja. *Niech $\tilde{X}$ będzie przestrzenią spójną i lokalnie łukowo spójną. Nakrycie $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ nazywa się abelowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono G – nakryciem i G jest grupą abelową.*

Z 11.4. Niech $\tilde{X}_{abel} \longrightarrow X$ oznacza nakrycie odpowiadające homomorfizmowi $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)_{abel} = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$. Pokazać, że jeżeli $p : Y \longrightarrow X$ jest G – nakryciem abelowym, to $Y = G \times_\psi \tilde{X}_{abel}$ dla pewnego homomorfizmu $\psi : G \to \pi_1(X, x_0)_{abel}$.

Pokazać, że jako nakrycie (bez rozpatrywania działania grupy G), $Y = \tilde{X}_{abel}/H$, gdzie $H \leq \pi_1(X, x_0)_{abel}$.

Z 11.5. Opisać przestrzeń nakrycia i działanie grupy $\mathbb{Z}_6$ dla $\mathbb{Z}_6$ – nakrycia torusa wyznaczonego przez homomorfizm $h\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $h(x, y) = (x(mod 2), y(mod 3))$.

Z 11.6. Niech $p\colon E \longrightarrow B$ i $p'\colon E' \longrightarrow B$ będą G-nakryciami nad spójną i lokalnie łukowo spójną bazą. Zbadać, czy dowolne $f \in Cov(E, E')$ jest G – odwzorowaniem.

Test

T 11.1. Czy istnieje $\mathbb{Z}_{20}$ – nakrycie krotności 15?

T 11.2. Czy istnieje $\mathbb{Z}_{20}$ – nakrycie krotności 5?

T 11.3. Czy istnieje $\mathbb{Z}_{20}$ – nakrycie krotności 40?

T 11.4. Ile jest niezomorficznych $\mathbb{Z}_6$ nakryć nad S^1?

T 11.5. Ile jest niezomorficznych $\mathbb{Z}_2$ nakryć nad $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$?

T 11.6. Jakie $\pi_1(X, x_0)$ – nakrycie wyznacza $id : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$?

T 11.7. Czy jeżeli G – nakrycie nad X jest spójne, to dla dowolnego punktu wyróżnionego zdefiniowany homomorfizm $G \to \pi_1(X, x_0)$ jest epimorfizmem?

T 11.8. Czy G– nakrycie zdefiniowane przez epimorfizm $G \to \pi_1(X, x_0)$ jest spójne?

12. Grupy wolne i sumy wolne z amalgamacją

Wprowadzimy bardzo ważne w teorii grup pojęcie grupy wolnej generowanej przez ustalony zbiór.

12.1. Definicja. **Grupą wolną generowaną przez zbiór** *I nazywamy grupę $F(I)$ wraz z włożeniem $I \subset F(I)$ takim, że dla dowolnej grupy G oraz odwzorowania zbiorów $f : I \longrightarrow G$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{f} : F(I) \longrightarrow G$ taki, że $\bar{f}|I = f$.*

Z powyższej definicji łatwo wynika, że grupa wolna o zadanym zbiorze generatorów jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Ponadto dowolne odwzorowanie zbiorów $f : I \longrightarrow J$ wyznacza dokładnie jeden homomorfizm $\bar{f} : F(I) \longrightarrow F(J)$, dla którego przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} I & \subset & F(I) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle \bar{f}}\big\downarrow \\ J & \subset & F(J) \end{array}$$

Podgrupę grupy $F(I)$ generowaną przez zbiór I oznaczamy symbolem $<I>$ a jej elementy nazywamy słowami o literach z alfabetu I. Pokażemy, że z definicji wynika, iż zgodnie z nazwą grupa $F(I)$ jest generowana przez zbiór I.

12.2. Stwierdzenie. *Jeżeli $F(I)$ jest grupą wolną generowaną przez zbiór I, to $F(I) = <I>$.*

Dowód. Z definicji grupy wolnej wynika, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\bar{i} : F(I) \longrightarrow <I>$ będący identycznością na I. Złożenie $\bar{i}$ oraz inkluzji $<I> \subseteq F(I)$ jest homomorfizmem $F(I) \longrightarrow F(I)$ będącym identycznością na zbiorze I. Z drugiej strony identyczność $id_{F(I)} : F(I) \longrightarrow F(I)$ też ma tę własność, skąd wynika, że $F(I) = <I>$. □

12.3. Przykład. Jeżeli $I = \{a\}$ jest zbiorem jednoelementowym, to $F(\{a\}) \simeq \mathbb{Z}$. Istnienie grupy wolnej o większej liczbie generatorów nie jest już tak proste, choć "kandydatura" jest dość oczywista. Rozpatrujemy zbiór wszystkich słów postaci ${x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \ldots {x_n}^{\alpha_1 n}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz słowo puste $\emptyset$. W zbiorze tym wprowadzamy oczywiste relacje równoważności, a działanie grupowe polega na dopisywaniu jednego słowa za drugim. Należy pracowicie sprawdzić, że działanie grupowe jest poprawnie określone i spełnia wszystkie aksjomaty grupy. My wykorzystamy do dowodu istnienia grupy wolnej rozważania topologiczne. Okazuje się, że prawdziwe jest nastepujace

12.4. Twierdzenie. *Jeżeli I jest dowolnym zbiorem, to*

$$F(I) \simeq \pi_1(\bigvee_{i \in I} S^1_i, 1)$$

gdzie $\forall_{i \in I}\, S^1_i = S^1$ a element $i \in I$ utożsamiamy z włożeniem $S^1 = S^1_i \subset \bigvee_{i \in I} S^1_i$.

Twierdzenie to udowodnimy w następnym rozdziale. W dalszym ciągu tego rozdziału zakładamy jego prawdziwość.

Uwaga-Zadanie. W teorii grup wprowadza się pojęcie wolnej grupy abelowej o zadanym zbiorze generatorów. Definicja jest analogiczna do powyższej - żądamy by każda funkcja określona na zbiorze generatorów o wartościach w dowolnej grupie abelowej miała jednoznaczne przedłużenie do homomorfizmu. Pokazać, że wolna grupa abelowa o skończonej liczbie generatorów jest izomorficzna ze skończonym produktem grupy liczb całkowitych. Jaka przestrzeń ma taką właśnie grupę podstawową?

