

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Hubert Balsam

Podporządkowane ruchy Browna na
fraktalach i związane z nimi losowe
operatory Schrödingera

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy:
prof. dr hab. Katarzyna Pietruska-Pałuba
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Kwiecień 2022

Oświadczenie autora rozprawy:
w pełni świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza rozprawa została
napisana przeze mnie samodzielnie.

Kwiecień 2022

.....

Hubert Balsam

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

Kwiecień 2022

.....

prof. dr hab. Katarzyna Pietruska-Pałuba

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Dyfuzje ułamkowe i procesy podporządkowane	15
1.1. d -zbiór i d -miara	15
1.2. Dyfuzje ułamkowe	16
1.3. Subordynacja i procesy podporządkowane	17
1.3.1. Subordynatory	17
1.3.2. Subordynatory α -stabilne (skokowe)	19
1.3.3. Subordynatory relatywistyczne α -stabilne	20
1.3.4. Procesy podporządkowane na d -zbiorze	21
2. Oszacowania gęstości przejścia dla procesu relatywistycznego na d-zbiorach 23	
2.1. Znane oszacowania dla procesu stabilnego na d -zbiorach	23
2.2. Oszacowanie dla gęstości przejścia relatywistycznego procesu αd_w -stabilnego	24
2.3. Forma Dirichleta dla procesów Markowa	34
2.3.1. Forma Dirichleta relatywistycznego procesu stabilnego	35
3. Nieograniczone fraktale zagnieżdżone	39
3.1. Definicja	39
3.2. Dobre etykietowanie i rzutowania	42
3.3. Procesy stochastyczne na nieograniczonych zagnieżdżonych fraktalach	43
3.3.1. Ruch Browna	43
3.3.2. Odbijany ruch Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$	44
3.3.3. Subordynowany odbijany ruch Browna	45
3.3.4. Użyteczne lematy	45
4. Oszacowania gęstości przejścia dla stabilnego i relatywistycznego procesu odbijanego na fraktalach	49
4.1. Oszacowanie gęstości przejścia dla odbijanego α -stabilnego ruchu Browna.	49
4.2. Oszacowanie gęstości przejścia dla α -stabilnego relatywistycznego odbijanego ruchu Browna	53
5. Całkowa gęstość stanów	59
5.1. Losowe operatory Schrödingera	60
5.1.1. Założenia dla potencjału kratowego	62
5.1.2. Założenia dla potencjału Poissonowskiego	64
5.1.3. Półgrupy i generatory	66
5.1.4. Klasa Kato i półgrupy Feynmana-Kaca	67
5.1.5. Istnienie IDS	73

6. Osobliwość Lifschitza dla potencjału typu kratowego	75
6.1. Oszacowanie górne transformaty Laplace'a IDS-u	77
6.2. Ograniczenie dolne transformaty Laplace'a IDS-u	84
6.3. Asymptotyka IDSu	89
7. Osobliwość Lifschitza dla potencjałów typu Poissonowskiego	91
7.1. Oszacowanie górne transformaty Laplace'a IDS-u	91
7.2. Oszacowanie dolne transformaty Laplace'a IDS-u	97
7.3. Asymptotyka IDSu	99
Dodatek	101
Bibliografia	117

PODZIĘKOWANIA

Chciałbym niezwykle serdecznie podziękować mojej Promotor - Pani Katarzynie Pietruskiej-Pałubie za zaanagażowanie, poświęcony czas i ponadprzeciętną opiekę podczas pracy nad doktoratem. Niniejsza praca nie powstałaby bez jej pomocy, życzliwości oraz wyrozumiałości.

Wprowadzenie

Teoria procesów stochastycznych na fraktalach jest rozwijana od ponad czterdziestu lat. Pierwszy został skonstruowany ruch Browna na trójkącie Sierpińskiego [8] oraz dywanie Sierpińskiego [6], na bardziej ogólnych zagnieżdżonych fraktalach [51, 46, 26], jak również na bardziej ogólnych przestrzeniach metrycznych [66]. W przypadku fraktali rozważane procesy mieszczą się w ramach dyfuzji na przestrzeniach stanów zwanymi d -zbiorami, a ponadto są jednoznaczne z dokładnością do liniowej zmiany czasu [62, 7]. Odsyłamy do [5] dla przeglądu wyników, dotyczących dyfuzji na d -zbiorach. W rozważanych przypadkach skonstruowany proces jest mocnym procesem Markowa na przestrzeni metrycznej (F, ρ, μ) z ciągłymi trajektoriami i posiada gęstość prawdopodobieństw przejścia, która spełnia oszacowanie subgaussowskie:

$$C_{g,1}t^{-d/d_w} \exp \left\{ -C_{g,2} \left(\rho(x, y)t^{-1/d_w} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \right\} \\ \leq g(t, x, y) \leq C_{g,3}t^{-d/d_w} \exp \left\{ -C_{g,4} \left(\rho(x, y)t^{-1/d_w} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \right\},$$

gdzie d_w to tzw. wymiar błędzenia F , stała d_J to tzw. współczynnik chemiczny F , a $C_{g,1}, \dots, C_{g,4} > 0$ to pewne stałe.

Procesy dyfuzji na zbiorach nieregularnych stały się popularne w związku z teorią nieregularnych przepływów, np. procesów, które ewoluują na krytycznych klastrach perkolacyjnych - klastry te wykazują wysoki poziom samopodobieństwa. Szerszy opis zjawisk fizycznych związanych z tym tematem Czytelnik znajdzie w [30] a aspekt matematyczny jest szeroko opisany w [5]. W tym kontekście rozważano również nieciągłe procesy o wartościach w ogólnych przestrzeniach metrycznych (wymagane aby mieć pewne warunki regularności). Jak do tej pory najlepiej przebadane są procesy stabilne (niekoniecznie w przestrzeni Euklidesowej) zdefiniowane niezależnie w [14] i [18]. W przestrzeni \mathbb{R}^d rozważamy procesy 2α -stabilne, gdzie $\alpha \in (0, 1)$ -generatorem takiego procesu jest ułamkowy Laplasjan $-(-\Delta)^\alpha$. W terminologii

fizycznej jest to *hamiltonian ultra-relatywistyczny*. Z matematycznego punktu widzenia, naturalnym jest zrobić krok dalej i rozważać *hamiltoniany relatywistyczne* $-(-c\Delta + m^{1/\alpha})^\alpha + m$, $m > 0$, $c > 0$ które są bardzo ważnymi przybliżeniami ultra-relatywistycznej mechaniki kwantowej. W szczególności gdy $\alpha = \frac{1}{2}$, Hamiltonian $\sqrt{-\hbar c^2 \Delta + m^2 c^4}$ (nazywany *operatorem pierwiastkowym Kleina-Gordona* lub *hamiltonianem quasi-relatywistycznym*) jest często używany do opisanie ruchu *swobodnej cząsteczki quasi-relatywistycznej*. W tym przypadku m jest masą cząsteczki, c jest prędkością światła, a \hbar jest zredukowaną stałą Plancka. Operator $-\mathcal{L} := \sqrt{-\hbar c^2 \Delta + m^2 c^4} - mc^2$ jest również nazywany *operatorem energii kinetycznej*. Teoria ta była mocno pod wpływem badań nad stabilnością relatywistycznej materii prowadzonych przez Lieba i Seiringera [49]. W tej rozprawie doktorskiej proponujemy definiować proces relatywistyczny ad_w -stabilny na zadanej przestrzeni metrycznej (F, ρ, μ) , poprzez subordynację Bochnera względem ruchu Browna na F . Ta klasyczna procedura, wprowadzona przez Bochnera [11, 12] daje narzędzie do tworzenia nowych pólgrup (operatorów, procesów) z już istniejących. Więcej na temat subordynacji Czytelnik znajdzie w [9, 10, 63]. Również w rozdziale 1.3.1 omawiamy subordynatory bardziej szczegółowo. Metoda subordynacji została użyta m.in. w pracy [23] - rozważano w niej twierdzenie o śladzie dla procesów subordynowanych na obszarach $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o nieregularnym brzegu.

W tej pracy doktorskiej nie wymagamy, aby zbiór stanów procesu był podzbiorem przestrzeni Euklidesowej, a nawet jeśli jest, to wprowadzamy własną metrykę, która może nie być porównywalna z Euklidesową. Wychodząc od ruchu Browna na danym zbiorze nieregularnym (zupełnie abstrakcyjnym, niekoniecznie będącym brzegiem dziedziny w \mathbb{R}^n) poprzez subordynację otrzymujemy proces na tej samej nieregularnej przestrzeni. Stabilne subordynatory zostały wprowadzone w związku z [14], a my pracujemy m.in z blisko powiązanymi, jednak bardziej skomplikowanymi, subordynatorami relatywistycznymi.

Równoległe do rozważań stochastycznych wywodzących się głównie z fizyki matematycznej, istniało żywe zainteresowanie teorią przestrzeni funkcji na zbiorach nieregularnych. Początkowo teoria ta była rozwijana w przypadku zbiorów będącymi podzbiorem \mathbb{R}^n , włączając fraktale (więcej [36, 71, 70] i literatura tamże). W szczególności na zbiorach tych były wprowadzane i analizowane przestrzenie Biesowa. Przestrzenie te zostały naturalnie połączone z dyfuzjami na fraktalach, okazuje się bowiem, że dziedzina formy Dirichleta ruchu Browna

to przestrzeń Biesowa (zob. [37] dla trójkąta Sierpińskiego, [59] dla d -zbiorów). Przestrzenie funkcji na fraktalach, i ogólniej na przestrzeniach metrycznych były regularnie analizowane (np. [33, 34, 47, 28]). Zwracamy uwagę również na dwie prace dotyczące twierdzeń o śladach: [38] na trójkącie Sierpińskiego i [32] na ogólnych fraktalach.

Główne wyniki doktoratu pochodzą z prac [1, 2, 3, 4]. W pracy [4] zajmujemy się oszacowaniami gęstości przejścia dla procesów relatywistycznych na d -zbiorach. W szczególności, oszacowania te zachodzą dla zbiorów fraktalnych. Kontynuując ten temat, w pracy [1] uzyskujemy oszacowania dla odbijanych procesów relatywistycznych na fraktalach. Wykazujemy, że gęstość przejścia w przypadku odbijanego αd_w -stabilnego subordynowanego ruchu Browna spełnia oszacowanie

$$\begin{aligned} O_{S.1} p_S(t, x, y) &\leq p_S^M(t, x, y) \leq O_{S.2} p_S(t, x, y) \quad \text{dla } t < L^{\alpha M d_w} \\ O_{S.3} L^{-Md} &\leq p_S^M(t, x, y) \leq O_{S.4} L^{-Md} \quad \text{dla } t \geq L^{\alpha M d_w}, \end{aligned}$$

gdzie $O_{S.1}, O_{S.2}, O_{S.3}, O_{S.4}$, to pewne stałe a $p_S(\cdot, \cdot, \cdot)$ to gęstość procesu αd_w -stabilnego. Parametr L to czynnik skalujący fraktala. W przypadku relatywistycznego odbijanego αd_w -stabilnego procesu uzyskujemy oszacowanie postaci

- 1) istnieją stałe $O_{R.1}, O_{R.2} > 0$ takie, że dla $t \geq L^{M d_w}$, $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$

$$O_{R.1} L^{-Md} \leq p_R^M(t, x, y) \leq O_{R.2} L^{-Md}.$$

- 2) istnieje stała H_1 taka, że dla $t < L^{M d_w}$,

$$p_R(t, x, y) \leq p_R^M(t, x, y) \leq p_R(t, H_1 x, H_1 y),$$

gdzie $O_{R.1}, O_{R.2}, H_1$ to pewne stałe, a $p_R(\cdot, \cdot, \cdot)$ to gęstość relatywistycznego procesu αd_w -stabilnego.

Właściwości subordynowanego procesu stabilnego na d -zbiorach, włączając oszacowanie gęstości przejścia, były analizowane w [14, 65] przez Bogdana, Stósa i Sztonyka. Postępując podobnie jak w [14], w tej pracy udowadniamy dolne i górne szacowanie gęstości przejścia relatywistycznego procesu stabilnego na d -zbiorach (Twierdzenia 2.2.1, 2.2.2), następnie znajdujemy formę Dirichleta tego procesu (Twierdzenie 2.3.1). Wyniki powyższe uzyskujemy, używając jedynie subordynacji i kilku znanych właściwości subordynatorów

α -stabilnych. Zwracamy uwagę, że subordynatorowi α -stabilnemu (odpowiednio, relatywistycznemu α -stabilnemu), $\alpha \in (0, 1)$, odpowiada proces αd_w -stabilny (odp. relatywistyczny αd_w -stabilny).

Bardziej szczegółowo, oznaczając przez $p_R(\cdot, \cdot, \cdot)$ gęstość przejścia subordynowanego relatywistycznego αd_w -stabilnego procesu na d -zbiorze (F, ρ, μ) , udowadniamy, że

(1) dla $t \geq 1$ i $x, y \in F$,

$$p_R(t, x, y) \asymp C_* t^{-d/d_w} \exp \left\{ -C_* \min \left(\rho(x, y), \left(\rho(x, y) t^{-1/d_w} \right)^{\frac{d_w}{d_w-1}} \right) \right\},$$

(2) dla $t \in (0, 1)$, $x, y \in F$, $\rho(x, y) \geq 1$

$$p_R(t, x, y) \asymp C_* t \exp \{ -C_* \rho(x, y) \},$$

(3) dla $t \in (0, 1)$, $x, y \in F$, $\rho(x, y) < 1$

$$p_R(t, x, y) \asymp C_* \min \left(t \rho(x, y)^{-d-\alpha d_w}, t^{-d/(\alpha d_w)} \right),$$

gdzie przez C_* oznaczamy stałe, które mogą być różne w szacowaniu dolnym i górnym. Oszacowania te są spójne z oszacowaniami dla relatywistycznego procesu w \mathbb{R}^d z [18]. Jeszcze tylko wspomnimy, że w przypadku przestrzeni Euklidesowej, \mathbb{R}^d , jest możliwe (zob. [44]) uzyskanie oszacowań górnego i dolnego z tą samą stałą w wykładniku potęgi we wzorze (2).

Drugim celem w tej pracy jest badanie tzw. *całkowej gęstości stanów* (IDS) na fraktalach i uzyskanie osłabiwości Lifschitza dla szerokiej klasy procesów podporządkowanych - w tym dla procesów relatywistycznych (poprzednie wyniki [42] nie pokrywały tego przypadku, nawet na trójkącie Sierpińskiego). Wyniki te zostały uzyskane w pracach [2, 3].

IDS to jeden z najważniejszych obiektów w mechanice kwantowej, przydatny w modelach, w których analizujemy zachowanie/ruch cząsteczki w pewnym losowym ośrodku na przestrzeni nieskończonej. W naszym przypadku będzie to nieograniczony fraktal zagnieżdżony oznaczany przez $\mathcal{K}^{(\infty)}$. Sam ruch cząsteczki modelujemy poprzez zwykły proces Markowa z generatorem H_0 , natomiast losowość modelujemy w ten sposób, że dodajemy losowy potencjał V^ω , niezależny od H_0 . W związku z powyższym, otrzymujemy losowy operator Schrödingera $H^\omega = H_0 + V^\omega$ gdzie H_0 opisuje energię kinetyczną cząsteczki, a V^ω jest losowym

potencjałem interpretowanym jako operator mnożenia. Ze względu na fakt, że proces odpowiadający operatorowi H^ω działa na przestrzeni nieograniczonej ($\mathcal{K}^{(\infty)}$), to jego spektrum zwykle nie jest dyskretne i w związku z tym jest trudno taki operator badać. Obejściem tego problemu jest obcięcie operatora H^ω do pewnych sympleksów $\Delta_M, M \in \mathbb{Z}_+$, w ten sposób, że $\Delta_M \nearrow \mathcal{K}^{(\infty)}$ gdy $M \rightarrow \infty$. Operator H_M^ω odpowiadający operatorowi H^ω obciętemu do sympleksu Δ_M ma już własności, które można łatwiej analizować. Operator taki generuje półgrupę operatorów zwartych, więc jego spektrum jest dyskretne oraz wszystkie wartości własne mają skończoną krotność. W rezultacie definiujemy obiekt - miarę związaną z wartościami własnymi operatora H_M^ω :

$$\Lambda_{H_M^\omega} := \frac{1}{|\Delta_M|} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\lambda_i^{H_M^\omega}}$$

gdzie $\lambda_i^{H_M^\omega}$ to wartości własne operatora H_M^ω . Są to miary losowe. Następnie rozważamy ich słabą granicę gdy $M \rightarrow \infty$. Jeżeli granica istnieje, to nazywamy ją *całkową gęstością stanów* (ang. *integrated density of states*, w skrócie IDS) i będziemy ją oznaczać przez Λ .

W tej pracy skupimy się na dwóch przypadkach gdy losowy potencjał V^ω będzie typu Poissona lub Andersona (tzn. potencjał kratowy, ang. *alloy-type*).

Dla dostatecznie regularnych fraktali (spełniających tzw. własność dobrego etykietowania, zob. rozdział 3.2), szerokiej klasy procesów subordynowanych (spełniających 1.3.4), oraz odpowiedniej regularności profilu potencjału, IDS istnieje tak w przypadku potencjałów kratowych, jak i Poissonowskich. Po wykazaniu istnienia całkowitej gęstości stanów - co jednak nie jest głównym celem tej pracy - skupiamy się na udowodnieniu, że w tych przypadkach, po niewielkim ograniczeniu dopuszczalnej klasy potencjałów, zachodzi tzw. całkowita osobliwość Lifschitza. Polega ona na tym, że tempo zaniku IDS w okolicach zera jest w tym przypadku jakościowo szybsze (wykładnicze) niż w przypadku nielosowym (zanik wielomianowy). Własność ta została odkryta przez Lifschitza [50], a następnie wykazana w wielu przypadkach. O ile dla ruchu Browna w przypadku nielosowego potencjału, mamy, że $\Lambda((0, \lambda]) \asymp \lambda^{d/2}$ dla małych λ , to przy wprowadzeniu losowości wielkość ta zachowuje się jak $e^{-C\lambda^{-d/2}}$. Za pomocą różnych metod, istnienie osobliwości Lifschitza zostało wykazane dla wielu klas procesów, i tak, w [53] dla procesów Levy'ego w \mathbb{R}^d , w [56] dla ruchu Browna na trójkącie Sierpińskiego, w [64] dla ruchu Browna na fraktalach, w [42] dla procesów podporządkowanych (np. stabilnych) na trójkącie Sierpińskiego - w wymienionych pracach rozpatrywany był potencjał

Poissonowski. Ponadto w pracach [68, 67] jest rozpatrywany pochłaniający potencjał Poissonowski dla ruchu Browna w \mathbb{R}^d oraz na przestrzeniach hiperbolicznych odpowiednio. Z kolei w [43] udowodnione zostało istnienie osobliwości Lifschitza dla procesów podporządkowanych z potencjałem kratowym w \mathbb{R}^d , a w pracy [16], jest opisana gęstość stanów na kracie \mathbb{Z}^d . We wszystkich tych pracach jest udowodnione, że

$$\begin{aligned} -\tilde{L}_1 &\leq \liminf_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda])}{g(\tilde{R}_1/\lambda)}; \\ \limsup_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda])}{g(\tilde{R}_2/\lambda)} &\leq -\tilde{L}_2, \end{aligned} \quad (0.0.1)$$

gdzie \tilde{L}_1 i \tilde{L}_2 to stałe dodatnie, a g jest pewną funkcją, zależną od potencjału V^ω . W przypadku potencjału Poissonowskiego oraz niektórych potencjałów kratowych, funkcja g nie jest potrzebna, natomiast dla ogólnych potencjałów kratowych g jest istotnym wkładem do asymptotyki Λ w okolicach zera. W doktoracie dowodzimy istnienie osobliwości Lifschitza dla procesów podporządkowanych na fraktalach zagnieżdżonych (klasa procesów jest istotnie szersza niż w [43]) i dwóch typów potencjałów: kratowego i Poissonowskiego. Otrzymujemy zależność (0.0.1), tak jak we wcześniej rozpatrywanych przypadkach.

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Opiszemy pokrótce zawartość każdego z nich.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje obiektów, z którymi będziemy pracować przez całą pracę. W szczególności podajemy definicje dyfuzji ułamkowych, d -zbiorów, d -miar jak również definicje i własności procesów subordynowanych. Omawiamy subordynatory α -stabilne oraz relatywistyczne α -stabilne i odpowiadające im procesy αd_w -stabilne oraz relatywistyczne αd_w -stabilne.

W rozdziale drugim rozważamy relatywistyczny proces αd_w -stabilny na przestrzeniach metrycznych (F, ρ, μ) będących d -zbiorami. W szczególności w twierdzeniu 2.2.1 pokazujemy oszacowanie gęstości wyżej wymienionego procesu dla dużych czasów podczas gdy w twierdzeniu 2.2.2 pokazujemy oszacowanie gęstości dla małych czasów. Okazuje się, że dla dużych czasów i dużych odległości, relatywistyczny proces αd_w -stabilny zachowuje się podobnie (z dokładnością do stałych) do zwykłego ruchu Browna, a dla małych czasów jego zachowanie jest niemal takie samo jak procesu αd_w -stabilnego. Rozdział kończymy twierdzeniem 2.3.1, w którym wyznaczamy dziedzinę formy Dirichleta relatywistycznego procesu

αd_w – stabilnego, a ponadto podajemy jej postać.

W rozdziale trzecim wprowadzamy definicję nieograniczonych fraktali zagnieżdżonych $\mathcal{K}^{(\infty)}$ wraz z ich podstawowymi własnościami. Ponadto opisujemy właściwość dobrego etykietowania (ang. *good labeling property* - GLP) fraktala, pochodzącą z [39]. Pokróctce, powiemy że dany nieograniczony zagnieżdżony fraktal posiada GLP, o ile można określić ciągle rzutowanie z niego samego na ograniczony jego fragment, będący sympleksem fraktalnym. Następnie wprowadzamy ruch Browna na nieograniczonym fraktalu zagnieżdżonym, jak również definiujemy odbijany ruch Browna oraz subordynowany ruch Browna na fraktalu ograniczonym $\mathcal{K}^{(M)}$, $M \in \mathbb{Z}_+$. Na zakończenie rozdziału podajemy szereg użytecznych lematów, z których będziemy korzystać w następnych rozdziałach (zwłaszcza w 5,6,7), a które dowodzą właściwości procesów zdefiniowanych w tym rozdziale.

Rozdział czwarty zawiera twierdzenia dotyczące oszacowań gęstości przejścia dla procesów zdefiniowanych w rozdziale trzecim. Chodzi o procesy stabilne i relatywistyczne na fraktalach ograniczonych, odbijane przy dojściu do brzegu. Twierdzenie 4.1.1 dotyczy oszacowania gęstości przejścia subordynowanego procesu αd_w –stabilnego i pokazuje ono, że dla małych czasów, proces zachowuje się tak samo jak zwykły proces αd_w –stabilny podczas gdy dla dużych czasów, gęstość jest zbliżona do gęstości rozkładu jednostajnego na $\mathcal{K}^{(M)}$. Z kolei twierdzenie 4.2.1 dotyczy oszacowania gęstości przejścia relatywistycznego procesu αd_w –stabilnego. Również i to twierdzenie pokazuje, że dla małych czasów proces zachowuje się jak zwykły proces relatywistyczny stabilny a dla dużych czasów jego gęstość jest zbliżona do gęstości rozkładu jednostajnego na $\mathcal{K}^{(M)}$.

W rozdziałach piątym, szóstym i siódmym rozważamy temat całkowitej gęstości stanów (IDS). I tak, w rozdziale piątym, definiujemy wszystkie niezbędne obiekty potrzebne do opisanie IDSu. W szczególności opisujemy losowe operatory Schrödingera, definiujemy potencjały z którymi będziemy pracować (kratowy i Poissona), ich periodyzację, jak również podajemy założenia, przy których w następnych rozdziałach udowodnimy istnienie osobliwości Lifschitza IDSu dla wymienionych potencjałów. Wprowadzamy oznaczenia dotyczące półgrup i operatorów, przypominamy definicję klasy Kato, półgrup Feynmanna-Kaca i udowadniamy twierdzenia mówiące o tym, że przy naszych założeniach funkcje profilu dla potencjału kratowego i Poissona należą do odpowiednich klas Kato, co pozawala na ściśle, poprawne stosowanie

tych metod. Rozdział piąty kończymy sformułowaniem twierdzenia o istnieniu IDSu dla zadanych potencjałów. Dowody niewiele różnią się od tych z [42, 54], więc przedstawiamy je tylko szkicowo w Dodatku.

Rozdział szósty zawiera dowód twierdzenia (twierdzenie 6.0.1) o występowaniu osobliwości Lifshitz'a dla IDSu w przypadku procesów subordynowanych z potencjałem typu kratowego na nieskończonych fraktalach zagnieżdżonych. Na ten dowód składa się udowodnienie oszacowań górnych (twierdzenie 6.1.1) i dolnych (twierdzenie 6.2.1) odpowiedniej transformaty Laplace'a miary granicznej a następnie skorzystanie z twierdzeń Tauberowskich typu mieszanego.

Podobnie jak rozdział szósty, rozdział siódmy zawiera dowód twierdzenia (twierdzenie 7.0.1) o występowaniu osobliwości Lifschitz'a dla IDSu w przypadku procesów subordynowanych z potencjałem typu Poissonowskiego na nieskończonych fraktalach zagnieżdżonych. Analogicznie, na dowód składa się udowodnienie oszacowań górnych i dolnych transformaty Laplace'a i skorzystanie z twierdzeń Tauberowskich, tym razem, prostszych - typu eksponencjalnego. Dla kompletności tezy, w Dodatku zamieszczamy dowody lematów z rozdziału 3 (pochodzące z pracy [2]), a także dowody istnienia całkowitej gęstości stanów.

KONWENCJA DOTYCZĄCA STAŁYCH. Stałe oznaczone $c_i, i = 1, 2, 3 \dots$ (c pisane małą literą z dolnym indeksem $i \in \mathbb{Z}_+$) będą numerowane kolejno w każdej spójnej części dowodu/rozumowania. Pozostałe stałe, raz ustalone, nie będą zmieniać swojej wartości w całej pracy. Dla dwóch funkcji zdefiniowanych na tej samej dziedzinie $f \asymp g$ oznacza, że istnieje stała $C > 0$ taka, że $\frac{1}{C}f(\cdot) \leq g(\cdot) \leq Cf(\cdot)$.

Oznaczenia:

(F, ρ, μ)	– przestrzeń metryczna z metryką ρ i miarą μ
$Z = (Z_t)_{t \geq 0}$	– ruch Browna na F
g	– gęstość przejścia procesu Z
$S = (S_t)_{t \geq 0}$	– subordynator
$\phi(\lambda)$	– wykładnik Laplace’a subordynatora S
η_t	– gęstość subordynatora α -stabilnego, $\alpha \in (0, 1)$
$\eta_{t,m}$	– gęstość subordynatora relatywistycznego α -stabilnego, $\alpha \in (0, 1)$
$X = (X_t)_{t \geq 0}$	– subordynowany ruch Browna
p	– gęstość przejścia subordynowanego procesu X
p_S	– gęstość przejścia subordynowanego procesu stabilnego
p_R	– gęstość przejścia subordynowanego procesu relatywistycznego
N	– liczba podobieństw generujących fraktal
L	– czynnik skalujący podobieństw generujących fraktal
k	– liczba istotnych punktów stałych
$\mathcal{K}^{(0)}$	– fraktal generowany przez zadaną rodzinę podobieństw
$\mathcal{K}^{(M)} = L^M \mathcal{K}^{(0)}, M \in \mathbb{Z}_+$	– fraktal rozmiaru L^M
$\mathcal{K}^{(\infty)} = \sum_{M=0}^{\infty} L^M \mathcal{K}^{(0)}$	– zagnieżdżony fraktal nieograniczony
$\Delta_M, M \in \mathbb{Z}, M \geq 0$	– dowolny M -sympleks
$V_m^{(M)}, m \leq M$	– zbiór wierzchołków wszystkich m -sympleksów w $\mathcal{K}^{(M)}$
$k_0^{(M)} = \#V_0^{(M)}$	– liczba wierzchołków wszystkich 0-sympleksów w $\mathcal{K}^{(M)}$
$V_m^{(\infty)}$	– zbiór wierzchołków wszystkich m -sympleksów w $\mathcal{K}^{(\infty)}$
$\Delta_M(x), x \in \mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_M^{(\infty)}$	– unikalny M -sympleks zawierający x
$\Delta_{M,i}, 1 \leq i \leq N$	– zbiór wszystkich M -sympleksów w $\mathcal{K}^{(M+1)}$
$d_M, M \in \mathbb{Z}, M \geq 0$	– metryka grafowa rzędu M

d	– wymiar Hausdorffa przestrzeni F lub fraktala $\mathcal{K}^{(0)}$
d_w	– wymiar błędzenia przestrzeni F lub fraktala $\mathcal{K}^{(0)}$
d_J	– współczynnik chemiczny przestrzeni F lub fraktala $\mathcal{K}^{(0)}$
π_M	– rzutowanie z $\mathcal{K}^{(\infty)}$ na $\mathcal{K}^{(M)}$
π_{Δ_M}	– rzutowanie z $\mathcal{K}^{(\infty)}$ na Δ_M
Z_t^M	– odbijany ruch Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$
g_M	– gęstość odbijanego ruchu Browna Z_t^M
X_t^M	– subordynowany odbijany ruch Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$
p_M	– gęstość subordynowanego odbijanego ruchu Browna X_t^M
p_S^M	– gęstość αd_w –stabilnego odbijanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$
p_R^M	– gęstość relatywistycznego αd_w –stabilnego odbijanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$
$W(x, y)$	– funkcja profilu
$V^\omega(x)$	– potencjał o profilu W
$V_M^\omega(x)$	– speriodyzowany potencjał o profilu W
Λ	– całkowita gęstość stanów
$\mathbb{L}(t)$	– transformata Laplace’a całkowitej gęstości stanów

Rozdział 1

Dyfuzje ułamkowe i procesy podporządkowane

W tym rozdziale przedstawimy wstępne pojęcia dotyczące przestrzeni oraz procesów, którymi będziemy się zajmować. W późniejszych rozdziałach będziemy uszczegóławiać te pojęcia w miarę potrzeb.

1.1. d -zbiór i d -miara

Za [5, 36] niech (F, ρ) będzie zupełną, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną oraz niech μ będzie miarą Borelowską na on F .

Definicja 1.1.1 *Przyjmijmy $d > 0$. Dodatnią miarę Borelowską μ na F nazwiemy d -miarą, jeśli istnieją stałe $C_{\mu,1}, C_{\mu,2} > 0$ takie że:*

$$C_{\mu,1}r^d \leq \mu(B(x, r)) \leq C_{\mu,2}r^d \quad \forall x \in F, \quad r \in (0, \text{diam}F),$$

gdzie $B(x, r) = \{y \in F : \rho(x, y) < r\}$ oznacza otwartą kulę w F w metryce ρ , o środku x i promieniu r .

Definicja 1.1.2 *Zbiór F z metryką ρ nazwiemy d -zbiorem, jeśli istnieje d -miara na (F, ρ) , której nośnikiem jest F .*

Pokrótkie opisując, mamy do czynienia z d -miarą, jeśli miara dowolnej kuli jest rzędu jej promienia podniesionego do potęgi d . Miara Lebesgue'a w \mathbb{R}^d z metryką Euklidesową jest d -miarą. Ponadto wszystkie d -miary na ustalonym zbiorze F są równoważne i wymiar Hausdorffa dowolnego d -zbioru wynosi d . Przykładem d -zbiorów są fraktale zagnieżdżone opisane w rozdziale 3. Więcej informacji o d -zbiórach i d -miarach Czytelnik znajdzie w [36].

