FUNKCJONALNE TWIERDZENIA GRANICZNE ZWIĄZANE Z UKŁADAMI CZĄSTEK

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Łukasz Treszczotko*
lukasz.treszczotko@gmail.com

3 czerwca 2020

1 Wprowadzenie i motywacje

1.1 Klasyczne funkcjonalne twiedzenia graniczne

Klasyczne funkcjonalne twierdzenia graniczne badają zbieżność według rozkładu, gdy $n \to \infty$, procesów stochastycznych postaci

$$X_n(t) = \frac{1}{F_n} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

gdzie $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ jest stacjonarnym ciągiem zmiennych losowych, a F_n - odpowiednią normalizacją, dobraną tak aby otrzymać nietrywialny proces graniczny. Jeśli ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$ są i.i.d. (niezależne o tym samym rozkładzie) i mają skończoną wariancję, to granica odpowiednio zinterpolowanej wersji (1.1) jest ruchem Browna. Jednak, gdy opuścimy założenie i.i.d. i rozważymy stacjonarne ciągi zmiennych losowych, których przyrosty są zależne, klasa możliwych procesów granicznych się rozrasta i zawiera, między innymi, ułamkowy ruch Browna, proces Rosenblatta (oraz ogólniejsze procesy Hermite'a), patrz [25], [1]. Ma to miejsce pod warunkiem, że zachowamy założenie o skończonej wariancji. Jeśli je usuniemy, klasa procesów granicznych powiększa się jeszcze bardziej i zawiera stabilne procesy Lévy'ego oraz

*Instytut Matemtyki, Uniwersytet Warszawski, Banacha 2, 02-097 Warsaw

dużą grupę procesów stabilnych z zależnymi przyrostami (patrz [14] i [23, Sekcja 3.5]). Jest to wciąż aktywna ścieżka badań i odkrywane są nowe procesy (patrz przykładowo [2], [10], [20] oraz [13]). Nowe procesy graniczne są zazwyczaj samopodobne, ze stacjonarnymi przyrostami. Oznaczamy je często jako H*-sssi*, gdzie H jest wykładnikiem Hursta.

1.2 Funkcjonalne twierdzenia graniczne związane z układami cząstek

Inna metoda, której używa się aby otrzymać procesy H-sssi związana jest z układami cząstek. Klasa możliwych procesów granicznych zazębia się znacząco z tymi, do których prowadzi rozważanie (1.1). Obraz nie jest jednak aż tak kompletny. W [9] i potem w [3] oraz[4] rozpatrywano następujący model: w czasie $t = 0$ mamy układ cząstek w $\mathbb{R}^d$, których początkowe pozycje są zdeterminowane przez miarę losową Poissona z miarą intensywności Lebesgue'a. Następnie, każda z cząstek porusza się niezależnie zgodnie z symetrycznym α-stabilnym procesem Lévy'ego. W [9] zbadano przypadek $\alpha = 2$, a w [3] i [4] rozważono ogólny przypadek $\alpha \in (0, 2]$. Powyższe publikacje badały zbieżność według rozkładu przeskalowanych czasów przebywania procesu danego przez

$$X_T(t) = \frac{1}{F_T} \int_0^{Tt} (N_s - \mathbb{E}N_s) ds, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

gdzie $T \to \infty$, a F_T jest odpowiednią normalizacją. Pokazano, że dla $d < \alpha$, X_T ewaluowany na "odpowiednio regularnej" funkcji testowej ϕ (samą ewaluację oznaczamy przez $\langle X_T, \phi \rangle$), zbiega według rozkładu w $\mathcal{C}([0, \infty))$ do ułamkowego ruchu Browna z wykładnikiem Hursta $H = 1 - \frac{1}{2\alpha}$, z dokładnością do multiplikatywnej stałej. Dla $d \geq \alpha$, granicą jest ruch Browna. Tak naprawdę, w [3] i [4] proces X_T był rozpatrywany jako proces o wartościach w $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ - przestrzeni dualnej do przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ funkcji gładkich, szybko zanikających w nieskończoności.

