Dominik Kwietniak
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński
dominik.kwietniak@uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Kraków, 22 lutego 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana Michała Lemańczyka
Recurrence of stochastic processes
in some concentration of measure and entropy problems
„Czasy powrotów procesów stochastycznych
w problemach koncentracji miary oraz entropii"

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

Postępowanie w sprawie nadania panu mgr. Michałowi Lemańczykowi stopnia doktora w dyscyplinie matematyka jest prowadzone na podstawie przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.), zwanej dalej po prostu ustawą. Artykuł 187 punkty 1–2 ustawy stanowią, że rozprawa doktorska z dyscypliny matematyka *prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną kandydata [...] oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej [...]* a *[p]rzedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego*[1].

Po zapoznaniu się z rozprawą doktorską pana Michała Lemańczyka mogę bez najmniejszych wątpliwości stwierdzić, że **spełnia ona wymagania stawiane rozprawom doktorskim przez przywołaną tu ustawę**. Dalsza część tej recenzji zawiera omówienie zawartości rozprawy oraz uzasadnienie tej oceny.

Recenzowana tu rozprawa podzielona została na dwie części. Część pierwsza zatytułowana (nieco na wyrost) „Wprowadzenie" (*Introduction*) zawiera dwa rozdziały, „Preliminaria" i „Omówienie naszych wyników" (*Preliminaries* i *Summary of our results*). Tytuły rozdziałów dobrze oddają ich treść. Drugi rozdział części pierwszej to w istocie katalog otrzymanych w rozprawie wyników. Część druga (*Results and proofs*) zawiera pełne sformułowania i dowody otrzymanych przez Autora twierdzeń. Ta część składa się z czterech rozdziałów poświęconych czterem głównym zagadnieniom poruszanym w pracy:

1. entropii i ciśnieniu topologicznemu procesów splotowych (inaczej: iloczynów punktowych stacjonarnych procesów binarnych),

2. entropii, własności Gibbsa dla miar o maksymalnej entropii oraz ciśnieniu topologicznemu dla układów $\mathscr{B}$-wolnych,

3. nierówność Bernsteina dla m-zależnych zmiennych losowych,

4. nierówność Bernsteina dla ogólnych łańcuchów Markowa.

Należy zauważyć, że część wyników zawartych w rozprawie jest nowa (chodzi tu głównie o wyniki związane z ciśnieniem topologicznym) a pozostałe rezultaty pochodzą z trzech artykułów, z których dwa są napisane wraz z Promotorką rozprawy, panią prof. Joanną Kułagą-Przymus. Dwa spośród tych trzech artykułów zostały opublikowane w dobrych czasopismach matematycznych. Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w rozprawie artykuły te to następujące pozycje:

[1] Pominięte fragmenty nie mają znaczenia z punktu widzenia tej recenzji.

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

[A1] Joanna Kułaga-Przymus & Michał D. Lemańczyk. *Entropy rate of product of independent processes.* Preprint.

[A2] Joanna Kułaga-Przymus & Michał D. Lemańczyk. *Hereditary subshifts whose measure of maximal entropy does not have the Gibbs property.* Colloq. Math. **166** (2021), no. 1, 107–127.

[A3] Michał D. Lemańczyk. *General Bernstein-like inequality for additive functionals of Markov chains.* J. Theoret. Probab. **34** (2021), no. 3, 1426–1454.