1.2. Dyfuzje ułamkowe

Zakładamy, że dany jest d -zbiór F wraz z odpowiadającą mu d -miarą μ . Wprowadźmy teraz definicję dotyczącą procesu dyfuzji na d -zbiorach.

Definicja 1.2.1 *Proces Markowa na F $(Z_t, \mathbf{P}_x)_{x \in F, t \geq 0}$ nazwiemy dyfuzją ułamkową (ang. fractional diffusion) jeśli:*

1. Z jest Fellerowskim procesem dyfuzji z przestrzenią stanów F ,
2. Z ma symetryczną, ciągłą gęstość przejścia $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ względem d -miary μ , taką że:

$$C_{g.1} t^{-d/d_w} e^{-C_{g.2} \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} \leq g(t, x, y) \leq C_{g.3} t^{-d/d_w} e^{-C_{g.4} \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}, \quad (1.2.1)$$

$t \in (0, (\text{diam } F)^{d_w})$, $x, y \in F$, dla pewnych stałych $C_{g.1}, \dots, C_{g.4} > 0$ oraz $d_w, d_J > 1$.

Stała d_w jest nazywana *wymiarem błędzenia* (ang. *the walk dimension*) zbioru F i zależy tylko od geometrii F (zob. [59]), t.j. dla dowolnego d -zbioru F wszystkie ułamkowe dyfuzje na F mają taką samą wartość parametru d_w (dowód w [59] dla przypadku podzbiorów \mathbb{R}^d , analogiczny dla bardziej ogólnych przestrzeni metrycznych, zob. [29]). W szczególności dla $F = \mathbb{R}^d$ mamy $d_w = 2$, a jeśli F jest trójkątem Sierpińskiego, to wtedy $d_w = \frac{\ln 5}{\ln 2}$. Z kolei, parametr $d_J > 1$ to tzw. wymiar chemiczny (ang. *chemical exponent*) zbioru F . Zazwyczaj $d_w \neq d_J$, ale czasami (np. trójkąt Sierpińskiego) zachodzi $d_w = d_J$, zob. [45, Twierdzenia 5.2, 5.5]. Dla przestrzeni Euklidesowej \mathbb{R}^d mamy $d_J = d_w = 2$.

Oczywiście klasyczny ruch Browna na \mathbb{R}^d jest również dyfuzją ułamkową, tak samo jak ruch Browna na fraktalach opisany w sekcji 3.3.1, który spełnia powyższą definicję. Jako kolejny przykład można podać ruch Browna na torusie. Zakończymy rozdział przypominając definicję półgrupy dla procesu (Z_t) .

Definicja 1.2.2 *Niech dany będzie proces dyfuzji $(Z_t, \mathbf{P}_x)_{x \in F, t \geq 0}$ na F z gęstością przejścia $g(\cdot, \cdot, \cdot)$. Niech $(P_t)_{t \geq 0}$ oznacza półgrupę operatorów na $L^2(F, \mu)$ związaną z $g(t, x, y)$ zadaną przez*

$$L^2(F, \mu) \ni f \mapsto P_t f(x) = \int_F g(t, x, y) f(y) d\mu(y).$$

Jest to mocno ciągła półgrupa operatorów symetrycznych na $L^2(F, \mu)$, której generator będziemy oznaczać przez \mathcal{L} .

1.3. Subordynacja i procesy podporządkowane

1.3.1. Subordynatory

Subordynator $S = (S_t, \mathbf{P})_{t \geq 0}$ to rosnący jednowymiarowy proces Lévy'ego na $[0, \infty)$ taki, że $S_0 = 0$ (więcej w [10]). Niech $\eta_t(ds)$ oznacza rozkład S_t , wtedy transformatę Laplace'a miary η_t można zapisać jako:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} \eta_t(ds) = e^{-t\phi(\lambda)}, \quad \lambda > 0. \quad (1.3.1)$$

Funkcję $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wykładnikiem Laplace'a procesu S* . Jest on postaci (wzór Lévy'ego-Chinczyna):

$$\phi(\lambda) = a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \nu(dx) \quad (1.3.2)$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest tzw. *współczynnikiem dryfu (drift coefficient)* procesu S , a ν jest miarą Lévy'ego procesu S , tzn. ν jest miarą borelowską, nieujemną, σ -skończoną na $(0, \infty)$, która spełnia następujący warunek:

$$\int_0^\infty (1 \wedge x) \nu(dx) < \infty. \quad (1.3.3)$$

W całej naszej pracy będziemy zakładali, że wykładnik Laplace'a subordynatora spełnia założenie

(B) a) istnieją $\alpha \in (0, 1)$, i $C_{\phi,1}, C_{\phi,2}, \lambda_0 > 0$ takie, że

$$C_{\phi,1}\lambda^\alpha \leq \phi(\lambda) \leq C_{\phi,2}\lambda^\alpha, \quad \lambda \in (0, \lambda_0], \quad (1.3.4)$$

b) zachodzi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\phi(\lambda)}{\ln \lambda} = \infty. \quad (1.3.5)$$

W [41, Lemat 2.1] zostało udowodnione, że dla dowolnego $\gamma, t_0 > 0$ istnieje stała $C(t_0, \gamma)$ taka, że przy założeniu (B) zachodzi

$$\int_0^\infty u^{-\gamma} \eta_t(du) \leq C(t_0, \gamma) t^{-\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad t \geq t_0. \quad (1.3.6)$$

W szczególności, mamy, że dla każdego $t_0 > 0$,

$$\sup_{t \geq t_0} \int_0^\infty u^{-\gamma} \eta_t(du) < \infty.$$

Z drugiej strony, z (1.3.4) wynika (zob. [40, Lemat 2.2]) że

$$\int_1^\infty \eta_t(u, \infty) \frac{du}{u} < \infty, \quad t > 0. \quad (1.3.7)$$

Jest to równoważne warunkowi:

$$\text{dla każdego } a > 1 \text{ i } t > 0 \text{ mamy } \sum_{M=1}^\infty \eta_t(a^M, \infty) < \infty. \quad (1.3.8)$$

Przykład 1.3.1 (Subordynatory spełniające warunek (B).) (1) Zwykły dryf:

$$\phi(\lambda) = b\lambda, \quad b > 0.$$

(2) Subordynatory α -stabilne: $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

(3) Subordynator relatywistyczny α -stabilny: $\phi(\lambda) = (\lambda + m^\alpha)^\alpha - m$, $\alpha \in (0, 1)$, $m > 0$.

Mamy $\phi(\lambda) \approx \lambda$ dla $\lambda \rightarrow 0^+$, oraz $\phi(\lambda) \approx \lambda^\alpha$ dla $\lambda \rightarrow \infty$.

(4) Miks stabilnych subordynatorów: $\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

(5) α -stabilny subordynator z dryfem: $\phi(\lambda) = b\lambda + \lambda^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$. W tym przypadku mamy, $\phi(\lambda) \approx \lambda$ dla $\lambda \rightarrow 0^+$, oraz $\phi(\lambda) \approx \lambda^\alpha$ dla $\lambda \rightarrow \infty$.

(6) Subordynator typu mieszanego: $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha [\ln(1 + \lambda)]^\beta$, $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (-\alpha, 0)$ lub $\beta \in (0, 1 - \alpha)$, wtedy (1.3.4) oraz (1.3.5) są spełnione.

Więcej przykładów subordynatorów oraz ich właściwości można znaleźć w [9, 10, 63].

Definiujemy nową półgrupę operatorów:

$$T_t^\phi u := \int_0^\infty P_s u \eta_t(ds),$$

która jest mocno ciągłą półgrupą na $L^p(F, \mu)$, $p > 1$. Powyższe całkowanie jest rozumiane w sensie Bochnera i jest dobrze określone przy naszych założeniach. Półgrupa ta, nazywana *subordynowaną do (P_t)* , jej generator na $L^2(F, \mu)$ będzie oznaczany przez $(\mathcal{L}^\phi, \mathcal{D}(\mathcal{L}^\phi))$. Jeżeli jest jasne, z jakim subordynatorem mamy do czynienia, będziemy pisać $T_t^\phi = T_t$. Zwracamy uwagę, że mamy $\mathcal{L}^\phi = \phi(-\mathcal{L})$.

Jeżeli P_t jest półgrupą w $L^2(F, \mu)$ procesu Markowa Z na F , z gęstościami przejścia $g(t, x, y)$, $t > 0, x, y \in F$, wtedy T_t^ϕ jest również półgrupą pewnego procesu Markowa X na F , nazywanego *procesem subordynowanym do Z przez subordynator S* . Jego prawdopodobieństwa przejścia są zadane przez

$$p(t, x, B) = \int_0^\infty \int_B g(u, x, y) \mu(dy) \eta_t(du), \quad B \in \mathcal{B}(F)$$

W naszej pracy dwa rodzaje subordynatorów będą szczególnie istotne.

1.3.2. Subordynatory α -stabilne (skokowe)

Definicja 1.3.1 Niech $\alpha \in (0, 1)$. Powiemy, że subordynator S jest α -stabilny, jeśli jego wykładnik Laplace'a jest postaci:

$$\phi(\lambda) = \lambda^\alpha, \quad \lambda > 0. \quad (1.3.9)$$

Całkowanie przez części daje:

$$\lambda^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) x^{-1-\alpha} dx.$$

Dla tego subordynatora miara Lévy'ego jest równa

$$\nu(dx) = \alpha/\Gamma(1-\alpha) x^{-1-\alpha} dx,$$

i z warunku (1.3.3) wynika ograniczenie, że $\alpha \in (0, 1)$. W tym przypadku, dla dowolnego $t > 0$ miara η_t jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Będziemy używać tej samej litery dla określenia zarówno tej miary jak i jej gęstości, $\eta_t(ds) = \eta_t(s)ds$.

W poniższym lemacie podamy najważniejsze własności η_t .

Lemat 1.3.1 Niech η_t będzie gęstością subordynatora α -stabilnego, $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy zachodzą następujące zależności.

(i) [skalowanie] dla dowolnych $t, s > 0$

$$\eta_t(s) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \eta_1(t^{-\frac{1}{\alpha}} s). \quad (1.3.10)$$

Istnieją stałe, $A_1, A_2, a_0, a_1, a_2, a_3, u_0 > 0$, zależne tylko od α , takie, że:

(ii) [asymptotyczne zachowanie w 0^+ (zob. [31, dowód Lematu 1])] poniższa granica istnieje oraz

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \eta_1(s) s^{a_1} e^{a_2 s^{-1-\alpha}} = A_1. \quad (1.3.11)$$

(iii) [asymptotyczne zachowanie w ∞ (zob. [13, p. 97])]

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \eta_1(s) s^{1+\alpha} = A_2. \quad (1.3.12)$$

(iv) [oszacowanie górne (zob. [14, wzór 9])]

$$\eta_t(s) \leq a_0 t s^{-1-\alpha} \quad s, t > 0. \quad (1.3.13)$$

(v) [dokładniejsze oszacowanie górne (zob. [14, wzór 14])]

$$\eta_t(s) \leq a_0 t s^{-1-\alpha} e^{-ts^{-\alpha}} \quad s, t > 0. \quad (1.3.14)$$

(vi) [oszacowanie dolne (zob. [14, wzór 10])]

$$\eta_t(u) \geq a_3 t u^{-1-\alpha} \quad \text{dla } t > 0, u > u_0 t^{1/\alpha}. \quad (1.3.15)$$

1.3.3. Subordynatory relatywistyczne α -stabilne

Zacniemy od poniższej definicji.

Definicja 1.3.2 Niech $\alpha \in (0, 1)$ i $m > 0$. Subordynator S nazwiemy relatywistycznym α -stabilnym z masą m jeśli jego wykładnik Laplace'a jest postaci:

$$\phi(\lambda) = (\lambda + m^{1/\alpha})^\alpha - m, \quad \lambda > 0. \quad (1.3.16)$$

Znów, całkowanie przez części daje:

$$(\lambda + m^{1/\alpha})^\alpha - m = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) e^{-m^{1/\alpha} x} x^{-1-\alpha} dx,$$

i w tym przypadku miarą Lévy'ego będzie

$$\nu(dx) = \alpha/\Gamma(1-\alpha) e^{-m^{1/\alpha} x} x^{-1-\alpha} dx.$$

Oznaczając przez $\eta_{t,m}(\cdot)$ gęstość subordynatora relatywistycznego α -stabilnego, otrzymujemy (zob [61, p. 3]):

$$\eta_{t,m}(s) := e^{-m^{1/\alpha} s + mt} \eta_t(s), \quad m > 0, \quad s, t > 0. \quad (1.3.17)$$

W istocie, używając (1.3.9) po przeliczeniu mamy, że transformata Laplace'a $\eta_{t,m}$ jest postacią zadanej w (1.3.16):

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} \eta_{t,m}(s) ds = e^{mt} \int_0^\infty e^{-(\lambda+m^{1/\alpha})s} \eta_t(s) ds = e^{-t[(\lambda+m^{1/\alpha})^\alpha - m]}.$$

1.3.4. Procesy podporządkowane na d -zbiorze

Założmy, że $(Z_t, \mathbf{P}_x)_{x \in F, t \geq 0}$ jest fraktalną dyfuzją ułamkową na (F, ρ, μ) i niech S będzie subordynatorem niezależnym od Z . Definiujemy nowy proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ jako:

$$X_t := Z_{S_t}, \quad t \geq 0. \quad (1.3.18)$$

Proces X nazywamy *podporządkowanym (subordynowanym) ruchem Browna na F* (via subordynator S). Proces X jest procesem Markowa, z trajektoriami càdlàg i gęstością przejścia daną przez wyrażenie:

$$p(t, x, y) = \int_0^\infty g(s, x, y) \eta_t(ds). \quad (1.3.19)$$

Jeżeli $S = (S_t, \mathbf{P})_{t \geq 0}$ jest subordynatorem α -stabilnym, $\alpha \in (0, 1)$, to X_t zadane przez (1.3.18) nazwiemy procesem β -stabilnym, gdzie $\beta = \alpha d_w \in (0, d_w)$. Gęstość przejścia tego procesu będziemy oznaczać przez $p_S(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Jeżeli natomiast $S = (S_t, \mathbf{P})_{t \geq 0}$ jest relatywistycznym subordynatorem α -stabilnym, to uzyskany proces nazwiemy *relatywistycznym procesem β -stabilnym* (z parametrem $\beta = \alpha d_w$). Z (1.3.17) dostajemy, że jego gęstość przejścia jest dana wzorem:

$$p_R(t, x, y) = e^{mt} \int_0^\infty g(s, x, y) e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \quad (1.3.20)$$

gdzie $\eta_t(\cdot)$ jest gęstością zwykłego subordynatora α -stabilnego.

Rozdział 2

Oszacowania gęstości przejścia dla procesu relatywistycznego na d -zbiorach

W rozdziale tym będziemy pracować na przestrzeni metrycznej z miarą (F, ρ, μ) , jak w rozdziale 1.1. Rozdział oparty jest na pracy [4].

2.1. Znane oszacowania dla procesu stabilnego na d -zbiorach

Zanim przejdziemy do oszacowań dla procesu relatywistycznego, przytoczymy znane oszacowania dla procesów stabilnych. Będziemy ich używać dalej w tym rozdziale.

Właściwości procesu αd_w -stabilnych na d -zbiorach były badane m.in. w pracach [14, 65]. W szczególności Autorzy uzyskali oszacowanie gęstości przejścia ww. procesu, a mianowicie, jeśli na d -zbiorze F mamy zadaną ułamkową dyfuzję, $(Z_t, \mathbf{P}_x)_{x \in F, t \geq 0}$, dla której $d_w = d_J$, a $(X_t)_{t \geq 0}$ jest procesem subordynowanym przez subordynator α -stabilny, $\alpha \in (0, 1)$, to jego gęstość przejścia spełnia warunek:

$$C_{S.1} t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha d_w}}}{|x-y|} \right)^{d+\alpha d_w} \wedge 1 \right) \leq p_S(t, x, y) \leq C_{S.2} t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha d_w}}}{|x-y|} \right)^{d+\alpha d_w} \wedge 1 \right), \quad x, y \in F, t > 0, \quad (2.1.1)$$

dla pewnych stałych $C_{S.1}, C_{S.2} > 0$. Zwracamy uwagę, że jest to proces αd_w -stabilny na F zgodnie z oznaczeniami Rozdziału 1.3.4.

W przypadku $d_w \neq d_J$ powyższy wzór pozostaje taki sam, a zmiany w dowodzie są kosmetyczne (inne stałe).

Analogiczny rezultat został uzyskany również w [18], jednakże konstrukcja procesu w tamtej pracy jest inna. Autorzy wychodzą od zadania miary tzw. "intensywności skoków" procesu, następnie na podstawie tej miary identyfikują formę Dirichleta procesu, a w końcu wykazują istnienie gęstości przejścia i uzyskują oszacowanie analogiczne do (2.1.1). Więcej na temat tego sposobu rozumowania w [18, 19]

2.2. Oszacowanie dla gęstości przejścia relatywistycznego procesu αd_w -stabilnego

Udowodnimy w nim twierdzenia dotyczące oszacowania funkcji gęstości przejścia relatywistycznego procesu αd_w -stabilnego na przestrzeni metrycznej (F, μ, ρ) . Udowodnimy to osobno dla przypadku, kiedy $t \geq 1$ oraz $t < 1$. Zaczniemy od sytuacji gdy $t \geq 1$. Uzyskane oszacowania są analogiczne do tych w \mathbb{R}^d z [18], z odpowiednio dostosowanymi parametrami.

Twierdzenie 2.2.1 *Niech (X_t) będzie relatywistycznym procesem αd_w -stabilnym na F , z funkcją gęstości przejścia $p(\cdot, \cdot, \cdot)$ zadaną przez (1.3.20). Niech $t \geq 1$. Wtedy istnieją stałe $C_{R.i} = C_{R.i}(\alpha) > 0$, $i = 1, \dots, 4$ takie, że dla $x, y \in F$*

$$C_{R.1} t^{-\frac{d}{d_w}} e^{-C_{R.2} \min\left(\rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}\right)} \leq p_R(t, x, y) \leq C_{R.3} t^{-\frac{d}{d_w}} e^{-C_{R.4} \min\left(\rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}\right)}. \quad (2.2.1)$$

Dowód.

Przypomnijmy, że $g(t, x, y)$ spełnia (1.2.1).

I. OSZACOWANIE DOLNE. Najpierw pokażemy, że istnieją stałe $C_{R.1}(\alpha), C_{R.2}(\alpha) > 0$ takie, że dla dowolnych $x, y \in F$

$$p_R(t, x, y) \geq C_{R.1} t^{-\frac{d}{d_w}} e^{-C_{R.2} \min\left(\rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}\right)}. \quad (2.2.2)$$

Skoro

$$p_R(t, x, y) = e^{mt} \int_0^\infty g(s, x, y) e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds,$$

to używając subgaussowskiego oszacowania na g , (1.2.1), i skalowania η_t , (1.3.10), dostajemy

$$p_R(t, x, y) \geq C_{g.1} e^{mt} \int_0^\infty s^{-d/d_w} e^{-C_{g.2} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} s} t^{-\frac{1}{\alpha}} \eta_1(t^{-\frac{1}{\alpha}} s) ds.$$

Podstawienie $s = t^{\frac{1}{\alpha}}u$ prowadzi do:

$$p_R(t, x, y) \geq C_{g,1} e^{mt} \int_0^\infty (t^{\frac{1}{\alpha}}u)^{-d/d_w} e^{-C_{g,2}(t^{\frac{1}{\alpha}}u)^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}}u} \eta_1(u) du. \quad (2.2.3)$$

Następnie, z (1.3.11) wynika istnienie $\delta(\alpha) > 0$ i $c_1 > 0$ takich, że dla dowolnego $s \leq \delta(\alpha)$ zachodzi:

$$\eta_1(s) \geq c_1 s^{-a_1} e^{-a_2 s^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}. \quad (2.2.4)$$

Zauważmy również, że z (1.3.12) wynika istnienie stałych $u_0(\alpha) > 0$ i $c_2 > 0$ takich, że dla dowolnego $s \geq u_0(\alpha)$ zachodzi:

$$\eta_1(s) \geq c_2 s^{-1-\alpha}. \quad (2.2.5)$$

PRZYPADK 1. Załóżmy, że $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t$, wtedy

$$\min \left(\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(\frac{\rho(x, y)}{t^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \right) = \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}.$$

• Jeśli $t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \leq \delta(\alpha)$, to wtedy zawężamy przedział całkowania w (2.2.3) do przedziału $(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}, t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}})$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq C_{g,1} e^{mt} \int_{\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} (t^{\frac{1}{\alpha}}u)^{-d/d_w} e^{-C_{g,2}(t^{\frac{1}{\alpha}}u)^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}}u} \eta_1(u) du \\ &\geq c_3 e^{mt} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} e^{-c_4 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \int_{\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \eta_1(u) du, \end{aligned}$$

gdzie c_3, c_4 – pewne stałe. Jako że funkcje $f_1(s) = s^{-d/d_w}$, $f_2(s) = e^{-m^{1/\alpha} t^{1/\alpha} s}$ są malejące, z kolei funkcja $f_3(s) = e^{-C_{g,2} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}$, $s \in (0, \infty)$ jest rosnąca. Korzystając z (2.2.4) oraz zmieniając kolejność całkowania dostajemy:

$$p_R(t, x, y) \geq c_5 e^{mt} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} e^{-c_4 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} (t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}})^{-a_1+1} e^{-a_2 t^{\frac{1}{1-\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-\frac{\alpha}{1-\alpha})}}$$

dla pewnej stałej $c_5 > 0$. Zwróćmy uwagę, że dla $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t$ mamy

$$e^{-a_2 t^{\frac{1}{1-\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-\frac{\alpha}{1-\alpha})}} \geq e^{-a_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(\frac{1}{1-\alpha})}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-\frac{\alpha}{1-\alpha})} = e^{-a_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}},$$

a zatem

$$p_R(t, x, y) \geq c_6 t^{-d/d_w} \left(t^{d/d_w + a_1/\alpha - 1/\alpha} e^{mt} \right) \left(\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w - a_1 + 1)} e^{-a_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \right).$$

Łatwo pokazać, że istnieją stałe $c_7, c_8 > 0$ niezależne od x, y, t (pamiętajmy, że $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t \geq 1$) takie że

$$t^{d/d_w + a_1/\alpha - 1/\alpha} e^{mt} \geq c_7 \text{ i } \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w - a_1 + 1)} e^{-a_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \geq c_8 e^{-2a_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}.$$

Tak się dzieje, ponieważ dla $p \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\inf_{\xi \geq 1} \xi^p e^{\mu \xi} = c(p, \mu) > 0. \quad (2.2.6)$$

A zatem pokazaliśmy, że istnieje $c_9 > 0$, dla którego

$$p_R(t, x, y) \geq c_8 t^{-d/d_w} e^{-c_9 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \quad \text{dla} \quad \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t \geq 1. \quad (2.2.7)$$

• Z drugiej strony, jeśli $t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} > \delta(\alpha)$, wtedy również $\frac{u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} > u_0(\alpha)$.

Teraz zawężamy przedział całkowania w (2.2.3) do przedziału

$$\left(\frac{u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}, 2 \frac{u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \right).$$

Podobnie jak poprzednio, daje to:

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq C_{g,1} e^{mt} \int_{\frac{u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\frac{2u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} (t^{\frac{1}{\alpha}} u)^{-d/d_w} e^{-C_{g,2} (t^{\frac{1}{\alpha}} u)^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}} u} \eta_1(u) du \\ &\geq c_{10} e^{mt} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} e^{-c_{11} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \int_{\frac{u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\frac{2u_0(\alpha)}{\delta(\alpha)} t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \eta_1(u) du. \end{aligned}$$

Z (2.2.5) wynika, że

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq c_{10} e^{mt} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} e^{-c_{11} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} (t^{-\frac{1}{\alpha}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}})^{-\alpha} \\ &= c_{10} t^{-d/d_w} \left(t^{d/d_w + 1} e^{mt} \right) \left(\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w - \alpha)} e^{-c_{11} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \right). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (2.2.6) dostajemy

$$p_R(t, x, y) \geq c_{10} t^{-d/d_w} e^{-c_{12} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}, \quad (2.2.8)$$

czyli potrzebne oszacowanie.

PRZYPADK 2. Załóżmy, że $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} < t$, wtedy

$$\min \left(\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(\frac{\rho(x, y)}{t^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \right) = \left(\frac{\rho(x, y)}{t^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}.$$

Żeby otrzymać oszacowanie (2.2.2) wystarczy pokazać, że istnieją stałe $L_1 = L_1(\alpha, m) > 0$, $L_2 = L_2(\alpha, m) > 0$, $L_1 < L_2$ takie, że

$$\int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \geq c_1 e^{-mt}, \text{ dla pewnego } c_1 = c_1(m, \alpha) > 0. \quad (2.2.9)$$

Istotnie, w takiej sytuacji mielibyśmy

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq C_{g,1} e^{mt} \int_{L_1 t}^{L_2 t} s^{-d/d_w} e^{-C_{g,2} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\geq c_2 e^{mt} t^{-d/d_w} e^{-c_3 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} \int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\geq c_2 t^{-d/d_w} e^{-c_4 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}. \end{aligned}$$

Teraz pokażemy, jak znaleźć stałe L_1 i L_2 . W tym celu będziemy wielokrotnie korzystać z tego, że dla procesu α -stabilnego zachodzi $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$. Dla dowolnych $0 < L_1 < L_2 < \infty$ możemy napisać

$$\begin{aligned} e^{-mt} &= \int_0^\infty e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &= \int_0^{L_1 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds + \int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds + \int_{L_2 t}^\infty e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Zwróćmy uwagę, że

$$\int_0^{L_1 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds = \int_0^{L_1 t} e^s e^{-(m^{1/\alpha}+1)s} \eta_t(s) ds \leq e^{L_1 t} e^{-t(m^{1/\alpha}+1)^\alpha}.$$

Niech $\delta_0(\alpha) > 0$ będzie zdefiniowane za pomocą $(m^{1/\alpha} + 1)^\alpha = m + \delta_0(\alpha)$. Ustalmy

$$L_1 := \frac{1}{2} \delta_0(\alpha).$$

Zatem

$$\int_0^{L_1 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \leq e^{-t(m+\frac{1}{2}\delta_0(\alpha))}. \quad (2.2.11)$$

Widzimy również, że dla dowolnych $L_2 > L_1$ zachodzi

$$\int_{L_2 t}^\infty e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \leq e^{-m^{1/\alpha} L_2 t} \int_{L_2 t}^\infty \eta_t(s) ds \leq e^{-m^{1/\alpha} L_2 t}. \quad (2.2.12)$$

Wstawiając (2.2.11) i (2.2.12) do (2.2.10) dostajemy:

$$\begin{aligned} \int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds &\geq e^{-mt} - e^{-t(m + \frac{1}{2} \delta_0(\alpha))} - e^{-m^{1/\alpha} L_2 t} \\ &= e^{-mt} (1 - e^{-\frac{1}{2} \delta_0(\alpha) t}) - e^{(m - m^{1/\alpha} L_2) t}. \end{aligned}$$

Dla dowolnego $L_2 > m^{1-1/\alpha}$ funkcja $t \mapsto (1 - e^{-\frac{1}{2} \delta_0(\alpha) t}) - e^{(m - m^{1/\alpha} L_2) t}$ jest rosnąca dla $t \geq 1$, stąd też

$$\int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \geq e^{-mt} (1 - e^{-\frac{1}{2} \delta_0(\alpha)} - e^{m - m^{1/\alpha} L_2})$$

i żeby dostać (2.2.9), wystarczy znaleźć takie $L_2 > \max(L_1, m^{1-1/\alpha})$ dla którego

$$1 - e^{-\frac{1}{2} \delta_0(\alpha)} - e^{m - m^{1/\alpha} L_2} > 0.$$

Jest to równoważne warunkowi $L_2 > \frac{m - \ln(1 - e^{-\frac{1}{2} \delta_0(\alpha)})}{m^{1/\alpha}}$ a zatem ostatecznie wybieramy

$$L_2 := \max(L_1, m^{1-1/\alpha}, \frac{m - \ln(1 - e^{-\frac{1}{2} \delta_0(\alpha)})}{m^{1/\alpha}}) + 1.$$

Oszacowanie (2.2.2) wynika z (2.2.7) oraz (2.2.8).

II. OSZACOWANIE GÓRNE.

Udowodnimy teraz, że istnieją stałe $C_{R,3} = C_{R,3}(\alpha, m), C_{R,4} = C_{R,4}(\alpha, m) > 0$ takie, że dla dowolnych $x, y \in F, t > 1$ zachodzi

$$p_R(t, x, y) \leq C_{R,3} t^{-\frac{d}{d_w}} e^{-C_{R,4} \min\left(\rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}\right)}. \quad (2.2.13)$$

Używając (1.2.1) możemy zapisać, że

$$p_R(t, x, y) \leq e^{mt} \int_0^\infty C_{g,3} s^{-d/d_w} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds. \quad (2.2.14)$$

PRZYPADEK $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t$. Oznaczmy funkcję podcałkową w (2.2.14) przez $h(s)$ i rozważmy funkcję

$$f(s) = s^{-d/d_w} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}, \quad s \in (0, \infty),$$

tak, żeby $h(s) = C_{g,3} f(s) e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s)$. Mamy:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0.$$

Badając jej pochodną możemy zauważyć, że funkcja $f(s)$ jest rosnąca dla $s \in (0, c_1 \rho(x, y)^{d_w})$, i malejąca dla $s \in (c_1 \rho(x, y)^{d_w}, \infty)$, dla pewnej stałej $c_1 > 0$. Ustalmy

$$c_2 = \max(2c_1, m^{1-1/\alpha} + 1).$$

Dzielimy całkę (2.2.14) w następujący sposób:

$$p_R(t, x, y) \leq e^{mt} \left(\int_0^{c_1 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} h(s) ds + \int_{c_1 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} h(s) ds + \int_{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} h(s) ds \right).$$

Biorąc pod uwagę monotoniczność funkcji $s \mapsto f(s)$, $s \mapsto s^{-d/d_w}$, $s \mapsto e^{-C_{g,4}s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}$, pamiętając o (1.3.1) i korzystając z warunku $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t$, dostajemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{c_1 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} h(s) ds &\leq c_3 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} e^{-c_4 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \int_0^{c_1 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\leq c_5 t^{-d/d_w} e^{-mt} e^{-c_4 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}; \\ \int_{c_1 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} h(s) ds &\leq c_3 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} e^{-c_6 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \int_{c_1 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\leq c_7 t^{-d/d_w} e^{-mt} e^{-c_8 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę oszacujemy w ten sposób, pamiętając, że $\int_0^{\infty} \eta_t(s) ds = 1$:

$$\begin{aligned} &\int_{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} C_{g,3} s^{-d/d_w} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\leq c_9 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w)} \int_{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\leq c_9 t^{-d/d_w} e^{-m^{1/\alpha}(m^{1-1/\alpha}+1)\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \int_{c_2 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} \eta_t(s) ds \\ &\leq c_9 t^{-d/d_w} e^{-m \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} e^{-m^{1/\alpha} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \\ &\leq c_9 t^{-d/d_w} e^{-mt} e^{-m^{1/\alpha} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \end{aligned}$$

czyli otrzymujemy, że dla $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} \geq t$ oszacowanie (2.2.13) zachodzi.

