Geometria z algebrą liniową, jesień 2019

Trzecia seria zadań domowych.

Zadania proszę oddać na oddzielnych kartkach na zajęciach w piątek **29 listopada**.

1. (a) Podaj przykład przestrzeni liniowej nad skończonym ciałem K takiej, że $V = W_1 \cup \ldots \cup W_n$ dla pewnych podprzestrzenu właściwych $W_1, \ldots, W_n \subset V$

   (b) Niech V będzie przestrzenią liniową nad nieskończonym ciałem K. Udowodnij, że $V \neq W_1 \cup \ldots \cup W_n$ dla dowolnych podprzestrzeni właściwych $W_1, \ldots, W_n \subset V$.

2. Udowodnić, że nad ciałem k charakterystyki $p \geq n$ dla dowolnego $a \in k$ wielomiany $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ tworzą bazę w przestrzeni wielomianów $k[x]_{\leq n}$ stopnia co najwyżej n. Znaleźć współczynniki wielomianu f w tej bazie.

3. Niech $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną jedowymiarowych podprzestrzeni $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że istnieje taka podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^2$, że $\mathbb{R}^2 = V \oplus U_n$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

4. Niech $V = \mathrm{lin}((2,4,1,2),(1,-1,1,-2),(4,2,3,-2)) \subset \mathbb{R}^4$ oraz niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie zadane równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

   Znaleźć wymiar $V + W$ i $V \cap W$.