12.5. Wniosek. *Każda grupa jest obrazem pewnej grupy wolnej.*

Dowód. Niech G będzie grupą a S jej dowolnym zbiorem generatorów. Z definicji grupy wolnej wynika, że istnieje (dokładnie jeden) homomorfizm $F(S) \longrightarrow G$ będący przedłużeniem włożenia $S \subseteq G$. Obraz tego homomorfizmu zawiera S, więc jest on epimorfizmem. $\square$

12.6. Definicja. *Niech $G =< S >$ i niech $N \trianglelefteq F(S)$ będzie jądrem epimorfizmu $F(S) \twoheadrightarrow G$. Będziemy mówili, że* **grupa** G **posiada prezentację** $< S \mid W >$ *, o zbiorze generatorów S i zbiorze relacji W, jeżeli $W \subseteq F(S)$ jest takim zbiorem słów zapisanych w alfabecie S, dla którego $N \trianglelefteq F(S)$ jest najmniejszą podgrupą normalną $F(S)$ zawierającą W (to znaczy $N =< \bigcup_{x \in F(S)} xWx^{-1} >$).*

W tej konwencji $F(S) =< S \mid \emptyset >$, ale także $F(S) =< S \mid 1 >$. Oczywiście dana grupa może mieć bardzo wiele prezentacji. Na ogół jesteśmy zainteresowani w możliwie najoszczędniejszym wyborze zbiorów S i W. Rozstrzygnięcie, czy dwie prezentacje przedstawiają grupy izomorficzne jest niekiedy bardzo trudnym zadaniem.

Istnieje algorytm rozstrzygający powyższą kwestię, jeżeli wiadomo, że zbiór generatorów jest skończony i grupa jest przemienna. Algorytm istnieje także dla innych klas grup - co ciekawe definiowanych geometrycznie np. tzw. grup hiperbolicznych

12.7. Przykłady.

1)grupa cykliczna rzędu n, $\mathbb{Z}_n =< a \mid a^n >$

2)grupa dihedralna rzędu $2n$, $D_{2n} =< \rho, \varepsilon \mid \rho^n, \varepsilon^2, \varepsilon\rho\varepsilon\rho >$. Niekiedy stosujemy również taki zapis $D_{2n} =< \rho, \varepsilon \mid \rho^n = 1, \varepsilon^2 = 1, \varepsilon\rho\varepsilon = \rho^{-1} >$

3) $F(S) =< S \sqcup T \mid T >$, gdzie $\sqcup$ oznacza sumę rozłączną zbiorów.

Opiszemy konstrukcję "sklejania" dwóch grup wzdłuż ich wspólnej podgrupy, a nawet ogólniej wzdłuż homomorfizmów z pewnej trzeciej grupy.

12.8. Definicja. *Załóżmy, że mamy dane dwa homomorfizmy grup o wspólnej dziedzinie:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f_2} & G_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \\ G_1 & & \end{array}$$

Sumą wolną grup G_1 , G_2 **z amalgamacją wzdłuż** H *nazywa się grupę G wraz z ho-*

momorfizmami $G_1 \xrightarrow{j_1} G \xleftarrow{j_2} G_2$ *takimi, że przemienny jest diagram:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & G_2 \arrow[d, "j_2"] \\ G_1 \arrow[r, "j_1"] & G \end{tikzcd}$$

oraz dla dowolnego przemiennego diagramu homomorfizmów

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & G_2 \arrow[d, "h_2"'] \\ G_1 \arrow[r, "h_1"] & K \end{tikzcd}$$

istnieje dokładnie jeden homomorfizm $G \xrightarrow{h} K$ *taki, że* $h_1 = h \circ j_1$ *oraz* $h_2 = h \circ j_2$. *Sumą wolną grup* G_1, G_2 *z amalgamacją wzdłuż* H *oznaczamy symbolem* $G_1 *_H G_2$. *Jeżeli* H *jest grupą trywialną, to sumę wolną z amalgamacją wzdłuż podgrupy trywialnej po prostu nazywamy sumą wolną i oznaczamy symbolem* $G_1 * G_2$.

Zauważmy, że jeżeli suma wolna z amalgamacją istnieje to jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Nie rozstrzygając na razie, czy suma wolna z amalgamacją zawsze istnieje rozważmy przykłady, gdy w których łatwo wykazać jej istnienie.

12.9. Przykład. Suma wolna z amalgamacją diagramu

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & \{1\} \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

istnieje i jest izomorficzna z grupą G_1/K, gdzie $K =< \bigcup_{g \in G_1} g f_1(H) g^{-1} >$ jest najmniejszą podgrupą normalną grupy G_1 zawierającą obraz $f_1(H)$. Homomorfizm j_1 jest rzutowaniem na grupę ilorazową $G_1 \to G_1/K$. W szczególności jeżeli grupa G posiada prezentację $< S \mid W >$ oznacza to, że jest ona sumą z amalgamacją następującego diagramu:

$$\begin{tikzcd} F(W) \arrow[r] \arrow[d] & \{1\} \\ F(S) & \end{tikzcd}$$

12.10. Stwierdzenie. *W diagramie*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

niech $H =< T >$, *zaś grupy* G_1, G_2 *mają prezentacje* $G_i =< S_i \mid W_i >$. *Wówczas suma wolna z amalgamacją istnieje i ma następującą prezentację:*

$$F(G_1 *_H G_2) =< S_1 \sqcup S_2 \mid W_1 \cup W_2 \cup \{f_1(t) f_2(t)^{-1} \colon t \in T\} > .$$

Homomorfizmy j_i *dane są przez włożenia* $S_i \subset S_1 \sqcup S_2$.

Dowód. Rozpatrzmy dowolny przemienny diagram homomorfizmów

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & G_2 \arrow[d, "h_2"'] \\ G_1 \arrow[r, "h_1"] & K \end{tikzcd}$$

Istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h' : F(S_1 \sqcup S_2) \longrightarrow K$, taki że $h'(s) = h_i(s)$, dla $s \in S_i$. Jeżeli $x \in W_i$, to oczywiście $x \in \ker h'$. Ponadto z przemienności diagramu, dla każdego $t \in T$, $h'(f_1(t)) = h'(f_2(t))$, a zatem h' wyznacza homomorfizm $h : < S_1 \sqcup S_2 \mid W_1 \cup W_2 \cup \{f_1(t) f_2(t)^{-1} \colon t \in T\} >$ spełniający warunki definicji. Jego jedyność wynika z jedyności homomorfizmu h'. $\square$

12.11. Wniosek. *Suma wolna grup wolnych $F(S) * F(T)$ istnieje i jest izomorficzna z grupą wolną $F(S \sqcup T)$. Homomorfizmy j_1, j_2 są zdefiniowane przez włożenia $S \subset S \sqcup T$ oraz $T \subset S \sqcup T$.*

12.12. Wniosek. *Jeżeli w diagramie*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

homomorfizmy f_1 i f_2 są trywialne, to suma wolna z amalgamacją jest izomorficzna z sumą wolną $G_1 * G_2$.