PRZYPADEK $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} < t$. Na początek zdefiniujemy kolejne stałe:

$$k_1 = (2m)^{-1/\alpha}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= 1/2 \cdot \alpha \cdot m^{1-1/\alpha} \\
k_2 &= \min(1/2k_3, k_1) \\
k_4 &= 2 \max(k_3, m^{1-1/\alpha}).
\end{aligned}$$

dzięki temu $k_2 \leq k_1$, $k_2 \leq k_3 t \leq k_4 t$. Używając funkcji $h(s)$ zdefiniowanej jak wyżej (funkcja podcałkowa we wzorze 2.2.14), możemy napisać

$$p_R(t, x, y) \leq e^{mt} \left(\int_0^{k_1} h(s) ds + \int_{k_2}^{k_3 t} h(s) ds + \int_{k_3 t}^{k_4 t} h(s) ds + \int_{k_4 t}^{\infty} h(s) ds \right). \quad (2.2.15)$$

Zauważmy, że skoro $\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}} < t$, to $k_4 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} = k_4 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J} \cdot \frac{d_J}{d_J-1}} \leq k_4 t$. Funkcja $t \mapsto e^{-C_{g,4} t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}$ jest niemalejąca, zatem możemy oszacować ostatnią całkę w (2.2.15) następująco:

$$\begin{aligned}
\int_{k_4 t}^{\infty} C_{g,3} s^{-d/d_w} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds &\leq c_1 t^{-d/d_w} \int_{k_4 t}^{\infty} e^{-1/2m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\
&\leq c_1 t^{-d/d_w} e^{-mt} e^{-c_2 m^{1/\alpha} t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} \int_{k_4 t}^{\infty} \eta_t(s) ds \\
&\leq c_1 e^{-mt} t^{-d/d_w} e^{-c_2 m^{1/\alpha} t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}.
\end{aligned}$$

Poprzednia całka:

$$\begin{aligned}
\int_{k_3 t}^{k_4 t} C_{g,3} s^{-d/d_w} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds &\leq c_3 t^{-d/d_w} e^{-c_4 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} \int_{k_3 t}^{k_4 t} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\
&\leq c_3 t^{-d/d_w} e^{-c_4 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-mt}.
\end{aligned}$$

Dla całki na przedziale $[0, k_1]$ używamy (1.3.14) i dostajemy:

$$\int_0^{k_1} h(s) ds \leq c_5 e^{-C_{g,4} (k_1 t)^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} \int_0^{k_1} s^{-d/d_w} e^{-m^{1/\alpha} s} t s^{-1-\alpha} e^{-1/2ts^{-\alpha}} e^{-1/2ts^{-\alpha}} ds.$$

Funkcja $s \mapsto e^{-1/2ts^{-\alpha}}$ jest rosnąca, tak więc otrzymujemy (pamiętając o definicji k_1):

$$\int_0^{k_1} h(s) ds \leq c_5 e^{-mt} t^{-d/d_w} e^{-c_6 t^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} \int_0^{k_1} s^{-d/d_w-1-\alpha} \cdot 1 \cdot t^{d/d_w+1} e^{-1/2ts^{-\alpha}} ds,$$

Z kolei dla funkcji $g_s(t) = t^{d/d_w+1} e^{-1/2ts^{-\alpha}}$, $t \geq 1$, zachodzi:

$$g_s(1) = e^{-1/2s^{-\alpha}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_s(t) = 0,$$

a ponadto $g'_s(t) = 0 \iff t = c_7 s^\alpha$ z pewną stałą $c_7 > 0$. Funkcja g_s jest rosnąca na lewo od tej wartości i malejąca na prawo od niej. Zatem jeżeli $c_7 s^\alpha < 1$, to $\sup_{t \geq 1} g_s(t) = g_s(1) =$

$e^{-1/2s^{-\alpha}}$, a z drugiej strony jeśli $c_7s^\alpha \geq 1$, to $\sup_{t \geq 1} g_s(t) = g_s(c_7s^\alpha) = c_8s^{\alpha d/d_w + \alpha}$.

A zatem dla dowolnego $t \geq 1$,

$$\int_0^{k_1} s^{-d/d_w - 1 - \alpha} t^{d/d_w + 1} e^{-1/2ts^{-\alpha}} ds \leq \int_0^{\min(c_7^{-1/\alpha}, k_1)} s^{-d/d_w - 1 - \alpha} e^{-1/2s^{-\alpha}} ds + \int_{\min(c_7^{-1/\alpha}, k_1)}^{k_1} c_8 s^{-d/d_w(1-\alpha) - 1} ds =: U_1 < \infty.$$

Otrzymaliśmy

$$\int_0^{k_1} h(s) ds \leq c_9 e^{-mt} t^{-d/d_w} e^{-c_6 t^{\frac{-1}{d_J - 1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}}.$$

Na sam koniec oszacujemy całkę $\int_{k_2}^{k_3 t} h(s) ds$. Oszacowanie to wymaga trochę dokładniejszej analizy. Zaczniemy od tego, że zachodzi:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\epsilon}{(1 + 3\epsilon)^{1/\alpha} - 1} = \frac{2}{3}\alpha > \frac{1}{2}\alpha = m^{1/\alpha - 1} k_3,$$

zatem istnieje stała $\epsilon_0(\alpha) > 0$ taka, że

$$\frac{2\epsilon_0(\alpha)}{(1 + 3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha} - 1} \geq m^{1/\alpha - 1} k_3. \quad (2.2.16)$$

Dalej:

$$e^{mt} \int_{k_2}^{k_3 t} h(s) ds \leq c_{10} t^{-d/d_w} e^{-c_{11} t^{\frac{-1}{d_J - 1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}} \int_{k_2}^{k_3 t} t^{d/d_w} e^{mt} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds.$$

Żeby udowodnić (2.2.13) wystarczy pokazać, że

$$I_0 := \int_{k_2}^{k_3 t} t^{d/d_w} e^{mt} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \leq C_{I,0},$$

dla pewnej stałej $C_{I,0} > 0$, niezależnej od $t \geq 1$. Najpierw wybierzmy stałą $C_{I,1} > 0$ taką, że dla $t \geq 1$ zachodzi

$$t^{d/d_w} e^{mt} \leq C_{I,1} e^{(1 + \epsilon_0(\alpha))mt},$$

gdzie $\epsilon_0(\alpha)$ było zdefiniowane w (2.2.16).

Zapiszmy wyrażenie $e^{-m^{1/\alpha} s}$ trochę inaczej, a mianowicie:

$$e^{-m^{1/\alpha} s} = e^{-(1 + 3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha} m^{1/\alpha} s} e^{[(1 + 3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha} - 1] m^{1/\alpha} s}.$$

Jako, że funkcja $s \mapsto e^{[(1 + 3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha} - 1] m^{1/\alpha} s}$ jest rosnącą, mamy

$$I_0 \leq C_{I,1} e^{(1 + \epsilon_0(\alpha))mt} e^{[(1 + 3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha} - 1] m^{1/\alpha} (k_3 t)} \int_{k_2}^{k_3 t} e^{-(1 + 3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha} m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds$$

i korzystając (1.3.1) dostajemy:

$$I_0 \leq C_{I.1} e^{(1+\epsilon_0(\alpha))mt} e^{[(1+3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha}-1]m^{1/\alpha}(k_3t)} e^{-t(1+3\epsilon_0(\alpha))m}$$

a zatem

$$I_0 \leq C_{I.1} e^{-2\epsilon_0(\alpha)mt} e^{[(1+3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha}-1]m^{1/\alpha}k_3t}$$

i żeby zakończyć dowód wystarczy pokazać że wykładnik jest niedodatni, tzn.

$$2\epsilon_0(\alpha)m \geq [(1+3\epsilon_0(\alpha))^{1/\alpha}-1]m^{1/\alpha}k_3.$$

Jednakże wynika to z (2.2.16). Udowodniliśmy właśnie, że zachodzi (2.2.13), tak więc dowód (2.2.1) jest kompletny. \square

Teraz pokażemy oszacowania dla małych czasów. W przypadku gdy $\rho(x, y) < 1$ wynik jest podobny do oszacowania dla α -stabilnego procesu w [14]. Kiedy $\rho(x, y) \geq 1$, wtedy ograniczenie będzie miało postać wykładniczą. Żeby uprościć rachunki, za [14] wprowadźmy oznaczenie $d_\alpha = d + \alpha d_w$.

Twierdzenie 2.2.2 *Niech (X_t) będzie relatywistycznym procesem stabilnym na F , z funkcją gęstości $p_R(\cdot, \cdot, \cdot)$ zadaną przez (1.3.20). Niech $t \in (0, 1)$. Wtedy istnieją stałe $C_{R.i} = C_{R.i}(\alpha, m) > 0$, $i = 5, \dots, 10$ takie, że:*

(1) dla $\rho(x, y) \geq 1$

$$C_{R.5} t e^{-C_{R.6} \rho(x, y) \frac{d_w}{d}} \leq p_R(t, x, y) \leq C_{R.7} t e^{-C_{R.8} \rho(x, y) \frac{d_w}{d}}, \quad (2.2.17)$$

(2) dla $\rho(x, y) < 1$

$$C_{R.9} \min \left(\frac{t}{\rho(x, y)^{d_\alpha}}, t^{-d/(\alpha d_w)} \right) \leq p_R(t, x, y) \leq C_{R.10} \min \left(\frac{t}{\rho(x, y)^{d_\alpha}}, t^{-d/(\alpha d_w)} \right). \quad (2.2.18)$$

Dowód.

(1) PRZYPADEK $\rho(x, y) \geq 1$.

OSZACOWANIE DOLNE. Z (1.3.10) oraz (1.3.12), mamy, że:

$$\eta_t(u) \geq a_3 t u^{-1-\alpha} \quad \text{dla} \quad u > u_0 t^{1/\alpha}$$

gdzie u_0 jest określone w (2.2.5). Zatem dostajemy:

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq C_{g,1} e^{mt} \int_{u_0 t^{1/\alpha}}^{\infty} s^{-d/d_w} e^{-C_{g,2} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\geq c_1 t \int_{u_0 t^{1/\alpha}}^{\infty} s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-C_{g,2} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} s} ds. \end{aligned}$$

Dla $t \in (0, 1)$, $\rho(x, y) \geq 1$ zachodzi $u_0 t^{1/\alpha} < u_0 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}$, zatem

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq c_1 t \int_{u_0 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-C_{g,2} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} s} ds \\ &\geq c_1 t e^{-C_{g,2} (u_0 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}})^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \int_{u_0 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-m^{1/\alpha} s} ds \\ &\geq c_2 t e^{-c_3 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \int_{u_0 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} e^{-c_4 s} ds \\ &= c_5 t e^{-c_6 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}. \end{aligned}$$

OSZACOWANIE GÓRNE. Korzystając z (1.3.14) mamy:

$$p_R(t, x, y) \leq c_7 t \int_0^{\infty} s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} e^{-m^{1/\alpha} s} ds.$$

Funkcja $s \mapsto s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}$ jest rosnąca dla $s \in (0, c_8 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}})$, zatem:

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\leq c_7 t \left(\int_0^{c_8 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-C_{g,4} s^{\frac{-1}{d_J-1}}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}} ds + \int_{c_8 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} s^{-d/d_w-1-\alpha} e^{-m^{1/\alpha} s} ds \right) \\ &\leq c_9 t \left(\rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w-\alpha)} e^{-c' \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} + \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}(-d/d_w-1-\alpha)} \int_{c_8 \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}}^{\infty} e^{-m^{1/\alpha} s} ds \right) \\ &\leq c_{10} t e^{-c_{11} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \end{aligned}$$

i dowód (2.2.17) jest zakończony.

(2) PRZYPADEK $\rho(x, y) < 1$.

OSZACOWANIE GÓRNE. Mamy

$$p_R(t, x, y) = e^{mt} \int_0^{\infty} g(s, x, y) e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \leq c_1 \int_0^{\infty} g(s, x, y) \eta_t(s) ds,$$

czyli otrzymaliśmy gęstość przejścia procesu αd_w -stabilnego, a zatem z twierdzenia (3.1) w [14] dostajemy:

$$p_R(t, x, y) \leq C_{R.10} \min(t\rho(x, y)^{-d_\alpha}, t^{-\frac{d}{\alpha d_w}}).$$

OGRANICZENIE DOLNE. Zauważmy, że:

$$t\rho(x, y)^{-d_\alpha} \leq t^{-\frac{d}{\alpha d_w}} \iff t^{1/\alpha} \leq \rho(x, y)^{d_w}.$$

- Jeśli $t^{1/\alpha} \leq \rho(x, y)^{d_w}$, to $u_0 t^{1/\alpha} \leq u_0 \rho(x, y)^{d_w}$ i dalej

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq e^{mt} \int_{u_0 \rho(x, y)^{d_w}}^{2u_0 \rho(x, y)^{d_w}} C_{g.1} s^{-d/d_w} e^{-C_{g.2} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\geq c_1 \rho(x, y)^{-d} \int_{u_0 \rho(x, y)^{d_w}}^{2u_0 \rho(x, y)^{d_w}} t s^{-1-\alpha} ds \\ &\geq c_2 t \rho(x, y)^{-d_\alpha}. \end{aligned}$$

- Jeśli $t^{1/\alpha} > \rho(x, y)^{d_w}$, to

$$\begin{aligned} e^{-C_{g.2} s^{\frac{-1}{d_J-1}} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} &= e^{-C_{g.2} s^{\frac{-1}{d_J-1}} (\rho(x, y)^{d_w})^{\frac{1}{d_J-1}}} \\ &> e^{-C_{g.2} s^{\frac{-1}{d_J-1}} (t^{1/\alpha})^{\frac{1}{d_J-1}}}, \end{aligned}$$

tak więc

$$\begin{aligned} p_R(t, x, y) &\geq e^{mt} \int_{u_0 t^{1/\alpha}}^{2u_0 t^{1/\alpha}} C_{g.1} s^{-d/d_w} e^{-C_{g.2} s^{\frac{-1}{d_J-1}} (t^{1/\alpha})^{\frac{1}{d_J-1}}} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\geq c_3 t^{-\frac{d}{\alpha d_w}} \int_{u_0 t^{1/\alpha}}^{2u_0 t^{1/\alpha}} t s^{-1-\alpha} ds \\ &\geq c_4 t^{-\frac{d}{\alpha d_w}} \end{aligned}$$

i dowód jest skończony. □

2.3. Forma Dirichleta dla procesów Markowa

Zarysujemy teraz temat form Dirichleta na podstawie [15]. Bardziej szczegółowe informacje w tym zakresie Czytelnik znajdzie w książce [27].

Niech $p(t, x, y)$ będzie gęstością przejścia symetrycznego procesu Markowa (X_t) na (F, ρ, μ) , gdzie (F, ρ, μ) jest daną przestrzenią metryczną z miarą μ .

Dla $f \in L^2(F, \mu)$ definiujemy

$$\mathcal{E}_t(f, f) = \frac{1}{2t} \int_F \int_F (f(x) - f(y))^2 p(t, x, y) \mu(dx) \mu(dy) = \frac{1}{t} \langle T_t f - f, f \rangle_{L^2(F, \mu)}.$$

Używając reprezentacji spektralnej dostajemy, że dla dowolnej funkcji $f \in L^2(F, \mu)$ funkcja $t \mapsto \mathcal{E}_t(f, f)$ jest nierosnąca dla $t > 0$, zatem możemy przyjąć:

$$\mathcal{E}(f, f) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{E}_t(f, f).$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{f \in L^2(F, \mu) : \mathcal{E}(f, f) < \infty\}.$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ nazywamy *formą Dirichleta procesu* (X_t) . W szczególności dla symetrycznego αd_w -stabilnego procesu na F , $\alpha \in (0, 1)$ (zobacz [65]),

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}^{\text{stab}}) = \text{Lip}\left(\frac{\alpha d_w}{2}, 2, 2, F\right) = \left\{f \in L^2(F, \mu) : \int_F \int_F \frac{(f(x) - f(y))^2}{\rho(x, y)^{d + \alpha d_w}} \mu(dx) \mu(dy) < \infty\right\},$$

oraz

$$\mathcal{E}^{\text{stab}}(f, f) \asymp \int_F \int_F \frac{(f(x) - f(y))^2}{\rho(x, y)^{d + \alpha d_w}} \mu(dx) \mu(dy).$$

2.3.1. Forma Dirichleta relatywistycznego procesu stabilnego

Używając oszacowań na gęstość przejścia relatywistycznego procesu stabilnego, na (F, ρ, μ) wyznaczymy teraz dziedzinę jego formy Dirichleta. Podamy też jej postać.

Twierdzenie 2.3.1 *Niech $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ będzie formą Dirichleta procesu relatywistycznego α -stabilnego na F , z funkcją gęstości przejścia $p_R(\cdot, \cdot, \cdot)$ zadaną przez (1.3.20). Wtedy*

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \text{Lip}\left(\frac{\alpha d_w}{2}, 2, 2, F\right)$$

oraz

$$\int_F \int_F (f(x) - f(y))^2 J_1(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \leq \mathcal{E}(f, f) \leq \int_F \int_F (f(x) - f(y))^2 J_2(x, y) \mu(dx) \mu(dy)$$

gdzie

$$J_i(x, y) = K_{i,1} \left(\rho(x, y)^{-d_\alpha} \mathbf{1}_{\{\rho(x, y) < 1\}} + e^{-K_{i,2} \rho(x, y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mathbf{1}_{\{\rho(x, y) \geq 1\}} \right),$$

dla pewnych stałych $K_{i,1}, K_{i,2} > 0$, $i = 1, 2$.

Dowód. Najpierw zwróćmy uwagę, że

$$\sup_{t < 1} \frac{1}{2t} \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} (f(x) - f(y))^2 p(t, x, y) \mu(dx) \mu(dy) \leq C_D \|f\|_{L^2(F, \mu)}^2,$$

zarówno dla procesu α -stabilnego jak i relatywistycznego α -stabilnego.

Istotnie, dla procesu relatywistycznego, ponieważ $(f(x) - f(y))^2 \leq 2(f^2(x) + f^2(y))$, to z symetrii i twierdzenia Fubiego-Tonellego mamy, że dla dowolnej funkcji $f \in L^2(F, \mu)$ i $t < 1$, na mocy oszacowań (2.2.17) zachodzi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2t} \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} (f(x) - f(y))^2 p(t, x, y) \mu(dx) \mu(dy) \\ & \leq 2C_{R.7} \int_F \int_{\{y: \rho(x,y) \geq 1\}} f^2(x) e^{-C_{R.8} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mu(dy) \mu(dx) \\ & = 2C_{R.7} \int_F f^2(x) \left(\int_{\rho(x,y) \geq 1} e^{-C_{R.8} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mu(dy) \right) \mu(dx). \end{aligned}$$

Ze względu na fakt, że μ jest d -miarą, możemy napisać:

$$\begin{aligned} \int_{\rho(x,y) \geq 1} e^{-C_{R.8} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mu(dy) & = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n \leq \rho(x,y) < 2^{n+1}} e^{-C_{R.8} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mu(dy) \\ & \leq c_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-C_{R.8} 2^{nd_w/d_J}} 2^{dn} < \infty. \end{aligned}$$

A zatem

$$\frac{1}{2t} \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} (f(x) - f(y))^2 p(t, x, y) \mu(dx) \mu(dy) \leq C_D \|f\|_{L^2(F, \mu)}^2.$$

W przypadku procesu α -stabilnego postępujemy podobnie, pamiętając o fakcie, że w tym przypadku oszacowanie (2.2.18) zachodzi również dla $\rho(x, y) > 1$.

Przypuśćmy teraz, że $f \in \text{Lip}(\alpha d_w/2, 2, 2, F) = \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\text{stab}})$. Dla procesu relatywistycznego mamy (zakładamy $t < 1$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(f, f) & = \frac{1}{2t} \int_F \int_F (f(x) - f(y))^2 p(t, x, y) \mu(dx) \mu(dy) \\ & = \frac{1}{2t} \left(\int \int_{\rho(x,y) < 1} \dots + \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} \dots \right) \\ & \leq \frac{1}{2t} \int \int_{\rho(x,y) < 1} (f(x) - f(y))^2 p(t, x, y) \mu(dx) \mu(dy) + C_D \|f\|_2^2 \\ & \leq \mathcal{E}^{\text{stab}}(f, f) + C_D \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

zatem $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Zawieranie w drugą stronę dowodzimy podobnie.

Wzory na $J_1(\cdot, \cdot)$, $J_2(\cdot, \cdot)$ są oczywistą konsekwencją (2.2.17) oraz (2.2.18). Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Jak wyżej, możemy zapisać

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t(f, f) &= \frac{1}{2t} \int \int_{\rho(x,y) < 1} \dots \mu(dx) \mu(dy) + \frac{1}{2t} \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} \dots \mu(dx) \mu(dy) \\ &=: \mathcal{E}_t^{(1)}(f, f) + \mathcal{E}_t^{(2)}(f, f).\end{aligned}$$

Z lematu Fatou i twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy, że:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_D} \int \int_{\rho(x,y) \leq 1} \frac{(f(x) - f(y))^2}{\rho(x,y)^{d_\alpha}} \mu(dx) \mu(dy) &\leq \liminf_{t \rightarrow 0} \mathcal{E}_t^{(1)}(f, f) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \mathcal{E}_t^{(1)}(f, f) \\ &\leq C_D \int \int_{\rho(x,y) \leq 1} \frac{(f(x) - f(y))^2}{\rho(x,y)^{d_\alpha}} \mu(dx) \mu(dy),\end{aligned}$$

dla pewnej stałej $C_D > 0$, a dla pozostałej części $\mathcal{E}_t^{(2)}$ mamy oczywiste oszacowania (pamiętając, że $t < 1$)

$$\begin{aligned}&C_{R.5} \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} (f(x) - f(y))^2 e^{-C_{R.6} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mu(dx) \mu(dy) \\ &\leq \mathcal{E}_t^{(2)}(f, f) \\ &\leq C_{R.7} \int \int_{\rho(x,y) \geq 1} (f(x) - f(y))^2 e^{-C_{R.8} \rho(x,y)^{\frac{d_w}{d_J}}} \mu(dx) \mu(dy).\end{aligned}$$

Dowód jest zakończony. □

Rozdział 3

Nieograniczone fraktale zagnieżdżone

W tym rozdziale wprowadzimy szczególną klasę d -zbiorów, tzw. fraktale zagnieżdżone (*ang. nested fractals*) na płaszczyźnie. Reszta naszych wyników będzie dotyczyć właśnie tych zbiorów.

3.1. Definicja

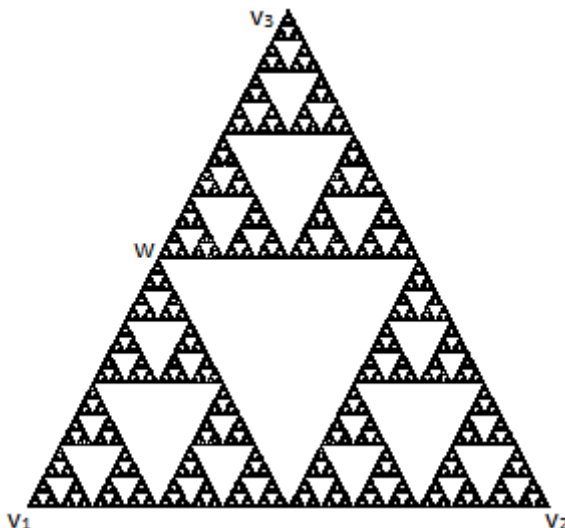
Ten podrozdział oparty jest na pracach [51, 57]. Rozważamy rodzinę podobieństw $\Psi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ z tą samą skalą podobieństwa $L > 1$ oraz wspólnym przekształceniem izometrycznym U , tzn. $\Psi_i(x) = (1/L)U(x) + \nu_i$, gdzie $\nu_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Będziemy zakładać, że $\nu_1 = 0$. Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony niepusty zwarty zbiór $\mathcal{K}^{(0)}$ taki, że $\mathcal{K}^{(0)} = \bigcup_{i=1}^N \Psi_i(\mathcal{K}^{(0)})$. Zbiór ten nazywamy *fraktalem generowanym przez układ* $(\Psi_i)_{i=1}^N$. Ponieważ $L > 1$, to każde podobieństwo ma dokładnie jeden punkt stały. Istnieje zatem co najwyżej N punktów stałych przekształceń Ψ_1, \dots, Ψ_N . Niech F_0 będzie zbiorem wszystkich punktów stałych przekształceń Ψ_1, \dots, Ψ_N .

Definicja 3.1.1 (Istotne punkty stałe) *Punkt stały $x \in F_0$ nazwiemy istotnym punktem stałym, jeśli istnieje inny punkt stały $y \in F_0$ i dwa różne przekształcenia Ψ_i, Ψ_j , $i, j \in \{1, \dots, N\}$, takie, że $\Psi_i(x) = \Psi_j(y)$. Zbiór wszystkich istotnych punktów stałych przekształceń Ψ_1, \dots, Ψ_N będziemy oznaczać przez $V_0^{(0)}$. Liczbę istotnych punktów stałych będziemy oznaczać przez k , $k = \#V_0^{(0)}$.*

Przykład 3.1.1 *Trójkąt Sierpińskiego (Rysunek 3.1) jest skonstruowany za pomocą 3 podobieństw*

$$\Psi_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad \Psi_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \Psi_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

o skali podobieństwa $L = 2$. Punkty stałe v_i odpowiadające Ψ_i , czyli wierzchołki trójkąta, dla $i = 1, 2, 3$ są istotnymi punktami stałymi. Na przykład wierzchołek, v_1 jest istotnym punktem stałym, ponieważ $\Psi_3(v_1) = \Psi_1(v_3) = w$.



Rysunek 3.1: Istotne punkty stałe w trójkącie Sierpińskiego.

Definicja 3.1.2 (Fraktal zagnieżdżony, ang. *nested fractal*) Fraktal $\mathcal{K}^{(0)}$ generowany przez układ $(\Psi_i)_{i=1}^N$ nazywamy fraktalem zagnieżdżonym (ang. nested fractal, SNF) jeśli następujące warunki są spełnione.

1. $\#V_0^{(0)} \geq 2$.
2. (Warunek zbioru otwartego) Istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^2$ taki, że dla $i \neq j$ mamy $\Psi_i(U) \cap \Psi_j(U) = \emptyset$ and $\bigcup_{i=1}^N \Psi_i(U) \subseteq U$.
3. (Zagnieżdżanie) $\Psi_i(\mathcal{K}^{(0)}) \cap \Psi_j(\mathcal{K}^{(0)}) = \Psi_i(V_0^{(0)}) \cap \Psi_j(V_0^{(0)})$ dla $i \neq j$.
4. (Symetria) Dla $x, y \in V_0^{(0)}$, niech $S_{x,y}$ będzie symetrią względem hiperpłaszczyzny symetrycznej odcinka $[x, y]$. Wtedy

$$\forall i \in \{1, \dots, M\} \forall x, y \in V_0^{(0)} \exists j \in \{1, \dots, M\} S_{x,y}(\Psi_i(V_0^{(0)})) = \Psi_j(V_0^{(0)}). \quad (3.1.1)$$

5. (Spójność) Na zbiorze $V_{-1}^{(0)} := \bigcup_i \Psi_i(V_0^{(0)})$ definiujemy strukturę grafu E_{-1} w następujący sposób:

$(x, y) \in E_{-1}$ wtedy i tylko wtedy jeśli $x, y \in \Psi_i(\mathcal{K}^{(0)})$ dla pewnego i .

Wymagamy, żeby graf $(V_{-1}^{(0)}, E_{-1})$ był spójny.

Niech $\mathcal{K}^{(0)}$ będzie danym fraktalem zagnieżdżonym. Definiujemy

$$\mathcal{K}^{(M)} = L^M \mathcal{K}^{(0)}, \quad M \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.2)$$

oraz

$$\mathcal{K}^{(\infty)} = \bigcup_{M=0}^{\infty} \mathcal{K}^{(M)}. \quad (3.1.3)$$

Zbiór $\mathcal{K}^{(\infty)}$ nazwiemy *nieograniczonym fraktalem zagnieżdżonym* (ang. *unbounded simple nested fractal, USNF*) (więcej [57]). Jego wymiar Hausdorffa wynosi $d = \frac{\ln N}{\ln L}$, a d -wymiarową miarę Hausdorffa o nośniku $\mathcal{K}^{(\infty)}$ będziemy oznaczać przez μ . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\mu(\mathcal{K}^{(0)}) = 1$.

Pozostałe oznaczenia zbierzemy w poniższej definicji.

Definicja 3.1.3 Niech $\mathcal{K}^{(\infty)}$ będzie nieograniczonym fraktalem zagnieżdżonym danym wzorem (3.1.3) oraz niech $M \in \mathbb{Z}$. Definiujemy:

(1) *M-sympleks*: dowolny zbiór $\Delta \subset \mathcal{K}^{(\infty)}$ postaci

$$\Delta = \mathcal{K}^{(M)} + \nu_{\Delta}, \quad (3.1.4)$$

gdzie $\nu_{\Delta} = \sum_{j=M+1}^J L^j \nu_{i_j}$, dla pewnego $J \geq M+1$, $\nu_{i_j} \in \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$. Zbiór wszystkich M -sympleksów oznaczamy przez $\mathcal{T}^{(M)}$.

(2) *Wierzchołki* $\mathcal{K}^{(M)}$:

$$V_M^{(M)} = V(\mathcal{K}^{(M)}) = L^M V_0^{(0)}.$$

(3) *Wierzchołki wszystkich 0-sympleksów wewnątrz USNF*:

$$V_0^{(\infty)} = \bigcup_{M=0}^{\infty} V_0^{(M)}.$$

(4) *Wierzchołki wszystkich M-sympleksów wewnątrz USNF*:

$$V_M^{(\infty)} = L^M V_0^{(\infty)}.$$

(5) Zbiór wszystkich M -sympleksów w $\mathcal{K}^{(M+1)}$:

$$\Delta_{M,i} = \mathcal{K}^{(M)} + L^M \nu_i \text{ dla } 1 \leq i \leq N.$$

Dla danego $M \in \mathbb{Z}_+$, będziemy potrzebować oszacowania na liczbę wierzchołków wszystkich 0-sympleksów wewnątrz $\mathcal{K}^{(M)}$, tzn. na moc zbioru $V_0^{(M)}$. Oznaczmy tę liczbę przez $k_0^{(M)}$. Istnieje stała $C_0 > 1$ taka, że

$$L^{Md} \leq \#V_0^{(M)} = k_0^{(M)} \leq C_0 L^{Md}. \quad (3.1.5)$$

Wprowadzimy jeszcze definicję metryki grafowej (zob. [39]).

Definicja 3.1.4 Dla $M \in \mathbb{Z}$ i $x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)}$ niech

$$d_M(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = y; \\ 1, & \text{jeśli istnieje sympleks } \Delta_M \in \mathcal{T}_M \text{ taki, że } x, y \in \Delta_M \text{ i } x \neq y; \\ n > 1, & \text{jeśli nie istnieje sympleks } \Delta_M \in \mathcal{T}_M \text{ taki, że } x, y \in \Delta_M \text{ i } n \text{ jest} \\ & \text{najmniejszą liczbą dla której istnieją sympleksy } \Delta_M^{(1)}, \dots, \Delta_M^{(n)} \in \mathcal{T}_M \\ & \text{takie, że } x \in \Delta_M^{(1)}, y \in \Delta_M^{(n)} \text{ i } \Delta_M^{(i)} \cap \Delta_M^{(i+1)} \neq \emptyset \text{ dla } 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

3.2. Dobre etykietowanie i rzutowania

W dalszej części pracy będziemy potrzebowali procesu odbijanego na zwartym fraktalu. Żeby go zdefiniować, fraktal musi posiadać tzw. własność dobrego etykietowania (*ang. good labeling property - GLP*) wprowadzoną w [39]. Jeżeli ona zachodzi, to na nieograniczonym fraktalu można określić ciągle rzutowanie z niego samego na pojedynczy M -sympleks i za jego pomocą zdefiniować proces odbijany na tym sympleksie. Okazuje się, że nie wszystkie fraktale mają własność GLP, zależy ona bowiem od geometrii fraktala. W pracy [39] zostało pokazane m.in., że GLP posiadają fraktale, które nie mają nieistotnych punktów stałych, lub gdy ich liczba jest liczbą pierwszą.