Seria publikacji Bojdeckiego, Gorostizy i Talarczyk, między innymi [3], [4], [5] oraz [6], zbadała bardziej skomplikowany gałązkujący układ cząstek (cząstki mogą się rozmnażać i umierać). Pokazano, że w zależności od parametrów całego systemu, obiektem granicznym procesu ($\langle X_T(t), \phi \rangle$) może być układ Browna, proces stabilny Lévy'ego lub też proces samopodobny z zależnymi (niekoniecznie stacjonarnymi) przyrostami. Ten ostatni, może być gaussowski lub stabilny. W powyższych modelach, stabilne procesy graniczne (dla $\alpha < 2$) pojawiły się dla gałązkowania, gdy rozkład potomstwa miał nieskończoną wariancję. Analogiczne modele, badające zarówno procesy gałązkowe i superprocesy były rozważane również przez innych autorów np. [16], [19], [21] i [22].

W dwóch głównych rozdziałach pracy będziemy rozważać podobne układy cząstek, ale z dodatkowymi wagami/ładunkami, bez gałązkowania.

Inna wersja poissonowskiego układu cząstek poruszających się niezależnymi α-stabilnymi procesami Lévy'ego była rozpatrywana w [8]. Do cząstek dodano ładunki (z_j) będące niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Rademachera (przyjmujące wartości ± 1 z równym prawdopodobieństwem). Co więcej, zamiast badać (1.2), rozważono następujący funkcjonał

$$\langle X_T(t), \phi \rangle = \frac{1}{F_T} \sum_j z_j \int_0^{Tt} \phi(x_j + \eta_s^j) ds, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

gdzie (x_j) są początkowymi pozycjami cząstek, (η^j) - niezależnymi procesami α-stabilnymi i (z_j) zmiennymi i.i.d. o rozkładzie Rademachera. Wówczas, twierdzenia graniczne dla (1.3) okazują się takie same jak dla $\langle X_T, \phi \rangle$, gdzie X_T dane jest przez (1.2).

Ten sam układ cząstek został potem użyty w [7], gdzie otrzymano cząsteczkową interpretację procesu Rosenblatta, który jest analogiem ułamkowego ruchu Browna, żyjącym w drugim chaosie Wienera. W tejże pracy, proces Rosenblatta pojawił się jako granica funkcjonału czasów lokalnych samoprzecięć trajektorii cząstek. Wynik ten można interpretować jako cząsteczkową wersję wyniku Taqqu [25] dotyczącego procesu Rosenblatta.

Ostatnio, dowiedziono innych funkcjonalnych twierdzeń granicznych związanych z układami dynamicznymi (patrz [20], [13]) oraz układami cząstek ([8]), gdzie otrzymano nowe klasy ciekawych procesów samopodobnych.

1.3 Motywacje

Wyniki opisane w rozprawie doktorskiej dotyczą głównie twierdzeń granicznych związanych z układami cząstek. Motywacja była dwóch rodzajów: z jednej strony celem było lepsze zrozumienie układów cząstek, w szczególności rozszerzenie rozważanego już układu cząstek z [18] i [9], opisanego powyżej (1.3), do modelu w którym każda z cząstek ma określoną wagę, włączając w to przypadek gdy wagi mają rozkłady o ciężkich ogonach. Odpowiada to zmiennym (z_j) ogólniejszej natury niż zwykłe zmienne losowe o rozkładzie Rademachera. Z drugiej strony, w związku z faktem iż procesy takie jak ułamkowy ruch Browna, stabilne procesy Lévy'ego i proces Rosenblatta można otrzymać jako granice odpowiednich funkcjonałów układów cząstek, chcieliśmy sprawdzić, czy również inne, bardziej skomplikowane procesy posiadają taką interpretację. W pracy, badamy również błądzenia losowe w losowym środowisku, które też można, w pewnym sensie, interpretować jako układy cząstek. Prowadzą one, jak się okazuje, do podobnych procesów granicznych.

2 Wyniki rozprawy

Problemy, którymi się zajmujemy dzielą się na trzy grupy. Po pierwsze, rozważamy cząsteczkową interpretację procesów samopodobnych w chaosach Wienera, takich jak proces Rosenblatta i procesy Hermite'a. Po drugie, otrzymujemy cząsteczkową interpretację stabilnych procesów samopodobnych opisanych w [10], [20] i [13], poprzez badanie granic funkcjonałów układów cząstek z wagami o ciężkich ogonach. Na końcu, dostajemy twierdzenia graniczne dla błądzeń losowych w losowym środowisku, prowadzące do reprezentacji pewnej klasy stabilnych procesów samopodobnych opisanej po raz pierwszy w [13], gdzie wprowadzona ona został w sposób czysto abstrakcyjny.