Podobnie jak istnienie grupy wolnej tak istnienie sumy wolnej z amalgamacją wykażemy topologicznie w następnym rozdziale.. Upraszczając, pokażemy że "sklejaniu " przestrzeni wzdłuż podprzestrzeni odpowiada "sklejanie" grup podstawowywch wzdłuż grupy podstawowej części wspólnej.

13. Twierdzenie Seiferta-van Kampena

Pojęcia wprowadzone w poprzednim rozdziale posłużą nam do sformułowania twierdzenia opisującego grupę podstawową przestrzeni będącej na sumą podprzestrzeni $X = U \cup V$ w terminach grup podstawowych przestrzeni U, V, $U \cap V$.

Założenie: *Dla uproszczenia będziemy zakładać, że wszystkie rozważane przestrzenie są lokalnie łukowo spójne i posiadają nakrycie uniwersalne, to jest małe pętle są ściągalne.*

13.1. Twierdzenie. *Jeżeli $U, V \subset X$ są dwoma otwartymi podzbiorami przestrzeni X takimi, że $X = U \cup V$ oraz $U \cap V$ są zbiorami łukowo spójnymi, to dla dowolnego punktu $x_0 \in U \cap V$ w diagramie*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_V} & \pi_1(V, x_0) \\ {\scriptstyle i_U}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j_V} \\ \pi_1(U, x_0) & \xrightarrow{j_U} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

w którym wszystkie homomorfizmy są indukowane przez włożenia podzbiorów, grupa $\pi_1(X, x_0)$ jest sumą wolną grup $\pi_1(U, x_0)$ i $\pi_1(V, x_0)$ z amalgamacją wzdłuż $\pi_1(U \cap V, x_0)$.

Uwaga: Z założeń wynika, że U i V są także łukowo spójne. Przedstawimy dwa dowody tego twierdzenia - klasyczny i dowód Grothendiecka wykorzystujący G-nakrycia. Zaczynamy od dowodu klasycznego.

Dowód. Niech $h_1 : \pi_1(U, x_0) \to G$ oraz $h_2 : \pi_1(V, x_0) \to G$ będą homomorfizmami takimi, że $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$. Musimy wykazać istnienie i jednoznaczność homomorfizmu $h : \pi_1(X, x_0) \to G$. Dla każdego punktu $x \in X$ wybierzmy na użytek dowodu drogę γ_x o początku w punkcie x_0 i końcu w punkcie x. O wyborze tym zakładamy jedynie, że dla każdego punktu $x \in U$ droga γ_x jest zawarta w U i analogicznie dla punktów $U \cap V$ i V oraz, że γ_{x_0} jest droga stałą.

Niech $\omega : I \to X$ będzie drogą. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie taką liczba, że $\frac{1}{n}$ jest liczbą Lebsgue'a pokrycia $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) = I$. Dla uproszczenia oznaczeń niech γ_k będzie droga jak wyżej o końcu w punkcie $\omega(\frac{k}{n})$, $k = 0, \ldots, n$. Zatem γ_0 i γ_n są drogami stałymi. Rozpatrzmy pętle $\omega_k = \gamma_{k-1} \star \omega|_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} \star {\gamma_k}^{-1}$, $k = 1, \ldots, n$ i zauważmy, że $[\omega] = [\omega_1 \star \omega_2 \star \cdots \star \omega_n]$. Każda z pętli ω_k jest zawarta w U lub w V, więc odwzorowanie h możemy zdefiniować tylko w jeden sposób:

$$h([\omega]) = h_{\epsilon(1)}([\omega_1]) \cdot \ldots \cdot h_{\epsilon(n)}([\omega_n]),$$

gdzie $h_{\epsilon(i)}$ jest równe h_1 lub h_2 w zależności od tego, czy pętla leży w U, czy w V. Jeżeli pętla leży w $U \cap V$, to z równości $h_1 \circ i_U = h_2 \circ i_V$ homomorfizmy h_1 i h_2 przyjmują na niej tę sama wartość.

Jest jasne, że jeśli powyższa definicja jest poprawna, to h jest homomorfizmem i jest wyznaczone jednoznacznie. Pozostaje więc sprawdzić, że przekształcenie h jest dobrze określone - to znaczy nie zależy od podziału odcinka i klasy homotopii pętli. Jest oczywiste, że rozdrobnienie podziału odcinka prowadzi do tej samej wartości $h([\omega])$. Załóżmy więc, że $[\omega]=[\tau]$ i że H jest homotopią, $H_{|_{I\times 0}}=\omega$ i $H_{|_{I\times 1}}=\tau$. Niech $n\in N$ będzie takie, że przy podziale $I\times I$ obraz przy homotopii H każdego kwardacika o boku $\frac{1}{n}$ jest zawarty w U lub w V. Pokażemy, że dla każdego $0\geq l\geq n-1$, $h([H(\cdot,\frac{l+1}{n})])=h([H(\cdot,\frac{l}{n})])$, co implikuje tezę. Przyjmijmy wygodne oznaczenia: $\gamma_{k,l}$ będzie drogą o końcu w punkcie $H(\frac{k}{n},\frac{l}{n})$, $k,l=0,\dots,n$. Drogi $\gamma_{0,l}$ i $\gamma_{n,l}$ są więc stałe. Dla $k,l=0,\dots,n$ rozważmy pętle

$$\omega_{k,l}=\gamma_{k-1,l}\star H_{|_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\times\frac{l}{n}}}\star\gamma_{k,l}{}^{-1},$$
$$\sigma_{k,l}=\gamma_{k,l-1}\star H_{|_{\frac{k}{n}\times[\frac{l-1}{n},\frac{l}{n}]}}\star\gamma_{k,l}{}^{-1}.$$