Formalna definicja przebiega następująco. Przypomnijmy, że k jest liczbą istotnych punktów stałych. Rozważamy zbiór etykiet $\mathcal{A} := \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_k\}$ i pewną funkcję $l_M : V_M^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{A}$, nazywaną etykietowaniem. Z [39, Wniosek 2.1] mamy, że istnieje dokładnie k różnych obrotów wokół środka ciężkości zbioru $\mathcal{K}^{(M)}$, zachowujących jego wierzchołki. Oznaczmy je $\{R_1, \dots, R_k\} =: \mathcal{R}_M$.

Definicja 3.2.1 Powiemy, że fraktal $\mathcal{K}^{(\infty)}$ posiada własność dobrego etykietowania (Good Labelling Property, GLP) jeśli dla pewnego $M \in \mathbb{Z}$ istnieje funkcja $l_M : V_M^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{A}$ taka, że:

(1) Obcięcie ℓ_M do $V_M^{(M)}$ jest bijekcją na \mathcal{A} .

(2) Dla każdego M -sympleksu Δ postaci

$$\Delta = \mathcal{K}^{(M)} + \nu_\Delta,$$

gdzie $\nu_\Delta = \sum_{j=M+1}^J L^j \nu_{i_j}$, dla pewnego $J \geq M+1$ i $\nu_{i_j} \in \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$ (cf. Def. 3.1.3), istnieje obrót $R_\Delta \in \mathcal{R}_M$ taki, że

$$\ell_M(v) = \ell_M(R_\Delta(v - \nu_\Delta)), \quad v \in V(\Delta_M). \quad (3.2.1)$$

Dla nieograniczonego fraktala $\mathcal{K}^{(\infty)}$ posiadającego GLP definiujemy funkcję rzutowania $\pi_M : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{K}^{(M)}$ w następujący sposób:

$$\pi_M(x) := R_{\Delta_M}(x - \nu_{\Delta_M}), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}, \quad (3.2.2)$$

gdzie $\Delta_M = \mathcal{K}^{(M)} + \sum_{j=M+1}^J L^j \nu_{i_j}$ jest M -sympleksem zawierającym x postaci jak w definicji (3.2.1). Jeżeli fraktal ma GLP, to tak określone przekształcenie jest ciągłe.

Powyższe rzutowanie, obcięte do dowolnego M -sympleksu Δ_M jest bijekcją, a zatem funkcja odwrotna do tego obcicia, $(\pi_M|_{\Delta_M})^{-1} =: \tilde{\pi}_{\Delta_M}$, jest dobrze zdefiniowana i zadana wzorem

$$\tilde{\pi}_{\Delta_M}(x) = R_{\Delta_M}^{-1}(x) + \nu_{\Delta_M}, \quad x \in \mathcal{K}^{(M)}$$

gdzie $\Delta_M = \mathcal{K}^{(M)} + \nu_{\Delta_M} = \mathcal{K}^{(M)} + \sum_{j=M+1}^J L^j \nu_{i_j}$. Można zdefiniować również rzutowanie z $\mathcal{K}^{(\infty)}$ na dowolny M -sympleks $\Delta_M \in \mathcal{T}^{(M)}$. A mianowicie, definiujemy $\pi_{\Delta_M} : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \Delta_M$ w następujący sposób

$$\pi_{\Delta_M}(x) = \tilde{\pi}_{\Delta_M}(\pi_M(x)). \quad (3.2.3)$$

Oczywiście, $\pi_{\mathcal{K}^{(M)}} = \pi_M$, ponieważ $\tilde{\pi}_{\mathcal{K}^{(M)}} = \text{Id}$.

Więcej informacji dotyczących GLP i rzutowań można znaleźć w [39, 40].

3.3. Procesy stochastyczne na nieograniczonych zagnieżdżonych fraktalach

3.3.1. Ruch Browna

Na nieograniczonych zagnieżdżonych fraktalach można zdefiniować ruch Browna [48, 51]. Niech $Z = (Z_t, \mathbf{P}^x)_{t \geq 0, x \in \mathcal{K}^{(\infty)}}$ będzie takim procesem na nieograniczonym fraktalu $\mathcal{K}^{(\infty)}$,

którego wymiar Hausdorffa wynosi d . Jest to Fellerowski, mocny proces Markowa z funkcją gęstości przejścia $g(t, x, y)$ względem d -wymiarowej miary Hausdorffa μ na $\mathcal{K}^{(\infty)}$. Funkcja ta jest ciągła na $(0, \infty) \times \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}$, a ponadto zachodzi własność skalowania

$$g(t, x, y) = L^d g(L^{d_w} t, Lx, Ly), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)},$$

oraz oszacowanie subgaussowskie (1.2.1) z $\rho(x, y) = |x - y|$:

$$\begin{aligned} C_{g,1} t^{-d/d_w} \exp \left(-C_{g,2} \left(\frac{|x - y|^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_J - 1}} \right) &\leq g(t, x, y) \\ &\leq C_{g,3} t^{-d/d_w} \exp \left(-C_{g,4} \left(\frac{|x - y|^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_J - 1}} \right), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)}, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

dla pewnych stałych $C_{g,1}, C_{g,2}, C_{g,3}, C_{g,4} > 0$. Zwracamy uwagę, że jest to przykład dyfuzji ułamkowej z rozdziału 2.

3.3.2. Odbijany ruch Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$

Niech $Z = (Z_t, \mathbf{P}^x)_{t \geq 0, x \in \mathcal{K}^{(\infty)}}$ będzie *ruchem Browna* na USNF $\mathcal{K}^{(\infty)}$, dla którego zachodzi GLP. Dla ustalonego $M \in \mathbb{Z}$ *odbijanym ruchem Browna* na $\mathcal{K}^{(M)}$ nazwiemy proces stochastyczny zdefiniowany w następujący sposób (więcej w [48])

$$Z_t^M = \pi_M(Z_t), \quad (3.3.2)$$

gdzie $\pi_M : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{K}^{(M)}$ jest rzutowaniem zdefiniowanym za pomocą wzoru (3.2.2).

Gęstość przejścia tego procesu $g_M(t, x, y) : (0, \infty) \times \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(M)} \rightarrow (0, \infty)$ jest zadana wzorami

$$g_M(t, x, y) \asymp \begin{cases} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} g(t, x, y') & \text{jeśli } y \in \mathcal{K}^{(M)} \setminus V_M^{(M)} \\ \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} g(t, x, y') \cdot \text{rank}(y') & \text{jeśli } y \in V_M^{(M)}, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

gdzie dla $y_0 \in V_M^{(\infty)}$, $\text{rank}(y_0)$ jest liczbą M -sympleksów stykających się w punkcie y_0 .

Gęstość przejścia odbijanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$ spełnia następujące oszacowanie (Twierdzenie 3.1 w [55]):

$$O_1(f_{O_2}(t, |x - y|) \vee h_{O_3}(t, M)) \leq g_M(t, x, y) \leq O_4(f_{O_5}(t, |x - y|) \vee h_{O_6}(t, M)), \quad (3.3.4)$$

gdzie $O_1, O_2 \dots O_6$ pewne nieujemne stałe niezależne od M natomiast

$$f_c(t, r) = t^{-\frac{d}{d_w}} \cdot e^{-c\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_w-1}}}$$

$$h_c(t, M) = L^{-dM} \left(\frac{L^M}{t^{1/d_w}} \vee 1 \right)^{d - \frac{d_w}{d_w-1}} \cdot e^{-c\left(\frac{L^M}{t^{1/d_w}} \vee 1\right)^{\frac{d_w}{d_w-1}}}.$$

Powyższe oszacowanie można zapisać w wygodniejszy sposób, a mianowicie (Wniosek 3.1 w [55]):

$$O_1 f_{O_2}(t, |x - y|) \leq g_M(t, x, y) \leq O_3 f_{O_4}(t, |x - y|) \text{ jeśli } t < L^{Md_w}, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(M)} \quad (3.3.5)$$

$$O_5 L^{-Md} \leq g_M(t, x, y) \leq O_6 L^{-Md} \text{ jeśli } t \geq L^{Md_w}, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(M)}.$$

3.3.3. Subordynowany odbijany ruch Browna

Będziemy również potrzebować procesów subordynowanych względem odbijanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$. Tak jak wcześniej, będziemy używali subordynatorów α -stabilnych, $\alpha \in (0, 1)$, o gęstości spełniającej (1.3.1) oraz subordynatorów relatywistycznych α -stabilnych, $\alpha \in (0, 1)$ dla których gęstość jest dana przez (1.3.17)

Założmy, że $(Z_t^M, \mathbf{P}_x)_{x \in \mathcal{K}^{(M)}, t \geq 0}$ jest odbijanym ruchem Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$ i niech S będzie subordynatorem jak w (1.3.1), niezależnym od Z . Definiujemy *subordynowany odbijany ruch Browna* $X^M = (X_t^M)_{t \geq 0}$ za pomocą

$$X_t^M := Z_{S_t}^M, \quad t \geq 0.$$

Powyższy proces jest procesem Markowa o trajektoriach càdlàg, którego gęstość przejścia jest zadana przez:

$$p_M(t, x, y) = \int_0^\infty g_M(u, x, y) \eta_t(du), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(M)}. \quad (3.3.6)$$

Warte podkreślenia, za [40, lematy 2.4, 2.5], że subordynacja i rzutowanie komutują, tzn. proces subordynowany do odbijanego na $\mathcal{K}^{(M)}$ jest tym samym procesem co odbijany proces subordynowany do procesu na $\mathcal{K}^{(\infty)}$.

3.3.4. Użyteczne lematy

Podamy teraz serię lematów dotyczących procesów na fraktalach, które będą niezbędne do udowodnienia istnienia IDS. Ich dowody przenieśliśmy do Dodatku.

Lemat 3.3.1 [Lemat 2.1 w [2]]

Zachodzi:

- (a) Dla każdego ustalonego $t_0 > 0$ istnieje stała $O_7 = O_7(t_0)$ taka, że dla każdego $t \geq t_0$ mamy

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}} p(t, x, y) \leq O_7 t^{-\frac{d}{dw\alpha}}.$$

Ponadto funkcja $(t, x, y) \mapsto p(t, x, y)$ jest ciągła na $(0, \infty) \times \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}$.

- (b) Dla każdego ustalonego $t_0 > 0$ istnieje stała $O_8 = O_8(t_0) > 0$ taka, że dla każdego $t \geq t_0$ i $M \in \mathbb{Z}_+$ mamy

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{K}^{(M)} \times \mathcal{K}^{(M)}} p_M(t, x, y) \leq O_8 \left(t^{-\frac{d}{dw\alpha}} \vee L^{-dM} \right).$$

Ponadto funkcja $(t, x, y) \mapsto p_M(t, x, y)$ jest ciągła na $(0, \infty) \times \mathcal{K}^{(M)} \times \mathcal{K}^{(M)}$.

Lemat 3.3.2 [Lemat 2.2 w [2]]

Dla każdego $t > 0$ i $a > 1$ zachodzi

$$\sum_{M=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \mathbf{P}^x \left[\sup_{s \leq t} |X_s - x| > a^M \right] < \infty.$$

Przypomnijmy, że $\Delta_{M,i}$ dla $1 \leq i \leq N$ oznaczają M -sympleksy w $\mathcal{K}^{(M+1)}$ (Definicja 3.1.3 (5)).

Lemat 3.3.3 [Lemat 2.3 w [2]] Zachodzą poniższe własności

- (a) Dla

$$C(M, t) := \sup_{x, y \in \mathcal{K}^{(M)}} \sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \notin \mathcal{K}^{(M+1)}}} p(t, x, y'), \quad t > 0, \quad M \in \mathbb{Z} \quad (3.3.7)$$

mamy

$$\sum_{M=1}^{\infty} C(M, t) < \infty, \quad t > 0;$$

w szczególności, dla każdego $t > 0$, $C(M, t) \rightarrow 0$ gdy $M \rightarrow \infty$.

- (b) Dla każdego $t > 0$ mamy

$$\sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} |p(t, x, x) - p_M(t, x, x)| \mu(dx) < \infty; \quad (3.3.8)$$

w szczególności

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} |p(t, x, x) - p_M(t, x, x)| \mu(dx) \rightarrow 0, \quad \text{as } M \rightarrow \infty. \quad (3.3.9)$$

Niektóre z naszych wyników w następnych rozdziałach będą oparte na zastosowaniu miar mostowych względem procesów subordynowanych. Oznaczmy przez $\mathbf{P}_t^{x,y}$, $t > 0$, $x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)}$, rozkład warunkowy względem \mathbf{P}^x procesu $(X_s)_{s \in [0,t]}$ przy danym $X_t = y$. Jest to miara na $D([0,t], \mathcal{K}^{(\infty)})$, która spełnia następującą zależność: dla dowolnego $0 < s < t$ i $A \in \sigma(X_u : u \leq s)$,

$$p(t, x, y) \mathbf{P}_t^{x,y}(A) = \mathbf{E}^x[\mathbf{1}_A p(t-s, X_s, y)]. \quad (3.3.10)$$

Dokładną definicję i więcej informacji na temat własności mostów Markowa skonstruowanych dla ogólnych procesów Fellera można znaleźć w [17]. Możemy rozważać również miary mostowe dla procesów odbijanych, tj. miary $\mathbf{P}_{M,t}^{x,y}$, $M \in \mathbb{Z}$, $t > 0$, $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$ na $D([0,t], \mathcal{K}^{(M)})$. Są one wyznaczone poprzez relację, dla każdego $0 \leq s < t$ i $A \in \sigma(X_u^M : u \leq s)$ mamy

$$p_M(t, x, y) \mathbf{P}_{M,t}^{x,y}(A) = \mathbf{E}^x[\mathbf{1}_A p_M(t-s, X_s^M, y)]. \quad (3.3.11)$$

Wartości oczekiwane względem miar $\mathbf{P}_t^{x,y}$ i $\mathbf{P}_{M,t}^{x,y}$ będą oznaczane odpowiednio przez $\mathbf{E}_t^{x,y}$ i $\mathbf{E}_{M,t}^{x,y}$.

Poniższa tożsamość łączy miary mostowe dla procesu odbijanego i zwykłego. Jej dowód jest konsekwencją Twierdzenia 4.3 w [39] i jest analogiczny do dowodu [40, Lemat 2.6].

Lemat 3.3.4 *Zachodzi poniższe.*

(a) *Dla każdego $t > 0$, $x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_M^{(\infty)}$, $M \in \mathbb{Z}_+$ i zbioru $A \in \mathcal{B}(D[0,t], \mathcal{K}^{(M)})$ mamy*

$$p_M(t, \pi_M(x), \pi_M(y)) \mathbf{P}_{M,t}^{\pi_M(x), \pi_M(y)}(A) = \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(y))} p(t, x, y') \mathbf{P}_t^{x,y'}(\pi_M^{-1}(A)).$$

(b) *Konsekwentnie, dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, N$ i $x \in \mathcal{K}^{(M)} \setminus V_M^{(\infty)}$, mamy*

$$\sum_{x' \in \pi_M^{-1}(x)} p(t, \pi_{\Delta_{M,i}}(x), x') \mathbf{P}_t^{\pi_{\Delta_{M,i}}(x), x'}(\pi_M^{-1}(A)) = \sum_{x' \in \pi_M^{-1}(x)} p(t, x, x') \mathbf{P}_t^{x,x'}(\pi_M^{-1}(A))$$

gdzie $\Delta_{M,i}$ to M -sympleksy zawarte w $\mathcal{K}^{(M+1)}$ zaś $\pi_{\Delta_{M,i}}$ jest rzutowaniem na $\Delta_{M,i}$ danym przez (3.2.3).

Rozdział 4

Oszacowania gęstości przejścia dla stabilnego i relatywistycznego procesu odbijanego na fraktalach

W tym rozdziale będziemy rozważać procesy na fraktalach ograniczonych, odbijane przy dojściu do brzegu. Oszacujemy gęstość przejścia odbijanego subordynowanego ruchu Browna, dla subordynatorów α -stabilnych i relatywistycznych. Rozdział oparty jest na pracy [1].

4.1. Oszacowanie gęstości przejścia dla odbijanego α -stabilnego ruchu Browna.

Zacniemy od oszacowania gęstości przejścia w przypadku odbijanego αd_w -stabilnego ruchu Browna otrzymanego poprzez subordynację odbitego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(\infty)}$. Zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.1 *Niech $M \in \mathbb{Z}_+$ będzie ustalone. Niech X_t^M będzie αd_w -stabilnym odbijanym procesem na $\mathcal{K}^{(M)}$, z funkcją gęstości przejścia $p_S^M(\cdot, \cdot, \cdot)$ daną przez (3.3.6). Wtedy istnieją stałe $O_{S,1}, O_{S,2}, O_{S,3}, O_{S,4}$ niezależne od M takie, że*

$$O_{S,1}p_S(t, x, y) \leq p_S^M(t, x, y) \leq O_{S,2}p_S(t, x, y) \quad \text{dla } t < L^{\alpha M d_w}$$

$$O_{S,3}L^{-Md} \leq p_S^M(t, x, y) \leq O_{S,4}L^{-Md} \quad \text{dla } t \geq L^{\alpha M d_w}.$$

Oznacza to, że dla małych czasów gęstość procesu zachowuje się tak samo gęstość procesu α -stabilnego, a dla dużych czasów ulega homogenizacji i jest zbliżona do gęstości rozkładu

jednostajnego na $\mathcal{K}^{(M)}$ (przypomnijmy, że $\mu(\mathcal{K}^{(M)}) = L^{Md}$).

Dowód.

Przyjmijmy, że

$$\text{diam}\mathcal{K}^{(0)} =: c_0^*, \text{ wtedy } \text{diam}\mathcal{K}^{(M)} = L^M c_0^*,$$

czyli dla $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$ zachodzi $|x - y| \leq c_0^* L^M$.

Zauważmy, że dla dowolnej stałej $c > 0$ funkcja $f_c(t, r) = t^{-\frac{d}{d_w}} \cdot e^{-c\left(\frac{r}{t^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}$ jest malejąca dla $r > 0$. Zatem dla dowolnego $c > 0$ mamy

$$f_c(t, |x - y|) \geq f_c(t, c_0^* L^M).$$

Ponadto, dla dowolnych ustalonych stałych $c_{s,1}, c_{s,2}, c_{s,3} > 0, c_{s,1} < c_{s,2}$ istnieją nowe stałe, $c_1(c_{s,1}, c_{s,2}, c_{s,3})$ i $c_2(c_{s,1}, c_{s,2}, c_{s,3}, c_0^*)$ takie, że dla dowolnego $s \in [c_{s,1} L^{Md_w}, c_{s,2} L^{Md_w}]$ i dowolnych $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$ zachodzi:

$$c_1(c_{s,1}, c_{s,2}, c_{s,3}, c_0^*) L^{-Md} \leq f_{c_{s,3}}(s, |x - y|) \leq c_2(c_{s,1}, c_{s,2}, c_{s,3}) L^{-Md}. \quad (4.1.1)$$

Dla $s \geq c_{s,1} L^{Md_w}$ mamy bowiem:

$$f_{c_{s,3}}(s, |x - y|) \leq (c_{s,1} \cdot L^{Md_w})^{-\frac{d}{d_w}} \cdot 1 = c_{s,1}^{-\frac{d}{d_w}} L^{-Md}.$$

Z racji tego, że funkcja $x \mapsto x^{-d/d_w}$ jest malejąca, a $x \mapsto e^{-c\left(\frac{r}{x^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}$ jest rosnąca (dla $x > 0$) dostajemy, biorąc pod uwagę, że $c_{s,1} L^{Md_w} \leq s \leq c_{s,2} L^{Md_w}$ i $|x - y| \leq c_0^* L^M$

$$f_{c_{s,3}}(s, |x - y|) \geq (c_{s,2} L^{Md_w})^{-\frac{d}{d_w}} e^{-c_{s,3} \left(\frac{c_0^* L^M}{(c_{s,1} L^{Md_w})^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} = c_{s,2}^{-\frac{d}{d_w}} e^{-c_{s,3} \left(\frac{c_0^*}{c_{s,1}^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}} L^{-Md}.$$

Teraz przejdziemy do dowodu twierdzenia.

PRZYPADEK 1. $t \geq L^{\alpha Md_w}$. Niech

$$O_{S,5} = \left(\frac{O_4}{C_{g,2}}\right)^{\frac{d_J-1}{d_w}}.$$

Korzystając z oszacowań dla gęstości odbijanego ruchu Browna (3.3.5) mamy (pamiętając, że stałe O_i z tych oszacowań nie zależą od M):

$$p_S^M(t, x, y) = \int_0^\infty g_M(s, x, y) \eta_t(ds)$$

$$\begin{aligned}
&\leq O_3 \int_0^{L^{Md_w}} f_{O_4}(s, |x-y|) \eta_t(s) ds + O_6 \int_{L^{Md_w}}^{\infty} L^{-Md} \eta_t(s) ds \\
&\leq \frac{O_3}{C_{g.1}} \int_0^{\infty} g(s, O_{S.5}|x-y|) \eta_t(s) ds + O_6 \int_0^{\infty} L^{-Md} \eta_t(s) ds \\
&\leq c_3 p_S(t, O_{S.5} \cdot x, O_{S.5} \cdot y) + O_6 L^{-Md}
\end{aligned}$$

ponieważ $\int_0^{\infty} \eta_t(s) ds = 1$.

Skoro $t \geq L^{\alpha Md_w}$, to z oszacowań dla gęstości stabilnej (2.1.1) otrzymujemy:

$$p_S(t, O_{S.5} \cdot x, O_{S.5} \cdot y) \leq c_4 \cdot t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \leq c_4 \cdot L^{-Md}$$

co implikuje, że

$$p_S^M(t, x, y) \leq c_5 \cdot L^{-Md}.$$

By dostać oszacowanie górne, używamy (1.3.15). Istnieją stałe $a_3, u_0 > 0$, zależne od α i takie, że:

$$\eta_t(u) \geq a_3 t u^{-1-\alpha} \quad \text{dla } t > 0, u > u_0 t^{1/\alpha}.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $u_0 \geq 1$.

Ponieważ $t \geq L^{\alpha Md_w}$, to $u_0 t^{1/\alpha} \geq u_0 L^{Md_w} \geq L^{Md_w}$ i korzystając z (3.3.5) dostajemy:

$$\begin{aligned}
p_S^M(t, x, y) &= \int_0^{\infty} g_M(u, x, y) \eta_t(u) du \geq O_5 \int_{u_0 t^{1/\alpha}}^{\infty} L^{-Md} \eta_t(u) du \\
&\geq O_5 a_3 L^{-Md} \int_{u_0 t^{1/\alpha}}^{\infty} t u^{-1-\alpha} du = c_6 L^{-Md}
\end{aligned}$$

co kończy dowód dla $t \geq L^{\alpha Md_w}$.

PRZYPADK 2. $t < L^{\alpha Md_w}$. Zauważmy najpierw, że dla dowolnej stałej $\tilde{A} > 0$ istnieje stała $C(\tilde{A}) > 0$ taka, że dla dowolnych $t > 0$ i $x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)}$

$$\frac{1}{C(\tilde{A})} p_S(t, x, y) \leq p_S(t, \tilde{A}x, \tilde{A}y) \leq C(\tilde{A}) p_S(t, x, y). \quad (4.1.2)$$

Niech

$$O_{S.6} = \left(\frac{O_2}{C_{g.4}} \right)^{\frac{d_I - 1}{d_w}}.$$

Z (3.3.4) dostajemy:

$$p_S^M(t, x, y) = \int_0^{\infty} g_M(s, x, y) \eta_t(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&\geq O_1 \int_0^\infty f_{O_2}(s, |x-y|) \eta_t(s) ds \\
&\geq c_1 \int_0^\infty g(s, O_{S.6}x, O_{S.6}y) \eta_t(s) ds \\
&= c_1 p_S(t, O_{S.6}x, O_{S.6}y) \\
&\geq C(O_{S.6}) p_S(t, x, y)
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

a zatem musimy pokazać oszacowanie górne, tj. że zachodzi

$$p_S^M(t, x, y) \leq c_2 p_S(t, x, y), \quad t > 0, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(M)},$$

gdzie $c_2 > 0$ to pewna stała niezależna od M .

Korzystając z (3.3.5) dostajemy:

$$\begin{aligned}
p_S^M(t, x, y) &\leq O_3 \int_0^{L^{Md_w}} f_{O_4}(s, |x-y|) \eta_t(s) ds + O_6 \int_{L^{Md_w}}^\infty L^{-Md} \eta_t(s) ds \\
&\leq O_3 \int_0^\infty f_{O_4}(s, |x-y|) \eta_t(s) ds + O_6 \int_{L^{Md_w}}^\infty L^{-Md} \eta_t(s) ds
\end{aligned}$$

zatem, na mocy (1.3.19), (1.2.1) oraz rozumując analogicznie jak w (4.1.2) otrzymujemy, że

$$p_S^M(t, x, y) \leq c_3 p_S(t, x, y) + O_6 \int_{L^{Md_w}}^\infty L^{-Md} \eta_t(s) ds. \tag{4.1.4}$$

Przywołując (1.3.14) mamy, że istnieje $a_0 > 0$ takie, że $\eta_t(u) \leq a_0 t u^{-1-\alpha}$, dla $t, u > 0$, zatem:

$$I_1 := O_6 \int_{L^{Md_w}}^\infty L^{-Md} \eta_t(s) ds \leq c_4 t L^{-M(d+\alpha d_w)} \tag{4.1.5}$$

$$\leq c_4 L^{-Md}. \tag{4.1.6}$$

W przypadku gdy $t^{\frac{1}{\alpha d_w}} \geq |x-y|$, zachodzi

$$p_S(t, x, y) \geq c_5 t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \geq c_5 L^{-Md} \geq c_6 I_1.$$

Natomiast jeżeli $t^{\frac{1}{\alpha d_w}} < |x-y|$, to wtedy (ponieważ $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$, czyli $|x-y| \leq c_0^* L^M$):

$$p_S(t, x, y) \geq c_5 \cdot \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha d_w}} \geq c_7 t L^{-M(d+\alpha d_w)} \geq c_8 I_1,$$

dla pewnego $c_8 > 0$ (które nie zależy od t, x, y, M). Oznacza to, że $I_1 \leq c_9 p_S(t, x, y)$.

Z (4.1.4) dostajemy, że $p_S^M(t, x, y) \leq c_{10} p_S(t, x, y)$, co w połączeniu z (4.1.3) daje $p_S^M(t, x, y) \asymp p_S(t, x, y)$. Dowód jest zakończony. \square

4.2. Oszacowanie gęstości przejścia dla α -stabilnego relatywistycznego odbijanego ruchu Browna

W tej części podamy i udowodnimy oszacowanie na gęstość przejścia dla odbijanego procesu Browna subordynowanego przez subordynator relatywistyczny, tj.

$$p_R^M(t, x, y) = \int_0^\infty g_M(s, x, y) \eta_{t,m}(ds)$$

gdzie $\eta_{t,m}$ jest zadane przez (1.3.17), dla $m > 0, \alpha \in (0, 1)$.

Twierdzenie 4.2.1 *Niech X_t będzie relatywistycznym αd_w -stabilnym odbijanym procesem na $\mathcal{K}^{(M)}$, z gęstością przejścia $p_R^M(\cdot, \cdot, \cdot)$. Wtedy*

1) *istnieją stałe $O_{R.1}, O_{R.2} > 0$ takie, że dla $t \geq L^{Md_w}$, $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$*

$$O_{R.1} L^{-Md} \leq p_R^M(t, x, y) \leq O_{R.2} L^{-Md}. \quad (4.2.1)$$

2) *istnieje stała H_1 taka, że dla $t < L^{Md_w}$,*

$$p_R(t, x, y) \leq p_R^M(t, x, y) \leq p_R(t, H_1 x, H_1 y).$$

Stałe $O_{R.1}, O_{R.2}, H_1$ nie zależą od M .

Wykorzystując oszacowanie dla relatywistycznego procesu stabilnego na $\mathcal{K}^{(\infty)}$, widzimy, że dla $t < L^{Md_w}$ oszacowanie można napisać następująco: istnieją stałe $O_{R.3}, \dots, O_{R.12} > 0$ takie, że

1) dla $1 \leq t < L^{Md_w}$, $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$

$$\begin{aligned} O_{R.3} t^{-d/d_w} \exp \left\{ -O_{R.4} \min \left(|x-y|^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(|x-y| t^{-\frac{1}{d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \right) \right\} &\leq p_R^M(t, x, y) \\ &\leq O_{R.5} t^{-d/d_w} \exp \left\{ -O_{R.6} \min \left(|x-y|^{\frac{d_w}{d_J}}, \left(|x-y| t^{-\frac{1}{d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J-1}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

2) dla $t \in (0, 1), |x-y| \geq 1$

$$O_{R.7} t e^{-O_{R.8} |x-y|^{\frac{d_w}{d_J}}} \leq p_R^M(t, x, y) \leq O_{R.9} t e^{-O_{R.10} |x-y|^{\frac{d_w}{d_J}}}, \quad (4.2.3)$$

3) dla $t \in (0, 1), |x-y| < 1$

$$O_{R.11} t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha d_w}}}{|x-y|} \right)^{d+\alpha d_w} \wedge 1 \right) \leq p_R^M(t, x, y) \leq O_{R.12} t^{\frac{-d}{\alpha d_w}} \left(\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha d_w}}}{|x-y|} \right)^{d+\alpha d_w} \wedge 1 \right). \quad (4.2.4)$$

Tak samo, jak dla procesu stabilnego otrzymujemy, że dla małych czasów gęstość procesu zachowuje się jak gęstość procesu relatywistycznego stabilnego, a dla dużych czasów ulega homogenizacji i jest zbliżona do gęstości rozkładu jednostajnego na $\mathcal{K}^{(M)}$.

Dowód. Niech

$$H_0 := \left(\frac{O_4}{C_{g,2}}\right)^{\frac{d_J-1}{d_w}}, \quad H_1 := \left(\frac{O_4}{C_{g,4}}\right)^{\frac{d_J-1}{d_w}}. \quad (4.2.5)$$

Te stałe będą używane w późniejszej części dowodu, a stała H_1 wejdzie w skład uzyskanych oszacowań.

PRZYPADEK 1. $t \geq L^{Md_w}$. Korzystając z oszacowań (3.3.5) oraz wzoru na gęstość subordynatora (1.3.17) dostajemy:

$$\begin{aligned} p_R^M(t, x, y) &= \int_0^\infty g_M(s, x, y) \eta_{t,m}(s) ds \\ &\leq O_3 \int_0^{L^{Md_w}} f_{O_4}(s, |x-y|) \eta_{t,m}(s) ds + O_6 \int_{L^{Md_w}}^\infty L^{-Md} \eta_{t,m}(s) ds \\ &\leq O_3 \int_0^\infty f_{O_4}(s, |x-y|) \eta_{t,m}(s) ds + O_6 e^{mt} \int_0^\infty L^{-Md} e^{-m\frac{1}{\alpha}s} \eta_t(s) ds \\ &=: O_3 I_2 + O_6 e^{mt} L^{-Md} I_3. \end{aligned}$$

Używając (1.2.1) dostaniemy $I_2 \leq p_R(t, H_0 x, H_0 y)$, a skoro $t \geq L^{Md_w} \geq 1$, to z (2.2.1) otrzymujemy

$$I_2 \leq c_1 L^{-Md}.$$

Całka I_3 jest transformatą Laplace'a gęstości η_t w punkcie $m\frac{1}{\alpha}$, stąd

$$I_3 = e^{-t\phi^S(m\frac{1}{\alpha})} = e^{-mt}.$$

Z powyższych rachunków wynika, że istnieje stała uniwersalna $b_1 > 0$ taka, że

$$p_R^M(t, x, y) \leq b_1 L^{-Md}, \quad \text{dla } t \geq L^{Md_w}, \quad x, y \in \mathcal{K}^{(M)}. \quad (4.2.6)$$

Oszacowanie górne zatem zachodzi.