W dwóch głównych rozdziałach rozprawy będziemy badać następujące rozszerzenie układu cząstek w $\mathbb{R}$ opisanego w Sekcji 1.2. Układ można przedstawić jako

$$(z_j, x_j, \eta^j)_{j=1}^{\infty}, \tag{2.1}$$

gdzie (z_j) są początkowymi pozycjami cząstek danymi przez miarę losową Poissona z miarą intensywności Lebesgue'a. Zakładamy również, ze cząstki poruszają się zgodnie z i.i.d. procesami Lévy'ego, niezależnymi od (x_j). Znaczy to, że pozycja j-tej cząstki w czasie t to $x_j + \eta_t^j$. Co więcej, (z_j) są zmiennymi i.i.d., niezależnymi od (x_j) i (η^j). Zakładamy, że z_j mają rozkład symetryczny i myślimy o nich jak o wagach ze znakiem przyporządkowanym cząstkom.

Układ, ze zmiennymi (z_j), będącymi zmiennymi i.i.d. o rozkładzie Rademachera oraz (η^j) - symetrycznymi α-stabilnymi procesami Lévy'ego to dokładnie ten sam rozważany w [7]. Główną oraz kluczową, różnicą jest fakt, iż w niektórych naszych modelach pozwalamy zmiennym (z_j) posiadać rozkład ciężko-ogonowy. Jak zobaczymy, to znacząco zmienia zachowanie (1.3). η^j są zwykle symetrycznymi α-stabilnymi procesami Lévy'ego, chociaż, w niektórych naszych wynikach (η_j) są bardziej ogólnymi procesami Lévy'ego.

2.1 Asymetryczny proces Rosenblatta i procesy Hermite'a (rozdział 3 rozprawy)

Dla $0 < H < 1$ istnieje tylko jeden (modulo stała multiplikatywna) H-sssi process gaussowski, mianowicie ułamkowy ruch Browna (patrz [11, Twierdzenie 1.3.3]). W związku z tym, pojawia się on w naturalny sposób jako proces graniczny różnych procedur skalowania czasu czy przestrzeni obiektów losowych. Należy do większej rodziny tak zwanych procesów Hermite'a. Dla $k \geq 1$ k-proces Hermite'a jest procesem H-sssi żyjącym w k-tym chaosie Wienera, można go opisać używając, na przykład, wielokrotnych całek Wiener'a-Itô:

$$Z_H^k(t) := \int_{\mathbb{R}^k}' \int_0^t \prod_{j=1}^k (s-x_j)_+^{d-1} ds W(dx_1)\dots W(dx_k), \tag{2.2}$$

gdzie W jest dwustronnym ruchem Browna, $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k}) < d < \frac{1}{2}$ jest liczbą spełniającą $H = kd - k/2 + 1$, tak że $1/2 < H < 1$.

Procesy k-Hermite'a pojawiają się naturalnie jako procesy graniczne w rozważaniu procesów postaci (1.1), gdy $\xi_j = H_k(\rho_j)$, gdzie H_k jest k-tym wielomianem Hermite'a a (ρ_j) jest stacjonarnym ciągiem gaussowskim spełniającym

$$r(n) := \mathbb{E}(\rho_n \rho_0) = n^{\frac{2H-2}{k}} L(n), \tag{2.3}$$

z $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, $k \geq 1$ i L - funkcją wolno zmieniającą się w nieskończoności (patrz [26]).

Ostatnio w [7] dowiedziono, że proces Rosenblatta można otrzymać z poissonowskiego układu cząstek postaci (2.1), gdzie $(z_j) = (\sigma_j)$ są losowymi znakami (w tej sekcji trzymamy się notacji z [7]): (σ_j) jest ciągiem i.i.d. dla którego każda z σ_j przyjmuje wartości 1 i -1 z równym prawdopodobieństwem. Procesy (η^j) są symetrycznymi α-stabilnymi procesami Lévy'ego z $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. W [7] pokazano, iż proces zadany przez

$$\xi_t^T = \frac{1}{T} \sum_{j \neq k} \sigma_j \sigma_k \langle \Lambda(x^j + \eta^j, x^k + \eta^k; T), \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle, \quad t \geq 0, \tag{2.4}$$

gdzie Λ jest 2-*krotnym czasem lokalnym samoprzecięć* dwóch niezależnych α-stabilnych procesów Lévy'ego, zbiega w $\mathcal{C}[0,\tau]$ dla $\tau \in (0,\infty)$, przy $T \to \infty$ do procesu Rosenblatta z wykładnikiem Hursta $H = \alpha$. Nieformalnie i bardziej ogólnie, k-krotny czas lokalny samoprzecięć procesów cadlag $\rho^1, \dots, \rho^k$ w czasie $T \geq 0$ (oznaczany przez $\Lambda^{(k)}$) można zdefiniować przez

