

PESEL:

UNIwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki
Egzamin wstępny na studia II stopnia
na kierunku INFORMATYKA

2 lipca 2019 roku

Czas rozwiązywania: 150 minut

W każdym spośród 30 zadań podane są trzy warianty: (a), (b) oraz (c). W kratce przy każdym z wariantów należy odpowiedzieć, czy jest on prawdziwy, wpisując drukowanymi literami TAK albo NIE. W przypadku omyłkowego wpisu kratkę należy przekreślić i napisać jedno z tych słów po jej lewej stronie.

Przykład poprawnego rozwiązania zadania

4. Każda liczba całkowita postaci $10^n - 1$, gdzie n jest całkowite i dodatnie,

- | | |
|-----|-------------------------|
| TAK | (a) dzieli się przez 9; |
| NIE | (b) jest pierwsza; |
| TAK | (c) jest nieparzysta. |

Na stronach testu można pisać wyłącznie we wskazanych wyżej miejscach i jedynie słowa TAK oraz NIE. Pisać należy długopisem lub piórem.

Zasady punktacji

Kandydat zdobywa punkty „duże” (od 0 do 30) i punkty „małe” (od 0 do 90):

- jeden punkt „duży” kandydat uzyskuje za zadanie, w którym poprawnie wskazał prawdziwość albo fałsz każdego z trzech związanych z tym zadaniem wariantów odpowiedzi;*
- jeden punkt „mały” kandydat uzyskuje za każde poprawne wskazanie prawdziwości albo fałszu pojedynczego wariantu odpowiedzi. Oznacza to, że 3 „małe” punkty uzyskane w jednym zadaniu składają się na jeden „duży” punkt.*

Ostatecznym wynikiem egzaminu jest liczba

$$W = D + m/100$$

gdzie D oznacza liczbę „dużych”, a m liczbę „małych” punktów. Na przykład: 5,50 oznacza, że kandydat poprawnie wskazał w całym teście prawdziwość albo fałsz łącznie 50 wariantów odpowiedzi, w tym każdego z trzech wariantów dla pewnych pięciu zadań.

Zasadniczą rolę w ostatecznym wyniku testu mają punkty „duże”. Punkty „małe” zwiększają rozdzielczość, jeśli wielu kandydatów dostało tyle samo „dużych” punktów.

Powodzenia!

1. Nieskończony ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest monotoniczny i ograniczony. Wynika z tego, że

(a) ciąg $(\sin(a_n))$ jest monotoniczny;

(b) ciąg $(\cos(a_n))$ jest zbieżny;

(c) ciąg $(\log(a_n))$ jest ograniczony.

2. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $f'(0) = 0$. Wynika z tego, że

(a) f ma w punkcie $x = 0$ ekstremum lokalne;

(b) jeśli $f'(x) < 0$ dla wszystkich $x \neq 0$, to f jest malejąca na \mathbb{R} ;

(c) f jest ciągła w punkcie $x = 2019$.

3. Szereg $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla wszystkich $x \in (-1, 1)$ oraz rozbieżny dla $x = -1$. Wynika z tego, że

(a) szereg $S(x)$ jest rozbieżny dla $x = 1$;

(b) szereg $S(x)$ jest rozbieżny dla $x = -2$;

(c) funkcja $x \mapsto S(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(-1, 1)$ i $S'(0) = 0$.

4. Grupą z działaniem mnożenia liczb zespolonych i elementem neutralnym 1 jest zbiór

(a) $\{z \in \mathbb{C} : z^{2019} = 1\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z) \cdot (\operatorname{Im} z) = 0\}$;

(c) $\{2^k \cdot z \in \mathbb{C} : k \in \mathbb{Z}, |z| = 1\}$.

5. X jest przestrzenią liniową wymiaru 15 nad ciałem liczb rzeczywistych. Wynika z tego, że

(a) dowolny układ 20 wektorów z przestrzeni X jest liniowo zależny;

(b) dowolny układ 10 wektorów z przestrzeni X jest liniowo niezależny;

(c) dowolna baza przestrzeni X składa się z 15 wektorów.