Omawiana rozprawa doktorska ma formę monografii naukowej na co zezwala obecnie obowiązujące prawo. Ustawa nie precyzuje jednak, co należy zrobić w przypadku włączenia do rozprawy wyników otrzymanych we współpracy z innymi matematykami. Poprzednia ustawa (z dnia 14 marca 2003 r.) mówiła: *Rozprawę doktorską może także stanowić samodzielna i wyodrębniona część pracy zbiorowej, jeżeli wykazuje ona indywidualny wkład kandydata przy opracowaniu koncepcji, wykonywaniu części eksperymentalnej, opracowaniu i interpretacji wyników tej pracy, odpowiadający warunkom określonym w [artykule 13].* W mojej opinii praca doktorska pana Lemańczyka spełnia przytoczony wyżej warunek ze starej ustawy. Żałować jedynie należy, że pan Michał Lemańczyk nie zdecydował się na załączenie opisu swojego indywidualnego wkładu we wspólne prace. Przy nadawaniu stopni i tytułów składanie podobnych oświadczeń bywa praktykowane. Pan Lemańczyk mógł to zrobić na przykład w Autoreferacie. Chcę podkreślić, że według mojej najlepszej wiedzy Autor rozprawy nie miał obowiązku zamieszczania informacji o swoim wkładzie. Zdaję sobie też sprawę, że bardzo trudno o ocenę wkładu poszczególnych autorów w wynik będący efektem ścisłej współpracy. Wydaje mi się jednak, że dodanie takiego oświadczenia byłoby bardzo pomocne przy ocenie doktoratu, szczególnie przy ocenie, czy doktorat zasługuje na wyróżnienie. Podobna uwaga odnosi sie też do wyników, które nie zostały dotychczas zawarte w preprintach. W materiałach, które zostały mi dostaczone nie ma (albo też nie zauważyłem) informacji o tym, czy te wyniki, które nie są zawarte w żadnym z dotychczas ogłoszonych artykułów zostały otrzymane samodzielnie, czy też we współpracy z Promotorką.

Przejdę teraz do dokładniejszego mówienia wyników zawartych w ocenianej rozprawie. Twierdzenia przedstawione przez pana Michała Lemańczyka można ze względu na ich tematykę podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa wyników dotyczy entropii i ciśnienia topologicznego pewnej klasy stacjonarnych procesów stochastycznych o skończenie wielu wartościach i jest motywowana strukturą miar niezmienniczych dla przesunięć $\mathscr{B}$-wolnych. Wyniki te znajdują się w trzecim i czwartym rozdziale recenzowanej pracy. Grupa druga to nowe wersje nierówności Bernsteina sformułowane dla pewnych szczególnych klas procesów stochastycznych, dla których nierówności typu Bernsteina nie były dotychczas znane. Wyniki te są opisane w rozdziałach piątym i szóstym. Z mojego punktu widzenia, te dwie grupy wyników występujące w pracy są całkowicie niezależne — zaznajomienie się z wynikami oraz dowodami z jednej grupy nijak nie pomaga w zrozumieniu co mówią rezultaty należące do drugiej grupy. Autor stwierdza co prawda w samej rozprawie oraz w załączonym do rozprawy Autoreferacie, że jego praca doktorska „koncentruje się na procesach czasów powrotu", ale ja takiej koncentracji nie dostrzegam. Proces czasów powrotu jest wykorzystywany w wielu miejscach pracy jako wygodne narzędzie do formułowania i dowodzenia twierdzeń, ale to za mało, aby twierdzić, że te dwie wyżej wymienione części pracy są jakoś ze sobą powiązane. W szczególności, w pracy nie ma w ogóle wyników, w których proces czasów powrotu byłbym głównym obiektem badań.

Główną motywacją dla pierwszej grupy najważniejszych wyników rozprawy jest badanie dynamiki przesunięć $\mathscr{B}$-wolnych dla ustalonego zbioru $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{N}$ (bez straty ogólności