Drogi po bokach kwadratu są homotopijne względem końców (Zadanie 4.4) i wynika z tego, że $[\omega_{k,l}\star\sigma_{k,l}]=[\sigma_{k-1,l}\star\omega_{k,l+1}]$, czyli

$$[\omega_{k,l}]=[\sigma_{k-1,l}\star\omega_{k,l+1}\star\sigma_{k,l}^{-1}]$$

Mamy

$$[H(\cdot,\frac{l}{n})]=[\omega_{1,l}]\star[\omega_{2,l}]\star\cdots\star[\omega_{n,l}]$$

Z definicji przekształcenia h:

$$h([H(\cdot,\frac{l}{n})])=h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{1,l}])\cdot h_{\epsilon(2,l)}([\omega_{2,l}])\cdot\ldots\cdot h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{n,l}])=$$
$$=h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{1,l+1}]\star\sigma_{1,l}^{-1})\cdot h_{\epsilon(2,l)}([\sigma_{1,l}\star\omega_{2,l+1}\star\sigma_{2,l}^{-1}])\cdot\ldots\cdot h_{\epsilon(n,l)}([\sigma_{n-1,l}\star\omega_{n,l+1}]),$$

gdzie $h_{\epsilon(k,l)}$ jest równe h_1 lub h_2 w zależności od tego, czy rozpatrywana pętla leży w U czy w V, co ma sens, bo dla dowolnych k,l, pętle $\omega_{k,l}$ i $\sigma_{k-1,l}\star\omega_{k,l+1}\star\sigma_{k,l}^{-1}$ leżą w jednym z tych zbiorów. Ponieważ h_1 i h_2 są homomorfizmami, $h_{\epsilon(k,l)}=h_{\epsilon(k+1,l)}=h_{\epsilon(k,l+1)}$, to $h_{\epsilon(k,l)}([\sigma_{k,l}^{-1}])\cdot h_{\epsilon(k+1,l)}([\sigma_{k,l}])=1$ i z powyższej równości dostajemy

$$h([H(\cdot,\frac{l}{n})])=h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{1,l+1}])\cdot h_{\epsilon(2,l)}([\omega_{2,l+1}])\cdot\ldots\cdot h_{\epsilon(1,l)}([\omega_{n,l+1}]=h([H(\cdot,\frac{l+1}{n})]).$$

Kończy to dowód twierdzenia Seiferta van Kampena. □

Do przeprowadzenia dowodu Alexandre Grothediecka musimy założyć, że w rozpatrywanych przestrzeniach małe pętle są ściągalne.

Dowód wg.Alexandre Grothendiecka. Niech $h_1:\pi_1(U,x_0)\longrightarrow G$ oraz $h_2:\pi_1(V,x_0)\longrightarrow G$ będą homomorfizmami takimi, że $h_1\circ i_U=h_2\circ i_V$. Na mocy twierdzenia 11.6 homomorfizm h_1 wyznacza punktowane G-nakrycie $\tilde{U}\xrightarrow{p_1}U$, $\tilde{x}_U\in p_1^{-1}(x_0)$ a homomorfizm h_2 wyznacza punktowane G-nakrycie $\tilde{V}\xrightarrow{p_2}V$, $\tilde{x}_V\in p_2^{-1}(x_0)$. Ponieważ $h_1\circ i_U=h_2\circ i_V$ to nad $U\cap V$ istnieje (dokładnie jeden) G–izomorfizm nakryć: $f:\tilde{U}_{|_{U\cap V}}\longrightarrow\tilde{V}_{|_{U\cap V}}$, $f(\tilde{x}_U)=\tilde{x}_V$. Sklejając nakrycia p_1 i p_2 wzdłuż f definiujemy G–nakrycie $\tilde{X}:=\tilde{U}\coprod\tilde{V}/\tilde{u}\sim f(\tilde{u})\longrightarrow X$ z punktem wyróżnionym $[\tilde{x}_U]$, co wyznacza homomorfizm $h:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow G$. Z konstrukcji nakrycia $\tilde{X}$ wynika, ze $h\circ j_U=h_1$ i $h\circ j_V=h_2$.

Pozostaje wykazanie jedyności homomorfizmu h. Niech $h':\pi_1(X,x_0)\longrightarrow G$ będzie homomorfizmem dla którego $h'\circ j_U=h_1$ i $h'\circ j_V=h_2$. Niech $p':\tilde{X}'\longrightarrow X$ będzie G – nakryciem z wyróżnionym punktem $\tilde{x}'\in p'^{-1}(x_0)$. Z twierdzenia 11.6 wynika, że dla dowodu równości $h=h'$ musimy pokazać, że istnieje G– izomorfizm nakryć $k:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{X}'$, $k(\tilde{x})=\tilde{x}'$. Z równości $h'\circ j_U=h_1$ i $h'\circ j_V=h_2$ wynika, że istnieją G – izomorfizmy $k_1 : \tilde{U} \to \tilde{X}'_{|_U}$, $k_1(\tilde{x}_U) = \tilde{x}'$ i $k_2 : \tilde{V} \to \tilde{X}'_{|_V}$, $k_2(\tilde{x}_V) = \tilde{x}'$. Wystarczy sprawdzić, że G– izomorfizmy k_1 i k_2 można skleić do G– izomorfizmu $\tilde{X} \to \tilde{X}'$. Oczywiście $k_{2|_{U\cap V}} \circ f$ i $k_{1|_{U\cap V}}$ są G– izomorfizmami $\tilde{U}_{|_{U\cap V}} \to \tilde{X}'_{|_{U\cap V}}$ przeprowadzającymi punkt $\tilde{x}_U$ na punkt $\tilde{x}'$. Taki izomorfizm jest tylko jeden, więc $k_{2|_{U\cap V}} \circ f = k_{1|_{U\cap V}}$ i dobrze zdefiniowany jest G - izomorfizm $k : \tilde{X} \to \tilde{X}'$.

□

13.2. Wniosek. *Jeżeli (X, x_0) i (Y, y_0) są przestrzeniami z wyróżnionymi punktami, takimi, że oba są retraktami deformacyjnymi swoich pewnych otoczeń otwartych. Wówczas włożenia w bukiet $(X \vee Y, (x_0, y_0))$ definiują izomorfizm*

$$\pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0) \simeq \pi_1(X \vee Y, (x_0, y_0)).$$

Przedstawimy teraz kilka wniosków, które powinny przekonać Czytelnika o wielkiej wadze twierdzenia Seiferta-van Kampena w algebrze i w topologii.

