

1. Określamy ciąg

$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n^2} & \text{dla } n > 0 \text{ nieparzystych;} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{dla } n > 0 \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Niech $A = \{a_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ oraz niech $-A = \{-a : a \in A\}$. Wynika z tego, że

- (a) dokładnie jeden z kresów zbioru A należy do A ;
- (b) A ma dokładnie 2 punkty skupienia;
- (c) $\sup(-A) = \inf(A)$.

2. Załóżmy, że funkcja f o wartościach rzeczywistych jest określona na przedziale (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ i f jest różniczkowalna na $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Wynika z tego, że

- (a) f jest ciągła na (a, b) ;
- (b) jeżeli f jest ciągła na (a, b) , to jest różniczkowalna na (a, b) ;
- (c) zbiór wartości f na każdym przedziale domkniętym zawartym w (a, b) jest ograniczony.

3. Ciąg funkcji $f_n(x) = x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest

- (a) zbieżny punktowo na $[0, 1]$;
- (b) zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$;
- (c) ograniczony na $[0, 1 + \epsilon]$ dla pewnego $\epsilon > 0$.

4. Niech X, X' będą przestrzeniami liniowymi, a $U, V \subseteq X$ oraz $U', V' \subseteq X'$, odpowiednio, podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni X i X' . Załóżmy przy tym, że $X = U \oplus V$ oraz $X' = U' \oplus V'$. Wynika z tego, że

- (a) dla dowolnych przekształceń liniowych $f: U \rightarrow U'$ i $g: V \rightarrow V'$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $h: X \rightarrow X'$, takie że $h|_U = f$ oraz $h|_V = g$;
- (b) jeśli przestrzenie X i X' są izomorficzne, to U jest izomorficzne z U' lub U jest izomorficzne z V' ;
- (c) jeśli U jest izomorficzne z U' oraz V jest izomorficzne z V' , to przestrzenie X i X' są izomorficzne.

5. W przestrzeni liniowej X nad ciałem \mathbb{R} dane są trzy wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Wynika z tego, że

- (a) jeżeli układ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ jest liniowo niezależny, to układ $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a})$ jest liniowo niezależny;
- (b) jeżeli układ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ jest liniowo niezależny, to układ $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a})$ jest liniowo niezależny;
- (c) jeżeli układ $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a})$ jest liniowo niezależny, to układ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ jest liniowo niezależny.

6. Porządek leksykograficzny jest dobrze ufundowany na zbiorze

- (a) \mathbb{N}^k , dla każdego $k \in \mathbb{N}$;
- (b) \mathbb{N}^* wszystkich skończonych ciągów liczb naturalnych;
- (c) \mathbb{Q}^k , dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

7. Każdy podzbiór \mathbb{R} mocy continuum:

- (a) zawiera pewien przedział otwarty;
- (b) jest nieograniczony z góry i z dołu;
- (c) ma przeliczalne dopełnienie.

8. Liczba permutacji zbioru $\{1, \dots, 2021\}$, w których liczba 1 jest w cyklu długości parzystej, jest równa

- (a) $2021!/2$;
- (b) $1010 \cdot 2020!$;
- (c) $1011 \cdot 2020!$.

9. Liczba rozmieszczeń $n > 0$ nierozróżnialnych kul w $k > 0$ rozróżnialnych komórkach to współczynnik

- (a) przy x^n w rozwinięciu w szereg potęgowy funkcji $(1-x)^{-k}$;
- (b) przy x^k w rozwinięciu w szereg potęgowy funkcji $(1-x)^{-n}$;
- (c) przy x^{k-1} w rozwinięciu w szereg potęgowy funkcji $(1-x)^{-n-1}$.

10. Do urny wrzucamy $n \geq 3$ czarnych kul, przy czym każdą kulę niezależnie od pozostałych malujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ na białą. Wartość oczekiwana liczby białych kul

- (a) wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$;
- (b) wynosi $\frac{n}{2}$;
- (c) jest większa lub równa od wariancji liczby białych kul.

11. Dane są dwie niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$ oraz zmienna losowa $Z = X + Y$. Wynika z tego, że

- (a) $P(Z \geq 1) = \frac{7}{8}$;
- (b) zmienna Z ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 4]$ oraz wartość oczekiwaną 2;
- (c) $P(|Z - EZ| \geq 1) > \frac{2}{3}$.