$$\left\langle \Lambda^{(k)}(\rho^1, \dots, \rho^k; T), \phi \right\rangle = \int_{[0,T]^k} \phi(\rho^1_{s_1}) \delta_0(\rho^2_{s_2} - \rho^1_{s_1}) \dots \delta_0(\rho^k_{s_k} - \rho^1_{s_1}) ds_1 \dots ds_k, \tag{2.5}$$

gdzie δ_0 jest deltą Diraca w 0, a $\phi \in \mathcal{S}$ (przestrzeń Schwartza). Formalnie, lewą stronę (2.5) definiujemy aproksymując δ_0 funkcjami gładkimi, patrz [24].

Początkowo nie było jasne czy procesy Hermite'a są jedynymi procesami samopodobnymi, o stacjonarnych przyrostach w odpowiadających chaosach Wienera. Jest to prawda dla $k = 1$, lecz dla $k \geq 2$ każdy k-ty chaos Wienera "zawiera" już więcej niż tylko odpowiedni proces Hermite'a. Pierwszym przykładem tego typu procesu był *asymetryczny proces Rosenblatta*

([17] i [30]), który otrzymuje się dla $k = 2$ poprzez zastąpienie jadra całkowego $\prod_{j=1}^{k}(s - x_j)_+^{d-1}$ w (2.2) przez

$$g(x, y) = x^{-1+\alpha/2} y^{-1+\beta/2} \mathbf{1}_{\{x>0, y>0\}}, \tag{2.6}$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 1)$ i $\alpha + \beta > 1$. Nawet w tym najprostszym przypadku z $k = 2$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in (0, 1)$ i $\alpha+\beta = \alpha'+\beta' > 1$ odpowiadające procesy mają różne rozkłady dla różnych wyborów α, α', β i β' (patrz [30, Stwierdzenie 3.10]).

Wyniki

Rozszerzamy główny wynik [7] do wszystkich procesów k-Hermite'a pokazując że jeśli dla $k \geq 2$, $\alpha \in (1 - \frac{1}{k}, 1)$ i $T > 0$ oznaczymy

$$\rho_t^T := \frac{1}{T^{k/2}} \sum_{j_1 \neq \ldots \neq j_k} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_k} \langle \Lambda^{(k)}(x^{j_1} + \xi^{j_1}, \ldots, x^{j_k} + \xi^{j_k}; T), \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle, t \geq 0, \tag{2.7}$$

to wówczas, proces ρ^T ma ciągłą modyfikację oraz przy $T \to \infty$ zbiega według rozkładu w $\mathcal{C}[0, \tau]$, dla każdego $\tau > 0$, do procesu k-Hermite'a Z_H^k z wykładnikiem Hursta $H = 1 - (1 - \alpha)k/2$ (patrz **Twierdzenie 3.2.3** w rozprawie).

Ponadto, udowadniamy (patrz **Twierdzenie 3.2.2** w rozprawie), że jeśli rozważymy inny funkcjonał tego samego układu cząstek, t.j.,

$$\zeta_t^T = \frac{1}{T} \sum_{j \neq k} \sigma_j \sigma_k \int_0^T \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]}(x^j + \eta_r^j) \frac{1}{|x^k + \eta_s^k - x^j - \eta_r^j|^{1-\frac{\beta-\alpha}{2}}} dr ds \tag{2.8}$$

dla $T > 0, t \geq 0$ oraz α i β takich że $1 > \beta > \alpha > 0$, $\alpha + \beta > 1$, to przy $T \to \infty$ procesy η^T zbiegają w $\mathcal{C}[0, \tau]$, dla każdego $\tau > 0$, do asymetrycznego procesu Rosenblatta z parametrami (α, β) (z dokładnością do multiplikatywnej stałej).

Wyniki rozdziału 3 rozprawy są oparte w głównej mierze na publikacji [29] autora rozprawy.