Dowód twierdzenia 12.4. Z wniosku 13.2 wynika przez indukcję, że

$$\pi_1(S^1 \vee ... \vee S^1, [1]) \simeq \mathbb{Z} \star ... \star \mathbb{Z}.$$

jest grupą wolną o n-generatorach. Ponieważ $F(1) \simeq \mathbb{Z}$, więc z wniosku 12.11 wynika, że $F(n) \cong F(1) \star ... \star F(1)$. Pokażemy teraz, że jeżeli I jest dowolnym zbiorem oraz dla każdego $i \in I$, $S^1_i = S^1$ z wyróżnionym punktem $1 \in S^1$, to

$$F(I) \simeq \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1]).$$

Zdefiniujemy włożenie $I \hookrightarrow \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1])$ – elementowi $i \in I$ przyporządkowujemy $j_{i\sharp}(id_{S^1_i})$. Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że istotnie jest to włożenie. Niech teraz $f : I \to G$ będzie dowolnym odwzorowaniem w grupę G. Musimy wykazać istnienie i jednoznaczność homomorfizmu $\bar{f} : \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i, [1]) \to G$ będącego przedłużeniem f.

Niech $\omega : I \to \bigvee_{i\in I} S^1_i$ będzie pętlą zaczepioną w punkcie [1]. Ze zwartości odcinka wynika, że obraz $\omega(I)$ jest zawarty w pewnym skończonym bukiecie $\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i$. Z wniosku 13.2 wiemy, że $\pi_1(\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i, [1]) = F(I_\omega)$, a więc że istnieje $\bar{f}_{|_{I_\omega}} : \pi_1(\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i, [1]) \to G$ będący przedłużeniem $f_{|_{I_\omega}}$. Definiujemy

$$\bar{f}([\omega]) = \bar{f}_{|_{I_\omega}}(p_{\omega\sharp}([\omega])),$$

gdzie p_ω jest rzutowaniem na bukiet $\bigvee_{i\in I_\omega} S^1_i$, to znaczy wszystkie sfery S^1_i dla $i \notin I_\omega$ przekształca w punkt bukietowy, a na sferach S^1_i dla $i \in I_\omega$ jest identycznością. Sprawdzenie, że powyższa formuła definiuje jedyny homomorfizm pozostawiamy czytelnikowi. □

Następny wniosek pozwoli nam wykazać, że dla dowolnej grupy G istnieje przestrzeń X taka, że $\pi_1(X, x_0) \simeq G$.

13.3. Wniosek. *Niech $\{f_i : (S^1, 1) \to (X, x_0)\}_{i\in I}$ będzie rodziną przekształceń z okręgu w przestrzeń łukowo spójną X a $Y_f = \bigvee_{i\in I} D^2 \cup_f X$ przestrzenią powstałą przez doklejenie do X dysków 2-wymiarowych przy pomocy odwzorowania $f = \bigvee_{i\in I} f_i : \bigvee_{i\in I} S^1_i \to X$. Wtedy włożenie $X \subset Y_f$ indukuje epimorfizm na* *grupie podstawowej* $\pi_1(X,x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(Y_f,x_0)$ *którego jądrem jest najmniejsza podgrupa normalna zawierająca elementy* $[f_i] \in \pi_1(X,x_0)$, $i \in I$.

Dowód. Z twierdzeniea Seiferta - van Kampena dla przestrzeni Y_f wynika, że grupa $\pi_1(Y_f,x_0)$ jest suma z amalgamacją diagramu:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\bigvee_{i\in I} S^1_i,[1]) = F(I) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \pi_1(\bigvee_{i\in I} D^2_i,[1]) = \{1\} \\ \pi_1(X,x_0) & \end{tikzcd}$$

Z lematu 12.9 wynika już teza. Aby zastosowac twierdzenie Seiferta-van Kampena należy rozpatrzeć obrazy w przestrzeni ilorazowej Y_f następujacych zbiorów otwartych: $U = \coprod_{i\in I} int(D^2_i)$, $V = X \sqcup \coprod_{i\in I} V_i$, gdzie $V_i = \{z \in D^2_i : |z| > 1/2\}$.

□

13.4. Wniosek. *Dla każdej grupy* G *istnieje przestrzeń łukowo spójna* X*, taka że* $\pi_1(Y,y_0) = G$

Dowód. Konstrukcja takiej przestrzeni wychodzi od prezentacji grupy $G =< I|R >$. Niech $X = \bigvee_{i\in I} S^1_i$. Dla każdego elementu $r \in R$ weźmy wyznaczające go przekształcenie $r : (S^1,1) \to (\bigvee_{i\in I} S^1_i,[1])$. Dostajemy przekształcenie $R : \bigvee_{r\in R} S^1_r \to \bigvee_{i\in I} S^1_i$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, Że szukaną przestrzenią jest $Y = \bigvee_{r\in R} D^2_r \cup_R \bigvee_{i\in I} S^1_i$. □

Pokażemy jeszcze, że dowolny homomorfizm grup możemy zrealizować jako homomorfizm indukowany na grupach podstawowych przez przekształcenie przestrzeni topologicznych.

13.5. Stwierdzenie. *Niech* $\varphi : G \to H$ *homomorfizm grup.Istnnieją przestrzenie* (Y,y_0) *i* (X,x_0) *oraz przekształcenie* $f : (Y,y_0) \to (X,x_0)$*, takie że* $\pi_1(Y,y_0) = G$, $\pi_1(X,x_0) = H$ *i* $f_\sharp = \varphi$.

Dowód. Niech $G =< I|R >$ będzie prezentacja grupy G. Niech Y będzie przestrzenią skonstruowaną dla tej prezentacji w dowodzie poprzedniego wniosku. Niech X będzie dowolną przestrzenią łukowo spójną, taką że $\pi_1(X,x_0) = H$. Niech $f_i : (S^1,1) \to (X,x_0)$ będzie pętlą reprezentującą $\varphi(i)$. Definiujemy $f = \bigvee_{i\in I} f_i : (\bigvee_{i\in I} S^1_i,[1]) \to (X,x_0)$. Przekształcenie to można rozszerzyć na przestrzeń Y, gdyż dla każdego $r \in R$, $\varphi(r) = 1$. otrzymane rozszerzenie spełnia warunki stwierdzenia.