12. Do znalezienia przybliżenia miejsca zerowego X funkcji $f(x) = x - \frac{1}{2(1+x^2)}$ stosujemy metodę iteracyjną $x_{n+1} = \frac{1}{2(1+x_n^2)}$. Wynika z tego, że

- (a) dla x_0 , dla których metoda jest zbieżna, rząd zbieżności wynosi przynajmniej 2;
- (b) metoda jest zbieżna do miejsca zerowego dla $x_0 = 10$;
- (c) metoda jest zbieżna do miejsca zerowego dla $x_0 = 0$.

13. Rozważmy drzewa wyszukiwań binarnych o 100 węzłach. Wysokość drzewa to liczba krawędzi na najdłuższej ścieżce od korzenia do liścia. Wysokość takiego drzewa wynosi
- (a) co najmniej 49;
- (b) co najmniej 7;
- (c) co najwyżej 99.
14. Agata i Bartek grają w następującą grę. Agata wybiera dwie różne liczby ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Zadaniem Bartka jest ustalenie liczb wybranych przez Agatę. Bartek wybiera pewien podzbiór zbioru S i pyta Agatę, czy zawiera on choć jedną z wybranych przez nią liczb. Do ustalenia obu wybranych liczb Bartkowi wystarczy
- (a) $O(n)$ pytań;
- (b) $O(\sqrt{n})$ pytań;
- (c) $O(\log n)$ pytań.
15. Załóżmy, że język $L \subseteq \Sigma^*$ jest bezkontekstowy, natomiast $K \subseteq \Sigma^*$ jest regularny. Wynika z tego, że język
- (a) $K \setminus L$ jest bezkontekstowy;
- (b) $K \cap L$ jest regularny;
- (c) $L \setminus K$ jest bezkontekstowy.
16. Niech $L \subseteq \{a, b\}^*$ będzie językiem zadanym przez wyrażenie regularne $(a+b)^*a(a+b)(a+b)$. Wynika z tego, że
- (a) każdy automat deterministyczny dla L ma przynajmniej 9 stanów;
- (b) minimalny automat deterministyczny dla L ma dokładnie 7 stanów;
- (c) każdy automat niedeterministyczny dla L ma przynajmniej 6 stanów.
17. Rozważmy strukturę relacyjną, której nośnikiem jest zbiór liczb całkowitych, a wszystkie symbole operacji i relacji mają standardowe znaczenie. O każdej z poniższych trójek Hoare'a stwierdź, czy jest ona prawdziwa:
- (a) $\{x = y\} \ x := x + y \ \{x > y\}$
- (b) $\{x = y + z\} \ \text{if } x < y \ \text{then } z := -z \ \{x \leq y + z\}$
- (c) $\{x = y \wedge x = z\}$
`while x > 0 do begin x := x - 1; y := y + 1 end`
 $\{y = 2 * z\}$
18. Mówimy, że widoczność A jest szersza niż widoczność B, jeśli składowe zadeklarowane z widocznością A są widoczne co najmniej wszędzie tam, gdzie widoczne są składowe zadeklarowane z widocznością B. W Javie widoczność pakietowa jest szersza niż
- (a) publiczna;
- (b) chroniona;
- (c) prywatna.

19. Dana jest definicja klasy w Javie

```
1 final class A {  
2  
3     public boolean f(Object x) {  
4         return equals(x);  
5     }  
6  
7     public boolean g(Object x) {  
8         return x.equals(this);  
9     }  
10 }
```

- (a) Wykonanie metody 'f' może się zakończyć wyjątkiem z podklasy klasy Exception.
- (b) Metoda 'f' zawsze daje jako wynik 'false'.
- (c) Wykonanie metody 'g' może się zakończyć wyjątkiem z podklasy klasy Exception.

20. Router posiadający co najmniej dwa interfejsy posługuje się między innymi adresami 202.107.2.15/26 oraz 150.207.20.21/19. Domyślna brama w tablicy tras routera ma najmniejszy możliwy adres w swojej sieci. Wynika z tego, że domyślna brama może mieć adres

- (a) 202.107.2.1;
- (b) 150.207.0.1;
- (c) inny niż 202.107.2.1 i 150.207.0.1.