6. Niech \mathcal{A} będzie rodziną zbiorów i niech X i Y będą zbiorami. Niech $X \in \mathcal{A}$. Wynika z tego, że

(a) $Y \subseteq X$ implikuje $Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}$;

(b) $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$;

(c) $Y \subseteq X$ implikuje $\bigcap \mathcal{A} \subseteq Y$.

7. Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i niech f^{2019} będzie 2019-krotnym złożeniem funkcji f . Wynika z tego, że

(a) f jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy f^{2019} jest injekcją;

(b) f jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy f^{2019} jest surjekcją;

(c) $f(42) = 42$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{2019}(42) = 42$.

8. Ciąg określony wzorem $a_n = |\{\langle A, x \rangle : A \subseteq \{1, \dots, n\}, x \in A\}|$, gdzie $|X|$ to moc zbioru X , spełnia warunek

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$;

(b) a_n jest parzyste dla $n \geq 2$;

(c) $a_n = n \cdot n!$ dla $n \geq 0$.

9. G jest grafem o $n \leq 6$ wierzchołkach i m krawędziach. Wynika z tego, że

(a) co najmniej jeden z grafów G i \overline{G} (dopełnienie grafu G) jest planarny;

(b) jeśli $m < 10$, to G jest planarny;

(c) jeśli $m > 10$, to G jest nieplanarny.

10. Liczba d jest największym wspólnym dzielnikiem dodatnich liczb całkowitych a i b . Wynika z tego, że względnie pierwsze są liczby

(a) a/d i b ;

(b) ab/d^2 i d ;

(c) a^2/d^2 i b^2/d^2 .

11. Generator bitów losowych generuje bity 0 i 1. Wiemy, że każdy wygenerowany bit jest równy 1 z prawdopodobieństwem $1/2$, ale nie wiemy, czy kolejne bity są niezależne. Niech X będzie zmienną losową równą liczbie wygenerowanych jedynek wśród 100 bitów. Wynika z tego, że

(a) wartość oczekiwana X jest równa 50;

(b) wartość oczekiwana X jest równa 50, jeśli bity są generowane niezależnie;

(c) wariancja X jest równa 25.

12. Czas działania algorytmu zrandomizowanego jest zmienną losową. Niech μ będzie wartością oczekiwaną tej zmiennej losowej, a σ odchyleniem standardowym. Wynika z tego, że

(a) prawdopodobieństwo, że czas działania algorytmu przekroczy 2μ , jest mniejsze lub równe $1/4$;

(b) prawdopodobieństwo, że czas działania algorytmu przekroczy $\mu + 2\sigma$, jest mniejsze lub równe $1/4$;

(c) prawdopodobieństwo, że czas działania algorytmu przekroczy 100μ , jest mniejsze lub równe $1/10^{10}$.

13. Inwersją w tablicy liczb całkowitych $a[1..n]$ nazywamy każdą parę $\langle i, j \rangle$ spełniającą warunki $1 \leq i < j \leq n$ oraz $a[i] > a[j]$. Niech $inv(a)$ będzie liczbą inwersji w tablicy a . Wynika z tego, że pesymistyczna złożoność sortowania tablicy a niemalejąco wynosi

(a) $O(\max(n, inv(a)))$ dla algorytmu sortowania przez wstawianie;

(b) $O(n \log(\max(n, inv(a))))$ dla algorytmu sortowania szybkiego;

(c) $O(n \log(\max(n, inv(a))))$ dla algorytmu sortowania przez kopcowanie.

