

PESEL:

UNIwersytet Warszawski  
Wydział Matematyki, Informatyki  
i Mechaniki

Egzamin wstępny na studia 2 stopnia  
na kierunku INFORMATYKA

29 czerwca 2022 roku

*Czas rozwiązywania: 150 minut*

*W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.*

**Przykład poprawnego rozwiązania zadania**

4. Każda liczba całkowita postaci  $10^n - 1$ , gdzie  $n$  jest całkowite i dodatnie,

TAK (a) dzieli się przez 9;

NIE (b) jest pierwsza;

TAK (c) jest nieparzysta.

*Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.*

**Zasady punktacji**

*Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):*

- jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

*Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba*

$$W = \min(30, D + m/100),$$

*gdzie  $D$  oznacza liczbę „dużych”, a  $m$  liczbę „małych” punktów. Na przykład 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.*

*Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.*

*Powodzenia!*

1. Liczba rozwiązań równania  $e^x = 2x$  w  $\mathbb{R}$  wynosi

- (a) 0;  
 (b) 1;  
 (c) 2.

2. Niech  $H_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$  będzie  $n$ -tą liczbą harmoniczną. Wówczas

- (a) promień zbieżności szeregu potęgowego  $\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$  wynosi 1;  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$ ;  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) = 0$ .

3. Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = e^{-x^2} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sin(e^{x^2})$

- (a) jest różniczkowalna na  $\mathbb{R}$ ;  
 (b) jest jednostajnie ciągła na  $\mathbb{R}$ ;  
 (c) spełnia warunek Lipschitza na  $\mathbb{R}$ .

4. Niech  $\mathbb{G} = (G, \circ, e)$  będzie grupą. Rozważmy grupę  $\mathbb{G}^{\text{op}} = (G, \cdot, e)$ , gdzie  $x \cdot y = y \circ x$  dla  $x, y \in G$ .

- (a) Dla funkcji  $f: G \rightarrow G$  określonej wzorem  $f(x) = x^{-1}$  oraz dowolnej podgrupy  $\mathbb{H} = (H, \circ, e)$  grupy  $\mathbb{G}$  zbiór  $f(H)$  jest podgrupą grupy  $\mathbb{G}^{\text{op}}$ .  
 (b) Grupy  $\mathbb{G}$  i  $\mathbb{G}^{\text{op}}$  są izomorficzne.  
 (c)  $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{\text{op}}$  wtedy i tylko wtedy, gdy grupa  $\mathbb{G}$  jest abelowa.

5. Niech  $M = \{(a_{ij})_{i,j=1}^3 \in \mathbb{R}^{3,3} : a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$ .

- (a) Zbiór  $M$  jest zamknięty na działanie mnożenia macierzy.  
 (b) Zbiór  $M$  jest podprzestrzenią liniową w  $\mathbb{R}^{3,3}$ .  
 (c) Istnieje niezerowa podprzestrzeń liniowa  $N$  przestrzeni  $\mathbb{R}^{3,3}$ , taka że  $M \cap N = \{0\}$ , gdzie  $0$  oznacza macierz zerową.

6. Dane są trzy funkcje:  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  i  $h: C \rightarrow D$ , których złożenie  $h \circ g \circ f: A \rightarrow D$  jest bijekcją. Wynika z tego, że:

- (a)  $f$  jest funkcją różnowartościową (injekcją);  
 (b)  $g$  jest bijekcją;  
 (c)  $h$  jest na  $D$  (surjekcją).

7. Dla  $x \in \mathbb{N}$  niech  $J(x)$  oznacza liczbę jedynek występujących w zapisie binarnym liczby  $x$ . Relacją częściowego porządku w  $\mathbb{N}$  jest relacja

- (a)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : J(x) \leq J(y)\}$ ;  
 (b)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : J(x) < J(y) \text{ lub } x = y\}$ ;  
 (c)  $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : J(x) < J(y) \text{ lub } x \leq y\}$ .