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

możemy przyjąć, że żadna liczba w $\mathscr{B}$ nie jest wielokrotnością innej liczby w tym zbiorze). Mówimy, że liczba całkowita n jest *$\mathscr{B}$-wolna* jeżeli żaden element $b \in \mathscr{B}$ nie dzieli n. Zbiór wszystkich liczb $\mathscr{B}$-wolnych oznaczamy $\mathcal{F}_{\mathscr{B}}$ a jego dopełnienie w $\mathbb{Z}$ oznaczamy $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}$ i nazywamy *zbiorem wielokrotności* $\mathscr{B}$. Przesunięcia $\mathscr{B}$-wolne (*$\mathscr{B}$-free shifts (systems)*), czyli układy symboliczne (podprzesunięcia $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$) generowane przez zbiory liczb $\mathscr{B}$-wolnych otrzymujemy rozważając funkcję charakterystyczną zbioru $\mathcal{F}_{\mathscr{B}}$, oznaczaną dalej przez η, jako element pełnego shiftu $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ i definiując X_η jako domknięcie w $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ orbity η względem operatora przesunięcia w lewo σ na $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Zbiorami wielokrotności zajmowali się tacy matematycy jak Besicovitch, Chowla, Davenport, czy Erdős. W roku 2010 Peter Sarnak zaproponował badanie własności układu symbolicznego skojarzonego z kwadratem funkcji Möbiusa μ^2, która jest funkcją charakterystyczną zbioru liczb bezkwadratowych (liczb, które nie mają kwadratów liczb pierwszych wśród swoich dzielników). Zbiór liczb bezkwadratowych jest zbiorem $\mathscr{B}$-wolnym dla zbioru $\mathscr{B}$ złożonego z kwadratów liczb pierwszych. Obserwacje poczynione przez Sarnaka na temat układu symbolicznego skojarzonego z μ^2 stanowiły impuls do badań nad rodziną układów symbolicznych (przesunięć), które mogą być wygenerowane przez zbiory $\mathscr{B}$-wolne. Jednym z najciekawszych wyników tych rozważań jest uzyskany przez Joannę Kułagę-Przymus, Mariusza Lemańczyka i Benjy'ego Weissa opis zbioru miar niezmienniczych na domknięciu dziedzicznym symbolicznego układu $\mathscr{B}$-wolnego (ściśle rzecz biorąc, oryginalny wynik Kułagi-Przymus, Lemańczyka i Weissa dotyczył tylko pewnej podklasy układów $\mathscr{B}$-wolnych i został rozszerzony do podanej tu postaci w pracy A. Dymek, S. Kasjana, J. Kułagi-Przymus i Mariusza Lemańczyka). Zgodnie z tym opisem, każdej mierze niezmienniczej domknięcia dziedzicznego układu $\mathscr{B}$-wolnego odpowiada stacjonarny proces stochastyczny $\mathbf{Z}$ indeksowany przez zbiór $\mathbb{Z}$ o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$, który można zapisać jako punktowy iloczyn $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$, gdzie $\mathbf{X}$ to stacjonarny proces stochastyczny indeksowany przez zbiór $\mathbb{Z}$ o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$, a $\mathbf{Y}$ jest stacjonarnym procesem stochastycznym indeksowany przez zbiór $\mathbb{Z}$ o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$ odpowiadającym mierze Mirsky'ego (naturalnie pojawiającej się w teorii zbiorów liczb $\mathscr{B}$-wolnych). Rodzi to naturalne pytanie o zachowanie i własności procesów postaci $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$. Wyniki otrzymane w pracy można następnie zastosować do badania układów $\mathscr{B}$-wolnych. Autor otrzymał szereg wzorów na entropię warunkową $\mathbf{H}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}|\mathbf{Y})$ procesu $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ pod warunkiem $\mathbf{Y}$. Podstawowy wzór zawarty jest w twierdzeniu 3.2.1, a następnie wywiedzione są z tego wzoru kolejne jego specjalne postacie otrzymywane przy dodatkowych założeniach. Dalej, przedmiotem badań jest ciśnienie rodziny procesów postaci $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ przy ustalonym procesie $\mathbf{Y}$ o zerowej entropii. Otrzymane przez Autora wzory wykorzystane zostają do badania entropii i ciśnienia miar niezmienniczych układów $\mathscr{B}$-wolnych w kolejnym rozdziale. Autor wykorzystuje je do podania nowych dowodów znanych własności układów $\mathscr{B}$-wolnych, ale uzyskuje także nowe i interesujące wyniki o jedyności stanów równowagi pewnej klasy potencjałów oraz o braku własności Gibbsa dla miary o maksymalnej entropii dla shiftu $\mathscr{B}$-wolnego, gdy $\mathscr{B}$ jest zbiorem nieskończonym. Szczególnie ten ostatni dowód jest krótki i elegancki. W mojej opinii jest to tematyka aktualna, wyniki są interesujące a dowody nie są trywialne. Rozwiązane w pracy problemy otwarte nie należą jednak do kluczowych problemów w tej tematyce i ich rozwiązanie nie stanowi jakiegoś przełomu w dotychczas prowadzonych badaniach.