2.2 Procesy stabilne (rozdziały 4 i 5 rozprawy)

Znacząca część stabilnych procesów samopodobnych rozważanych w literaturze posiada reprezentację całkową postaci

$$X_t = \int_S f_t(x) M(dx), \quad t \in T, \tag{2.9}$$

gdzie T jest pewnym zbiorem indeksów, $(S, \mathcal{S}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, $f_t : S \to \mathbb{R}$ są deterministycznymi funkcjami, a M - miarą losową stabilną. Ogólnie rzecz biorąc, miara losowa M odpowiada za ciężkość ogonów rozkładów brzegowych procesu X, zaś funkcje $(f_t)_{t \in T}$ określają strukturę zależności X.

W ostatnich latach wprowadzono kilka nowych stabilnych procesów niegaussowskich. Otrzymano je jako obiekty graniczne przeskalowanych układów dynamicznych (patrz [20] and [13]) oraz układów cząstek (patrz [5]). W rozprawie pokazujemy, że można je również otrzymać jako procesy graniczne funckjonałów układów cząstek postaci (2.1) z wagami z_j o ciężkich ogonach oraz rozważając zmodyfikowaną wersję modeli błądzenia losowego w losowym środowisku. Ta część rozprawy oparta jest na dwóch publikacjach autora [28] i [27].

W [20] [13] autorzy zbadali sumy częściowe stacjonarnego i nieskończenie podzielnego procesu $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ danego przez

$$X_n = \int_E f_n(x) dM(x) \tag{2.10}$$

gdzie M jest symetrczną homogeniczną nieskończenie podzielną miarą losową na pewnej przestrzeni mierzalnej $(E, \mathcal{E})$ z σ-skończoną miarą kontrolną μ i lokalną miarą Lévy'ego, która jest regularnie zmieniająca się w nieskończoności z indeksem $\alpha \in (0, 2)$. Funkcje f_n są deterministyczne i spełniają $f_n(x) = f(T^n(x))$ dla pewnego ergodycznego, zachowującego miarę, przekształcenia T na $(E, \mathcal{E}, \mu)$. Założono również, że T posiada zbiór Darllinga-Kaca z regularnie zmieniającym się ciągiem normalizującym. Autorzy powyższych prac otrzymali kilka klas H-sssi procesów granicznych (patrz (2.12) i (2.16)). Niektóre z nich były już znane wcześniej (patrz [10]). Klasy procesów granicznych zdefiniowano używając (2.9).

Rozpatrując układ cząstek postaci (2.1) z wagami o ciężkich ogonach, otrzymujemy w rozprawie cząsteczkową interpretację klas procesów rozważanych w [10], [20] i [13]. Ponadto, wprowadzając *błądzenie losowe w podwójnie losowym środowisku* (publikacja [28] autora, dostajemy reprezentację klasy (2.16) procesów wprowadzonej w [13], która dotąd (w ogólności) posiadała tylko przedstawienie w abstrakcyjnej postaci (2.9).

2.2.1 Wyniki oparte o układy cząstek (rozdział 4 w rozprawie)

W rozprawie rozważamy funkcjonały układu cząstek (2.1) postaci

$$G_t^T = \frac{1}{F_T} \sum_j z_j \int_0^{Tt} \phi(x^j + \eta_u^j) du, \quad T > 0, \tag{2.11}$$

gdzie F_T jest odpowiednią normalizacją, zaś ϕ - całkowalną funkcją. Nasze wyniki są dosyć ogólne. Niemniej jednak, aby prezentacja samych wyników była czytelna i miarodajna przedstawimy nasze wyniki w uproszczonej formie.

Załążmy że cząstki poruszają się zgodnie z symetrycznymi β-stabilnymi procesami Lévy'ego, dla $1 < \beta < 2$, oraz, że (z_j) są i.i.d., o gęstości proporcjonalnej do $|z|^{-1-\alpha}\mathbf{1}_{\{|z|>1\}}dz$ dla $1 < \alpha < 2$. To, jakie procesy graniczne otrzymujemy z (2.11), zależy w głównej mierze od dwóch własności ϕ:

(i) od tego czy $\int_{\mathbb{R}} \phi(y)dy = 0$ czy też nie;

(ii) jak zachowuje się $\phi(y)$ dla $y \to \pm\infty$.