8. Dla  $n \geq 6$  liczba permutacji zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , w których 1 i 2 są w różnych cyklach długości 3, jest równa
- (a)  $(n - 2)!$ ;
- (b)  $\binom{n-2}{2} \binom{n-4}{2} (n - 4)!$ ;
- (c)  $24 \cdot \sum_{k=2}^{n-4} \binom{n-2}{4} \left[ \begin{matrix} n-6 \\ k-2 \end{matrix} \right]$ , gdzie  $\left[ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right]$  to liczba Stirlinga I rodzaju.
9. Liczba  $p > 2$  jest pierwsza. Wynika z tego, że
- (a)  $(p - 2)^{p-1} - 1$  dzieli się przez  $p$ ;
- (b)  $(p - 2)^{p^2-1} - 1$  dzieli się przez  $p^2$ ;
- (c)  $(p - 2)^{p^3-p^2} - 1$  dzieli się przez  $p^3$ .
10. Rzucamy symetrycznymi kostkami: sześcienną i ośmiościenną. Niech  $A$  będzie zdarzeniem, że na kostce sześciennej wypadło 6. Następujące zdarzenia są niezależne od  $A$ :
- (a) suma oczek na obu kostkach jest parzysta;
- (b) suma oczek na obu kostkach jest większa od 7;
- (c) suma oczek na obu kostkach jest równa 7.
11. Niech  $F_X(t)$  będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej  $X$ . Załóżmy, że  $F_X(1) = \frac{1}{3}$ . Wynika z tego, że
- (a) istnieje takie  $t$ , że  $F_X(t) = 1$ ;
- (b)  $F_X(2) > \frac{1}{3}$ ;
- (c) istnieje takie  $t$ , że  $F_X(t) < \frac{1}{4}$ .
12. Całkę  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  przybliżamy kwadraturą interpolacyjną  $Q(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ .
- (a) Dla  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  kwadratura  $Q$  jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia 1.
- (b) Można dobrać  $x_1$  i  $x_2$ , tak aby kwadratura  $Q$  była rzędu 2 oraz  $A_1 = A_2 = 2$ .
- (c) Maksymalny rząd kwadratury  $Q$  jest równy 4.
13. Wysokość drzewa ukorzonego mierzymy liczbą krawędzi na najdłuższej ścieżce z korzenia do wierzchołka w tym drzewie. Dany jest spójny  $n$ -wierzchołkowy graf dwuspójny wierzchołkowo (tzn. bez wierzchołków rozdzielających) o co najmniej 4 wierzchołkach.
- (a) Wysokość każdego drzewa przeszukiwania wszerz w takim grafie jest mniejsza od  $n/2$ .
- (b) Wysokość każdego drzewa przeszukiwania w głąb w takim grafie jest większa od  $n/2$ .
- (c) Wysokość każdego drzewa przeszukiwania w głąb w takim grafie wynosi co najmniej 3.

14. Wysokość drzewa wyszukiwań binarnych mierzymy liczbą krawędzi na najdłuższej ścieżce od korzenia do liścia (węzła z kluczem bez następników). Wysokość drzew z jednym kluczem wynosi 0. Wysokość drzewa AVL z 2022 kluczami

- (a) wynosi co najmniej 11;
- (b) wynosi co najwyżej 22;
- (c) będzie maksymalna, jeśli klucze zostaną wstawione do początkowo pustego drzewa w kolejności rosnącej.

15. Rozważmy wyrażenie regularne  $K = A^*bbA^* + A^*aAA + A^*aA$  nad alfabetem  $\{a, b\}$  (zapis  $A$  w wyrażeniu to skrót na  $(a + b)$ ). Niech  $L = L(K)$  to język tego wyrażenia.

- (a) Automat minimalny dla  $L$  ma co najwyżej 4 stany.
- (b) Automat minimalny dla  $L$  ma przynajmniej 6 stanów.
- (c) Istnieje automat niedeterministyczny dla  $L$  o 5 stanach.

16. Załóżmy, że  $L$  to język bezkontekstowy, zaś  $K$  to język regularny, oba nad alfabetem  $A$ . Przez  $X^R$  oznaczamy język powstały z  $X$  przez odwrócenie wszystkich słów z  $X$ . Językiem bezkontekstowym jest język

- (a)  $L^R \cap K$ ;
- (b)  $(A^* - L) \cup K^*$ ;
- (c)  $L^* \cup K^R$ .