Zajmiemy się teraz oszacowaniem dolnym. W uzasadnieniu wzoru (2.2.9) pokazaliśmy, że dla dowolnego $m > 0$ istnieją stałe $L_1 = L_1(m, \alpha), L_2 = L_2(m, \alpha) > 1, b_2 = b_2(m, \alpha)$ takie, że

$$\int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m^{1/\alpha}s} \eta_t(s) ds \geq b_2 e^{-mt}, \quad \text{dla } t > 0.$$

Oczywiście zachodzi

$$\begin{aligned} p_R^M(t, x, y) &= \int_0^\infty g_M(s, x, y) \eta_{t,m}(s) ds \\ &\geq e^{mt} \int_{L_1 t}^{L_2 t} g_M(s, x, y) e^{-m \frac{1}{\alpha} s} \eta_t(s) ds \end{aligned}$$

Rozważamy dwa przypadki: (1) $L^{Md_w} \leq L_1 t$; (2) $L_1 t < L^{Md_w} < L_2 t$. Ponieważ nie znamy jawnych wartości L_1, L_2 to może się zdarzyć, że tylko jeden z nich jest możliwy.

- Jeśli $L^{Md_w} \leq L_1 t < L_2 t$, to z (3.3.5) oraz (2.2.1):

$$p_R^M(t, x, y) \geq O_5 L^{-Md} e^{mt} \int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m \frac{1}{\alpha} s} \eta_t(s) ds \geq O_5 b_2(m, \alpha) L^{-Md}.$$

- Jeśli $L_1 t < L^{Md_w} \leq L_2 t$ to biorąc pod uwagę, że $t \geq L^{Md_w}$, musi zachodzić $L_1 < 1$, zatem z (3.3.5) oraz (2.2.1):

$$p_R^M(t, x, y) \geq c_2 e^{mt} \left(\int_{L_1 t}^{L^{Md_w}} f_{O_2}(s, |x - y|) e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds + \int_{L^{Md_w}}^{L_2 t} L^{-Md} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \right),$$

ale jeśli $t \geq L^{Md_w}$ i $L_1 t < L^{Md_w}$ tj. $L_1 t \in [L_1 L^{Md_w}, L^{Md_w}]$ wtedy istnieje stała $L_3(t) \in [L_1, 1)$ taka, że $L_1 t = L_3 L^{Md_w}$. Korzystając zatem z (4.1.1) z $c_{s,1} = L_3(t), c_{s,2} = 1, c_{s,3} = O_2$ dostajemy:

$$f_{O_2}(s, |x - y|) \geq e^{-O_2(c_0^* L_3(t))^{\frac{-d_w}{d_J - 1}}} L^{-Md} \geq e^{-O_2(c_0^* L_1)^{\frac{-d_w}{d_J - 1}}} L^{-Md}$$

i dalej

$$\begin{aligned} p_R^M(t, x, y) &\geq c_3 e^{mt} \left(\int_{L_1 t}^{L^{Md_w}} L^{-Md} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds + \int_{L^{Md_w}}^{L_2 t} L^{-Md} e^{-m^{1/\alpha} s} \eta_t(s) ds \right) \\ &= c_3 L^{-Md} e^{mt} \int_{L_1 t}^{L_2 t} e^{-m \frac{1}{\alpha} s} \eta_t(s) ds \\ &\geq c_3 \cdot b_2(m, \alpha) L^{-Md} \end{aligned}$$

A zatem, pokazaliśmy, że dla $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$

$$p_R^M(t, x, y) \geq c_4 L^{-Md},$$

tak więc dla $t \geq L^{Md_w}$ dowód jest zakończony.

PRZYPADK 2. $t < L^{Md_w}$. Na mocy wzoru (3.3.3) mamy:

$$\begin{aligned}
p_R^M(t, x, y) &= \int_0^\infty g_M(s, x, y)\eta_{t,m}(s)ds \\
&= \int_0^\infty \Sigma_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} g(s, x, y')\eta_{t,m}(s)ds \\
&\geq \int_0^\infty g(s, x, y)\eta_{t,m}(s)ds \\
&= p_R(t, x, y)
\end{aligned}$$

zatem żeby pokazać, że oszacowanie górne (4.2.2) jest prawdziwe, wystarczy jeśli pokażemy, że zachodzi ograniczenie górne:

$$p_R^M(t, x, y) \leq c_5 \cdot p_R(t, H_1x, H_1y),$$

dla pewnego $c_5 > 0$ i wszystkich $x, y \in \mathcal{K}^{(M)}$, gdzie H_1 było dane przez (4.2.5).

Przyjmijmy

$$K := 2m^{-\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Zauważmy, że na mocy (4.1.1) możemy dostosować oszacowanie w (3.3.5) w taki sposób, że poziomem odcięcia dla t będzie KL^{Md_w} (K jest już ustalone) - ta zmiana wymaga tylko dostosowania stałych, które będą zależeć od m, α . Dla uproszczenia założmy, że stałe (3.3.5) są właściwe dla tego poziomu odcięcia.

Ponieważ dla $s \geq KL^{Md_w}$ zachodzi $g_M(s, x, y) \leq c_6L^{-Md}$, z (3.3.5) i (4.1.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
p_R^M(t, x, y) &= \int_0^\infty g_M(s, x, y)\eta_{t,m}(s)ds \\
&\leq e^{mt} \int_0^{KL^{Md_w}} g_M(s, x, y)\eta_{t,m}(s)ds + c_6e^{mt} \int_{KL^{Md_w}}^\infty L^{-Md}e^{-m\frac{1}{\alpha}s}\eta_t(s)ds \\
&\leq c_7 \int_0^\infty f_{O_4}(s, |x - y|)\eta_{t,m}(s)ds + c_6e^{mt} \int_{KL^{Md_w}}^\infty L^{-Md}e^{-m\frac{1}{\alpha}s}\eta_t(s)ds \\
&\leq c_8p_R(t, H_1x, H_1y) + c_6e^{mt} \int_{KL^{Md_w}}^\infty L^{-Md}e^{-m\frac{1}{\alpha}s}\eta_t(s)ds.
\end{aligned}$$

Niech

$$I_4 := e^{mt} \int_{KL^{Md_w}}^\infty L^{-Md}e^{-m\frac{1}{\alpha}s}\eta_t(s)ds.$$

W związku z używanym już faktem (1.3.14), że $\eta_t(u) \leq a_0tu^{-1-\alpha}$, $t, u > 0$ zachodzi:

$$I_4 \leq a_0L^{-Md}e^{mt} \int_{KL^{Md_w}}^\infty e^{-m\frac{1}{\alpha}s}ts^{-1-\alpha}ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq a_0 L^{-Md} \cdot \frac{t}{(KL^{Md_w})^{\alpha+1}} e^{mt} \int_{K \cdot L^{Md_w}}^{\infty} e^{-m \frac{1}{\alpha} s} ds \\
&= a_0 L^{-Md} \cdot \frac{t}{(m^{\frac{1}{\alpha}} KL^{Md_w})^{\alpha+1}} e^{mt} e^{-2mL^{Md_w}} \\
&\leq c_9 L^{-Md} \cdot \frac{t}{(L^{Md_w})^{\alpha+1}} e^{-mL^{Md_w}}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $t < L^{Md_w}$, to mamy, że $\frac{t}{(L^{Md_w})^{\alpha+1}} \leq 1$, zatem

$$I_4 \leq c_9 L^{-Md} e^{-mL^{Md_w}}, \quad (4.2.7)$$

a zatem zostaje do wykazania, że dla pewnego $c_{10} > 0$ zachodzi

$$p_R(t, H_1 x, H_1 y) \geq c_{10} L^{-Md} e^{-mL^{Md_w}}.$$

Przypomnijmy, że $|x - y| \leq L^M c_0^*$ i $d_J > 1$. Rozważamy trzy przypadki.

(1) Dla $t \in [1, L^{Md_w})$

$$\begin{aligned}
p_R(t, H_1 x, H_1 y) &\geq c_{11} t^{-\frac{d}{d_w}} e^{-C_{R.2} \left(\frac{O_4}{C_{g.4}} \right)^{\frac{d_J-1}{d_J}} |x-y|^{\frac{d_w}{d_J}}} \\
&\geq c_{11} L^{-Md} e^{-C_{R.2} \left(\frac{O_4}{C_{g.4}} \right)^{\frac{d_J-1}{d_J}} (L^M)^{\frac{d_w}{d_J}}}.
\end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Pokażemy teraz, że $p_R(t, H_1 x, H_1 y) \geq c^* I_4$ dla dowolnego $M \geq 0$ i pewnej stałej $c^* > 0$. W tym celu, bez straty ogólności, przyjmijmy we wzorach (4.2.7) i (4.2.8), $c_9 = c_{11} = 1$, oraz dla ułatwienia rachunków, niech $c_1^* := C_{R.2} \left(\frac{O_4}{C_{g.4}} \right)^{\frac{d_J-1}{d_J}}$. Znajdziemy teraz stałą c^* . Potrzebujemy by dla wszystkich M :

$$\begin{aligned}
L^{-Md} e^{-c_1^* (L^M)^{\frac{d_w}{d_J}}} &\geq c^* L^{-Md} e^{-mL^{Md_w}} \\
e^{mL^{Md_w} - c_1^* (L^M)^{\frac{d_w}{d_J}}} &\geq c^*.
\end{aligned}$$

Funkcja $[1, \infty) \ni x \mapsto M(x) := e^{mx^{d_w} - c_1^* x^{\frac{d_w}{d_J}}}$ jest ciągła, $M(x) > 0$, $M(1) = e^{m - c_1^*}$ a ponadto, skoro $d_J > 1$, to zachodzi $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty$. A zatem wystarczy wybrać

$$c^* = \min_{x \geq 1} M(x) > 0.$$

• dla $t \in (0, 1)$, $H_1 |x - y| \geq 1$, mamy:

$$p_R(t, H_1 x, H_1 y) \geq c_{12} t e^{-C_{R.6} \left(\frac{O_4}{C_{g.4}} \right)^{\frac{d_J-1}{d_J}} |x-y|^{\frac{d_w}{d_J}}}$$

$$\geq c_{12}t \cdot 1 \cdot e^{-C_{R.6} \left(\frac{O_4}{C_{g.4}}\right)^{\frac{d_J-1}{d_J}} (L^M)^{\frac{d_w}{d_J}}} \geq c_{13}I_4$$

dla $M \geq 0$ (uzasadnienie analogiczne jak powyżej).

- dla $t \in (0, 1)$, $H_1|x - y| < 1$, mamy:

$$\begin{aligned} p_R(t, H_1x, H_1y) &\geq c_{14}t((H_1|x - y|)^{-d-\alpha d_w} \wedge t^{\frac{-d-\alpha d_w}{\alpha d_w}}) \\ &\geq c_{14}t \cdot 1 \geq c_{15}I_4 \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Rozdział 5

Całkowa gęstość stanów

W kolejnych rozdziałach tej pracy zajmiemy się badaniem *całkowej gęstości stanów* (ang. *Integrated Density of States*, IDS) dla ewolucji na fraktalich. Rozważamy model ruchu cząsteczki w ośrodku losowym na fraktalu nieskończonym, modelowany przez zwykły proces Markowa z generatorem H_0 . Losowość imitujemy w ten sposób, że dodajemy losowy potencjał $V^\omega(\cdot)$, niezależny od ruchu cząsteczki. W związku z powyższym otrzymujemy losowy operator Schrödingera $H^\omega(\cdot) = H_0 + V^\omega(\cdot)$ gdzie H_0 opisuje energię kinetyczną cząsteczki, a $V^\omega(\cdot)$ jest losowym potencjałem interpretowanym jako operator mnożenia. Ze względu na fakt, że operator H^ω działa na przestrzeni nieograniczonej ($\mathcal{K}^{(\infty)}$), nie możemy oczekiwać, że spektrum jego generatora będzie dyskretne i w związku z tym jest ono trudne do analizy. Pewne jego własności można związać z własnościami całkowej gęstości stanów, której konstrukcja przebiega w sposób następujący. Obcinamy operator H^ω do pewnych sympleksów $\Delta_M, M \in \mathbb{Z}_+$ w ten sposób, że $\Delta_M \nearrow \mathcal{K}^{(\infty)}$ gdy $M \rightarrow \infty$. Operator H_M^ω odpowiadający operatorowi H^ω obciętemu do sympleksu Δ_M z warunkami brzegowymi Dirichleta generuje półgrupę operatorów zwartych, zatem jego spektrum jest dyskretne - składa się z wartości własnych o skończonej krotności. W rezultacie możemy poprawnie zdefiniować następujący obiekt - miarę losową związaną z wartościami własnymi operatora H_M^ω :

$$\Lambda_M^\omega := \frac{1}{\mu(\Delta_M)} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\lambda_i^{H_M^\omega}}$$

gdzie $\lambda_i^{H_M^\omega}$ to wartości własne operatora H_M^ω . Interesuje nas zachowanie graniczne tych miar gdy $M \rightarrow \infty$. Jeżeli istnieje ich granica (w sensie słabej zbieżności - dopuszczamy przypadek zdegenerowany), to nazywamy ją *całkową gęstością stanów* i oznaczamy przez Λ . Najważniejsze są te przypadki, gdy miara graniczna jest nielosowa.

Jeżeli pole losowe $V^\omega(\cdot)$ spełnia pewne warunki ergodyczności, to możemy oczekiwać, że granica definiująca IDS istnieje. Istnienie IDS zostało wykazane dla przypadku \mathbb{R}^d i zwykłego ruchu Browna o generatorze $H_0 = -\Delta$, o ile dodamy pewne dodatkowe założenia wymuszające odpowiednią regularność potencjału V^ω . Jest tak np. dla potencjałów typu Poissonowskiego (zob. [52]) i kratowego (zob. [41]). Dla procesu odpowiadającemu operatorowi $H_0 = (-\Delta)^\alpha$, tzw. ułamkowemu Laplasjanowi, istnienie IDS zostało udowodnione dla potencjału kratowego (praca [43]), w przestrzeniach bardziej nas interesujących, tj. na fraktalach zagnieżdżonych, istnienie IDS zostało również uzyskane dla ruchu Browna na trójkącie Sierpińskiego z potencjałem Poissonowskim ([56]), dla procesów subordynowanych z potencjałem Poissonowskim ([42]), procesów subordynowanych z potencjałem typu kratowego ([54]). W ostatniej z tych prac rozpatrywano szerszą klasę fraktali - nieskończone fraktale zagnieżdżone z własnością dobrego etykietowania, przy potencjale losowym typu kratowego. Dla subordynowanych ruchów Browna na ogólnych fraktalach z potencjałem Poissonowskim, zob. [3]. We wszystkich cytowanych pracach dowody zbieżności miar Λ_M^ω polegają na badaniu zbieżności punktowej ich transformacji Laplace'a.

Drugim zagadnieniem jest uzyskanie osobliwości typu Lifschitza dla całkowitej gęstości stanów. Jest to zagadnienie dotyczące zachowania gęstości stanów w okolicach zera. Okazuje się, że w przypadku losowych potencjałów zanik miary $\Lambda(\cdot)$ w okolicach zera jest szybszy niż w przypadku potencjałów nielosowych. Odkrycie tego zjawiska przypisuje się Lifschitzowi i jest ono powiązane z zachodzeniem wielkich odchyień. W pracy ([42]) uzyskano zachodzenie osobliwości Lifschitza dla procesów subordynowanych na trójkącie Sierpińskiego dla potencjałów Poissonowskich, ale przy dodatkowych założeniach dotyczących subordynatora. W szczególności, tamto podejście wykluczało procesy relatywistyczne. Obecnie, używając innych metod, uzupełnimy tę lukę. W kolejnych rozdziałach pokażemy występowanie osobliwości Lifschitza na $\mathcal{K}^{(\infty)}$ również dla procesu relatywistycznego.

5.1. Losowe operatory Schrödingera

W dalszej części naszej pracy będziemy zakładać, że $\mathcal{K}^{(\infty)}$ jest nieograniczonym fraktalem zagnieżdżonym z własnością dobrego etykietowania (GLP, zob. rozdział 3.2). Będziemy rozważać subordynowany ruch Browna X na $\mathcal{K}^{(\infty)}$ z wykładnikiem Laplace'a ϕ , taki jak w

rozdziale 1.3.1. Wskażemy najpierw z jakimi rodzajami potencjałów będziemy się zajmować, a następnie podamy przy jakich założeniach istnieje IDS.

Przypomnijmy, że $V_0^{(M)}$ oznacza zbiór wierzchołków wszystkich 0-sympleksów wewnątrz $\mathcal{K}^{(M)}$ (ograniczonego fraktala wielkości L^M) i analogicznie $V_0^{(\infty)}$ oznacza zbiór wierzchołków wszystkich 0-sympleksów wewnątrz całego $\mathcal{K}^{(\infty)}$. Będziemy rozważać następujące typy potencjałów. Funkcja W pojawiająca się w ich definicji nazywana będzie *funkcją profilu*.

Definicja 5.1.1 (Potencjał typu kratowego o profilu W) Niech $W : \mathcal{K}^{(\infty)} \times V_0^{(\infty)} \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją Borelowską, i niech $\{\xi_v : v \in V_0^{(\infty)}\}$ będzie rodziną i.i.d. niezdegenerowanych, nieujemnych zmiennych losowych na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{Q})$. Wtedy pole losowe

$$V^\omega(x) := \sum_{v \in V_0^{(\infty)}} \xi_v(\omega) \cdot W(x, v), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)} \quad (5.1.1)$$

nazwiemy potencjałem typu kratowego (ang: alloy-type potential) na $\mathcal{K}^{(\infty)}$.

Definicja 5.1.2 (Speriodyzowany potencjał typu kratowego o profilu W) Dla danego $M \in \mathbb{Z}$, definiujemy

$$V_M^\omega(x) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \xi_v(\omega) \sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v)} W(x, v'), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}, \quad M \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.1.2)$$

Ta definicja jest oparta na właściwości dobrego etykietowania (GLP) $\mathcal{K}^{(\infty)}$, która umożliwia nam zdefiniowanie ciągłego rzutowania $\pi_M : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{K}^{(M)}$ (zob. rozdział 3.2). Zauważmy, że generalnie nie jest prawdą, że realizacje V_M^ω są okresowe względem π_M , tj. istnieją funkcje profilu W takie, że $V_M^\omega(\pi_M(x)) \neq V_M^\omega(x)$, dla niektórych $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}$, patrz przykład 5.1.3.

Definicja 5.1.3 (Fraktalny potencjał Poissonowski z funkcją profilu W) Niech $W : \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją Borelowską i niech ρ^ω będzie losową miarą liczącą odpowiadającą punktowemu procesowi Poissona na $\mathcal{K}^{(\infty)}$ z intensywnością $\nu d\mu$, $\nu > 0$, zdefiniowaną na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{Q})$. Wtedy pole losowe

$$V^\omega(x) := \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} W(x, y) \rho^\omega(dy), \quad (5.1.3)$$

będzie nazwane fraktalnym potencjałem Poissonowskim.

Definicja 5.1.4 (*Speriodyzowany fraktalny potencjał Poissonowski z funkcją profilu W*) Dla danego $M \in \mathbb{Z}$, W, ρ^ω , jak wyżej definiujemy

$$V_M^\omega(x) := \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(x, y') \rho^\omega(dy), \quad M \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.1.4)$$

Tę periodyzację można opisać następująco. W przypadku potencjału kratowego, rozważamy zmienne losowe $\xi_v, v \in V_0^{(M)}$, a dla potencjału Poissona - chmurę Poissona ograniczoną do $\mathcal{K}^{(M)}$, rozszerzamy okresowo do $\mathcal{K}^{(\infty)}$, a następnie dołączamy profil W .

We wszystkich rozważaniach będziemy zakładać, że subordynowany ruch Browna i rozważany potencjał losowy są niezależne.

5.1.1. Założenia dla potencjału kratowego

Punktem wyjścia dla naszych rozważań jest praca [54], w której udowodniono istnienie IDS dla potencjału kratowego z ograniczonymi zmiennymi losowymi ξ_v i ograniczoną funkcją profilu W . Przy takich założeniach potencjał $V^\omega(\cdot)$ automatycznie należał do klasy Kato odpowiedniego procesu, co jest potrzebne dla poprawnego zdefiniowania półgrupy procesu ewoluującego w ośrodku zaburzonym przez potencjał.

Przypomnijmy, że $B_M(x, 1)$ oznacza kulę jednostkową w metryce grafowej d_M – jeśli $x \notin V_M^{(\infty)}$, wtedy jest to pojedynczy M -sympleks $\Delta_M(x)$; jeśli $x \in V_M^{(\infty)}$, to kula ta jest sumą wszystkich M -sympleksów łączących się w punkcie x . Będziemy pracowali przy następujących założeniach.

- (Q) zmienne losowe $\xi_v, v \in V_0^{(\infty)}$ są i.i.d., niezdegenerowane oraz $\mathbb{E}^\mathbb{Q} \xi_v < \infty$,
- (A0) $W \geq 0, W(\cdot, v) \in \mathcal{K}_{loc}$ dla każdego $v \in V^{(\infty)}$ oraz istnieje ciąg, $\{b_v, v \in V^{(\infty)}\}$ taki, że $\sum_i b_i < \infty$ oraz dla każdego $M \in \mathbb{Z}_+$, jeżeli $x \in \mathcal{K}^{(M)}$ a $v \notin \mathcal{K}^{(M+1)}$, to

$$W(x, v) \leq b_v.$$

Przy tych założeniach potencjał $V^\omega(\cdot)$ jest prawie na pewno skończony i należy do odpowiedniej klasy Kato dla procesu (definicja w 5.1.5).

(A1) (Funkcja profilu)

a) $\sum_{M=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \sum_{v \in V_0^{(\infty)} \setminus B_{\lfloor M/4 \rfloor}(x,1)} W(x, v) < \infty;$

b) dla odpowiednio dużego $M \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{v' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(v))} W(\pi_M(x), v') \leq \sum_{v' \in \pi_{M+1}^{-1}(\pi_M(v))} W(\pi_{M+1}(x), v'), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}, v \in V_0^{(\infty)}. \quad (5.1.5)$$

Warunek, **(A1.a)** dotyczy tylko regularności, wynika z niego w szczególności, że każda realizacja losowego potencjału $V^\omega(\cdot)$ jest prawie wszędzie skończona i lokalnie ograniczona. Z kolei warunek **(A1.b)** jest strukturalnie ważny – oznacza on że dla każdych ustalonych $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}, v \in V_0^{(\infty)}$, wpływ potencjału z $\pi_M^{-1}(\pi_M(v))$ na cząsteczkę w będącą w punkcie $\pi_M(x) \in \mathcal{K}^{(M)}$ jest po uśrednieniu mniejszy niż wpływ na cząsteczkę będącą w punkcie $\pi_{M+1}(x)$. Przy założeniach **(A1.a-b)** możemy udowodnić istnienie IDS-u dla potencjału typu kratowego na $\mathcal{K}^{(\infty)}$.

Kolejny zestaw założeń będzie potrzebny do udowodnienia, że zachodzi osobliwość Lifschitza.

(A2) (Funkcja profilu o regularnym nośniku)

a) Istnieje $M_0 \in \mathbb{Z}_+$ takie, że

$$W(x, y) = 0 \quad \text{dla każdych } x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)}, \text{ o ile } d_{M_0}(x, y) > 1;$$

b) Istnieją $m_0 \in \mathbb{Z}, A_0 > 0$ takie, że

$$W(x, y) \geq A_0 \quad \text{dla każdego } x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)} \text{ gdzie } d_{m_0}(x, y) \leq 1; \quad (5.1.6)$$

c) (Całkowalność w L^2) istnieje $N_2 > 0$ takie, że

$$\sup_{v \in V_0^{(\infty)}} \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} W^2(x, v) \mu(dx) =: N_2 < \infty.$$

Przykład 5.1.1 Dla $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}$, $y \in V_0^{(\infty)}$ definiujemy

$$W(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } y \text{ jest wierzchołkiem } 0\text{-sympleksu do którego należy } x \\ 0, & \text{wpp.} \end{cases}$$

W pracy ([54]) rozważane są również przykłady:

Przykład 5.1.2 Dla $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}$, $y \in V_0^{(\infty)}$ niech $f(x, y) = \min\{M \in \mathbb{N} : \exists \Delta_M x, y \in \Delta_M\}$.

Definiujemy

$$W(x, y) = \begin{cases} \varphi(f(x, y)), & x \notin V_0^{(\infty)} \\ 0, & x \in V_0^{(\infty)} \end{cases}$$

gdzie $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ jest nierosnącą funkcją oraz istnieje $c > 1$ takie, że $\varphi(m) \leq N^{-cm}$ dla $m \in \mathbb{N}$.

Przykład 5.1.3 Niech $\mathcal{K}^{(\infty)}$ będzie nieograniczonym trójkątem Sierpińskiego. Dla $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}$, $y \in V_0^{(\infty)}$ niech $f(x, y) = \min\{M \in \mathbb{N} : \exists \Delta_M x, y \in \Delta_M\}$ i

$$W(x, y) = 4^{-f(x, y)}.$$

5.1.2. Założenia dla potencjału Poissonowskiego

W przypadku potencjału Poissonowskiego również będziemy potrzebować pewnych założeń ażeby uzyskać jego odpowiednią regularność. Te założenia będą bardzo podobne jak dla potencjału kratowego, ale dla formalności je wypiszmy.

(A0') $W(\cdot, y) \in \mathcal{K}_{\text{loc}}^X$ dla każdego $y \in \mathcal{K}^{(\infty)}$ oraz istnieje funkcja $h \in L^1(\mathcal{K}^{(\infty)}, \mu)$ taka, że dla dowolnego $M \in \mathbb{Z}$, jeśli $x \in \mathcal{K}^{(M)}$ oraz $y \notin \mathcal{K}^{(M+1)}$ to $W(x, y) \leq h(y)$.

Podobnie jak w przypadku potencjału kratowego, przy powyższym założeniu, potencjał Poissonowski należy do odpowiedniej klasy Kato.

Kolejne założenie, takie samo jak w przypadku potencjału kratowego będzie potrzebne do udowodnienia istnienia IDSu.

(A1') (Funkcja profilu)

$$\text{a) } \sum_{M=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \int_{\mathcal{K}^{(\infty)} \setminus B_{[M/4]}(x, 1)} W(x, y) d\mu(y) < \infty;$$

b) Dla odpowiednio dużego $M \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{y' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(y))} W(\pi_M(x), y') \leq \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(v))} W(\pi_{M+1}(x), y'), \quad x, y \in \mathcal{K}^{(\infty)}.$$

Aby uzyskać osobliwość Lifschitza dla potencjału Poissona, uzupełnimy założenia te o **(A2)** - jak dla potencjału kratowego.

Przypominamy też, że pracujemy przy założeniu **(B)** (zob. rozdział 1.3.1). W szczególności wykładnik Laplace'a procesu subordynowanego spełnia (1.3.4): istnieją $\alpha \in (0, 1)$, i $C_{\phi,1}, C_{\phi,2}, \lambda_0 > 0$ takie, że

$$C_{\phi,1}\lambda^\alpha \leq \phi(\lambda) \leq C_{\phi,2}\lambda^\alpha, \quad \lambda \in (0, \lambda_0]. \quad (5.1.7)$$

W pracy ([42]) dla uzyskania osobliwości Lifschitza używano mocniejszych założeń. A mianowicie, wymagano aby wykładnik Laplace'a

$$\phi(\lambda) = a\lambda + \phi_1(\lambda) \text{ gdzie } \phi_1(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\nu(dx)$$

spełniał jeden z trzech poniższych warunków:

(a) $a > 0$, $\phi_1 \equiv 0$ (lub równoważnie $\nu \equiv 0$; brak skoków)

(b) $a > 0$ oraz $\phi_1 \neq 0$ spełnia warunek: istnieją $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (0, d_w)$, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in (0, 1]$, $\tilde{e}_3, \tilde{e}_4 \in [1, \infty)$ i $r' > 0$ takie, że

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1\lambda^{\alpha_1/d_w} &\leq \phi_1(\lambda r) \leq \tilde{e}_3\lambda^{\beta_1/d_w}\phi_1(r), \quad \lambda \in (0, 1], r \in (0, r'] \\ \tilde{e}_2\lambda^{\alpha_2/d_w} &\leq \phi_1(\lambda r') \leq \tilde{e}_4\lambda^{\beta_2/d_w} \quad \lambda \geq 1, r \geq r' \end{aligned}$$

(c) $a = 0$ oraz $\phi_1 \neq 0$ spełnia powyższy warunek z punktu (b).

Subordynowane relatywistyczne procesy stabilne nie spełniają tych założeń, spełniają natomiast (5.1.7). Dlatego osobliwość Lifschitza dla procesów relatywistycznych na fraktalach nie została wcześniej wykazana - w tym zakresie wyniki doktoratu rozszerzają wcześniejsze wyniki.

5.1.3. Półgrupy i generatory

Wprowadzimy teraz notację dla półgrup L^2 - i generatorów rozważanych procesów.

- (i) Dla ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(\infty)}$: półgrupa $(P_t)_{t \geq 0}$, z generatorem $-\mathcal{L}$.
- (ii) Dla odbijanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$, $M \in \mathbb{Z}$: półgrupa $(P_t^M)_{t \geq 0}$, z generatorem $-\mathcal{L}^M$.
- (iii) Dla subordynowanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(\infty)}$: półgrupa $(T_t)_{t \geq 0}$, z generatorem $\phi(-\mathcal{L})$.
- (iv) Dla odbijanego subordynowanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$: półgrupa $(T_t^M)_{t \geq 0}$, z generatorem $\phi(-\mathcal{L}^M)$.

Spektra operatorów $-\mathcal{L}^M$ i $\phi(-\mathcal{L}^M)$ są dyskretne. Wartości własne operatora $-\mathcal{L}^M$ spełniają

$$0 = \mu_1^M < \mu_2^M \leq \mu_3^M \leq \dots \rightarrow \infty$$

i posiadają własność skalowania

$$\mu_k^M = L^{-Md_w} \cdot \mu_k^1 \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1.8)$$

Wartości własne $\phi(-\mathcal{L}^M)$ są oznaczane $\lambda_1^M < \lambda_2^M \leq \lambda_3^M \leq \dots \rightarrow \infty$. Zachodzi

$$\lambda_1^M = 0, \quad \lambda_k^M = \phi(\mu_k^M) = \phi(L^{-Md_w} \cdot \mu_k^1) \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (5.1.9)$$

Półgrupa odbijanego subordynowanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$ ma zupełny układ funkcji własnych $(\psi_k^M)_{k \geq 1}$ (gdzie $\psi_1 \equiv L^{-\frac{Md}{2}}$), zatem mamy

$$\phi(-\mathcal{L}^M)\psi_k^M = \lambda_k^M \psi_k^M \quad \text{oraz} \quad T_t^M \psi_k^M = e^{-t\lambda_k^M} \psi_k^M. \quad (5.1.10)$$

Będziemy również potrzebować subordynowanego procesu X zabitego przy wyjściu z $\mathcal{K}^{(M)}$. Jego półgrupa będzie oznaczona przez

$$T_t^{D,M} \quad \text{z } L^2\text{-generatorem} \quad A^{M,D} = (\phi(-\mathcal{L}^M))^D.$$

Jego spektrum:

$$0 \leq \lambda_1^{M,D} < \lambda_2^{M,D} \leq \lambda_3^{M,D} \leq \dots \rightarrow \infty. \quad (5.1.11)$$

5.1.4. Klasa Kato i półgrupy Feynmana-Kaca

Teraz wprowadzimy definicje dotyczące klasy Kato.