Druga część rozprawy poświęcona jest szczególnym nierównościom w typie nierówności Bernsteina. W teorii prawdopodobieństwa nierówności koncentracyjne zapewniają ograniczenia na to, jak zmienna losowa odchyla się od pewnej wartości (zazwyczaj jej wartości oczekiwanej). Prawo wielkich liczb klasycznej teorii prawdopodobieństwa mówi, że z dużym prawdopodobieństwem sumy niezależnych zmiennych losowych są, przy bardzo ogólnych założeniach, bliskie ich wartości oczekiwanej. Takie sumy są najbardziej podsta-

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

wowymi przykładami zmiennych losowych skupionych wokół swojej średniej. Ostatnie wyniki pokazują, że takie zachowanie jest wspólne dla innych funkcji niezależnych zmiennych losowych.

Klasyczna nierówność Bernsteina szacuje prawdopodobieństwo odchylenia sumy niezależnych, ograniczonych i scentrowanych rzeczywistych zmiennych losowych o identycznych rozkładach i skończonej wariancji. W rozprawie znajdują się nowe wersje nierówności Bernsteina, w których odrzuca się założenie niezależności oraz zastępuje wariancję przez wariancję asymptotyczną. Nowe nierówności w typie Bernsteina są sformułowane procesów m-zależnych i ich funkcji oraz do ogólnych geometrycznie ergodycznych łańcuchów Markowa. W tym drugim przypadku jest to pierwsza nierówność w typie Bernsteina, która z dokładnością do stałych odzwierciedla graniczne zachowanie gaussowskich funkcjonałów addytywnych. Problem znalezienia takiej wersji nierówności Bernsteina został postawiony przez R. Adamczaka i W. Bednorza w pracy *Exponential concentration inequalities for additive functionals of Markov chains* opublikowanej w ESAIM Probab. Stat. 19 (2015), str. 440–481. Nie będąc specjalistą w tej dziedzinie nie jest w stanie ocenić istotności prezentowanych w rozprawie wyników. Wiem o tych problemach tyle, ile dowiedziałem się z rozprawy. Problem w tym, że Autor rozprawy niewiele mi w tej sprawie rozjaśnił. Dowiedziałem się bowiem, że nierówności Bersteina są ważne i zajmuje się nimi wielu matematyków (co zostało potwierdzone przez podanie długiej listy artykułów poświęconych tej tematyce). Nadal jednak nie wiem, dlaczego warto mieć nierówności Bernsteina dla tych nowych klas procesów. Trochę intuicyjnie, wyniki te wydają mi się dobre, ale podobnie jak w przypadku pierwszej grupy wyników, nie wydaje się, że są przełomowe. Na duży plus (z punktu widzenia laika) należy zaliczyć Autorowi bardzo jasne i intuicyjne wyjaśnienie roli różnych składowych występujących po prawej stronie nierówności typu Bernsteina oraz znaczenia pojęcia optymalności nierówności Bernsteina.