21. Poniższe żądanie HTTP GET przechwycono za pomocą programu Wireshark

```
GET /files/docs1.html HTTP/1.1\r\n  
Host: isap.sejm.gov.pl\r\n  
User-Agent: Mozilla/5.0 (X11; Ubuntu; Linux x86_64; rv:62.0)\r\n  
Accept-Language: en-US,en;q=0.5\r\n  
Accept-Encoding: gzip, deflate\r\n  
Connection: keep-alive\r\n  
\r\n
```

Wynika z tego, że

- (a) adresem URL żądanego dokumentu jest `http://isap.sejm.gov.pl/files/docs1.html`
- (b) zażądano nawiązania połączenia nietrwałego;
- (c) w żądaniu zadeklarowano obsługę algorytmu kompresji gzip.

22. Pewien atak DoS wykorzystuje mechanizm fragmentacji IP w ten sposób, że atakujący wysyła dużo fragmentów różnych pakietów, ale dla żadnego z nich nie wysyła kompletu tworzącego pełny pakiet. Ten atak jest skuteczny dlatego, że
- (a) zasoby systemowe komputera docelowego przeznaczone na obsługę pakietów IP ulegają wyczerpaniu;
 - (b) zasoby systemowe jednego z ruterów pośredniczących przeznaczone na obsługę pakietów IP ulegają wyczerpaniu;
 - (c) przekroczony zostaje limit MTU.
23. Po wykonaniu interakcji zgodnej z protokołem Diffiego-Hellmana
- (a) dwie strony komunikacji mają ustalony wspólny sekret;
 - (b) dwie strony uzyskują wspólną wiedzę na temat wartości dokładnie jednego bitu danych;
 - (c) każda z dwóch stron uzyskuje wysłany od drugiej strony komunikat, którego wcześniej nie знаła, a który jest zabezpieczony przed odczytaniem przez trzecią stronę.
24. Proces może odebrać komunikat wysłany przez siebie samego
- (a) w modelu bezpośredniej komunikacji asynchronicznej;
 - (b) w modelu bezpośredniej komunikacji synchronicznej;
 - (c) w modelu komunikacji pośredniej przez przestrzeń krotek.
25. Algorytm Lamporta synchronizacji zegarów logicznych
- (a) służy do zapewnienia spójności pamięci podręcznych w systemach wieloprocesorowych;
 - (b) jest elementem algorytmu Ricarta-Agrawali wzajemnego wykluczania w systemach rozproszonych;
 - (c) służy do synchronizacji czasu dostępu do pliku w sieciowym systemie plików NFS.
26. W pewnym procesorze adresy wirtualne są 52-bitowe, a adresy fizyczne są 48-bitowe. Stronicowanie jest dwupoziomowe. Rozmiar strony, tablicy stron i katalogu tablic stron są jednakowe. Rozmiar jednego wpisu w tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 16 B. Wynika z tego, że
- (a) strona ma 16 KiB;
 - (b) pole zawierające numer strony w adresie wirtualnym ma 16 bitów;
 - (c) istnieje taka konfiguracja tablic stron i katalogu tablic stron, że adres wirtualny $(16161616)_{16}$ jest odwzorowywany na adres fizyczny $(61611616)_{16}$.

27. Fragmentacja wewnętrzna polega na

- (a) niemożności przydzielenia procesowi ciągłego obszaru pamięci mimo dostępności żądanej ilości pamięci;
- (b) występowaniu bezużytecznych kawałków pamięci wewnątrz przydzielonych procesowi obszarów pamięci;
- (c) niemożności scalenia małych bloków pamięci w jeden duży blok pamięci.

28. Przypuśćmy, że w tabeli R o kolumnach A, B kolumna A jest kluczem. Załóżmy, że w tabeli R nie występują nulle, w kolumnie A pojawia się dokładnie k wartości, w kolumnie B dokładnie ℓ wartości. Wynika z tego, że

- (a) $k \leq \ell$;
- (b) $k = \ell$;
- (c) $k \geq \ell$.

29. Przypuśćmy, że w tabelach R i S kolumna A jest kluczem głównym i nie ma innych kolumn. Następujące zapytanie daje w wyniku dokładnie te wiersze tabeli R , które znajdują się w tabeli S

- (a) `SELECT * FROM R WHERE EXISTS (SELECT * FROM S WHERE R.A = S.A)`
- (b) `SELECT R.A FROM R LEFT JOIN S ON R.A = S.A`
- (c) `(SELECT * FROM R) INTERSECT (SELECT * FROM S)`

30. Domknięcie w JavaScript

- (a) pozwala emulować zmienne prywatne;
- (b) jest przeznaczone do zgłaszania wyjątków;
- (c) jest możliwe do zaimplementowania w CSS.