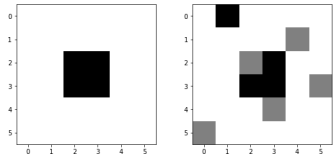


Publikacja „Total Variation Denoising in ℓ^1 Anisotropy”

Michał ŁASICA*, Piotr MUCHA*, Salvador MOLL**

*Uniwersytet Warszawski

**Uniwersytet w Walencji



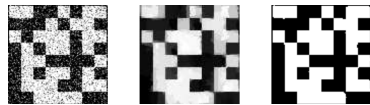
Po lewej: każdy z czterech czarnych pikseli sąsiaduje z dwoma białymi, $TV = 8$.

Po prawej: ten sam obrazek z wprowadzonym szumem. Szare piksele mają jasność 0,5, $TV = 21,5$.

Obraz jednokolorowy ma TV równe 0. Obraz o maksymalnym TV to taki, w którym piksele mają układ czarno-białej szachownicy.

Tak liczone TV nazywa się też *anizotropowym całkowitym wahaniami* dla odróżnienia od nieco bardziej subtelnej obliczeniowo *izotropowej wersji*, której używa się, by zmniejszyć artefakty związane z wyróżnieniem kierunku pionowego i poziomego. W niektórych zastosowaniach jednak anizotropia pojawia się naturalnie i jest pożądana.

Na obrazu obok widoczne jest zastosowanie całkowitego wahaniami do odszumiania. Po lewej: oryginalne zdjęcie. Na środku: zdjęcie ze sztucznie wprowadzonym szumem. Po prawej: efekt odszumiania przy użyciu filtra TV-L2.



Odszumianie kodów matrycowych przy użyciu całkowitego wahaniami (R. Choksi, Y. van Gennip, A. Oberman, 2011). Jest to przykład zastosowania, w którym anizotropowe TV sprawdza się lepiej niż izotropowe. Po lewej obraz z ziarnistym szumem. Na środku obraz po zastosowaniu filtra TV-L1. Po prawej środkowy obraz po progowaniu.

Całkowite usunięcie szumu z obrazu bez zniekształcenia właściwej treści jest zadaniem na ogół niemożliwym do wykonania, ale istnieją metody dające zadowalające rezultaty. Dla uproszczenia rozważmy grafikę rastrową w skali szarości. Przyporządkujmy każdemu pikselowi liczbę z przedziału $[0, 1]$, w zależności od jasności (biały – 1, czarny – 0). Naturalną miarą szumu jest suma modułów różnic jasności wszystkich par sąsiadujących pikseli. W teorii przetwarzania obrazów, wielkość ta nazywa się *całkowitym wahaniami* (ang. total variation, w skrócie TV).

Istnieje szereg metod odszumiania obrazów polegających na zmianie jasności pikseli tak, żeby zmniejszyć wartość TV . Techniczne nazwy takich metod to np. *minimalizacja funkcjonatu ROF*, albo *filtr TV-Lp*.



Co jednak, gdy obraz nie jest siatką pikseli, a na przykład grafiką wektorową? Punktom obrazu można, tak jak pikselom, przyporządkować liczbę opisującą jasność. Nie da się jednak policzyć całkowitego wahaniami tak, jak dawało się dla siatki pikseli – choćby dlatego, że dla danego punktu nie sposób wskazać punktów sąsiednich. Istnieje jednak uogólniona definicja TV , sformułowana w języku współczesnej analizy matematycznej, którą da się zastosować do grafiki wektorowej. Tę ogólniejszą definicję można zastosować również do grafiki rastrowej. Do niedawna nie było wiadomo czy odszumianie grafiki rastrowej przy zastosowaniu tych dwóch różnych definicji da taki sam rezultat – nie było jasne, czy zmniejszanie całkowitego wahaniami obrazu rastrowego, w rozumieniu uogólnionej definicji TV , da w rezultacie obraz rastrowy.

Zespół w składzie: doktorant Michał Łasica i jego promotorzy, Piotr Mucha z Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW oraz Salvador Moll z Departamentu Analizy Matematycznej Uniwersytetu w Walencji, wykazał że oba podejścia rzeczywiście dają te same rezultaty. Wynika z tego, że w przypadku obrazów rastrowych można bez żadnej straty zastąpić uogólnione całkowite wahaniami zdyskretyzowanym (dla pikseli), które jest prościej zdefiniowane i dobrze zbadane pod kątem obliczeń. Dowód tego twierdzenia opiera się na pewnej geometrycznej konstrukcji. Praca „Total Variation Denoising in ℓ^1 Anisotropy”, w której przedstawiony jest wynik, została opublikowana w październiku 2017 roku w czołowym czasopiśmie z dziedziny teorii przetwarzania obrazów „SIAM Journal on Imaging Sciences” (<https://arxiv.org/pdf/1611.03261v2.pdf>).