Pora przejść do uwag. Zakres tematyczny pracy jest dość szeroki i obejmuje zagadnienia związane z co najmniej dwoma dużymi działami matematyki, co wymusza stosowanie różnorodnych technik dowodowych. Opanowanie tak obszernej tematyki bardzo dobrze świadczy o kandydacie do stopnia doktora. Docenić należy także wysiłek jaki Autor rozprawy włożył w uzupełnienie rozprawy o wypowiedzi wykorzystywanych w pracy twierdzeń i pojęć. Niestety mimo starań Autora, rozprawa nie jest łatwa w odbiorze. Wydaje się, że głównymi powodami takiej sytuacji były:

1. Zabieg Autora polegający na dość ogólnym omówieniu wyników rozprawy w dwóch pierwszych rozdziałach, a detali i szczegółów rozumowań w czterech kolejnych rozdziałach. Autorowi nie udało się przy tej organizacja materiału uniknąć powtórzeń, no i sam podział co jest detalem a co nie, nie jest specjalnie udany.

2. Brak dobrze napisanego wstępu (rozwijam tę uwagę poniżej).

Językowo praca napisana jest na dobrym poziomie, nie miałem problemów ze zrozumieniem o co Autorowi chodzi, nie dostrzegłem też żadnych istotnych lub powtarzających się uporczywie błędów językowych, mało jest literówek i drobnych usterek stylistycznych. Dowody przedstawionych w rozprawie twierdzeń wymagają sporej biegłości w posługiwaniu się metodami teorii procesów stochastycznych i teorii ergodycznej i są dość starannie zredagowane.

Jak już wspomniałem, praca właściwie nie ma wstępu, bo ciężko uznać krótkie streszczenie zawartości rozprawy zamieszczone na stronie 11 za wstęp. Roli procesów powrotu, które mają jakoby łączyć wyniki podane w pracy w większą całość Autor poświęcił jedną linijkę u góry strony 11. Co więcej, najlepiej i najdokładniej opisaną częścią rozprawy w tej namiastce wstępu na stronie 11 są dodatki — opis zawartości poszczególnych *Appendices*

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyki

zajmuje tyle samo miejsca co opis zawartości właściwej część rozprawy. Co prawda Autor zatytułował pierwszą część swojej rozprawy (obejmuje ona dwa pierwsze rozdziały) „Wprowadzenie” (*Introduction*), ale w tej części nadal nie znajdziemy wiadomości, które powinny być zawarte w solidnie napisanym wstępie, czyli motywacji dla rozwijanej teorii oraz przedstawieniu jej na tle dotychczas znanych wyników. Należy odnotować, że pojedyncze wyniki przedstawione w dalszej części rozprawy są często opatrzone odpowiednim komentarzem (na przykład, powody zainteresowania się miarami Gibbsa są opisane w Remark 4.1.40 na stronie 70), ale pogłębia to tylko wrażenie, że mamy do czynienia ze zszywką prac przerobioną na rozprawę post factum. Rolę wstępu mógłby pełnić Autoreferat, który otrzymałem wraz z rozprawą, ale jak rozumiem Autoreferat nie jest formalnie częścią rozprawy i w związku z tym nie podlega ocenie w tej recenzji.

Poniżej wymieniam pewne dodatkowe, mniej istotne uwagi, które nie miały wpływu na pozytywną ocenę pracy.

- Wydaje mi się, że w sformułowaniu Wniosku 4.1.33 brakuje założenia, że chodzi o nietrywialną miarę Mirsky'ego, tzn. miarę Mirsky'ego, która nie jest miarą Diraca skoncentrowaną na punkcie stałym złożonym z samych zer. Taka miara może wystąpić w układach $\mathscr{B}$-wolnych, które nie są jednopunktowe i wtedy (o ile dobrze zrozumiałem definicję) nie jest ona *nasycona jedynkami* (*ones-saturated*).