17. W strukturze relacyjnej, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie, następująca formuła logiki Hoare'a

$$\{x = a\} \text{ while } x < 0 \text{ do } x := x * a \{x > 0\}$$

jest prawdziwa

- (a) dla każdego  $a$ ;
- (b) dla każdego dodatniego  $a$ ;
- (c) dla każdego ujemnego  $a$ .

18. Dana jest definicja klasy w języku Java:

```
1 final class A {
2     static A a;
3     A() {a = this;}
4     static boolean f() {return a.equals(a);}
5     boolean g() {return a == this;}
6     boolean h() {return equals(this);}
7 }
```

- (a) Każde wykonanie metody  $f$  daje wynik **true**.
- (b) Każde wykonanie metody  $g$  daje wynik **true**.
- (c) Każde wykonanie metody  $h$  daje wynik **true**.

19. Dany jest program w języku Java:

```
1 class A {
2     public void m1() {System.out.println("A");}
3     public void m2(A a) {a.m1();}
4 }
5 class B extends A {
6     public void m1() {System.out.println("B");}
7 }
8 class C extends B {
9     public void m1() {System.out.println("C");}
10    public void m2(A a) {a.m2(this);}
11 }
12 public class Test {
13     public static void main(String[] args) {
14         A a1 = new A();
15         A a2 = new B();
16         A a3 = new C();
17         a3.m1(); // (a)
18         a2.m2(a3); // (b)
19         a3.m2(a1); // (c)
20     }
21 }
```

Podczas wykonania

- (a) wiersza 17 tego programu zostanie wypisane A;
- (b) wiersza 18 tego programu zostanie wypisane B;
- (c) wiersza 19 tego programu zostanie wypisane C.

20. Jeśli ruter musi przesłać datagram IP w wersji 4 o całkowitej długości 4500 oktetów do sieci o MTU 1500, to

- (a) podzieli go na trzy fragmenty;
- (b) w nagłówku drugiego fragmentu zawsze ustawi znacznik, że są jeszcze dalsze fragmenty;
- (c) w nagłówku ostatniego fragmentu zawsze ustawi znacznik zabraniający dalszej fragmentacji.

21. W kryptografii z kluczem publicznym klucz

- (a) publiczny służy do szyfrowania i podpisywania cyfrowego;
- (b) prywatny służy do deszyfrowania i weryfikowania podpisu cyfrowego;
- (c) prywatny służy do szyfrowania, a publiczny do deszyfrowania.

22. Atak przez odtworzenie ruchu (ang. *replay*) polega na tym, że

- (a) atakujący w celu uzyskania zamierzonego efektu odsyła atakowanemu literalną kopię komunikatu, jaki właśnie od niego uzyskał;
- (b) atakujący pozyskuje fragment interakcji między uprawnionymi użytkownikami, a następnie w innym kontekście używa go do uzyskania zamierzonego celu;
- (c) atakujący dokonuje pełnego zrzutu ruchu w sieci lokalnej w jakimś odcinku czasu, a następnie wysyła do sieci ruch, za którego pomocą usiłuje doprowadzić do sytuacji, w której ruch będzie wyglądał dokładnie tak, jak w uzyskanym zrzucie.

23. Współczesne rekomendacje dla kluczy publicznych używanych w szyfrowaniu RSA określają, że dla zapewnienia dostatecznie bezpiecznej poufnej komunikacji

- (a) wystarczająca jest długość klucza równa 2048 bitów;
- (b) wystarczająca jest długość klucza równa 1024 bitów;
- (c) wystarczająca jest długość klucza równa 256 bitów.

24. Przypuśćmy, że w tabeli  $R$  o kolumnach  $A, B, C$  para kolumn  $A, B$  jest kluczem. Załóżmy, że w tabeli  $R$  nie występują wartości  $\text{NULL}$ , w kolumnie  $A$  pojawia się dokładnie  $k$  różnych wartości, w kolumnie  $B$  dokładnie  $\ell$  różnych wartości, a w kolumnie  $C$  dokładnie  $m$  różnych wartości. Wynika z tego, że

- (a)  $\min(k, \ell) \leq m$ ;
- (b)  $k + \ell \geq m$ ;
- (c)  $k \cdot \ell \geq m$ .