Definicja 5.1.5 1) Powiemy, że mierzalna funkcja $f : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \mathbb{R}$ należy do klasy Kato procesu X , oznaczanej przez \mathbb{K}^X , jeśli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \int_0^t \mathbf{E}^x |f(X_s)| ds = 0. \quad (5.1.12)$$

2) Powiemy, że f należy do lokalnej klasy Kato procesu X , oznaczonej przez \mathbb{K}_{loc}^X , jeśli dla dowolnej kuli $B = B(0, M)$ funkcja $f \cdot \mathbf{1}_B$ należy do \mathcal{K}^X .

3) Powiemy, że mierzalna funkcja $f : \mathcal{K}^{(M)} \rightarrow \mathbb{R}$ należy do klasy Kato procesu X^M , jeśli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{K}^{(M)}} \int_0^t \mathbf{E}^{x, M} |f(X_s^M)| ds = 0. \quad (5.1.13)$$

Przy poczynionych przez nas założeniach rozważane potencjały losowe należą do klas Kato odpowiednich procesów. Zachodzą poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 5.1.1 Niech V^ω będzie potencjałem typu kratowego (5.1.1), którego funkcja profilu W spełnia **(Q)** i **(A0)**, oraz niech dla ustalonego $M \in \mathbb{Z}$, V_M^ω będzie jego speriodyzowaną wersją (5.1.2). Wtedy, \mathbb{Q} -prawie na pewno:

- (i) $V^\omega \in \mathbb{K}_{loc}^X(\mathcal{K}^{(\infty)})$.
- (ii) Dla dowolnego $M \in \mathbb{Z}_+$, $V_M^\omega \in \mathbb{K}_{loc}^X(\mathcal{K}^{(\infty)})$.
- (iii) Dla dowolnego $M \in \mathbb{Z}_+$, $V_M^\omega \in \mathbb{K}^{X^M}(\mathcal{K}^{(M)})$.

Dowód.

(i) Wystarczy pokazać, że istnieje mierzalny zbiór $\Omega_0 \subset \Omega$ pełnej miary taki, że dla dowolnych $\omega \in \Omega_0$ i $M \in \mathbb{Z}_+$ warunek (5.1.12) zachodzi dla $V = V^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}$. Ponieważ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\sum_v \xi_v b_v) = (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \xi_1) \sum_v b_v < +\infty$, to szereg $\sum_v \xi_v b_v$ jest zbieżny w L^1 a zatem również prawie na pewno. Niech $\Omega_0 = \{\omega : \sum_v \xi_v(\omega) b_v < +\infty\}$ oraz dla ustalonego $M \in \mathbb{Z}$ niech $\omega \in \Omega_0$. Mamy:

$$V^\omega(x) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x) \left(\sum_{v \in V_0^{(M+1)}} \xi_v(\omega) W(x, v) + \sum_{v \in V_0^{(\infty)} \setminus V_0^{(M+1)}} \xi_v(\omega) W(x, v) \right).$$

Pierwsza suma składa się ze skończonej liczby składników. W drugiej sumie używamy ograniczenia z warunku **(A0)**: $W(x, v) \leq b_v$. W konsekwencji

$$V^\omega(x) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x) \leq \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x) \left(\sum_{\mathbf{i} \in V_0^{(M+1)}} \xi_v(\omega) W(x, v) + \sum_{v \in V_0^{(\infty)}} \xi_v(\omega) b_v \right),$$

a szereg $\sum_{v \in V_0^{(\infty)}} \xi_v(\omega) b_v$ jest zbieżny do skończonej granicy, \mathbb{Q} -prawie na pewno. Zachodzi:

$$\begin{aligned} \int_0^t T_s(V^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}})(x) ds &\leq \sum_{v \in V_0^{(M+1)}} \xi_v(\omega) \int_0^t T_s(W(x, v) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x)) ds + t \sum_{v \in V_0^{(\infty)}} \xi_v(\omega) b_v \\ &\leq \sum_{v \in V_0^{(M+1)}} \xi_v(\omega) \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \int_0^t T_s(W(x, v) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x)) ds + t \sum_{v \in V_0^{(\infty)}} \xi_v(\omega) b_v. \end{aligned}$$

Ponieważ zakładamy, że $W(\cdot, v)$ należy do lokalnej klasy Kato X dla każdego ustalonego $v \in V_0^{(\infty)}$, supremum w pierwszym członie zbiega do 0 gdy $t \rightarrow 0$. Występuje tam skończenie wiele wierzchołków v , a zatem cały pierwszy składnik dąży do 0. Szereg w drugim składniku jest \mathbb{Q} -prawie na pewno ograniczony, stąd dla $t \rightarrow 0$ całe wyrażenie jest zbieżne do zera.

(ii) Dowód jest identyczny z tym dla punktu (i) - wystarczy tylko zamienić ξ_v na $\xi_{\pi_M(v)}$.

(iii) Mamy teraz, dla $x \in \mathcal{K}^{(M)}$:

$$\begin{aligned} V_M^\omega(x) &= \sum_{v \in V_0^{(M)}} \xi_v(\omega) \sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v)} W(x, v') \\ &= \sum_{v \in V_0^{(M)}} \xi_v(\omega) \left(\sum_{v' \in \pi_M^{-1}(\mathbf{i}) \cap \mathcal{K}^{(M+1)}} W(x, v') + \sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v) \setminus \mathcal{K}^{(M+1)}} W(x, v') \right). \end{aligned}$$

Z definicji operatorów T_t^M mamy

$$\begin{aligned} T_s^M V_M^\omega(x) &= \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p_s^M(x, y) V_M^\omega(y) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \left(\sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} p_s(x, y') \right) V_M^\omega(y) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \left(\sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \cap \mathcal{K}^{(M+1)}} p_s(x, y') + \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \mathcal{K}^{(M+1)}} p_s(x, y') \right) V_M^\omega(y) d\mu(y) \\ &= T_s(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M+1)}}(x) V_M(x)) + \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \mathcal{K}^{(M+1)}} p_s(x, y') V_M^\omega(y) d\mu(y) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Fubiniiego-Tonelliego oraz oszacowań z [55, Lemat 3.4] mamy

$$\sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \mathcal{K}^{\langle M+1 \rangle}} p_s(x, y') = \int_0^\infty \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \mathcal{K}^{\langle M+1 \rangle}} g_u(x, y') \eta_s(du) \leq cL^{-d_f M},$$

co daje nam

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}} \int_0^t P_s^M(V_M^\omega(x)) ds \\ & \leq \sup_{x \in \mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}} \int_0^t P_s(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M+1 \rangle}}(x) V_M^\omega(x)) ds + \sup_{x \in \mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}} \int_0^t \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \mathcal{K}^{\langle M+1 \rangle}} p_s(x, y') V_M^\omega(y) d\mu(y) ds \\ & \leq \sup_{x \in \mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}} \int_0^t P_s(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M+1 \rangle}}(x) V_M^\omega(x)) ds + ctL^{-d_f M} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} V_M^\omega(y) d\mu(y) \end{aligned}$$

Jednostajna zbieżność pierwszego wyrazu do zera wynika z (ii). Co więcej, (ii) implikuje również, że $V_M^\omega \in L^1_{loc}$. Stąd całka w drugim wyrazie jest ograniczona, a cała suma dąży do zera gdy $t \rightarrow 0$.

□

Twierdzenie 5.1.2 *Niech V^ω będzie potencjałem Poissonowskim (5.1.3) którego funkcja profilu W spełnia $(A0')$, oraz niech V_M^ω będzie jego speriodyzowaną wersją (5.1.4), $M \in \mathbb{Z}$. Wtedy, \mathbb{Q} -prawie na pewno:*

- (a) $V^\omega \in \mathbb{K}_{loc}^X$,
- (b) $V_M^\omega \in \mathbb{K}_{loc}^X$,
- (c) $V_M^\omega \in \mathbb{K}_{loc}^{X^M}$.

Dowód.

Najpierw zauważmy, że skoro

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_{\mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}} h(y) \rho^\omega(dy) = \nu \int_{\mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}} h(y) d\mu(y),$$

to istnieje zbiór $\Omega_0 \subset \Omega$ pełnej miary \mathbb{Q} taki, że $h \in L^1(\mathcal{K}^{\langle M \rangle}, \rho^\omega)$ dla $\omega \in \Omega_0$.

Oznaczmy przez $\tilde{\rho}^\omega$ miarę liczącą odpowiadającą konfiguracji dla potencjału speriodyzowanego. Mamy

$$\tilde{\rho}^\omega = \pi_M^{-1}(\rho^\omega|_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}}),$$

zatem

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} h(y) \tilde{\rho}^{\omega}(dy) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_M} \int_{\Delta} h(y) \tilde{\rho}^{\omega}(dy) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_M} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_{\Delta} h(y) \rho^{\omega}(d(\pi_M y)).$$

Kluczowe jest, że losowe miary $\pi_M^{-1} \rho^{\omega}|_{\Delta}$, $\Delta \in \mathcal{T}_M$ mają takie same rozkłady jak $\rho^{\omega}|_{\Delta}$. W konsekwencji zachodzi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} h(y) \tilde{\rho}^{\omega}(dy) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} h(y) \rho^{\omega}(dy) = \nu \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} h(y) d\mu(y).$$

Możemy więc również założyć, że dla $\omega \in \Omega_0$ mamy $h \in L^1(\mathcal{K}^{(M)}, \tilde{\rho}^{\omega})$.

Dla $M \in \mathbb{Z}$ niech

$$\Omega_M = \{\omega \in \Omega : \text{skończenie wiele punktów Poissona znajduje się w } \mathcal{K}^{(M)}\}.$$

Mamy $\mathbb{Q}(\Omega_M) = 1$, a zatem $\tilde{\Omega} := \Omega_0 \cap \bigcap_M \Omega_M$ jest również pełnej miary. Dla $\omega \in \tilde{\Omega}$ oznaczymy przez $\{y_i(\omega)\}$ realizację rozważanego punktowego procesu Poissona.

(a) Niech $\omega \in \tilde{\Omega}$. Wystarczy pokazać, że warunek (5.1.12) zachodzi dla $V^{\omega} \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}$, $M \in \mathbb{Z}$.

Dla $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}$ mamy:

$$V^{\omega}(x) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x) \leq \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(x) \left(\sum_{y_i(\omega) \in \mathcal{K}^{(M+1)}} W(x, y_i(\omega)) + \int_{(\mathcal{K}^{(M+1)})^c} h(y) \rho^{\omega}(dy) \right).$$

Z tego wynika, że:

$$\begin{aligned} \int_0^t T_s(V^{\omega} \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}})(x) ds &= \int_0^t \mathbf{E}^x (V^{\omega}(X_s) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(X_s)) ds \\ &= \int_0^t \mathbf{E}^x \left(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}}(X_s) \left(\sum_{y_i(\omega) \in \mathcal{K}^{(M+1)}} W(X_s, y_i(\omega)) + \int_{(\mathcal{K}^{(M+1)})^c} h(y) \rho^{\omega}(dy) \right) \right) ds \\ &= \sum_{y_i(\omega) \in \mathcal{K}^{(M+1)}} \int_0^t T_s(W(\cdot, y_i(\omega)) \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(M)}})(x) ds + t \int_{(\mathcal{K}^{(M+1)})^c} h(y) \rho^{\omega}(dy). \end{aligned}$$

Ponieważ założyliśmy, że $W(\cdot, y) \in \mathbb{K}_{loc}^X$, to każda całka w pierwszej sumie zbiega do zera gdy $t \rightarrow 0$, jednostajnie względem x . Skoro mamy skończenie wiele składników, to cała suma zbiega jednostajnie względem x do 0. Drugie wyrażenie nie zależy od x , zatem może być oszacowane przez $t \|h\|_{L^1(\mathcal{K}^{(\infty)}, \mu^{\omega})}$. Punkt (a) zatem zachodzi.

(b) Dowód jest identyczny - zamieniamy tylko ρ^{ω} na $\tilde{\rho}^{\omega}$ i rozumiemy jak powyżej.

(c) Postępujemy podobnie jak w dowodzie [41, Proposition 2.5(3)]. Mamy:

$$T_s^M V_M^{\omega}(x) = \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p_M(s, x, y) V_M^{\omega}(y) d\mu(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{K}\langle M \rangle} \left(\sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} p(s, x, y') \right) V_M^\omega(y) d\mu(y) \\
&= \int_{\mathcal{K}\langle M \rangle} \left(\left(\sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \in \mathcal{K}\langle M \rangle}} + \sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \notin \mathcal{K}\langle M \rangle}} \right) p(s, x, y') \right) V_M^\omega(y) d\mu(y) \\
&= \int_{\mathcal{K}\langle M \rangle} \left(\left(\sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \in \mathcal{K}\langle M \rangle}} + \sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \notin \mathcal{K}\langle M \rangle}} \right) g(u, x, y') \eta_t(du) \right) V_M^\omega(y) d\mu(y)
\end{aligned}$$

W pierwszej sumie jest tylko jeden składnik, $g(u, x, y')$. Dla drugiej sumy wewnątrz całki mamy (używając notacji z [55], zob. wzór (3.3) Lemat 3.4 oraz wzór (3.7)):

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \notin \mathcal{K}\langle M \rangle}} g(u, x, y') &= g_M^{(1)}(u, x, y) + g_M^{(2)}(u, x, y) \\
&\leq c_1 L^{-Md} \left(\frac{L^M}{u^{1/d_w}} \vee 1 \right)^{d - \frac{d_w}{d_J - 1}} e^{-c_2 \left(\frac{L^M}{u^{1/d_w}} \vee 1 \right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}} + \frac{c_3}{u^{d_s/2}} e^{-\left(c_4 \frac{|x-y|^{d_w}}{u} \right)^{\frac{1}{d_J - 1}}} \\
&\leq c_5 L^{-Md} + c_6 g(c_7 u, x, y),
\end{aligned}$$

a zatem również,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \in \mathcal{K}\langle M \rangle}} + \sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \notin \mathcal{K}\langle M \rangle}} \right) g(u, x, y') \eta_t(du) &\leq \\
&\leq c_5 L^{-Md} + \int_0^\infty c_6 g(c_7 u, x, y) \eta_t(du) \\
&= c_5 L^{-Md} + c_6 p(c_7 t, x, y).
\end{aligned}$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned}
T_s^M V_M^\omega(x) &\leq \int_{\mathcal{K}\langle M \rangle} \left(p(s, x, y) + c_6 p(c_7 s, x, y) + c_5 L^{-Md} \right) V_M^\omega(y) d\mu(y) \\
&= T_s(V_M^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}\langle M \rangle})(x) + c_6 T_{c_7 s}(V_M^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}\langle M \rangle})(x) + c_5 L^{-Md} \int_{\mathcal{K}\langle M \rangle} V_M^\omega(y) d\mu(y),
\end{aligned}$$

co daje

$$\int_0^t T_s^M V_M^\omega(x) ds \leq \int_0^t T_s^M V_M^\omega(x) ds + c_6 \int_0^t T_{c_7 s}^M V_M^\omega(x) ds + c_5 t L^{-Md} \int_{\mathcal{K}\langle M \rangle} V_M^\omega(y) d\mu(y).$$

Na mocy udowodnionego już punktu (b) pierwsze dwie sumy dążą do zera jednostajnie względem $x \in \mathcal{K}^{(M)}$, a zbieżność trzeciej do zera wynika z faktu, że $V_M^\omega \in \mathcal{K}_{loc}^X \subset L_{loc}^1(\mathcal{K}^{(\infty)}, \mu)$. Dowód twierdzenia jest zakończony. \square

Mając dany losowy potencjał $V^\omega(\cdot)$, należący prawie na pewno do klasy Kato, definiujemy losową półgrupę Feynmana–Kaca $\{T_t^{V^\omega} : t \geq 0\}$ odpowiadającą subordynowanemu ruchowi Browna X . Podejście to pracuje zarówno dla potencjałów kratowych, jak i Poissonowskich.

$$T_t^{V^\omega} f(x) = \mathbf{E}^x \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} f(X_t); \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{(\infty)}, \mu), \quad t > 0;$$

Półgrupa ta jest mocno ciągła na $L^2(\mathcal{K}^{(\infty)}, \mu)$ i składa się z operatorów symetrycznych. Jej generator jest postaci $-H^\omega$, gdzie $H^\omega = \phi(-\mathcal{L}) + V^\omega$. Jest to losowy operator Schrödingera, oparty na generatorze subordynowanego ruchu Browna X na $\mathcal{K}^{(\infty)}$ (pamiętajmy, że ϕ jest wykładnikiem Laplace’a subdynatora S , wprowadzonego w Rozdziale 1.3.1, a operator \mathcal{L} to generator zwykłego ruchu Browna na nieograniczonym zagnieżdżonym fraktalu). Operatory Schrödingera oparte na generatorach procesów Fellera i odpowiadające im półgrupy Feynmana–Kaca są szczegółowo omówione w książce [22] autorstwa Demuth i Casteren (zob. również [21, Rozdziały 3.2-3.3]).

Definiujemy dwie losowe półgrupy Feynmana–Kaca $\{T_t^{D,M,\omega} : t \geq 0\}$ i $\{T_t^{N,M,\omega} : t \geq 0\}$ odpowiadające procesowi X zabitemu przy wyjściu z sympleksu $\mathcal{K}^{(M)}$ oraz procesowi odbitemu X^M poruszającemu się w sympleksie $\mathcal{K}^{(M)}$. Formalnie, niech

$$T_t^{D,M,\omega} f(x) = \mathbf{E}^x \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} f(X_t); t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}} \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{(M)}, \mu), \quad M \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0;$$

$$T_t^{N,M,\omega} f(x) = \mathbf{E}_M^x \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M) ds} f(X_t^M) \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{(M)}, \mu), \quad M \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0,$$

gdzie $\tau_{\mathcal{K}^{(M)}} = \inf\{t : X_t \notin \mathcal{K}^{(M)}\}$ oznacza czas pierwszego wyjścia procesu ze zbioru $\mathcal{K}^{(M)}$. Dodatkowo oznaczmy przez $A^{D,M,\omega}$ i $A^{N,M,\omega}$ generatory tych półgrup na $L^2(\mathcal{K}^{(M)}, \mu)$. Zabijanie przy wyjściu oraz odbijanie odpowiada zadaniu warunków brzegowych *Dirichleta* lub *Neumanna*. A zatem

$$H_{M,\omega}^D := -A^{D,M,\omega} \quad (\text{odp.} \quad H_{M,\omega}^N := -A^{N,M,\omega})$$

mogą być rozumiane jako *uogólnione operatory Schrödingera odpowiadające generatorom subordynowanego ruchu Browna X z zadanymi warunkami brzegowymi Dirichleta (odp. Neumanna)*.

Operatory $T_t^{D,M,\omega}$ i $T_t^{N,M,\omega}$, $t > 0$, są typu całkowego: dla dowolnego $t > 0$ istnieją symetryczne i ograniczone jądra $u_{M,\omega}^D(t, x, y)$ i $u_{M,\omega}^N(t, x, y)$ takie, że

$$\begin{aligned} T_t^{D,M,\omega} f(x) &= \int_{\mathcal{K}^{(M)}} u_{M,\omega}^D(t, x, y) f(y) \mu(dy), \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{(M)}, \mu) \\ T_t^{N,M,\omega} f(x) &= \int_{\mathcal{K}^{(M)}} u_{M,\omega}^N(t, x, y) f(y) \mu(dy), \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{(M)}, \mu). \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Powyższe jądra mają reprezentację używającą mostów:

$$\begin{aligned} u_{M,\omega}^D(t, x, y) &= p(t, x, y) \mathbf{E}_t^{x,y} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds}; t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}} \right] \\ u_{M,\omega}^N(t, x, y) &= p_M(t, x, y) \mathbf{E}_{M,t}^{x,y} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M) ds} \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnego $t > 0$ jądra te są ograniczone oraz $\mu(\mathcal{K}^{(M)}) < \infty$, to operatory $T_t^{D,M,\omega}$, $T_t^{N,M,\omega}$, $t > 0$, są typu Hilberta-Schmidta. W związku tym ich spektra $H_{M,\omega}^D$ i $H_{M,\omega}^N$ składają się izolowanych wartości własnych o skończonej krotności oraz zachodzi

$$0 \leq \lambda_1^{D,M}(\omega) < \lambda_2^{D,M}(\omega) \leq \lambda_3^{D,M}(\omega) \leq \dots \rightarrow \infty$$

i

$$0 \leq \lambda_1^{N,M}(\omega) < \lambda_2^{N,M}(\omega) \leq \lambda_3^{N,M}(\omega) \leq \dots \rightarrow \infty.$$

5.1.5. Istnienie IDS

Rozważamy losowe miary empiryczne na $[0, \infty)$ oparte na spektrach operatorów $H_{M,\omega}^D$ i $H_{M,\omega}^N$, unormowane przez $\mu(\mathcal{K}^{(M)})$:

$$\Lambda_M^{D,\omega} := \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\lambda_n^{D,M}(\omega)} \quad (5.1.15)$$

oraz

$$\Lambda_M^{N,\omega} := \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\lambda_n^{N,M}(\omega)}. \quad (5.1.16)$$

Aby udowodnić istnienie IDS, rozważać będziemy transformaty Laplace'a miar $\Lambda_{M,\omega}^D$ i $\Lambda_{M,\omega}^N$.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_M^D(t, \omega) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Lambda_M^{D,\omega}(d\lambda) \\ &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^{D,M}(\omega)t} = \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \text{Tr} T_t^{D,M,\omega} \\ &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} u_{M,\omega}^D(t, x, x) \mu(dx) \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

$$= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds}; t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \right] \mu(dx)$$

i

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_M^N(t, \omega) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Lambda_M^{N,\omega}(d\lambda) \\ &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n^{N,M}(\omega)t} = \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \text{Tr} T_t^{N,M,\omega} \\ &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} u_{M,\omega}^N(t, x, x) \mu(dx) \\ &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} p_M(t, x, x) \mathbf{E}_{M,t}^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M) ds} \right] \mu(dx). \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Na zakończenie, podamy teraz sformułowanie twierdzenia dotyczącego istnienia IDSu.

Twierdzenie 5.1.3 (Istnienie IDS) *Niech $\mathcal{K}^{(\infty)}$ będzie nieograniczonym fraktalem zagnieżdżonym z GLP. Załóżmy, że w przypadku potencjału kratowego spełnione są założenia **(B)**, **(Q)** oraz **(A0)**–**(A2)**, a w przypadku potencjału Poissonowskiego **(B)**, **(A0')**, **(A1')** i **(A2)**. Wtedy losowe miary $\Lambda_{M,\omega}^D$ i $\Lambda_{M,\omega}^N$ są \mathbb{Q} -prawie na pewno słabo zbieżne gdy $M \rightarrow \infty$ do wspólnej nielosowej miary granicznej Λ na $[0, \infty)$.*

Dla potencjału kratowego dowód został podany w w pracy doktorskiej [54] jednak w nieco mniejszej ogólności. Ponieważ nie jest ona publicznie dostępna, dowód (w ogólności jak w twierdzeniu 5.1.3) również zamieszczamy w Dodatku.

W przypadku potencjału Poissona dowód istnienia jest niewielką modyfikacją dowodu na trójkącie Sierpińskiego z pracy [42].

Rozdział 6

Osobliwość Lifschitza dla potencjału typu kratowego

W tym rozdziale wykażemy, że dla całkowitej gęstości stanów dla procesów subordynowanych na $\mathcal{K}^{(\infty)}$ z potencjałem typu kratowego zachodzi osobliwość Lifschitza.

Przypomnijmy, że będziemy badać transformatę Laplace'a miary granicznej ciągu miar (5.1.18) i (5.1.17) gdy $M \rightarrow \infty$. Oznaczana ona jest przez $\mathbb{L}(t)$.

Zachowanie IDS blisko 0 odzwierciedlać będzie zachowanie wspólnej funkcji dystrybuanty zmiennych losowych ξ_v , tj. funkcji

$$F_\xi(t) := \mathbb{Q}[\xi_v \leq t]. \quad (6.0.1)$$

Przypomnijmy również, że pracujemy przy założeniu **(Q)**, stwierdzającym, że zmienne losowe ξ_v są niezdegenerowane i całkowalne. To założenie było potrzebne do zdefiniowania półgrupy Feynmana-Kaca i ustalenia istnienia IDS. Teraz wymagamy nieco więcej regularności. Potrzebujemy, aby funkcja F_ξ spełniała

(Q1) $F_\xi(\lambda) > 0$ dla $\lambda > 0$, $F_\xi^+(0) < 1$, oraz istnieje $\lambda_0 > 0$ takie, że F_ξ jest ciągła na $[0, \lambda_0]$ (z możliwą lewostronną nieciągłością w 0, odpowiadającą atomowi w 0).

Ponadto nadal zakładamy **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**.

Na początek wprowadzimy stałą strukturalną, która pojawia się w tempie zbieżności IDSu do zera.

Zwróćmy uwagę, że ponieważ zachodzi **(A2.a)**, to całkowanie w **(A2.c)** przebiega po zbiorze $\Delta_{M_0}(v)$, którego miara jest ograniczona przez $\mu(\Delta_{M_0}(v)) \leq \text{rank}(v)L^{M_0d} < \infty$.

Z nierówności Jensena mamy, że jeśli **(A2.c)** zachodzi, to również L^1 -normy W są jednostajnie ograniczone, to znaczy:

$$N_1 := \sup_{v \in V_0^\infty} \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} W(x, v) \mu(dx) < \infty. \quad (6.0.2)$$

Niech teraz $\chi = \lambda_2^M$ będzie drugą wartością własną generatora subordynowanego odbijanego ruchu Browna na $\mathcal{K}^{(M)}$, $\phi(-\mathcal{L}^M)$. Analogicznie, niech μ_2^M oznacza drugą wartość własną $(-\mathcal{L}^M)$, bez interakcji z potencjałem. Z własności subordynacji oraz skalowania wartości własnych (5.1.9) odbijanego ruchu Browna $\mathcal{K}^{(M)}$ dostajemy, że:

$$\chi := \phi(\mu_2^M) = \phi(L^{-Md_w} \mu_2^1)$$

i korzystając z (1.3.4) mamy, że istnieje $M_1 \in \mathbb{Z}_+$ takie, że kiedy $M \geq M_1$, to

$$\frac{\tilde{C}_1}{L^{Md_w\alpha}} \leq \chi \leq \frac{\tilde{C}_2}{L^{Md_w\alpha}} \quad (6.0.3)$$

gdzie $\tilde{C}_1 = C_{\phi,1}(\mu_2^1)^\alpha$ i $\tilde{C}_2 = C_{\phi,2}(\mu_2^1)^\alpha$ ($C_{\phi,1}$ i $C_{\phi,2}$ są stałymi z (1.3.4)). Zdefiniujmy teraz stałe

$$R_0 := \max_{x \in V_0^{(\infty)}} \text{rank}(x) \cdot C_0 L^{M_0 d}. \quad (6.0.4)$$

oraz

$$D_0 := \frac{\tilde{C}_1}{2C_0 N_1} \wedge \frac{\tilde{C}_1 A_0 L^{m_0 d}}{4R_0 N_2} \quad (6.0.5)$$

gdzie C_0 pochodzi (3.1.5), N_1 z (6.0.2), m_0 z warunku **(A2.b)**.

Podobnie do [41, Rozdział 3] wprowadźmy funkcje:

$$g(x) := \ln \frac{1}{F_\xi\left(\frac{D_0}{x}\right)}, \quad j(x) := x^{d+d_w\alpha} g(x^{d_w\alpha}), \quad x > 0, \quad (6.0.6)$$

ze stałą $D_0 > 0$ zdefiniowaną w (6.0.5). Funkcje:

$$x_t := j^{-1}(t), \quad h(t) := g(x_t^{d_w\alpha}) \quad t > 0, \quad (6.0.7)$$

są dobrze zdefiniowane i spełniają warunki

$$t = x_t^{d+d_w\alpha} h(t) = x_t^{d+d_w\alpha} \ln \frac{1}{F_\xi\left(\frac{D_0}{x_t^{d_w\alpha}}\right)}. \quad (6.0.8)$$

Ponadto mamy $x_t \rightarrow \infty$ gdy $t \rightarrow \infty$.

Naszym celem jest poniższe twierdzenie. Jest ono podobne do swojego odpowiednika w przypadku \mathbb{R}^d (zob. [41, Theorem 1.1]).

Twierdzenie 6.0.1 *Załóżmy, że są spełnione warunki (A0) – (A2), (B), (Q) oraz (Q1).*

Wtedy istnieją stałe dodatnie $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ takie, że

$$\begin{aligned} -\tilde{L}_1 &\leq \liminf_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda])}{g(\tilde{R}_1/\lambda)}; \\ \limsup_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda])}{g(\tilde{R}_2/\lambda)} &\leq -\tilde{L}_2, \end{aligned} \quad (6.0.9)$$

gdzie funkcja g została zdefiniowana w (6.0.6) powyżej.

Zauważmy, że gdy $\lim_{\kappa \rightarrow 0} F_\xi(\kappa) > 0$ (rozkład zmiennej ξ przyjmuje wartość 0 z dodatnim prawdopodobieństwem), to wyrażenie (6.0.9) można zapisać jako

$$-\tilde{L}_3 \leq \liminf_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda]) \leq \limsup_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda]) \leq -\tilde{L}_4,$$

gdzie \tilde{L}_3, \tilde{L}_4 to pewne stałe dodatnie.

Do dowodu tego twierdzenia nie będziemy podchodzić bezpośrednio. Zamiast tego zbadamy zachowanie transformaty Laplace’a IDS, \mathbb{L} , w nieskończoności, a następnie użyjemy argumentu typu Tauberowskiego, aby wyznaczyć asymptotyczne zachowanie IDS w zerze.

6.1. Oszacowanie górne transformaty Laplace’a IDS-u

Zacniemy od oszacowania górnego, które pozwoli nam ustalić tempo zbieżności.

Twierdzenie 6.1.1 *Załóżmy, że zachodzą (B), (Q), (Q1), (A0) – (A2). Wtedy istnieje stała $K_1 > 0$ taka, że*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}} \cdot h(t)^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}} \leq -K_1, \quad (6.1.1)$$

gdzie funkcja h została zdefiniowana w (6.0.7). W szczególności, gdy $F_\xi(0) > 0$, to

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}}} \leq -K_1 \cdot \left(\ln \frac{1}{F_\xi(0)} \right)^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}. \quad (6.1.2)$$

Dowód. Z wniosku 8.0.1 w Dodatku mamy, że dla wszystkich $M \in \mathbb{Z}_+$ i $t > 0$ zachodzi

$$\mathbb{L}(t) \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p_M(t, x, x) \mathbf{E}_{M,t}^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V_M^\omega(X_s^M) ds} \right] \mu(dx) \right].$$

Całka po prawej stronie tej równości jest śladem operatora odpowiadającego odbitemu subordynowanemu procesowi na $\mathcal{K}^{(M)}$ z potencjałem $V_M^\omega(x)$, wprowadzonym w (5.1.2), zatem dla każdego $t > 0$, $M \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathbb{L}(t) \leq \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \text{Tr } T_t^{N,M,\omega}.$$

Możemy to szacować w ten sam sposób jak w ([42, p. 3921]):

$$\leq \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)} \right] \sup_{x \in \mathcal{K}^{(M)}} p_M(1, x, x), \quad (6.1.3)$$

gdzie $\{\lambda_n^{N,M}(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ to zbiór wartości własnych generatora półgrupy $(T_t^{N,M,\omega})_{t \geq 0}$, danej przez (5.1.4). Ponieważ mamy

$$A^* := \sup_{M \geq 0} \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \sup_{x \in \mathcal{K}^{(M)}} p_M(1, x, x) < \infty,$$

pozostaje nam oszacowanie z dołu wartości własnej w wykładniku w (6.1.3).