- Uważam, że nazwanie własności ze wzoru (2.1.1) *własnością Gibbsa* jest co najmniej niefortunne. Rozumiem, że Autor czyni tak naśladując Ryana Pecknera, ale poza artykułem Pecknera nie spotkałem się z taką terminologią. O wiele bardziej rozpowszechniona jest pojęcie *miary Gibbsa* przypomniane w uwadze 4.1.40 i użycie obu tych terminów powoduje, że dla potencjału $\varphi \equiv 0$ każda miara Gibbsa ma własność Gibbsa, ale nie każda miara z własnością Gibbsa jest miarą Gibbsa, co może prowadzić do nieporozumień.

- Remark 4.1.40 błędnie cytuje wynik z pracy Weissa *Subshifts of Finite Type and Sofic Systems* (pozycja [101] w bibliografii rozprawy). Lemma 2 w przywołanej tu pracy Weissa zawiera ważne założenie ergodyczności miary κ, które jest niezbędne do otrzymania tezy, w rozprawie to założenie jest pominięte.

- W dowodzie Theorem 4.2.1 Autor rozprawy najpierw stwierdza, że może przyjąć, że shift $\mathscr{X}$, który rozpatruje składa się z pojedynczej orbity okresowej. To prawda. Następnie Autor zauważa, że w takim przypadku z wyników znanych z literatury wynika, że domknięcie dziedziczne $\tilde{\mathscr{X}}$ shiftu $\mathscr{X}$ jest wewnętrznie ergodycznym shiftem soficznym. To też prawda. Ale zupełnie nie rozumiem dlaczego z faktu, że shift $\tilde{\mathscr{X}}$ jest wewnętrznie erodycznym shiftem soficznym miałoby wynikać, że jego miara o maksymalnej entropii miałaby mieć własność Gibbsa? Rozpatrywany shift $\tilde{\mathscr{X}}$ nie jest mieszający, jest zaledwie topologicznie tranzytywny, więc nie można tu skorzystać z faktu, że miary o maksymalnej entropii dla mieszających shiftów soficznych są miarami Gibbsa. Własność Gibbsa dla miary o entropii maksymalnej tranzytywnego shiftu soficznego można udowodnić używając metod z pracy Weissa *Subshifts of Finite Type and Sofic Systems*, ale użyty w pracy Weissa warunek wydaje się być mocniejszy niż tranzytywność (Weiss zakłada, że rozważany shift jest *irreducible*, co implikuje własność specyfikacji, czyli topologiczne mieszanie). W każdym razie wydaje mi się, że rozumowanie w rozprawie jest niepotrzebnie skomplikowane. Zbędne jest odwoływanie się do dowodu wewnętrznej ergodyczności w pracy Kułagi-Przymus, Lemańczyka (Mariusza) i Weissa [61]. Wystarczy zauważyć, że jeżeli ν jest miarą okresową, a $\mathscr{X}$ jest orbitą okresową na której jest skoncentrowane ν, to własność Gibbsa dla miary $\kappa = \nu \star B_{1/2}$ jest natychmiastową kon-

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

sekwencją obserwacji, że każda ergodyczna miara okresowa ma własność Gibbsa (zob. Remark 4.1.43) połączonej z uwagami 4.1.38 i 4.1.39 (zob. wzór 4.1.41). Po zrobieniu tego komentarza odkryłem, że Autor też to zauważył w Remark 4.2.2. Zdecydowałem sie jednak na jego pozostawienie, zeby pokazać, że podany w pracy dowód twierdzenia 4.2.1 nie jest naturalny. Teraz, żeby dostać wewnętrzną ergodyczność $\tilde{\mathscr{X}}$ wystarczy tylko zauważyć, że κ jest ergodyczną miarą o maksymalnej entropii dla $\tilde{\mathscr{X}}$ (można tego dowieść w sposób zupełnie elementarny odwołując się tylko do definicji) i skorzystać z cytowanego juz w tej recenzji wyniku Weissa (Lemma 2) z [101]. Użycie Corollary 3.2.9 i Theorem 3.2.1 w Remark 4.2.2 do sprawdzenia, że κ jest ergodyczną miarą o maksymalnej entropii dla $\tilde{\mathscr{X}}$ jest jak liczenie pochodnych do znalezienia ekstremum funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- W Thm. 2.2.19 nie jest dla mnie jasne jaki jest sens założenia, że proces $\mathbf{Y}$ jest słabą granicą procesów okresowych. Wydaje mi się, że każdy nieokresowy proces binarny $\mathbf{Y}$ jest słabą granicą procesów okresowych, których okresy dążą do nieskończoności. Oczywiście, okres p_n występujący w tym twierdzeniu, musi być okresem podstawowym, ale tego można się domyśleć z kontekstu.