□

Na koniec podamy topologiczny dowód istnienia sumy z amalgamacją dla dowolnego diagramu grup

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd} .$$

Niech (A, a_0), (X, x_0), (Y, y_0) będą przestrzeniami a $f_1 : (A, a_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $f_2 : (A, a_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ takimi, że ich grupy podstawowe są równe H, G_1, G_2 odpowiednio a $f_{i\sharp} = \varphi_i$ dla $i = 1, 2$. Musimy jeszcze zadbać o to by można było zastosowac twierdzenie Seiferta- van Kampena. Możemy założyć, że przestrzenie są "dobrze punktowane", to znaczy że włożenie punktów wyróżnionych jest korozwłóknieniem. Rozpatrzmy przestrzeń $A \times I$ i przekształcenie $f : A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \longrightarrow X \sqcup Y$, które jest równe f_1 na $A \times \{0\}$ i f_2 na $A \times \{1\}$. Niech $Z = A \times I \cup_f X \sqcup Y$ i do tej przestrzeni stosujemy twierdzenie seiferta van Kampena.

Zadania

Z 13.1. Udowodnić bezposrednio z definicji, że jeżeli $X = U \cup V$ jest suma dwóch jednospójnych podzbiorów otwartych oraz $U \cap V$ jest łukowo spójna, to przestrzeń X jest jednospójna. Wywnioskować stąd jednospójność sfer S^n dla $n > 2$. Podać inne dowody tego faktu.

Z 13.2. Niech $x_0 \in A \subset U \subset X$ będą podzbiorami takimi, że U jest podzbiorem otwartym a włożenie $A \subset U$ jest homotopijną równoważnością. Niech $f : A \to Y$, $f(x_0) = y_0$. Wywnioskować z twierdzenia van Kampena, że $\pi_1(X \cup_f Y, y_0)$ jest produktem z amalgamacją diagramu: $\pi(X, x_0) \longleftarrow \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{f\sharp} \pi_1(Y, y_0)$. Wywnioskować stąd, że jeżeli $\alpha\colon (S^1, *) \longrightarrow (X, x_0)$, X łukowo spójna i $Y = X \cup_f D^2$, to $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/H$, gdzie H jest najmniejszą podgrupą normalną zawierającą $[\alpha]$.

Z 13.3. Niech $X = D^2/\sim$, gdzie $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy ,gdy $x, y \in S^1$ oraz x/y jest pierwiastkiem stopnia trzeciego z 1. Przedstawić $X = S^1 \cup_f D^2$ i zastosować poprzednie zadanie do znalezienia $\pi_1(X, *)$.

Z 13.4. Dla dowolnej grupy G skonstruować przestrzeń spójną, dla której $\pi_1(X, x) = G$. * Skonstruować zwartą rozmaitość 3-wymiarową, której grupa podstawowa jest grupą wolną o k generatorach.

Wskazówka: Przedstawić $G = F/R$, gdzie F jest grupą wolną. Skonstruować nakrycie nad bukietem okręgów odpowiadające R i skorzystać z poprzedniego zadania.

Z 13.5. Niech $X = T\#T$ będzie dwupreclem, (tj przestrzenią która powstaje z sumy rozłącznej dwu torusów przez usunięcie dwóch małych dysków w każdym z nich i utożsamieniu punktów z S^1).

a) Znaleźć grupę podstawową X.

b) Pokazać, że nakrycie uniwersalne dwuprecla jest ściągalne. Wywnioskować, że każde odwzorowanie S^n, $n > 1$ w ten dwuprecel jest ściągalne.

Wskazówka: Rozpatrzeć nakrycie dwuprecla, takie by przestrzeń nakrywająca była homotopijnie równoważna z bukietem okręgów.

Z 13.6. Niech $X = D^2 \times S^1 \cup_f S^1 \times D^2$, gdzie $f\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ jest dane przez liniowe przekształcenie $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o macierzy całkowitoliczbowej $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wyrazić $\pi_1(X, *)$ w terminach współczynników a, b, c, d.

Z 13.7. Niech $A = \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{2} \le |z| \le 1\}$, niech $X = A/\sim$, gdzie $z \sim z'$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z| = |z'| = 1$ i $z = -z'$ lub $|z| = |z'| = \frac{1}{2}$ i $(\frac{z}{z'})^3 = 1$. Znaleźć $\pi_1(X, *)$.

Definicja. *Węzłem w $K \subset \mathbb{R}^3$ ($K \subset S^3$) nazywamy podzbiór R^3 (S^3) homeomorficzny z okręgiem S^1.*

Z 13.8. Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^3$ jest węzłem, zaś $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{x_0\}$ (przez rzut stereograficzny), to $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) \simeq \pi_1(S^3 \setminus K, *)$.

Definicja. *Niech $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ będzie torusem. Niech dla pary liczb naturalnych względnie pierwszych p, q, $K_{p,q} \subset T$ będzie obrazem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $px = qy$. Przyporządkowując punktowi $(x, y) \in T$ punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi ix}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2\pi iy}) \in S^3$ możemy uważać, że $T \subset S^3$. Węzłem torusowym typu p, q nazywamy $K_{p,q} \subset T \subset S^3$.*

Z 13.9. Narysować $K_{2,3}$ i $K_{3,2}$.

Z 13.10. Pokazać, że $S^3 \setminus K_{2,3}$ jest homotopijnie równoważne przestrzeni wielomianów stopnia 3 bez pierwiastków wielokrotnych (z topologią podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$). Skonstruować tę homotopię.

Z 13.11. Niech $K = V \cap S^3$, gdzie $V = \{(z, w)\colon 4z^3 + 27w^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Pokazać, że K jest węzłem oraz, że istnieje homeomorfizm $f\colon S^3 \longrightarrow S^3$, taki że $f(K) = K_{2,3}$.

Uogólnić powyższy przykład pokazując, że dla liczb naturalnych względnie pierwszych węzeł torusowy $K_{p,q} \subset S^3$ jest równy $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon\ z^q = w^p\} \cap S^3$.

Z 13.12. Niech $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Niech $A = \{(z, w) \in S^3\colon |z| \leq |w|\}$, $B = \{(z, w) \in S^3\colon |z| \geq |w|\}$. Pokazać, że $A \cong B \cong D^2 \times S^1$ są pełnymi torusami oraz $A \cap B = T = \{(z, w) \in S^3\colon |z| = |w| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ jest torusem.