Twierdzenie graniczne pierwszego rzędu

Jeśli $\int_{\mathbb{R}} \phi(y)dy \neq 0$, to przy normalizacji $F_T = T^{1-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}}$

$$G^T \xRightarrow{\mathcal{C}[0,\infty)} K \int_{\mathbb{R}} \phi(y)dy \times X,$$

gdzie K jest dodatnią stałą, a X jest procesem danym przez

$$X = \left(\int_{\mathbb{R}\times\Omega'} L_t(x,\omega')M_\alpha(dx, d\omega') \right)_{t\geq 0}, \tag{2.12}$$

przy czym $(L_t(x,\omega'))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ jest (ciągłą względem (t,x)) wersją czasu lokalnego β-stabilnego procesu Lévy'ego z $\beta \in (1,2)$ (zdefiniowaną na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$) i M_α jest symetryczną α-stabilną miarą losową na $\mathbb{R}\times\Omega'$ z miarą kontrolną $\lambda_1 \otimes \mathbb{P}'$, która to sama jest zdefiniowana na innej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Szczegóły zawarte sę w **Twierdzeniu 4.6.1** w rozprawie.

Twierdzenia graniczne drugiego rzędu

Jeśli $\int_{\mathbb{R}} \phi(y)dy = 0$, to aby otrzymać nietrywialny proces graniczny z G^T, należy wziąć inną normalizację. Sytuacja jest również bardziej skomplikowana, gdyż zachowanie G^T zależy mocno od szybkości zaniku ϕ w $+\infty$ i $-\infty$.

Jeśli ϕ zanika wystarczająco szybko w nieskończoności (wystarczy, na przykład, założyć $\int_{\mathbb{R}} |\phi(y))||y|^{\kappa}dy < \infty$ dla pewnego $\kappa > \frac{\beta-1}{2}$), to przy normalizacji $F_T = T^{\frac{\beta-1}{2\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}}$ zachodzi

$$G^T \xrightarrow{f.d.d.} K_1(\phi)Y,$$

gdzie Y dane jest przez

$$(Y(t))_{t\geq 0} = \left(\int_{\Omega'\times\mathbb{R}} W(L_t(x,\omega'),\omega')M_\alpha(d\omega',dx) \right)_{t\geq 0}, \tag{2.13}$$

Tutaj, (L_t) i M_α są jak wcześniej. Dodatkowo mamy nowe źródło losowości w postaci ruchu Browna W zdefiniowanego na $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, niezależnego od czasu lokalnego (L_t). Patrz **Twierdzenie 4.6.2** w rozprawie.

Procesy (2.12) i (2.13) są tymi samymi, które otrzymano odpowiednio [20] i [13] poprzez rozważanie układów dynamicznych.

Gdy ϕ zanika w nieskończoności relatywnie wolno, to granica (2.11) zależy w bardziej wrażliwy sposób od zachowania ϕ. Załóżmy, że $\phi(x) \sim \frac{c}{|x|^\gamma}$, gdzie $1 < \gamma < 1 + \frac{\beta-1}{2}$. Wówczas, dla $F_T = T^{1+\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\gamma}{\beta}}$

$$G^T \xrightarrow{f.d.d.} K_2(\phi)V,$$

gdzie $K_2(\phi)$ jest dodatnią stałą, a V dany jest przez

$$V_t = \int_{\mathbb{R}\times\Omega'} Z_t(x,\omega')M_\alpha(dx,d\omega'), \tag{2.14}$$

przy M_α zadanym jak wcześniej i

$$Z_t(x,\omega') = \int_0^\infty |y|^{-\gamma} \left(L_t(x+y,\omega') - L_t(x-y,\omega') \right) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

L_t jest jak w pozostałych dwóch przypadkach. Szczegóły można znaleźć w **Twierdzeniu 4.6.4** w rozprawie. Istnieją również przypadki, w których jeden z ogonów ϕ dominuje drugi. Prowadzą one do podobnych wyników, gdzie zmodyfikowany jest nieco proces Z. Na proces (Z_t) można patrzeć jak na ułamkową pochodną czasu lokalnego procesów stabilnych. O jego własnościach można przeczytać np. w [12]. O ile nam wiadomo, sam proces V nie był dotąd nigdzie rozważany.

2.2.2 Model błądzenia losowego w losowym środowisku (rozdział 5 rozprawy)

Proces (2.13) jest jednym z elementów większej klasy procesów $Y_{\alpha,\beta,\gamma}$ wprowadzonej w [13], które można opisać używając całek względem miar losowych stabilnych:

$$(Y_{\alpha,\beta,\gamma}(t))_{t\geq 0} = \left(\int_{\Omega' \times \mathbb{R}} S_\gamma(L_t(x,\omega'),\omega') dZ_\alpha(\omega',x) \right)_{t\geq 0}, \tag{2.16}$$