- Idea aproksymacji okresowej funkcji charakterystycznej ciągu $\mathscr{B}$-wolnego i wykorzystania twierdzenia Davenporta-Erdősa do pokazania, że miary Mirsky'ego są granicami słabo zbieżnego ciągu miar okresowych generowanych przez skończone aproksymacje zbioru $\mathscr{B}$ nie jest nowa. Fakt ten był znany mnie i moim współpracownikom od mniej więcej czerwca 2015. Mówiłem o tym na seminarium z teorii ergodycznej na UMK w Toruniu w styczniu 2016. Nie mam wątpliwości, że Autor rozprawy o tym nie wiedział i odkrył to wszystko od nowa. Przypomnijmy, że piszemy $\mathscr{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$, gdzie $b_1 < b_2 < \ldots$ i definiujemy $\mathscr{B}(k) = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Wówczas $\mathscr{X}_k$ jest orbitą okresową, która jest równocześnie orbitą funkcji charakterystycznej η_k zbioru liczb $\mathscr{B}(k)$-wolnych. Ciąg miar generowanych przez punkty η_k słabo zbiega do miary Mirsky'ego wygenerowanej przez η, czyli funkcję charakterystyczną $\mathcal{F}_{\mathscr{B}}$ (mówiąc ściśle, czasami trzeba mówić nie o generowaniu, a o quasi-generowaniu). Obserwacje tę można wykorzystać do podania jeszcze krótszego dowodu twierdzenia 4.1.23 niż ten podany w pracy.

- W sformułowaniu i dowodzie lematu 4.2.8 brakuje tyld, bo zawieranie $\mathscr{X}_k \supset \mathscr{X}_{k+1}$ nie jest na ogół prawdziwe. Chodzi o $\tilde{\mathscr{X}}_k \supset \tilde{\mathscr{X}}_{k+1}$.

- Proposition 4.1.7 i Theorem 4.1.9 są doskonale znane (zob. Lemma 3.17 w książce Furstenberga *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory* lub Thm. 4.4, 4.9, 4.10 w pracy cytowanej w rozprawie pod pozycją [62]).

- Nie podzielam zdziwienia Autora wyrażonego przed Theorem 4.1.8 na stronie 61 rozprawy, więc nie rozumiem też czemu ma służyć przytoczenie tego twierdzenia w tym miejscu.

Konkluzja

W mojej ocenie omawiana tu rozprawa doktorska pana Michała Lemańczyka pt. „*Czasy powrotów procesów stochastycznych w problemach koncentracji miary oraz entropii*" **spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.)**. Uważam, że rozprawy zawiera oryginalne rozwiązania nietrywialnych problemów matematycznych. Po zaznajomieniu się z rozprawą jestem też przekonany, że jej Autor opanował wiedzę teoretyczną i metody badawcze niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl

naukowych. Wnoszę więc o dopuszczenie pana Michała Lemańczyka do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Wydział Matematyki
i Informatyki

Instytut Matematyki

ul. Prof. St. Łojasiewicza 6
PL 30-348 Kraków
tel. +48(12) 664 66 34
fax +48(12) 664 66 74
e-mail: maths@im.uj.edu.pl
www.im.uj.edu.pl