14. Przypomnijmy, że wysokość drzewa to liczba *krawędzi* na najdłuższej ścieżce od korzenia do liścia.
- (a) Największa liczba wierzchołków w AVL-drzewie o wysokości 5 wynosi 64.
- (b) Najmniejsza liczba wierzchołków w AVL-drzewie o wysokości 5 wynosi 20.
- (c) Każde drzewo czerwono-czarne jest AVL-drzewem.
15. Język L nad alfabetem Σ jest regularny. Wynika z tego, że regularny jest język
- (a) $\{w \mid w \in L \wedge w^R \in L\}$, gdzie dla $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, jeśli $w = a_1 \dots a_n$, to $w^R = a_n \dots a_1$;
- (b) $\{ww \mid w \in L\}$;
- (c) $\{u \mid u \in L \text{ i } u \text{ jest długości parzystej}\}$.
16. Następujący problem jest rozstrzygalny, przy założeniu, że języki regularne reprezentowane są przez automat niedeterministyczny, a języki bezkontekstowe – przez gramatykę bezkontekstową.
- (a) Dany jest język regularny L nad alfabetem $\{a, b\}$; stwierdzić, czy L zawiera słowo w którym litery a i b występują tyle samo razy.
- (b) Dane są języki bezkontekstowy L oraz regularny K ; stwierdzić, czy $L \subseteq K$.
- (c) Dane są języki bezkontekstowy L oraz regularny K ; stwierdzić, czy $K \subseteq L$.
17. W logice Hoare'a dla dowodzenia poprawności częściowej programów, trójka $\{\phi\}P\{\psi\}$ oznacza, że:
- (a) jeśli przed wykonaniem instrukcji P spełniona jest własność ϕ , to wykonanie instrukcji P się kończy, a po jej wykonaniu spełniona jest własność ψ ;
- (b) jeśli przed wykonaniem instrukcji P spełniona jest własność ϕ , a wykonanie instrukcji P się kończy, to po jej wykonaniu spełniona jest własność ψ ;
- (c) przed wykonaniem instrukcji P spełniona jest własność ϕ , wykonanie instrukcji P się kończy, a po jej wykonaniu spełniona jest własność ψ .
18. Rozważmy metodę bisekcji wyznaczania miejsca zerowego x^* funkcji $f(x) = x^2 - a$, startującą z przedziału $[0, a]$, przy czym $a > 0$.
- (a) Jeśli $a = 99$, to mamy gwarancję, że po 10 iteracjach metody wyznaczymy x^* z błędem bezwzględnym nieprzekraczającym 10^{-4} .
- (b) 10 iteracji tej metody wymaga obliczenia co najmniej 20 wartości funkcji f .
- (c) Wzór na iterację tej metody jest postaci $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$.
19. Relacja R ma kolumny A, B, C, D, E i zależności funkcyjne $A \rightarrow BC, CA \rightarrow D, B \rightarrow E$. Wynika z tego, że
- (a) relacja R ma dokładnie jeden klucz;
- (b) relacja R jest w trzeciej postaci normalnej;
- (c) schemat relacji R daje się sprowadzić do postaci Boyce'a–Codda z zachowaniem zależności funkcyjnych i informacji.

20. Istnieją niepuste tabele A i B z kolumnami, odpowiednio, a i b, dla których zapytanie
SELECT * FROM A, B WHERE A.a = B.b

- (a) daje pustą odpowiedź;
- (b) daje odpowiedź złożoną z $|A| \cdot |B|$ krotek;
- (c) zapętla się.

21. Dany jest program w C++:

```
1 #include <iostream>
2
3 using namespace std;
4
5 class A{
6 public:
7     void m1(){
8         cout << "A" << endl;
9     }
10    virtual void m2(){
11        cout << "A" << endl;
12    }
13    void m3(){
14        cout << "A" << endl;
15    }
16 };
17
18 class B: public A{
19 public:
20     void m1(){
21         cout << "B" << endl;
22     }
23     virtual void m2(){
24         cout << "B" << endl;
25     }
26     virtual void m3(){
27         cout << "B" << endl;
28     }
29 };
30
31 int main(){
32     A* p = new B();
33     //p->m1();
34     //p->m2();
35     //p->m3();
36 }
```

Po odkomentowaniu wskazanej instrukcji, skompilowaniu i uruchomieniu program wypisze:

- (a) znak B po odkomentowaniu `p->m1()`;
- (b) znak B po odkomentowaniu `p->m2()`;
- (c) znak B po odkomentowaniu `p->m3()`;

22. Dany jest program w Javie:

```
1 class A{
2     public void m1() {System.out.println("A");}
3     public void m2() {m1();}
4 }
5
6 class B extends A{
7     public void m1() {System.out.println("B");}
8 }
9
10 public class Zad {
11     public static void main(String[] s) {
12         A a = new A();
13         B b = new B();
14
15         //a.m1();
16         //b.m1();
17         //b.m2();
18     }
19 }
```

Po odkomentowaniu wskazanej instrukcji, skompilowaniu i uruchomieniu program wypisze:

- (a) znak A po odkomentowaniu a.m1();
- (b) znak A po odkomentowaniu b.m1();
- (c) znak A po odkomentowaniu b.m2();

23. Następujący algorytm wzajemnego wykluczania

```
1 bool chce1 = false;
2 bool chce2 = false;
3
4 process P1() {
5     while (true) {
6         sekcja_lokalna;
7         chce1 = true;
8         while (chce2) { }
9         sekcja_krytyczna;
10        chce1 = false;
11    }
12 }
13
14 process P2() {
15     while (true) {
16         sekcja_lokalna;
17         chce2 = true;
18         while (chce1) { }
19         sekcja_krytyczna;
20         chce2 = false;
21    }
22 }
```

- (a) wykorzystuje aktywne oczekiwanie;
- (b) ma własność bezpieczeństwa;
- (c) ma własność żywotności.

24. Dla podanej tablicy trasowania

Destination	Gateway	Genmask	Iface
0.0.0.0	193.0.96.31	0.0.0.0	eth0
10.0.0.0	10.1.0.1	255.0.0.0	eth1
10.1.0.0	0.0.0.0	255.255.240.0	eth1
193.0.96.0	0.0.0.0	255.255.255.0	eth0

- (a) datagram o źródłowym adresie IP 10.1.0.42 i docelowym adresie IP 10.1.16.26 zostanie skierowany do rutera 10.1.0.1;
- (b) datagram o źródłowym adresie IP 10.1.0.42 i docelowym adresie IP 193.0.115.152 zostanie skierowany do rutera 10.1.0.1;
- (c) datagram o źródłowym adresie IP 10.1.0.42 i docelowym adresie IP 193.0.115.152 na całej długości trasy zachowa niezmienny adres źródłowy IP.

25. Usługa DNS

- (a) zawsze odpytuje jeden z głównych serwerów nazw utrzymywanych przez organizację IANA;
- (b) umożliwia ustalenie nazwy na podstawie adresu IP komputera;
- (c) wymaga, aby stacje klienckie używały Ethernetu jako technologii drugiej warstwy.

26. W pewnym procesorze adresy wirtualne są 48-bitowe. Rozmiar strony, tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 256 KiB. Rozmiar jednego wpisu w tablicy stron i katalogu tablic stron wynosi 8 B. Adres wirtualny podzielony jest na trzy pola w następujący sposób:

- (a) przesunięcie ma 17 bitów;
- (b) numer strony ma 16 bitów;
- (c) numer tablicy stron w katalogu tablic stron ma 15 bitów.

27. Potokowe przetwarzanie rozkazów

- (a) skraca lub zachowuje czas wykonania ciągu rozkazów w porównaniu do przetwarzania niepotokowego;
- (b) jest wykorzystywane tylko do wykonywania ciągu rozkazów niezawierających rozkazu skoku;
- (c) zostało po raz pierwszy wprowadzone w procesorach Pentium.

28. Ataku powtórzeniowego w protokołach związanych z bezpieczeństwem unika się m.in. dzięki umieszczeniu w komunikacie

- (a) numeru kolejnego wysłanego komunikatu;
- (b) stempla czasowego dla wysłanego komunikatu;
- (c) wyniku zastosowania dwukrotnego złożenia funkcji skrótu kryptograficznego do treści wiadomości.

29. Następujący program w języku JavaScript

```
var a = 1;
function x() {
  console.log(a);
  var a = 2;
  console.log(a);
}
x();
console.log(a);
```

- (a) wypisze `undefined` w pierwszym wierszu;
- (b) wypisze 2 w drugim wierszu;
- (c) wypisze 2 w trzecim wierszu.

30. Dla danego stylu (nie są stosowane żadne inne style):

```
div > p{color:yellow;}
div * p {color: red;}
body + div.p {color: green;}
p#id {color: green;}
.x#id {color: black;}
```

i fragmentu HTML

```
<html>
<body>
<div class="x"><p id="id">XXX</p><p>YYY</p></div>
</body>
</html>
```

- (a) napis XXX ma kolor zielony;
- (b) napis YYY ma kolor czerwony;
- (c) napis YYY ma kolor żółty.