gdzie S_γ jest symetrycznym γ-stabilnym procesem Levy'ego, $(L_t(x))_{t\geq 0}$ - czasem lokalnym symetrycznego β-stabilnego procesu Lévy'ego, niezależnego od S_γ (oba zdefiniowane są na $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$) i Z_α jest symetryczną α-stabilną miarą losową na $(\Omega', \mathbb{R})$ z miarą kontrolną $\mathbb{P}' \otimes \lambda_1$. Stałe α, β i γ spełniają $0 < \alpha < \gamma \leq 2, \beta \in (1,2]$. Poza przypadkiem $\alpha = 2$, nie wprowadzono dotąd żadnych twierdzeń granicznych, w których procesy te pojawiałyby się jako graniczne. W rozdziale 5 rozprawy omawiamy model, który robi dokładnie to.

Model, który rozważamy w tej części rozprawy oparte są na modelach błądzenia losoweg w losowym środowisku. Wprowadzone zostały w pracy Kestena i Spitzera [15]. Owe modele opisują układ błądzeń losowych, nazywanych często *użytkownikami*, którzy poruszają sie w $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$ i "zbierają" *nagrody* (ξ_k), które są rozmieszczone w punktach $\mathbb{Z}^d$. Użytkownik otrzymuje losową nagrodę (z losowego środowiska) za każdym razem gdy odwiedza punkt $\mathbb{Z}^d$, w którym znajduje się nagroda.

Wartością, która nas zazwyczaj interesuje w tego typu modelach jest sumaryczna wartość zebranych nagród. Jeśli oznaczymy błądzenie losowe na $\mathbb{Z}$ (ustalamy odtąd $d = 1$) przez $(S_n)_{n\geq 0}$ i losowe środowisko przez $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, to suma nagród zebranych do kroku n włącznie wynosi

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_{S_k}. \tag{2.17}$$

Model błądzenia losowego w *podwójnie losowym środowisku*, rozpatrywany w rozprawie jest podobny do oryginalnego (patrz np. [10]), z podkreśleniem faktu, że wprowadzamy dodatkowe źródło losowości. W naszym modelu, każdy użytkownik generuje ciąg $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. zmiennych losowych niezależnych of (ξ_i) i samego błądzenia losowego. Podczas każdej wizyty w punkcie $x \in \mathbb{Z}$ otrzymuje on nagrodę daną przez $Y_k \times \xi_x$, gdzie k jest jest liczbą wizyt w punkcie x, które miały już miejsce (włączając w to wizytę ostatnią). Reasumując, mnożymy potencjalną nagrodę przez zmienną losową zależną od liczby odbytych już wizyt. Sumaryczna nagroda w czasie n wynosi więc

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k=1}^{N_n(x)} Y_k\Big)\xi_x, \tag{2.18}$$

gdzie

$$N_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{S_k=x\}} \tag{2.19}$$

oznacza liczbę wizyt w punkcie $x \in \mathbb{Z}$ do czasu $n \in \mathbb{N}$ włącznie.

Interesuje nas graniczne zachowanie, gdy rozpatrzymy dużą liczbę niezależnych użykowników z niezależnymi $Y_1, Y_2, \ldots$ i poruszających sie w niezależnych środowiskach. Dokładniej, w rozprawie rozważamy ciąg i.i.d. procesów $\big((D_n^{(i)}(t))_{t\geq 0}\big)_{i=1}^{\infty}$, $n \geq 1$ i definiujemy dla $t \geq 0$

$$G_n(t) := \frac{1}{c_n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{c_n} D_n^{(i)}(t), \quad n \geq 1, \tag{2.20}$$

gdzie c_n jest ciągiem dodatnich liczb naturalnych, takim że $c_n \to \infty$. Pokazujemy (**Twierdzenie 5.2.2** w rozprawie, że przy pewnych założeniach, dla $0 < \alpha < \gamma \leq 2$ procesy $(G_n(t))_{t\geq 0}$ zbiegają w sensie rozkładów skończenie-wymiarowych (z dokładnością do multiplikatywnej stałej), przy $n \to \infty$ do procesu $Y_{\alpha,\beta,\gamma}$ (patrz (2.16)).

Literatura

[1] S. Bai and M. S. Taqqu. Behavior of the generalized Rosenblat process at extreme critical exponent values. *Ann. Probab.*, 45(2):1278–1324, 03 2017.

[2] R. M. Balan, A. Jakubowski, and S. Louhichi. Functional convergence of linear processes with heavy-tailed innovations. *Journal of Theoretical Probability*, 29:491–526, 2014.