Niech $K_{p,q}$ będzie węzłem torusowym typu (p, q) na torusie T. Pokazać, że $\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) = \{a, b|\ a^p b^q = 1\}$. Pokazać, że $\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q})_{ab} = \mathbb{Z}$.

Test

T 13.1. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną, zaś Y jej domkniętą łukowo spójną podprzestrzenią. Niech $y_0 \in Y$. Wówczas jeżeli $\pi_1(X, y_0)$ jest grupą abelową to $\pi_1(Y, y_0)$ jest także grupą abelową.

T 13.2. Grupa $\pi_1(S^1 \vee S^1, *) = < a, b >$ jest grupą wolną o dwóch generatorach będących generatorami grup podstawowych każdego z okręgów. Wówczas podgrupa $< a^2, b^2, ab >$ grupy $< a, b >$ jest wolna.

T 13.3. Krotność spójnego nakrycia $S^1 \vee S^1$ odpowiadającego podgrupie $< a^2, b^2, ab >$ wynosi ______, gdzie a, b są wolnymi generatorami grupy $\pi_1(S^1 \vee S^1, *)$.

T 13.4. przestrzeń spójnego nakrycia $S^1 \vee S^1$ odpowiadającego podgrupie $< a^2, b^2, ab >$ jest homotopijnie równoważna z bukietem ______ okręgów, gdzie a, b są wolnymi generatorami grupy $\pi_1(S^1 \vee S^1, *)$.

T 13.5. Jeżeli $X = (S^1 \times S^1 \# S^1 \times S^1) \setminus \{pt\}$ jest dwupreclem z wyrzuconym jednym punktem, to X jest równoważne bukietowi ______ okręgów.

T 13.6. Niech $X = (S^1 \times S^1 \setminus int D^2)$, gdzie D^2 jest pewnym dyskiem. Niech $Y = X \cup_f D^2$, gdzie $f : \partial D^2 \longrightarrow \partial D^2$, $f(z) = z^3$. Wówczas $\pi_1(Y, *) =$ ______.

T 13.7. Jeżeli grupa podstawowa $X \vee Y$ jest skończona, to X lub Y jest jednospójna.

T 13.8. $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2, *)$ jest grupą skończoną.

T 13.9. $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2, *)$ jest grupą przemienną.

T 13.10. nakryciem uniwersalnym $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ jest $S^2 \vee S^2$.

T 13.11. każde dwa spójne dwukrotne nakrycia $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ są izomorficzne.

T 13.12. Nakrycie uniwersalne $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ jest skończone.

14. Rozcinanie płaszczyzny - twierdzenie Jordana

Przedstawione tu podejście do twierdzenia Jordana podąża za Rozdz. XII klasycznego podręcznika K. Kuratowskiego *Wstęp do teorii mnogości i topologii.*

14.1. Definicja. *Powiemy, że podzbiór $A \subset X$ rozcina przestrzeń X między punktami $p, q \in X$ jeżeli p i q należą do dwóch różnych składowych spójnych zbioru $X \setminus A$.*

14.2. Stwierdzenie. *Jeżeli $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym rozcinającym X między punktami p i q to istnieją zbiory domknięte $R \ni p$ oraz $Q \ni q$ takie, że $R \cup Q = X$ oraz $R \cap Q = A$.*

W dalszym ciągu będziemy zajmować się rozcinaniem 2-wymiarowej sfery S^2. Sferę będziemy traktować jako płaszczyznę zespoloną $\mathbb{C}$ uzupełnioną o punkt w nieskończoności ∞. Ten model sfery nazywa się sferą Riemanna i będzie oznaczany $\bar{\mathbb{C}}$. Homeomorfizm między jednopunktowym uzwarceniem $\mathbb{C}$ a sferą S^2 jest dany przez rzut stereograficzny.

14.3. Twierdzenie. *Niech $A \subset \mathbb{C}^*$ będzie podzbiorem zwartym lub otwartym. Zbiór A nie rozcina sfery Riemanna $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje gałąź logarytmu na A tzn. włożenie $i : A \subset \mathbb{C}^*$ posiada podniesienie do nakrycia* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Dowód. Zaczniemy od przypadku, gdy A jest podzbiorem zwartym.

Jeżeli A nie rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞ to istnieje łamana $Ł \subset \bar{\mathbb{C}}$ łącząca 0 z ∞ taka, że $A \subset \mathbb{C}^* \setminus Ł$. Z lematu/zadania ?? wynika, że istnieje gałąź logarytmu na $\mathbb{C}^* \setminus Ł$ a więc po obcięciu także na A. Odwrotnie, załóżmy że A rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ miedzy 0 a ∞ oraz istnieje gałąź logarytmu na A. Wykażemy, że prowadzi to do sprzeczności. Skonstruujemy odwzorowanie $f : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}^*$ takie, że $f|\mathbb{C}^* \sim id$, co prowadzi do sprzeczności, bowiem $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \approx \mathbb{R}^2$ a więc jest zbiorem ściągalnym, natomiast $id : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.

Na mocy stw. 14.2 istnieją podzbiory domknięte $R \ni 0$ oraz $Q \ni \infty$ takie, że $R \cup Q = \bar{\mathbb{C}}$ oraz $R \cap Q = A$. Odwzorowanie f zdefiniujemy osobno na zbiorach R i Q w sposób zgodny na ich przecięciu, czyli A. Niech $\tilde{i} : A \to \mathbb{C}$ będzie gałęzią logarytmu na A. Z twierdzenia Tietze odwzorowanie $\tilde{i}$ można rozszerzyć do pewnego odwzorowania ciągłego $\tilde{f} : Q \to \mathbb{C}$. Dla $z \in Q$ kładziemy $f(z) := \exp(\tilde{f}(z))$, natomiast dla $z \in R$, $z \neq 0$ kładziemy $f(z) := z$. Z definicji logarytmu wynika, że te odwzorowania pokrywają się na A a więc definiują odwzorowanie $f : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}^*$ Ponieważ $0 \in \mathrm{Int}(R)$ a więc istnieje mały okrąg S^1_r o środku w 0 taki, że $f|S^1_r = id$ skąd wynika, że $f|\mathbb{C}^* \sim id$. Załóżmy teraz, że A jest podzbiorem otwartym i sprowdzimy ten przypadek do poprzednio rozważanego. Zbiór A można wypełnić wstępującym ciągiem podzbiorów zwartych $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset A$. Wykażemy, że A rozcina między 0 a ∞ wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie dostatecznie duże zbiory F_i rozcinają. Niech $\bar{\mathbb{C}} \setminus A = B_0 \cup B_\infty$ gdzie $B_0\cup$ i B_∞ są rozłącznymi podzbiorami domkniętymi w $\bar{\mathbb{C}}$, a więc zwartymi. Wynika stąd, że istnieją rozłączne zbiory otwarte $U_0 \supset B_0$ oraz $U_\infty \supset B_\infty$. Zbiór $\bar{\mathbb{C}} \setminus (U_0 \cup U_\infty)$ jest zwarty, zawarty w A i oczywiście rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞. Sprawdzenie, że jeżeli na każdym ze zbiorów F_i istnieje gałąź logarytmu, to istnieje ona także na A pozostawiamy Czytelnikowi. □

