dr hab. Grzegorz Bobiński, prof. UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 5 stycznia 2022 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Tomasza Mandziuka

Limits of saturated ideals of points with applications to secant varieties

dla Rady Naukowej Dyscyplin Matematyka i Informatyka
Uniwersytetu Warszawskiego

Niech S będzie pierścieniem wielomianów $n+1$ zmiennych z gradacją zadaną przez grupę abelową A. Dla funkcji $h\colon A \to \mathbb{N}$ Haiman i Sturmfels zdefiniowali schemat Hilb_S^h, nazywany schematem Hiberta z wielogradacją, parametryzujący ideały jednorodne pierścienia S, dla których funkcją Hilberta pierścienia ilorazowego jest h. Schematy te w naturalny sposób uogólniają schematy Hilberta skonstruowane przez Grothendiecka, które parametryzują domknięte podschematy przestrzeni rzutowej.

Szczególna uwaga w omawianej rozprawie poświęcona jest sytuacji, gdy w pierścieniu S rozważamy (tradycyjną) gradację liczbami całkowitymi zadaną przez stopnie wielomianów (innymi słowy S jest pierścieniem współrzędnych przestrzeni rzutowej) oraz $h_{r,n}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ jest funkcją Hilberta r punktów w położeniu ogólnym, tj.

$$h_{r,n}(a) := \min\{\dim S_a, r\}.$$

W tym przypadku schemat $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ posiada wyróżnioną składową nieprzywiedlną oznaczaną $\mathrm{Slip}_{r,n}$, będącą domknięciem zbioru punktów odpowiadających ideałom radykalnym. Na szczególna rolę tej składowej wskazuje lemat o brzegowej apolarności autorstwa Buczyńskiej i (promotora doktoratu) Buczyńskiego mówiący, że ranga brzegowa wielomianu jest równa co najwyżej r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ideał, który jest abiegunowy do

F i taki, że odpowiadający mu punkt w schemacie $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ należy do $\mathrm{Slip}_{r,n}$. Przypomnijmy, że znajdowanie rangi brzegowej wielomianu jest klasycznym i nietrywialnym problemem geometrii algebraicznej, zatem powyższy lemat w naturalny sposób stanowi motywacją dla poszukiwań efektywnego opisu zbioru $\mathrm{Slip}_{r,n}$. Poszukiwaniu takich kryteriów w powyższej sytuacji (oraz w bardziej ogólnej sytuacji pierścieni Coxa gładkich rzutowych rozmaitości torycznych) poświęcona jest recenzowana rozprawa.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów. Rozdział pierwszy ma charakter wstępny, w rozdziale drugim zawarty jest opis faktów i narzędzi z algebry przemiennej i geometrii algebraicznej, które potem wykorzystywane są w dalszej części pracy.

Rozdział trzeci, będący najobszerniejszą częścią rozprawy, zawiera wyniki dotyczące pierścienia współrzędnych przestrzeni rzutowej. W szczególności w rozdziale tym udowodnione są trzy kryteria konieczne na to, aby punkt opowiadający ideałowi I należał $\mathrm{Slip}_{r,n}$:

- pierwsze kryterium (Proposition 3.1) korzysta z opisu przestrzeni stycznej do schematów Hilb_S^h (która jest postaci $\mathrm{Hom}_S(I, S/I)_0$) oraz znajomości wymiaru składowej $\mathrm{Slip}_{r,n}$ (wynoszącego $r \cdot n$);
- drugie kryterium (Theorem 3.5) bazuje na analizie funkcji Hilberta potęg ideałów radykalnych;
- trzecie kryterium (Theorem 3.40), mające najbardziej techniczny charakter, wiąże się z badaniem dla ideału I ideałów $I \cap \mathfrak{m}^d$ i $\overline{I} \cap \mathfrak{m}^d$, gdzie $\mathfrak{m}$ jest ideałem złożonym z elementów stopnia dodatniego w S, d jest (odpowiednio dobraną) liczbą naturalną, a $\overline{I}$ jest nasyceniem ideału I.

Rozdział trzeci zawiera też jedno kryterium wystarczające na to, aby punkt opowiadający ideałowi I należał $\mathrm{Slip}_{r,n}$ (Theorem 3.12), mówiące, że jeśli $n \leq 2$ oraz ideał I różni się od swojego nasycenia $\overline{I}$ w co najwyżej jednym stopniu, to odpowiedni punkt należy do $\mathrm{Slip}_{r,n}$.

Wszystkie powyższe kryteria są ilustrowane przykładami, wskazującymi na możliwość ich zastosowania w konkretnych sytuacjach, jak również na ograniczenia ich stosowalności. W szczególności, rozdział trzeci zawiera charakteryzację wszystkich ideałów odpowiadających punktom należącym do $\mathrm{Slip}_{r,2}$, dla $r \leq 6$.

Rozdział czwarty rozszerza badania schematów Hilberta z wielogradacją na przypadek S będącego pierścieniem Coxa gładkiej rozmaitości torycznej X, a A grupą Picarda rozmaitości X. Odpowiednie schematy oznaczane są w tej sytuacji $\mathrm{Hilb}_X^{h_{r,X}}$ i $\mathrm{Slip}_{r,X}$. Ten przypadek jest rzecz jasna trudniejszy niż przypadek przestrzeni rzutowych, co za tym idzie wyniki są skromniejsze. Najważniejszym z nich jest Twierdzenie 4.15, które opisuje zachowanie składowej $\mathrm{Slip}_{r,X}$ przy „dobrych" morfizmach torycznych.

Rozdział piąty dotyczy zagadnień motywowanych wspomnianym wcześniej lematem o apolarności oraz ogólnie badaniem (różnego rodzaju) rang wielomianów. W pierwszym podrozdziale wyniki rozdziału trzeciego wykorzystane są do uzyskania opisu dzikich wielomianów małej rangi brzegowej. Druga część rozdziału piątego dotyczy zagadnienia rozróżniania punktów należących do (powiązanych z problematyką rang wielomianów) rozmaitości siecznych i kaktusowych, nie nawiązuje jednak w sposób bezpośredni do schematów Hilberta z wielogradacją stanowiących główny punkt ciężaru rozprawy.

Za najbardziej znaczące spośród powyższych wyników uważam te dotyczące schematów Hilberta z wielogradacją dla przestrzeni rzutowych. Mimo iż nie dają one pełnej charakteryzacji punktów należących do składowej $\mathrm{Slip}_{r,n}$ (co prawdopodobnie może być problemem bardzo trudnym), nie mniej znacząco poszerzają wiedzę na ten temat. Ponadto udowodnienie tych wyników wymagało (zwłaszcza w przypadku Twierdzenia 3.40) użycia różnorodnych i nietrywialnych metod z algebry przemiennej i geometrii algebraicznej, w tym teorii deformacji. Swoboda z jaką Autor posługuję się tymi metodami jest niewątpliwie dowodem dojrzałości matematycznej mgr. Mandziuka.

Rozprawa jest starannie zredagowana, mimo swej obszerności (129 stron) zawiera stosunkowo niewiele usterek (których rzecz jasna nie udało się uniknąć). Pewnym utrudnieniem dla Czytelnika nie zajmującego badanymi problemami może być jedynie pomijanie podstawowych definicji, które Autor przyjmuje, jak sądzę, za powszechnie znane.

Podsumowując, chciałbym stwierdzić, że w mojej ocenie przedstawiona rozprawa spełnia wymogi, zarówno ustawowe jak i zwyczajowe, stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Tomasza Mandziuka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

GBobiński

Grzegorz Bobiński