[3] T. Bojdecki, L. Gorostiza, and A. Talarczyk. Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems i: long-range dependence. *Stochastic Processes And Their Applications*, 116(1):1–18, 2006.

[4] T. Bojdecki, L. Gorostiza, and A. Talarczyk. Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems ii: Critical and large dimensions. *Stochastic Processes and their Applications*, 116(1):19 – 35, 2006.

[5] T. Bojdecki, L. Gorostiza, and A. Talarczyk. A long range dependence stable process and an infinite variance branching system. *Ann. Probab.*, 35(2):500–527, 2007.

[6] T. Bojdecki, L. Gorostiza, and A. Talarczyk. Occupation time fluctuations of an infinite-variance branching system in large dimensions. *Bernoulli*, 13(1):20–39, 2007.

[7] T. Bojdecki, L. Gorostiza, and A. Talarczyk. From intersection local time to the Rosenblatt process. *J Theor Probab*, 28(3):1227–1249, 2015.

[8] T. Bojdecki and A. Talarczyk. Particle picture interpretation of some Gaussian processes related to fractional brownian motion. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(5):2134–2154, 2012.

[9] J. D. Deuschel and K. Wang. Large deviations for the occupation time functional of a Poisson system of independent Brownian particles. *Stochastic Processes and their Applications*, 52(2):183–209, 1994.

[10] C. Dombry and N. Guillotin-Plantard. Discrete approximation of a stable self-similar stationary increments process. *Bernoulli*, 15(1):195–222, 2009.

[11] P. Embrechts and M. Maejima. *Selfsimilar Processes*. Princeton University Press, 2002.

[12] P. J. Fitzsimmons and R. K. Getoor. Limit theorems and variation properties for fractional derivatives of the local time of a stable process. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*, 28(2):311–333, 1992.

[13] P. Jung, T. Owada, and G. Samorodnitsky. Functional central limit theorem for negatively dependent heavy-tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. *The Annals of Probability*, (4):2087–2130, 2017.

[14] Y. Kasahara and M. Maejima. Weighted sums of i.i.d. random variables attracted to integrals of stable processes. *Probability Theory and Related Fields*, 78(1):75–96, Mar 1988.

[15] H. Kesten and F. Spitzer. A limit theorem related to a new class of self similar processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 50(1):5–25, 1979.

[16] Yuqiang Li. A note on Riemann–Liouville processes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 463(2):496 – 505, 2018.

[17] M. Maejima and C. A. Tudor. Selfsimilar processes with stationary increments in the second Wiener chaos. *Probability and Mathematical Statistics*, 32(1), 2012.

[18] A. Martin-Löf. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 34(3):205–223, Sep 1976.

[19] P. Miłoś. Occupation times of subcritical branching immigration systems with Markov motions. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(10):3211 – 3237, 2009.

[20] T. Owada and G. Samorodnitsky. Functional central limit theorem for heavy-tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. *The Annals of Probability*, 43(1):240–285, 2015.

[21] Y. Ren, R. Song, and R. Zhang. Central limit theorems for supercritical superprocesses. *Stochastic Processes and their Applications*, 125(2):428 – 457, 2015.

[22] Y. Ren, R. Song, and R. Zhang. Limit theorems for some critical superprocesses. *Illinois J. Math.*, 59(1):235–276, 2015.

[23] G. Samorodnitsky. *Stochastic Processes and Long Range Dependence*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer International Publishing, first edition, 2016.

[24] A. Talarczyk. Self-intersection local time of order k for Gaussian processes in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. *Stochastic Processes and Applications*, 96:11–72, 2001.

[25] M. S. Taqqu. Weak convergence to fractional Brownian motion and to the rosenblatt process. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 31:287–302, 1975.

[26] M. S. Taqqu. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Probability Theory and Related Fields*, 50:58–83, 1979.

[27] Ł. Treszczotko. Infinite variance h-sssi processes as limits of particle systems. *arXiv preprint*, 2017. `https://arxiv.org/abs/1709.07644`.

[28] Ł. Treszczotko. Random walks in doubly random scenery. *Electronic Communications in Probability*, 23(66):11 pp., 2018.

[29] Ł. Treszczotko. Particle picture representation of the non-symmetric Rosenblatt process and Hermite processes of any order. *Stochastics and Dynamics*, 19(01):1950001, 2019.

[30] C. A. Tudor. *Analysis of Variations for Self-similar Processes*. Springer International Publishing Switzerland, first edition, 2013.