Ustalmy $M \in \mathbb{Z}_+$. Zamieniamy zmienne losowe ξ_v na obcięte zmienne losowe $\tilde{\xi}_v$, gdzie

$$\tilde{\xi}_v := \xi_v \wedge \frac{D_0}{L_{Madw}}, \quad v \in V_0^{(M)}. \quad (6.1.4)$$

Przez \tilde{V}_M^ω oznaczymy potencjał powstający tak jak V_M^ω (zob (5.1.2)), poprzez zamianę zmiennych losowych ξ_v na $\tilde{\xi}_v$:

$$\tilde{V}_M^\omega(x) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \left(\sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v)} W(x, v') \right), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}. \quad (6.1.5)$$

Przez $\{\tilde{\lambda}_n^{N,M}(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ oznaczymy zbiór wartości własnych generatora odpowiadającej mu półgrupy. Ponieważ $\tilde{\lambda}_n^{N,M}(\omega) \leq \lambda_n^{N,M}(\omega)$, to wystarczy znaleźć dolne ograniczenie dla $\tilde{\lambda}_1^{N,M}(\omega)$. W tym celu użyjemy nierówności Temple'a.

Twierdzenie 6.1.2 (Nierówność Temple'a, [60, Twierdzenie XIII.5]) *Załóżmy, że H jest samosprzężonym operatorem na pewnej przestrzeni Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ takim, że $\lambda_1 := \inf \sigma(H)$ jest wartością własną izolowaną i niech $\chi \leq \inf(\sigma(H) \setminus \{\lambda_1\})$. Wtedy dla dowolnej funkcji $\psi \in \mathcal{D}(H)$ spełniającej warunek*

$$\langle \psi, H\psi \rangle < \chi \quad i \quad \|\psi\| = 1 \quad (6.1.6)$$

zachodzi:

$$\lambda_1 \geq \langle \psi, H\psi \rangle - \frac{\langle H\psi, H\psi \rangle - \langle \psi, H\psi \rangle^2}{\chi - \langle \psi, H\psi \rangle}. \quad (6.1.7)$$

Używając nierówności Temple'a udowodnimy poniższy lemat.

Lemat 6.1.1 *Przy założeniach (B),(Q),(Q1),(A0) oraz (A2) istnieje $M_2 \geq M_1$ takie, że dla dowolnego $M \geq M_2$ mamy*

$$\lambda_1^{N,M}(\omega) \geq \tilde{\lambda}_1^{N,M}(\omega) \geq \frac{1}{L^{Md}} \left[\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) - \frac{\int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 \mu(dx)}{L^{-Md} \alpha[\tilde{C}_1/2]} \right], \quad (6.1.8)$$

gdzie stała \tilde{C}_1 pochodzi z (6.0.3).

Dowód. Załóżmy, że M jest ustalone i takie, że $M \geq M_1 \vee M_0$. Skoro $\tilde{V}_M^\omega \leq V_M^\omega$, to zachodzi $\lambda_1^{M, V_M^\omega} \geq \lambda_1^{M, \tilde{V}_M^\omega}$. Zastosujemy teraz nierówność Temple'a do operatora \tilde{H}_M^ω w przestrzeni $L^2(\mathcal{K}^{(M)})$, zdefiniowanego podobnie jak $H_{M,\omega}^N$, ale z potencjałem \tilde{V}_M^ω i $\chi = \lambda_2^M$ (nielosowym).

Spektrum operatora $H = \tilde{H}_{M,\omega}^N$ jest dyskretne i zachodzi

$$\chi = \lambda_2^M \leq \tilde{\lambda}_2^{N,M}(\omega) = \inf \left(\sigma(\tilde{H}_{M,\omega}^N) \setminus \left\{ \tilde{\lambda}_1^{N,M}(\omega) \right\} \right).$$

Żeby skorzystać z nierówności Temple'a, wybieramy $\psi = \psi_1^M \equiv \frac{1}{L^{Md/2}}$. Jest to znormalizowana funkcja własna odpowiadająca wartości własnej λ_1^M generatora \mathcal{L}^M . Półgrupa $(T_t^M)_{t \geq 0}$ o generatorze $\phi(-\mathcal{L}^M)$ zachowuje masę, zatem $\phi(-\mathcal{L}^M)\psi = 0$. Dalej mamy

$$\langle \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle = \langle \psi, \phi(-\mathcal{L}^M)\psi \rangle + \langle \psi, \tilde{V}_M^\omega \psi \rangle = \langle \psi, \tilde{V}_M^\omega \psi \rangle = \frac{1}{L^{Md}} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx).$$

Z definicji \tilde{V}_M^ω dostajemy, że

$$\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) = \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \left(\sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v)} W(x, v') \right) \mu(dx).$$

Z warunku (A2.a), wynika, że $W(x, v') \neq 0$ jest możliwe tylko kiedy punkty v' i x należą do tego samego M_0 -sympleksu, t.j. gdy $v' \in \Delta_{M_0}(x)$. Dla punktów $x \in \text{Int } \mathcal{K}^{(M)}$ i $M \geq M_0$ (założenie) mamy $\Delta_{M_0}(x) \subset \mathcal{K}^{(M)}$, w szczególności potrzebujemy mieć $v' \in \mathcal{K}^{(M)}$. A zatem, w sumie $\sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v)} W(x, v')$ jest co najwyżej jeden niezerowy składnik – mianowicie $W(x, v)$. Dostajemy zatem:

$$\tilde{V}_M^\omega(x) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) W(x, v),$$

co prowadzi do

$$\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) = \int_{\text{Int } \mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \int_{\mathcal{K}^{(M)}} W(x, v) \mu(dx)$$

$$\leq \left(\sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \right) \sup_{v \in V_0^{(M)}} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} W(x, v) \mu(dx) \leq C_0 L^{Md} \cdot \frac{D_0}{L^{M\alpha d_w}} \cdot N_1.$$

($C_0 L^{Md}$ to oszacowanie liczby punktów z $V_0^{(M)}$, $\frac{D_0}{L^{M\alpha d_w}}$ - oszacowanie zmiennych $\tilde{\xi}_v(\omega)$, zaś N_1 pochodzi z (6.0.2)).

Korzystając z definicji D_0 , (6.0.5),

$$\langle \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle \leq \frac{N_1 C_0 D_0}{L^{M\alpha d_w}} \leq \frac{\tilde{C}_1}{2L^{M\alpha d_w}}.$$

ale z (1.3.4) wynika, że możemy znaleźć takie $M_2 \in \mathbb{Z}_+$, $M_2 \geq M_1$, że dla $M \geq M_2$ zachodzi

$$\tilde{C}_1 L^{-M\alpha d_w} < \phi(\mu_2^1 \cdot L^{-Md_w}) = \lambda_2^M = \chi,$$

co znaczy, że warunek (6.1.6) jest spełniony.

Następnie,

$$\begin{aligned} \chi - \langle \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle &= \lambda_2^M - \langle \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle \\ &\geq \frac{\tilde{C}_1}{L^{Md_w\alpha}} - \frac{N_1 C_0 D_0}{L^{Md_w\alpha}} \geq \frac{\tilde{C}_1}{2L^{Md_w\alpha}}. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Wstawiając teraz (6.1.9) do wzoru w nierówności Temple'a (6.1.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1^{N,M}(\omega) &\geq \langle \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle - \frac{\langle \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle - \langle \psi, \tilde{H}_{M,\omega}^N \psi \rangle^2}{L^{-Md_w\alpha} [\tilde{C}_1/2]} \\ &= \frac{1}{L^{Md}} \left[\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) - \frac{\int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 \mu(dx) - \left(\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) \right)^2}{L^{-Md_w\alpha} [\tilde{C}_1/2]} \right] \\ &\geq \frac{1}{L^{Md}} \left[\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) - \frac{\int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 \mu(dx)}{L^{-Md_w\alpha} [\tilde{C}_1/2]} \right] \end{aligned}$$

□

Powyższa nierówność będzie przydatna, kiedy w naszym modelu będzie odpowiednio dużo losowości. Ustalmy teraz $\delta \in (0, 1)$ (później pokażemy jak wybrać właściwą wartość) i zdefiniujmy zbiór:

$$\mathcal{A}_{M,\delta} = \left\{ \omega : \# \left\{ v \in V_0^{(M)} : \xi_v(\omega) > \frac{D_0}{L^{Md_w\alpha}} \right\} \geq \delta \cdot k_0^{(M)} \right\},$$

gdzie $k_0^{(M)}$ to liczba punktów w $V_0^{(M)}$ (oszacowanie dla $k_0^{(M)}$ było podane w (3.1.5)).

Udowodnimy teraz kolejny lemat.

Lemat 6.1.2 Załóżmy, że są spełnione warunki **(B)**, **(Q)**, **(Q1)**, **(A0)** i **(A2)**, ponadto niech $\delta > 0$ będzie ustalone. Istnieje stała $B_0 > 0$ taka, że dla dowolnego $M \geq M_2$ (M_2 pochodzi z lematu 6.1.1) i dla $\omega \in \mathcal{A}_{M,\delta}$ zachodzi

$$\lambda_1^{N,M}(\omega) \geq \frac{B_0 \delta}{L M d_w \alpha}.$$

Dowód. Przypomnijmy, że dla $x \in \text{Int } \mathcal{K}^{(M)}$ mamy

$$\tilde{V}_M^\omega(x) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \left(\sum_{v' \in \pi_M^{-1}(v)} W(x, v') \right) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) W(x, v) \quad (6.1.10)$$

(zob. rozumowanie w dowodzie Lematu 6.1.1). Liczba składników w ostatniej sumie jest równa liczbie wierzchołków w $V_0^{(\infty)}$ wewnątrz $\Delta_{M_0}(x)$, która z kolei nie przekracza R_0 ($= \max \text{rank } x \cdot C_0 \cdot L^{M_0 d}$), zob. (6.0.4). Zatem dostajemy, że

$$(\tilde{V}_M^\omega(x))^2 \leq R_0 \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega)^2 W(x, v)^2$$

i dalej, korzystając z definicji N_2 w **(A2.c)**,

$$\int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 \mu(dx) \leq R_0 \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega)^2 \left(\int_{\mathcal{K}^{(M)}} W(x, v)^2 \mu(dx) \right) \leq R_0 N_2 \cdot \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega)^2. \quad (6.1.11)$$

Dzięki (6.1.10) i **(A2.b)** otrzymujemy

$$\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) \mu(dx) = \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \int_{\mathcal{K}^{(M)}} W(x, v) \mu(dx) \geq A_0 L^{m_0 d} \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega). \quad (6.1.12)$$

Zauważmy również, że

$$\sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v^2(\omega) \leq \frac{D_0}{L M d_w \alpha} \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega). \quad (6.1.13)$$

Ponadto dla $\omega \in \mathcal{A}_{M,\delta}$ mamy

$$\sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \geq \frac{D_0}{L M d_w \alpha} \cdot \delta \cdot k_0^{(M)} \geq \frac{D_0}{L M d_w \alpha} \cdot \delta \cdot L^{M d}. \quad (6.1.14)$$

Wstawiając oszacowania (6.1.11) i (6.1.12) do (6.1.8), następnie korzystając z definicji D_0 , nierówności (6.1.13), (6.1.14) oraz przegrupowując, otrzymujemy:

$$\lambda_1^{M, V_M^\omega} \geq \frac{1}{L^{M d}} \left[A_0 L^{m_0 d} \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) - \frac{R_0 N_2 \cdot \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega)^2}{L^{-M d_w \alpha} [\tilde{C}_1/2]} \right]$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{L^{Md}} \sum_{v \in V_0^{(M)}} \tilde{\xi}_v(\omega) \left[A_0 L^{m_0 d} - \frac{R_0 N_2 D_0}{\lceil \tilde{C}_1/2 \rceil} \right] \\
&\geq \frac{\delta L^{Md} D_0}{L^{Md_w \alpha}} \left(A_0 L^{m_0 d} - \frac{R_0 N_2 D_0}{\lceil \tilde{C}_1/2 \rceil} \right) \geq \frac{\delta D_0}{L^{Md_w \alpha}} \cdot \frac{A_0 L^{m_0 d}}{2} \\
&=: \frac{B_0 \delta}{L^{Md_w \alpha}},
\end{aligned}$$

a zatem dowód jest skończony. \square

Zanim zaczniemy dowód twierdzenia 6.1.1, przypomnijmy nierówność Bernsteina dla rozkładu dwumianowego (zob. np. [41, Lemma 3.5]), z której będziemy korzystać.

Fakt 6.1.1 *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $B(n, p)$, $n \geq 1, p \in (0, 1)$. Wtedy dla dowolnych $p, \gamma \in (0, 1)$ takich, że $\gamma > p$ zachodzi*

$$\mathbb{P}[S_n \geq \gamma n] \leq \left(\left(\frac{1-p}{1-\gamma} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{p}{\gamma} \right)^\gamma \right)^n. \quad (6.1.15)$$

\square

Kontynuacja dowodu twierdzenia (6.1.1). Wychodząc od nierówności (6.1.3) dostajemy

$$\mathbb{L}(t) \leq \frac{A^*}{L^{Md}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)}; \mathcal{A}_{M,\delta} \right] + \frac{A^*}{L^{Md}} \mathbb{Q}[\mathcal{A}_{M,\delta}^c], \quad t > 1.$$

Żeby oszacować całkę po zbiorze $\mathcal{A}_{M,\delta}$ użyjemy lematu 6.1.2, otrzymując

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)}; \mathcal{A}_{M,\delta} \right] \leq e^{-(t-1)B_0 \delta L^{-Md_w \alpha}}, \quad M \geq M_2,$$

a drugą część oszacujemy za pomocą wniosku (6.1.1).

W istocie, zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{M,\delta}^c &= \left\{ \omega : \# \left\{ v \in V_0^{(M)} : \xi_v(\omega) > \frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}} \right\} < \delta \cdot k_0^{(M)} \right\} \\
&= \left\{ \omega : \# \left\{ v \in V_0^{(M)} : \xi_v(\omega) \leq \frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}} \right\} \geq (1-\delta) \cdot k_0^{(M)} \right\}
\end{aligned}$$

(przypomnijmy, że $k_0^{(M)}$ jest liczbą elementów w zbiorze $V_0^{(M)}$). Używamy wniosku (6.1.1) z parametrami $n = k_0^{(M)}$, $p = p_M = F_\xi\left(\frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}}\right)$ i $\gamma = (1-\delta)$. Musimy mieć pewność że zachodzi $\gamma > p_M \Leftrightarrow \delta < 1 - p_M$. Ale skoro $\lim_{M \rightarrow \infty} p_M = F_\xi(0) \in (0, 1)$, to nie jest to problemem,

wystarczy wziąć dostatecznie duże M . Ponadto, ponieważ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1-\delta} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} = 1$ i $M \mapsto p_M$ jest nierosnąca, to możemy znaleźć $M_3 \geq M_2$ i uniwersalną wartość $\delta_0 > 0$ taką, że dla $M > M_3$ zachodzi zarówno $1 - p_M > \delta_0$, jak i

$$\left(\frac{1 - p_M}{\delta_0}\right)^{\delta_0} \frac{1}{(1 - \delta_0)^{1 - \delta_0}} < 1.$$

Z (6.1.15) i nierówności (3.1.5) otrzymujemy, że dla $M \geq M_3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[\mathcal{A}_{M, \delta_0}^c] &\leq p_M^{\gamma^n} = p_M^{(1 - \delta_0) \cdot k_0^{(M)}} \\ &\leq e^{-(1 - \delta_0) \cdot L^{Md} \ln \frac{1}{p_M}}. \end{aligned}$$

Niech

$$c_1 = \frac{B_0 \delta_0}{2}, \quad c_2 = (1 - \delta_0).$$

W konsekwencji dostajemy, że istnieje $t_0 > 1$ takie, że dla każdego $t \geq t_0$ i $M \geq M_3$ mamy, z odpowiednią stałą $c_3 > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(t) &\leq A^* \left(e^{-\frac{2c_1(t-1)}{L^{Md_w \alpha}}} + e^{-c_2 \cdot L^{Md} \ln \frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}})}} \right) \\ &\leq A^* \left(e^{-\frac{c_3 t}{(L^{M-1})^{d_w \alpha}}} + e^{-c_3 \cdot L^{Md} \ln \frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}})}} \right). \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Uzależnimy teraz M od t w ten sposób, że $M \rightarrow \infty$ gdy $t \rightarrow \infty$. Niech x_t będzie zdefiniowane jak w (6.0.7). Ponieważ $x_t \rightarrow \infty$ gdy $t \rightarrow \infty$, to istnieje jednoznacznie wyznaczone $M = M(t)$ dla którego zachodzi

$$L^{M-1} < x_t \leq L^M, \quad t \geq t_0. \quad (6.1.17)$$

Zatem istnieje $t_1 \geq t_0$ takie, że dla $t \geq t_1$ mamy $M \geq M_3$. A dzięki (6.0.8)

$$(L^{M-1})^{d_w \alpha} \leq x_t^{d_w \alpha} = \left(\frac{t}{\ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^{d_w \alpha})}} \right)^{\frac{d_w \alpha}{d + d_w \alpha}}$$

oraz

$$\frac{t}{(L^{M-1})^{d_w \alpha}} > t^{\frac{d}{d + d_w \alpha}} \left(\ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^{d_w \alpha})} \right)^{\frac{d_w \alpha}{d + d_w \alpha}}, \quad t \geq t_1.$$

Biorąc pod uwagę, że funkcja $x \mapsto x^d \ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x^{d_w \alpha})}$ jest rosnąca i $x_t \leq L^M$, to z (6.0.7) dostajemy, że:

$$L^{Md} \ln \frac{1}{F_\xi(D_0/L^{Md_w \alpha})} \geq x_t^d \ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^{d_w \alpha})} = t^{\frac{d}{d + d_w \alpha}} \left(\ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^{d_w \alpha})} \right)^{\frac{d_w \alpha}{d + d_w \alpha}},$$

co implikuje:

$$\mathbb{L}(t) \leq 2A^* e^{-c_3 t^{\frac{d}{d+d_w\alpha}} \left(\ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^{\frac{d}{d+d_w\alpha}})} \right)^{\frac{d_w\alpha}{d+d_w\alpha}}} = 2A^* e^{-c_3 t^{\frac{d}{d+d_w\alpha}} (h(t))^{\frac{d_w\alpha}{d+d_w\alpha}}}, \quad t \geq t_1.$$

Aby zakończyć dowód, obustronnie logarytmujemy, przegrupowujemy i przechodzimy do granicy z $t \rightarrow \infty$. Otrzymujemy oszacowanie (6.1.1). Nierówność (6.1.2) również zachodzi, wystarczy zauważyć, że gdy mamy atom w 0, to wtedy $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \ln \frac{1}{F_\xi(0)}$. \square

6.2. Ograniczenie dolne transformaty Laplace'a IDS-u

Zaproponowane tempo zbieżności w asymptotykach IDS (Twierdzenie 6.1.1), możemy uzupełnić właściwą granicą dolną. Zanim jednak przejdziemy dalej zauważymy, że ograniczenie (1.3.6) w naszym konkretnym przypadku daje: dla każdego $t_0 > 0$ istnieje $C(t_0)$ takie, że

$$p(t, x, x) \leq C(t_0) t^{\frac{-d}{d+d_w\alpha}}, \quad t \geq t_0. \quad (6.2.1)$$

Potrzebujemy również wersji [41, Lemat 4.1], dostosowanej do naszego przypadku. Po prostu zamieniamy przestrzeń \mathbb{R}^d na $\mathcal{K}^{(\infty)}$ i powtarzamy dowód. Lemat jest następujący.

Lemat 6.2.1 *Niech $V : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie potencjałem, należącym do $\mathbb{K}_{loc}^X \cap L^1(\mathcal{K}^{(\infty)})$. Wtedy dla dowolnego obszaru $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}^{(\infty)}$ mamy*

$$\lambda_1^V(\mathcal{O}) \leq \lambda_1(\mathcal{O}) + e \cdot \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} p(t, x, x) \|V\|_1, \quad \text{gdzie } s := \frac{1}{\lambda_1(\mathcal{O})}$$

($\lambda_1^V(\mathcal{O})$ i $\lambda_1(\mathcal{O})$ oznaczają główne wartości własne generatora półgrupy procesu (X_t) z warunkami brzegowymi Dirichleta na \mathcal{O}^c , z potencjałem lub bez).

W tym rozdziale użyjemy innej reprezentacji IDS – powstaje ona jako granica wyrażen z warunkami brzegowymi Dirichleta (por. Wniosek 8.0.2). Dokładniej, transformatę Laplace'a $\mathbb{L}(t)$ dla IDS można otrzymać ze wzoru

$$\mathbb{L}(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_M^D(t, \omega) \quad (6.2.2)$$

gdzie

$$\mathbb{L}_M^D(t, \omega) = \frac{1}{L M^d} \int_{\mathcal{K}(M)} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds}; \{t < \tau_{\mathcal{K}(M)}\} \right] \mu(dx)$$

natomiast τ_A oznacza czas pierwszego wyjścia ze zbioru A , t.j. $\tau_A := \inf\{t > 0 : X_t \notin A\}$.

Twierdzenie 6.2.1 Załóżmy, że są spełnione warunki **(A0)**–**(A2)**, **(B)**, **(Q)**, **(Q1)**. Wtedy istnieje stała $K'_1 > 0$ taka, że

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}} (h(t))^{\frac{d_w \alpha}{d+\alpha d_w}}} \geq -K'_1, \quad (6.2.3)$$

gdzie funkcja $h(t)$ jest taka sama jak w ograniczeniu górnym (6.1.1). Ponownie, gdy $F_\xi(0) > 0$, to

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}}} \geq -K'_1 \left(\ln \frac{1}{F_\xi(0)} \right)^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}. \quad (6.2.4)$$

Dowód. Ustalmy $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_0$. W związku z (6.2.2) zachodzi

$$\mathbb{L}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{M+k}^D(t, \omega)].$$

Dla ustalonego $k \geq 1$ zbiór $\mathcal{K}^{(M+k)}$ zawiera $L^{kd} = N^k$ kopii zbioru $\mathcal{K}^{(M)}$ złączonych tylko wierzchołkami, o rozmiarze L^M każda. Oznaczmy je przez $\Delta_1, \dots, \Delta_{N^k}$. Ponieważ $\Delta_i \subset \mathcal{K}^{(M+k)}$ oraz $\mu(\mathcal{K}^{(M+k)}) = L^{(M+k)d}$, to dostajemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{M+k}^D(t, \omega) &= \frac{1}{L^{(M+k)d}} \int_{\mathcal{K}^{(M+k)}} p(t, x, x) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{(M+k)}} > t\}} \right] \mu(dx) \\ &= \frac{1}{L^{(M+k)d}} \sum_{i=1}^{N^k} \int_{\Delta_i} p(t, x, x) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{(M+k)}} > t\}} \right] \mu(dx) \\ &\geq \frac{1}{L^{(M+k)d}} \sum_{i=1}^{N^k} \int_{\Delta_i} p(t, x, x) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_i} > t\}} \right] \mu(dx) \\ &\geq \inf_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_i}(t, \omega)], \end{aligned}$$

gdzie przez $\mathbb{L}_{\Delta_i}(t, \omega)$ oznaczyliśmy wyrażenie

$$\frac{1}{\mu(\Delta_i)} \int_{\Delta_i} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_i} > t\}} \right] \mu(dx).$$

Niech teraz $\kappa > 0$ będzie ustalone, później wybierzemy konkretną wartość. Dla ustalonego $i_0 \in \{1, \dots, N^k\}$ niech

$$\mathcal{M}_{i_0} = \{\omega : \forall_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} \xi_v(\omega) \leq \kappa\},$$

gdzie $\Delta_{i_0}^{M_0}$ oznacza 1-sąsiedztwo Δ_{i_0} w metryce d_{M_0} (tj. te punkty x , które należą do M_0 -komórek z co najmniej jednym wierzchołkiem w Δ_{i_0}), a dla zbioru $A \subset \mathcal{K}^{(\infty)}$, $V_0(A) = V_0^{(\infty)} \cap A$. W szczególności

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}(t, \omega)] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}(t, \omega) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}}]. \quad (6.2.5)$$

Ustalmy trajektorię $X_t(\cdot)$ startującą z $x \in \Delta_{i_0}$ i nie opuszczającą zbioru Δ_{i_0} do czasu t . Z założenia **(A2.a)**, dla $\omega \in \mathcal{M}_{i_0}$ mamy, że

$$V^\omega(X_s) = \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} \xi_v(\omega) W(X_s, v) \leq \kappa \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v), \quad s \leq t.$$

Z tego wynika, że dla takiej trajektorii zachodzi

$$e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} \geq e^{-\kappa \int_0^t \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v) ds}$$

a zatem na zbiorze $\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t V(X_s, \omega) ds} \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}} \right] &\geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\kappa \int_0^t \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v) ds} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}} \right] \\ &= e^{-\kappa \int_0^t \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v) ds} \mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}]. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

I dalej, z (6.2.6) oraz (6.2.5):

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}(t, \omega) \geq \frac{e^{-\kappa \int_0^t \sum_{x \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v) ds}}{\mu(\Delta_{i_0})} \cdot \int_{\Delta_{i_0}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x, x} \left[\mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}} \cdot \mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}] \right] \mu(dx).$$

Ponieważ liczba punktów w $V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})$ nie przekracza $C_0 L^{Md}$ dla pewnego $C_0 > 0$ (zob. (3.1.5)), to mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}] &= \mathbb{Q}[\forall_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} \xi_v \leq \kappa] \geq F_\xi(\kappa)^{C_0 L^{Md}} \\ &= e^{-C_0 L^{Md} \ln \frac{1}{F_\xi(\kappa)}} \end{aligned}$$

i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}(t, \omega)] &\geq \frac{1}{\mu(\Delta_{i_0})} \int_{\Delta_{i_0}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x, x} \left[e^{-\kappa \int_0^t \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}} \right] \mu(dx) \\ &\cdot e^{-C_0 L^{Md} \ln \frac{1}{F_\xi(\kappa)}}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Niech

$$I_{i_0} := \int_{\Delta_{i_0}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x, x} \left[e^{-\kappa \int_0^t \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(X_s, v) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}} \right] \mu(dx).$$

Ta całka jest śladem operatora $T_t^{V_\kappa, \Delta_{i_0}}$ w $L^2(\Delta_{i_0})$ (tj. półgrupy procesu X_t na Δ_{i_0} , z potencjałem nielosowym

$$V_\kappa(x) = \kappa \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{m_0})} W(x, v)$$

i warunkami brzegowymi Dirichleta na $\Delta_{i_0}^c$). W konsekwencji nie jest ona mniejsza niż najmniejsza wartość własna operatora $T_t^{V_\kappa, \Delta_{i_0}}$. Dla głównych wartości własnych generatorów procesów zabitych przy wyjściu z $\mathcal{K}^{(M)}$ bez potencjału, ze względu na niezmiennosć translacyjną zabitego ruchu Browna, skalowanie i (1.3.4) mamy, że istnieje $M'_1 > M_0$ takie, że dla $M > M'_1$

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{i_0}) &= \phi(\mu_1(\Delta_{i_0})) = \phi(\mu_1(\mathcal{K}^{(M)})) = \phi(L^{-Md_w} \mu_1(\mathcal{K}^{(0)})) \\ &\leq C_{\phi, 2} L^{-Md_w \alpha} \phi(\mu_1(\mathcal{K}^{(0)})) \\ &= c_2 L^{-Md_w \alpha}. \end{aligned}$$

z pewną stałą $c_2 > 0$ niezależną od M . Korzystając z lematu (6.2.1) dostajemy, że dla $s = \frac{1}{\lambda_1(\Delta_{i_0})}$ zachodzi

$$I_{i_0} \geq e^{-t\lambda_1^{V_\kappa}(\Delta_{i_0})} \geq e^{-t(\lambda_1(\Delta_{i_0}) + e \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} p(s, x, x) \|V_\kappa\|_1)}.$$

Używając (6.0.2) dostaniemy, że

$$\|V_\kappa\|_1 = \kappa \int_{\mathcal{K}^{(\infty)}} \sum_{v \in V_0(\Delta_{i_0}^{M_0})} W(x, v) \mu(dx) \leq \kappa c_1 L^{Md} N_1.$$

Ponadto, z (6.2.1), dla $s = 1/\lambda_1(\Delta_{i_0})$ dostajemy

$$p(s, x, x) \leq c_2 s^{-\frac{d}{d_w \alpha}} \leq c_2 \lambda_1(\Delta_{i_0})^{\frac{d}{d_w \alpha}} \leq c_2 L^{-Md}$$

(zauważmy, że ponieważ s zmierza do nieskończoności wraz ze wzrostem M , stała c_2 nie zależy od $M \geq M'_1$). W konsekwencji dla pewnej stałej $c_3 > 0$

$$I_{i_0} \geq e^{-t(c_1 L^{-Md_w \alpha} + c_3 \kappa)}.$$

Wybierając teraz, $\kappa = \frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}}$ i wracając do (6.2.7), widzimy, że zachodzi, dla pewnego $c_4 > 0$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}(t, \omega)] \geq \frac{1}{L^{Md}} e^{-c_3 \frac{t}{L^{Md_w \alpha}} - c_1 L^{Md} \ln \frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{Md_w \alpha}})}}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{L^M d} e^{-c_4 \left(\frac{t}{(L^{M+1})^{d_w \alpha}} + L^{Md} \left(\frac{L^M}{L^{M+1}} \right)^{d_w \alpha} \ln \frac{1}{F_\xi \left(\frac{D_0}{L^M d_w \alpha} \right)} \right)} \\
&\geq \frac{1}{L^M d} e^{-\frac{c_4}{(L^{M+1})^{d_w \alpha}} \left(t + L^{M(d+d_w \alpha)} \ln \frac{1}{F_\xi \left(\frac{D_0}{L^M d_w \alpha} \right)} \right)}.
\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku dowodu ograniczenia górnego, skorzystajmy z (6.0.7) i weźmy jednoznacznie wyznaczone $M = M(t)$ takie, że

$$L^M \leq x_t < L^{M+1}, \quad t \geq t_0. \quad (6.2.8)$$

Ponieważ $M \rightarrow \infty$ gdy $t \rightarrow \infty$, zatem istnieje $t_1 \geq t_0$ takie, że dla $t \geq t_1$ mamy $M \geq M'_1$. Z (6.0.7) i (6.0.6), dostajemy

$$L^{M(d+d_w \alpha)} \ln \frac{1}{F_\xi \left(\frac{D_0}{L^M d_w \alpha} \right)} \leq t,$$

co implikuje, że dla pewnego $c_5 > 0$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}(t, \omega)] \geq \frac{1}{L^M d} e^{-\frac{c_5 t}{(L^{M+1})^{d_w \alpha}}}.$$

Kluczowe jest, że stała c_5 nie zależy od i_0 . Dzięki (6.0.8) zachodzi:

$$\frac{t}{(L^{M+1})^{d_w \alpha}} \leq \frac{t}{x_t^{d_w \alpha}} = \left(\frac{t}{\ln \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^{d_w \alpha})}} \right)^{\frac{d_w \alpha}{d+d_w \alpha}} = t^{\frac{\alpha}{d+d_w \alpha}} (h(t))^{\frac{d_w \alpha}{d+d_w \alpha}}$$

i otrzymuje, dla odpowiednio dużego t (przypomnijmy, że $M = M(t)$ dąży do nieskończoności razem z t)

$$\begin{aligned}
\ln[\mathbb{L}(t)] &\geq -\ln L^{Md} - \frac{c_5 t}{(L^{M+1})^{d_w \alpha}} \\
&\geq -\ln L^{Md} - c_5 t^{\frac{d}{d+d_w \alpha}} (h(t))^{\frac{d_w \alpha}{d+d_w \alpha}}.
\end{aligned}$$

Dzielimy stronami przez $t^{\frac{d}{d+d_w \alpha}} (h(t))^{\frac{d_w \alpha}{d+d_w \alpha}}$ i przechodzimy do granicy $t \rightarrow \infty$. W celu pozbycia się niepotrzebnego składnika, musimy pokazać, że

$$\frac{\ln L^{Md}}{t^{\frac{d}{d+d_w \alpha}} (h(t))^{\frac{d_w \alpha}{d+d_w \alpha}}}$$

zbiega do 0 gdy $t \rightarrow \infty$. Istotnie, zbiega: mamy $L^{Md} \sim x_t^d$, oraz $t = x_t^{d+d_w \alpha} h(t)$. A zatem $(d+d_w \alpha) \ln x_t = \ln t \ln h(t)$, co oznacza, że $\ln L^{Md}$ zachowuje się, z dokładnością do stałej, tak jak $\ln t - \ln h(t)$. Ponieważ $h(t)$ ma dodatnią (być może równą nieskończoność) granicę gdy $t \rightarrow \infty$, to zachodzi żądane stwierdzenie, a w konsekwencji również twierdzenie. \square

6.3. Asymptotyka IDSu

Dowód twierdzenia 6.0.1. Do przekształcenia oszacowań (6.1.1) i (6.2.3) w celu uzyskania hipotezy twierdzenia 6.0.1, używamy twierdzeń Tauberowskich typu mieszanego udowodnionych w [41, Theorem 5.1] i kończymy z (6.0.9) w taki sam sposób jak w [41]. \square

Rozdział 7

Osobliwość Lifschitza dla potencjałów typu Poissonowskiego

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenia analogiczne do tych z rozdziału poprzedniego, ale będziemy pracować z potencjałem Poissonowskim zamiast kratowego. A zatem przypomnijmy, że mamy dany potencjał Poissonowski V^ω zdefiniowany przez (5.1.3) jak również jego periodyzację V_M^ω zadaną przez (5.1.4). W tym przypadku również zachodzi osobliwość Lifschitza. Tak samo jak przedtem będziemy badać zachowanie transformaty Laplace'a miary granicznej $\mathbb{L}(t)$ ciągu miar (5.1.18) i (5.1.17) gdy $M \rightarrow \infty$.