25. Załóżmy, że tabela  $T$  o kolumnach  $a$  i  $b$  zajmuje 1000 bloków dyskowych, a w pamięci operacyjnej jest miejsce na 11 bloków dyskowych. Wynika z tego, że ewaluacja zapytania

`SELECT a FROM T WHERE b = (SELECT min(b) FROM T)`

wymaga

- (a) użycia indeksu;
- (b) posortowania tabeli  $T$ ;
- (c) odczytania *pewnego* bloku tabeli  $T$  co najmniej 3 razy.

26. W sali wystawowej może jednocześnie przebywać co najwyżej  $K$  osób. Wystawę zwiedzają grupy reprezentowane przez procesy  $\text{Grupa}$ . Parametrem procesu  $\text{Grupa}$  jest liczba osób w grupie, będąca liczbą dodatnią mniejszą bądź równą  $K$ . Jeśli grupa w całości nie mieści się w sali, musi poczekać. Rozważmy następujące rozwiązanie tego zadania korzystające z semafora silnego  $S$  o wartości początkowej  $K$ .

```
1 process Grupa (int liczność) {
2   while (true) {
3     for (int i = 0; i < liczność; ++i) P(S); // Grupa czeka na miejsce.
4     // Grupa zwiedza wystawę.
5     for (int i = 0; i < liczność; ++i) V(S); // Grupa opuszcza wystawę.
6     // Grupa odpoczywa.
7   }
8 }
```

- (a) Rozwiązanie ma własność bezpieczeństwa.
- (b) Rozwiązanie ma własność żywotności.
- (c) Istnieje taka liczba grup i takie wykonanie programu, w którym pewna grupa zwiedza wystawę nieskończenie wiele razy.

27. Zgodnie z semantyką klasycznych monitorów (Hoare'a) proces może zostać wstrzymany

- (a) przed rozpoczęciem wykonania funkcji eksportowanej przez monitor;
- (b) wskutek wykonania operacji wait na zmiennej warunkowej wewnątrz monitora;
- (c) wskutek wykonania operacji signal na zmiennej warunkowej wewnątrz monitora.

28. Fragmentacja wewnętrzna pamięci

- (a) może wystąpić przy zarządzaniu pamięcią metodą stronicowania;
- (b) polega na tym, że część obszaru przydzielonego procesowi pozostaje niewykorzystana;
- (c) może wystąpić przy zarządzaniu pamięcią metodą stref statycznych.

29. W pewnym systemie operacyjnym z wirtualizacją pamięci strona ma rozmiar 8 KiB, adres wirtualny jest 56-bitowy, a adres fizyczny jest 44-bitowy. Istnieje taka konfiguracja mapowania adresów dwóch różnych procesów  $A$  i  $B$ , że

- (a) adres wirtualny  $(123456)_{16}$  procesu  $A$  jest odwzorowywany na adres fizyczny  $(312456)_{16}$ ;
- (b) adres wirtualny  $(123456)_{16}$  procesu  $B$  jest odwzorowywany na adres fizyczny  $(321456)_{16}$ ;
- (c) zarówno adres wirtualny  $(abcdef)_{16}$  procesu  $A$ , jak i adres wirtualny  $(abcdef)_{16}$  procesu  $B$  są odwzorowywane na ten sam adres fizyczny  $(abcdef)_{16}$ .

30. Dany jest kod w języku JavaScript:

```
1 let tab = [1, 2, 3, 4];  
2 tab.s = function() {return this.reduce((s, a) => s + a, 0);}  
3 let t = "";
```

Wartość  $t$  będzie równa "1234" (bez cudzysłowu) po wykonaniu fragmentu kodu:

- (a) `for (let i in tab) t = t + tab[i];`
- (b) `for (let e in tab) t = t + e;`
- (c) `for (let e of tab) t = t + e;`