14.4. Wniosek. *Dowolny domknięty lub otwarty zbiór jednospójny $A \subset \mathbb{C}^*$ nie rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między 0 a ∞.*

Dowód. Z twierdzenia ... wynika, że na A istnieje gałąź logarytmu. □

14.5. Wniosek. *Niech $A, B \subset \bar{\mathbb{C}}$ są podzbiorami otwartymi lub domkniętymi.*

1.jeżeli A i B nie rozcinają $\bar{\mathbb{C}}$ między $p, q \in \bar{\mathbb{C}}$ oraz przecięcie $A \cap B$ jest spójne, to suma $A \cup B$ też nie rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między p i q.

2. jeżeli A i B są spójne, natomiast $A \cap B$ jest niespójne, to $A \cup B$ rozcina między pewną parą punktów.

Dowód.

Ad 1. Stosując homeomorfizm $h(z) = z - p/z - q$ można założyć, że $p = 0$ a $q = \infty$ i skorzystać z twierdzenia 14.3. Włożenia $i_A : A \subset \bar{\mathbb{C}}$ oraz $i_B : B \subset \bar{\mathbb{C}}$ posiadają podniesienia $\tilde{i}_A : A \longrightarrow \mathbb{C}$ oraz $\tilde{i}_B : B \longrightarrow \mathbb{C}$ Z jednoznaczności podniesienia na zbiorze spójnym wynika, że dla $z \in A \cap B$ mamy $\tilde{i}_A(z) = \tilde{i}_B(z) + 2\pi i k$, stąd otrzymujemy podniesienie nad $A \cup B$. *Ad 2.* Oznaczmy $A' := \bar{\mathbb{C}} \setminus A$ oraz $B' := \bar{\mathbb{C}} \setminus B$ i załóżmy przeciwnie, że zbiór $\bar{\mathbb{C}} \setminus (A \cup B) = A' \cap B'$ jest spójny. Niech $p, q \in A \cap B$ będą dowolnymi punktami. Ponieważ zbiory A, B są spójne więc A' i B' nie rozcinają miedzy p, q Ponieważ $A' \cap B'$ jest spójne więc na mocy punktu 1. $A' \cap B'$ też nie rozcina między p, q, co jest sprzeczne z założeniem, że $A \cup B = \bar{\mathbb{C}} \setminus (A' \cap B')$ nie jest spójne. □

14.6. Twierdzenie. *Niech $f : S^1 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ będzie odwzorowaniem różnowartościowym. Jego obraz $K := f(S^1)$ rozcina $\tilde{\mathbb{C}}$ między pewną parą punktów, co więcej $\bar{\mathbb{C}} \setminus K = U \cup V$ gdzie U, V są rozłącznymi spójnymi zbiorami otwartymi oraz $\partial U = \partial V = K$.*

Dowód. Skorzystamy z dotychczasowego dorobku. Rozbijmy okrąg na sumę dwóch łuków $S^1 = S^1_+ \cup S^1_-$ takich, że $S^1_+ \cap S^1_- = \{-1, 1\}$ i oznaczmy odpowiednio ich obrazy przez K_+ i K_-. Ponieważ $K_+ \cap K_-$ jest zbiorem dwupunktowym więc z Wniosku 14.4.2 wynika, że zbiór K rozcina $\bar{\mathbb{C}}$ między pewnymi punktami.

Niech $\bar{\mathbb{C}} \setminus K = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup ...$ gdzie U_i są rozłącznymi, niepustymi spójnymi zbiorami otwartymi. Pozostaje wykazać, że ciąg zbiorów U_i składa się tylko z dwóch wyrazów, oraz że $\partial U_1 = K = \partial U_2$.

Na początek zauważmy, że niezależnie od tego ile jest zbiorów U_i, to dla każdego $\partial U_i = K$. Istotnie z definicji brzegu wynika, że $\partial U_i \subset K$. Gdyby inkluzja była właściwa, to zbiór ∂U_i byłby zwarty w zbiorze homeomorficznym z odcinkiem, a więc na mocy Wn.14.4 nie rozcinałby, co prowadzi do sprzeczności bo ∂U_i oczywiście rozcina sferę. Mamy zatem dla każdego i równość $\partial U_i = K$. Pokażemy teraz, że w ciągu U_i występują dokładnie dwa zbiory. Załóżmy przeciwnie, tzn. że mamy co najmniej trzy (niepuste) zbiory U_1, U_2, U_3 oraz, że zbiór U_3 jest ograniczony (nie zawiera ∞). Wybierzmy dowolny punkt $p_3 \in U_3$ oraz rozpatrzmy dowolną prostą przechodzącą przez ten punkt. Można na niej wybrać punkty a, b takie, że $p_3 \in [a, b]$ oraz $[a, b] \cap K = \{a, b\}$. Punkty $a, b \in K$ dzielą K na dwa łuki K_+ i K_- o wspólnych końcach. Rozpatrzmy zbiór $K \cup [a, b]$. Wybierzmy punkty $p_1 \in U_1$ oraz $p_2 \in U_2$. Zbiór K, a więc tym bardziej $K \cup [a, b]$ rozcinałby sferę między punktami p_1 i p_2. Pokażemy, że jednak nie jest to możliwe. Zauważmy, że zbiory $K_+ \cup [a, b]$ oraz $K_- \cup [a, b]$ nie rozcinają sfery miedzy punktami p_1 i p_2, bowiem $\partial U_1 = K = \partial U_2$. Wynika stąd na mocy Wn., że $K \cup [a, b] = (K_+ \cup [a, b]) \cup (K_- \cup [a, b])$ też nie rozcina między tymi punktami, co prowadzi do sprzeczności. $\square$