Poniższe twierdzenie jest naszym głównym wynikiem w tym rozdziale:

Twierdzenie 7.0.1 *Załóżmy, że są spełnione warunki (A0'), (A1'), (A2), (B), (Q). Wtedy istnieją stałe dodatnie \tilde{L}_5, \tilde{L}_6 takie, że*

$$\begin{aligned} -\nu\tilde{L}_5 &\leq \liminf_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda]); \\ \limsup_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0, \lambda]) &\leq -\nu\tilde{L}_6. \end{aligned}$$

Jest to taki sam wynik, jak dla potencjałów typu kratowego w przypadku, gdy zmienne ξ_v z definicji potencjału przyjmują wartość 0 z dodatnim prawdopodobieństwem.

7.1. Oszacowanie górne transformaty Laplace'a IDS-u

Znajdziemy teraz oszacowanie górne dla transformaty Laplace'a $\mathbb{L}(t)$ IDSu w przypadku potencjału Poissonowskiego.

Twierdzenie 7.1.1 *Załóżmy, że są spełnione warunki (B),(A1') oraz (A2.b). Wtedy dla każdego $\nu_0 > 0$ istnieje stała $K_2 = K_2(\nu_0) > 0$ taka, że dla każdego $\nu \geq \nu_0$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}}} \leq -K_2 \nu^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}. \quad (7.1.1)$$

Dowód.

Zwracamy uwagę, że początkowe kroki w dowodzie Twierdzenia 6.1.1 były ogólne i dotyczyły dowolnego potencjału losowego. A zatem możemy zacząć nasze rozważania od oszacowania

$$\mathbb{L}(t) \leq C \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)} \right], \quad t > 1, \quad M \in \mathbb{Z}_+. \quad (7.1.2)$$

W świetle (7.1.2), dowód powyższego twierdzenia można sprowadzić do znalezienia oszacowania wartości oczekiwanej

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)},$$

gdzie $\lambda_1^{N,M}(\omega)$ jest główną wartością własną losowego operatora Schrödingera $H_M^{N,V_M^\omega} = \phi(-\mathcal{L}^M) + V_M^\omega$. Nasze rozumowanie składa się z trzech kroków.

KROK 1. Redukcja do potencjału typu kratowego indeksowanego sympleksami fraktala

Zauważmy, że możemy zastąpić potencjał V_M^ω potencjałem losowym typu kratowego, indeksowanym sympleksami fraktala rzędu m_0 . Formalnie: rozważamy $m_0 \in \mathbb{Z}$ z założenia (A2.b) i wprowadzamy zbiór zmiennych losowych $\{q_\Delta : \Delta \in \mathcal{T}_{m_0}\}$, które wskazują, czy w zbiorze $\Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)}$ znajduje się którykolwiek z punktów Poissona, tj.

$$q_\Delta(\omega) := \mathbf{1}_{\{\Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)} \text{ zawiera punkty Poissonowskie}\}}(\omega), \quad \Delta \in \mathcal{T}_{m_0}$$

(przypomnijmy, że \mathcal{T}_{m_0} oznacza rodzinę wszystkich m_0 -sympleksów w $\mathcal{K}^{(\infty)}$ zaś $V_{m_0}^{(\infty)}$ to wszystkie wierzchołki tych sympleksów). Z definicji wynika więc, że q_Δ to niezależne, jednakowo rozłożone zmienne losowe na $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{Q})$ z rozkładem Bernoulliego

$$\mathbb{Q}[q_\Delta = 0] = e^{-\nu L^{dm_0}} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{Q}[q_\Delta = 1] = 1 - e^{-\nu L^{dm_0}}.$$

Zdefiniujmy

$$\bar{V}_M^\omega(x) = A_0 \cdot \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}}} q_\Delta(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(\pi_M(x)) \quad (7.1.3)$$

$$= A_0 \cdot q_{\Delta(\pi_M(x))}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(x), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \quad M \geq m_0,$$

gdzie stała $A_0 > 0$ pochodzi z założenia **(A2.b)** (pamiętajmy, że jeśli $x \in \mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_{m_0}^{(\infty)}$, to $\Delta_{m_0}(x)$ oznacza jednoznacznie wyznaczony m_0 -simpleks zawierający x).

$$V_M^\omega(x) \geq \bar{V}_M^\omega(x), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}. \quad (7.1.4)$$

W istocie, skoro $\rho^\omega(B)$ zlicza punkty Poissona, które znalazły się w zbiorze B , to dostajemy

$$\begin{aligned} V_M^\omega(x) &= \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(x, y') \rho^\omega(dy) \\ &\geq \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(x) \cdot A_0 \cdot \rho^\omega(\Delta_{m_0}(\pi_M(x))) \\ &\geq \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(x) \cdot A_0 \cdot q_{\Delta_{m_0}(\pi_M(x))}(\omega) = \bar{V}_M^\omega(x). \end{aligned}$$

Możemy teraz zakończyć pierwszy krok naszego dowodu: połączenie (7.1.2) i (7.1.4) daje

$$\mathbb{L}(t) \leq C \mathbb{E}^\mathbb{Q} e^{-(t-1)\lambda_1^{N, M, \bar{V}_M^\omega}}, \quad t > 1, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \quad M \geq m_0, \quad (7.1.5)$$

gdzie $\lambda_1^{N, M, \bar{V}_M^\omega}$ jest najmniejszą wartością własną operatora $H_M^{N, \bar{V}_M^\omega} = \phi(-\mathcal{L}^M) + \bar{V}_M^\omega$.

KROK 2. Oszacowanie dolne wartości własnej $\lambda_1^{N, M, \bar{V}_M^\omega}$

Pozostała część dowodu jest bardzo podobna do tej dla potencjału kratowego. Ponownie korzystać będziemy z nierówności Temple'a (6.1.2).

Niech $\chi = \lambda_2^M$ będzie drugą wartością własną operatora $\phi(-\Delta^M)$, podobnie jak w dowodzie w przypadku potencjału kratowego, z (5.1.9) dostajemy, że:

$$\chi = \phi(\mu_2^M) = \phi(L^{-Md_w} \mu_2^1)$$

i korzystając z (1.3.4) dostajemy, że istnieje $M_1 \geq m_0$ takie, że dla $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_1$,

$$\tilde{C}_1 \frac{1}{L^{Md_w \alpha}} \leq \chi \leq \tilde{C}_2 \frac{1}{L^{Md_w \alpha}}, \quad (7.1.6)$$

gdzie $\tilde{C}_1 = C_{\phi,1}(\mu_2^1)^\alpha$ i $\tilde{C}_2 = C_{\phi,2}(\mu_2^1)^\alpha$ ($C_{\phi,1}$ i $C_{\phi,2}$ są stałymi z (1.3.4)). Musimy przedzielić stałą D_0 . Przyjmujemy:

$$D'_0 = \frac{\tilde{C}_1}{4A_0}, \quad (7.1.7)$$

gdzie stała A_0 pochodzi z warunku **(A2.b)**.

Możemy założyć, że M_1 jest na tyle duże, że dla $M \geq M_1$ mamy

$$D'_0 \leq L^{Md_w\alpha}.$$

Dla każdego $\Delta \in \mathcal{T}_{m_0}$ i $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_1$ wprowadzamy

$$\tilde{q}_\Delta(\omega) := q_\Delta(\omega) \wedge \frac{D'_0}{L^{Md_w\alpha}} = \frac{D'_0}{L^{Md_w\alpha}} \cdot q_\Delta(\omega) \quad (7.1.8)$$

i rozważamy potencjał odpowiadający tym zmiennym losowym:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_M^\omega(x) &= A_0 \cdot \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}}} \tilde{q}_\Delta(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(\pi_M(x)) \\ &= \frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w\alpha}} \cdot \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{T}_{m_0} \\ \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}}} q_\Delta(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(\pi_M(x)) \\ &= \frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w\alpha}} \cdot q_{\Delta(\pi_M(x))}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(x), \quad x \in \mathcal{K}^{(\infty)}. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Oczywiście, $\tilde{V}_M^\omega(x) \leq \bar{V}_M^\omega(x)$, co w konsekwencji daje, że

$$\lambda_1^{N,M,\tilde{V}_M^\omega} \leq \lambda_1^{N,M,\bar{V}_M^\omega}. \quad (7.1.10)$$

Zatem, wystarczy oszacować z dołu wartość własną $\lambda_1^{N,M,\tilde{V}_M^\omega}$ zamiast $\lambda_1^{N,M,\bar{V}_M^\omega}$ -co dowodzi się analogicznie do Lematu (6.1.1).

Lemat 7.1.1 *Przyjmijmy, że warunki **(B)** i **(A2.b)** są spełnione. Wtedy dla dowolnych $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_1$ mamy*

$$\lambda_1^{N,M,\tilde{V}_M^\omega} \geq \frac{1}{L^{Md}} \left[\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) d\mu(x) - \frac{2 \int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 d\mu(x)}{\tilde{C}_1 L^{-Md_w\alpha}} \right]. \quad (7.1.11)$$

Dowód. Dowód będzie również analogiczny do dowodu lematu (6.1.1) Ustalmy $M \geq M_1$. Zastosujemy nierówność Temple'a do $H = H_M^{N,\tilde{V}_M^\omega} = \phi(-\mathcal{L}^M) + \tilde{V}_M^\omega$ i $\chi = \lambda_2^M$ (nielosowa). Spektrum takiego operatora jest dyskretne i mamy, że

$$\chi \leq \lambda_2^{N,M,\tilde{V}_M^\omega} = \inf \left(\sigma(H_M^{N,\tilde{V}_M^\omega}) \setminus \left\{ \lambda_1^{N,M,\tilde{V}_M^\omega} \right\} \right).$$

Ponownie przyjmujemy $\psi = \psi_1^M \equiv \frac{1}{L^{Md/2}}$ i kolejne kroki oszacowania są identyczne jak w dowodzie lematu (6.1.1). Zwróćmy jedynie uwagę na oszacowanie

$$\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) d\mu(x) = \frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w\alpha}} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega) \mathbf{1}_{\Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)}}(x) d\mu(x)$$

$$\leq \frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w \alpha}} L^{Md}.$$

Dostajemy

$$\chi - \left\langle \psi, H_M^{N, \tilde{V}_M^\omega} \psi \right\rangle \geq \frac{\tilde{C}_1}{L^{Md_w \alpha}} - \frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w \alpha}} > \frac{\tilde{C}_1}{2L^{Md_w \alpha}}, \quad (7.1.12)$$

i dalej

$$\begin{aligned} \lambda_1^{N, M, \tilde{V}_M^\omega} &\geq \langle \psi, H \psi \rangle - \frac{\langle H \psi, H \psi \rangle}{\chi - \langle \psi, H \psi \rangle} \\ &\geq \frac{1}{L^{Md}} \left[\int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) d\mu(x) - \frac{2 \int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 d\mu(x)}{\tilde{C}_1 L^{-Md_w \alpha}} \right]. \end{aligned}$$

□

Analogicznie jak w poprzednim rozdziale, powyższa nierówność będzie użyteczna w przypadku gdy liczba sympleksów z \mathcal{T}_{m_0} z co najmniej jednym punktem Poissona jest wystarczająco duża. Dla $\delta \in (0, 1)$ definiujemy

$$\mathcal{A}_{M, \delta} = \left\{ \omega : \# \left\{ \mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)} : q_\Delta(\omega) = 1 \right\} \geq \delta \cdot L^{(M-m_0)d} \right\},$$

gdzie $L^{(M-m_0)d}$ jest liczbą wszystkich m_0 -sympleksów zawartych w $\mathcal{K}^{(M)}$.

Lemat 7.1.2 *Przyjmijmy, że warunki (B) i (A2.a) są spełnione i niech $\delta > 0$ będzie ustalone.*

Wtedy dla dowolnego $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_1$ i $\omega \in \mathcal{A}_{M, \delta}$ zachodzi

$$\lambda_1^{N, M, \bar{V}_M^\omega} \geq \frac{\tilde{C}_1 \delta}{8L^{Md_w \alpha}}.$$

Dowód. Z definicji \tilde{V}_M^ω mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \tilde{V}_M^\omega(x) d\mu(x) &= \frac{A_0 D_0}{L^{Md_w \alpha}} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega) \mathbf{1}_{\Delta \setminus V_m^{(\infty)}}(x) d\mu(x) \\ &= \frac{A_0 D_0}{L^{Md_w \alpha}} \cdot L^{m_0 d} \cdot \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega). \end{aligned}$$

Analogicznie,

$$\int_{\mathcal{K}^{(M)}} (\tilde{V}_M^\omega(x))^2 d\mu(x) = \left(\frac{A_0 D_0}{L^{Md_w \alpha}} \right)^2 \cdot L^{m_0 d} \cdot \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega).$$

Zatem, używając (7.1.10), oszacowania z lematu 7.1.1, oraz założenia, że $\omega \in \mathcal{A}_{M, \delta}$ i (7.1.7),

dostajemy

$$\lambda_1^{N, M, \bar{V}_M^\omega} \geq \frac{L^{m_0 d}}{L^{Md}} \left[\frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w \alpha}} \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega) - \frac{2 \left(\frac{A_0 D'_0}{L^{Md_w \alpha}} \right)^2 \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega)}{\tilde{C}_1 L^{-Md_w \alpha}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^{(M-m_0)d}} \cdot \frac{1}{L^{Md_w\alpha}} \cdot A_0 D'_0 \cdot \left(1 - \frac{2A_0 D'_0}{\tilde{C}_1}\right) \cdot \sum_{\mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)}} q_\Delta(\omega) \\
&\geq \frac{\delta A_0 D'_0}{2L^{Md_w\alpha}} = \frac{\tilde{C}_1 \delta}{8L^{Md_w\alpha}},
\end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

KROK 3. Ostateczne oszacowania.

Z (7.1.5) mamy:

$$\mathbb{L}(t) \leq C \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,\bar{V}_M^\omega}}; \mathcal{A}_{M,\delta} \right] + C \mathbb{Q} [\mathcal{A}_{M,\delta}^c], \quad t > 1, \quad M \geq m_0. \quad (7.1.13)$$

Z lematu 7.1.2 dostajemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,\bar{V}_M^\omega}}; \mathcal{A}_{M,\delta} \right] \leq e^{-\frac{\tilde{C}_1 \delta}{8L^{Md_w\alpha}}(t-1)} \leq c_1 e^{-\frac{c_2 \delta}{L^{Md_w\alpha}} t}, \quad t > 1, \quad M \geq M_1,$$

z pewnymi stałymi $c_1, c_2 > 0$.

Żeby oszacować drugi składnik w (7.1.13), zauważmy, że dla $M \geq M_1$, mamy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{M,\delta}^c &= \left\{ \omega : \# \left\{ \mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)} : q_\Delta(\omega) = 1 \right\} < \delta \cdot L^{(M-m_0)d} \right\} \\
&= \left\{ \omega : \# \left\{ \mathcal{T}_{m_0} \ni \Delta \subset \mathcal{K}^{(M)} : q_\Delta(\omega) = 0 \right\} \geq (1-\delta) \cdot L^{(M-m_0)d} \right\}
\end{aligned}$$

(przypomnijmy, że $L^{(M-m_0)d}$ jest liczbą m_0 -sympleksów zawartych w $\mathcal{K}^{(M)}$). Definiujemy

$$p_\nu := \mathbb{Q}[q_\Delta = 0] = \mathbb{Q}[\text{w } \Delta \setminus V_{m_0}^{(\infty)} \text{ nie ma punktów Poissona}] = e^{-\nu L^{m_0 d}}.$$

Stosując wniosek 6.1.1 z $n = L^{(M-m_0)d}$, $p = p_\nu$ i $\gamma = (1-\delta) > p_\nu$, dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} [\mathcal{A}_{M,\delta}^c] &\leq \left[\left(\frac{1-p}{\delta} \right)^\delta \left(\frac{p}{1-\delta} \right)^{1-\delta} \right]^{L^{(M-m_0)d}} \\
&\leq \left[\frac{1}{1-\delta} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} \cdot p \right]^{(1-\delta) \cdot L^{(M-m_0)d}} \\
&\leq e^{\frac{(1-\delta)}{2} L^{(M-m_0)d} \ln p_\nu} \\
&= e^{-\nu \frac{1-\delta}{2} L^{M d}},
\end{aligned}$$

o ile δ jest wystarczająco małe - dobrane tak jak w dowodzie twierdzenia 6.1.1. A zatem otrzymujemy, że

$$\mathbb{L}(t) \leq c_3 \left(e^{-\frac{c_4 t}{L^{M\alpha d_w}}} + e^{-c_5 \nu L^{M d}} \right), \quad t > 0, \quad M \geq M_1, \quad \nu \geq \nu_0,$$

ze stałymi $c_3 > 0$ i $c_4 = c_4(\nu_0) > 0$, $c_5 = c_5(\nu_0) > 0$. Jest to uproszczona wersja wzoru (6.1.16).

Aby zminimalizować to wyrażenie względem M , znajdziemy takie $M = M(t)$ aby te dwa wyrazy były w przybliżeniu równe. Wybieramy $M = M(t)$ dla którego

$$\frac{c_5}{c_4} L^{M(d+\alpha d_w)} \leq \frac{t}{\nu} < \frac{c_5}{c_4} L^{(M+1)(d+\alpha d_w)}. \quad (7.1.14)$$

Dla takiego wyboru M dostajemy, z pewnymi stałymi $c_5, c_6 > 0$,

$$\frac{c_4 t}{L^{M\alpha d_w}} \geq c_5 \nu L^{Md} \geq c_6 t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}} \nu^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}, \quad \text{dla dostatecznie dużych } t.$$

Zatem ostatecznie, dla wystarczająco dużych t i pewnych stałych $c_7 = c_7(\nu_0), c_8 = c_8(\nu_0) > 0$

$$\mathbb{L}(t) \leq c_7 e^{-c_8 t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}} \nu^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}},$$

gdy $\nu \geq \nu_0$. Daje to tezę w twierdzeniu 7.1.1 z $K_2 = c_8 \ln c_7$. Dowód jest zakończony. \square

7.2. Oszacowanie dolne transformaty Laplace'a IDS-u

Oszacowanie to przebiega analogicznie do tego dla potencjałów kratowych. Obecnie również zachodzi

$$\mathbb{L}(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_M^D(t, \omega) \quad (7.2.1)$$

gdzie, przypomnijmy

$$\mathbb{L}_M^D(t, \omega) = \frac{1}{L^{Md}} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{E}_{x,x}^t \left[e^{-\int_0^t V^\omega(X_s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{(M)}} > t\}} \right] \mu(dx)$$

a τ_A jest czasem pierwszego wyjścia procesu ze zbioru A , tj. $\tau_A := \inf\{t > 0 : X_t \notin A\}$.

Twierdzenie 7.2.1 *Założmy, że są spełnione (B), (A1'), (A2.a). Wtedy istnieje stała $K_2' > 0$ taka, że*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}}} \geq -K_2' \nu^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}. \quad (7.2.2)$$

Dowód. Ustalamy $M \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq M_0$, gdzie M_0 pochodzi z naszego założenia (A2.a).

Ponownie dostajemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{M+k}^D(t, \omega) \geq \inf_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{\Delta_i}^D(t, \omega). \quad (7.2.3)$$

gdzie

$$\mathbb{L}_{\Delta}^D(t, \omega) = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_{\Delta} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V^{\omega}(X_s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta} > t\}} \right] \mu(dx). \quad (7.2.4)$$

Ustalmy pewne i_0 i niech $\mathcal{M}_{i_0} = \{\omega : \text{nie ma żadnego punktu Poissona w } \Delta_{i_0}^{M_0}\}$, gdzie $\Delta_{i_0}^{M_0}$ oznacza, jak wcześniej, 1-sąsiedztwo Δ_{i_0} w metryce d_{M_0} (t.j. sympleks Δ_{i_0} z dołączonymi w wierzchołkach kopiami $\mathcal{K}^{(M_0)}$). W szczególności,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}^D(t, \omega) \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}^D(t, \omega) \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}} \right]. \quad (7.2.5)$$

Ustalmy trajektorię procesu X_s startującą z $x \in \Delta_{i_0}$ i nie opuszczającą zbioru Δ_{i_0} do czasu t . Dla $\omega \in \mathcal{M}_{i_0}$ mamy, że $V^{\omega}(X_s) = 0$, $s \leq t$ (proces pozostał w Δ_{i_0} , i żadne punkty Poissona nie znalazły się w otoczeniu M_0 -sąsiedztwa tego zbioru) i w konsekwencji $e^{-\int_0^t V^{\omega}(X_s) ds} = 1$. Zatem na zbiorze $\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t V^{\omega}(X_s) ds} \mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}} \right] = \mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}], \quad (7.2.6)$$

względem miary $\mathbf{P}_t^{x,x}$. Korzystając z (7.2.5) dostajemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}^D(t, \omega)] \geq \frac{1}{\mu(\Delta_{i_0})} \int_{\Delta_{i_0}} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x,x} \left[\mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta_{i_0}} > t\}} \cdot \mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}] \right] \mu(dx).$$

Ponieważ

$$\mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}] = \mathbb{Q}[\text{brak punktów Poissona w } \Delta_{i_0}^{M_0}] = e^{-\nu\mu(\Delta_{i_0}^{M_0})} \geq e^{-\nu(L^{Md} + c_1 L^{M_0d})}$$

(c_1 jest stałą bezwzględnie zależną tylko od geometrii fraktala), otrzymujemy

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{\Delta_{i_0}}^D(t, \omega)] \geq \left[\frac{1}{\mu(\Delta_{i_0})} \int_{\Delta_{i_0}} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x,x} \left[\tau_{\Delta_{i_0}} > t \right] \mu(dx) \right] \cdot e^{-\nu(L^{Md} + c_1 L^{M_0d})}. \quad (7.2.7)$$

Wyrażenie $\left[\frac{1}{\mu(\Delta_{i_0})} \int_{\Delta_{i_0}} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x,x} \left[\tau_{\Delta_{i_0}} > t \right] \mu(dx) \right]$ jest uśrednionym śladem operatora $T_t^{D, \Delta_{i_0}}$ a zatem może być ograniczone z dołu przez $e^{-t\lambda_1(\Delta_{i_0})}$. Z [20, Theorem 3.4] mamy $\lambda_1(\Delta_{i_0}) \leq \phi(\lambda_1^{BM}(\Delta_{i_0}))$, gdzie $\lambda_1^{BM}(U)$ oznacza najmniejszą wartość własną dla generatora półgrupy ruchu Browna w U z warunkami brzegowymi Dirichleta. Ponieważ ruchy Browna na Δ_{i_0} i $\mathcal{K}^{(M)}$ rozpatrywane do odpowiednich czasów wyjścia z $\Delta_{i_0}, \mathcal{K}^{(M)}$ są nierozróżnialne, to mamy $\lambda_1^{BM}(\Delta_{i_0}) = \lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{(M)})$ i ze skalowania dalej $\lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{(M)}) = \lambda_1^{BM}(L^M \mathcal{K}^{(0)}) = L^{-Md} \lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{(0)})$. Używając (7.2.3), (7.2.7) i skalowania wartości własnych otrzymujemy, że dla dowolnego k

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{M+k}^D(t, \omega)] \geq \exp \left\{ -t\phi \left(\frac{1}{L^{Md}} \lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{(0)}) \right) - \nu(L^{Md} + c_1 L^{M_0d}) \right\}. \quad (7.2.8)$$

Korzystając z naszego założenia **(B.a)**(wzór 1.3.4) otrzymujemy, dla wystarczająco dużych M ,

$$\phi \left(\frac{1}{L^{Md_w}} \lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{(0)}) \right) \leq C_{\phi.2} \cdot L^{-M\alpha d_w} \left(\lambda_1^{BM}(\mathcal{K}^{(0)}) \right)^\alpha =: c_2 L^{-M\alpha d_w}. \quad (7.2.9)$$

Następnie z (7.2.8) wynika, że

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_{M+k}^D(t, \omega)] \geq \exp \left\{ -c_3 t L^{-M\alpha d_w} - (1 + c_3) \nu L^{Md} \right\}, \quad (7.2.10)$$

dla wystarczająco dużych M . To ograniczenie jest niezależne od k , dlatego przechodząc z k do nieskończoności w (7.2.1) otrzymujemy

$$\mathbb{L}(t) \geq \exp \left\{ -c_3 t L^{-M\alpha d_w} - c_4 \nu L^{Md} \right\}, \quad (7.2.11)$$

o ile M jest wystarczająco duże. Dalej, dla wystarczająco dużego t wybieramy $M = M(t)$ będące liczbą całkowitą całkowitą spełniającą

$$L^M \leq \left(\frac{t}{\nu} \right)^{\frac{1}{d+\alpha d_w}} < L^{M+1}. \quad (7.2.12)$$

Wstawiając tę wartość M do (7.2.11) i używając nierówności w (7.2.12), otrzymujemy

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{L}(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha d_w}} \nu^{\frac{\alpha d_w}{d+\alpha d_w}}} \geq -K'_2,$$

ze stałą dodatnią K'_2 . Dowód jest zakończony. \square

7.3. Asymptotyka IDSu

Dowód twierdzenia 7.0.1. Analogicznie jak w poprzednim rozdziale, do przekształcenia oszacowań (7.1.1) oraz (7.2.2) w celu uzyskania hipotezy twierdzenia 7.0.1, używamy twierdzeń Tauberowskich typu eksponencjalnego udowodnionych w [25, Theorem 2.1]. \square

Dodatek

W dodatku przedstawimy dowody lematów z Rodziału 3, a także dowody istnienia całkowitej gęstości stanów, tak w przypadku potencjału kratowego jak Poissonowskiego.

Dowody lematów z rozdziału 3

Dowód lematu 3.3.1

Najpierw udowodnimy (a). Ograniczenie górne wynika bezpośrednio z oszacowania

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}} g(u, x, y) \leq C_{g,3} u^{-d/d_w}, \quad u > 0,$$

(stała $C_{g,3}$ pochodzi z ograniczenia górnego $g(u, x, y)$) a (1.3.6) jest zastosowane dla $\gamma = d/d_w$.

Teraz udowodnimy ciągłość. Ustalmy $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}$ i $\varepsilon > 0$. Dzięki (1.3.6) istnieje $r > 0$ takie, że

$$c \mathbf{E}_{\mathcal{P}} \left[(S_{t/2})^{-d/d_w} \mathbf{1}_{S_{t/2} \in (0, r]} \right] = c \int_0^r u^{-d/d_w} \eta_{t/2}(du) < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (8.0.1)$$

Niech $R > r \vee 1$ będzie takie, że

$$c(R-1)^{-d/d_w} < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (8.0.2)$$

Ponadto, dzięki ciągłości funkcji $(u, x, y) \mapsto g(u, x, y)$ na $(0, \infty) \times \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}$ (co implikuje jednostajną ciągłość na zwartych podzbiorach $(0, \infty) \times \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}$) istnieje $\delta \in (0, 1)$ takie, że dla każdych $s, v \in [r, R]$ i $|s - v| < \delta$ oraz każdych $z, w \in \mathcal{K}^{(\infty)}$ i $|x - z| < \delta, |y - w| < \delta$ mamy

$$|g(s, x, y) - g(v, z, w)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (8.0.3)$$

Z drugiej strony, ze stochastycznej ciągłości subordynatora S wynika, że istnieje $\tilde{\delta} \in (0, \delta \wedge t/2)$

takie, że

$$\mathcal{P}(|S_t - S_u| \geq \delta) < \left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{4c^2 \mathbf{E}_{\mathcal{P}} \left[(S_{t/2})^{-\frac{2d}{d_w}} \right]}} \right)^2, \quad \text{dla każdego } u > 0 \text{ spełniającego } |t - u| < \tilde{\delta}$$

(zwróćmy uwagę, że skończoność wartości oczekiwanej w mianowniku wynika z (1.3.6)).

Możemy teraz napisać, że dla każdego $u > 0$ i $z, w \in \mathcal{K}^{(\infty)}$ takich, że $|t - u| + |x - z| + |y - w| < \tilde{\delta}$,

$$\begin{aligned} |p(t, x, y) - p(u, z, w)| &\leq \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|g(S_t, x, y) - g(S_u, z, w)|] \\ &= \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|\dots| \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| \geq \delta\}}] + \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|\dots| \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| < \delta\}}] \\ &= \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|\dots| \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| \geq \delta\}}] + \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|\dots| \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| < \delta\}} \mathbf{1}_{\{S_{t/2} < r\}}] \\ &\quad + \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|\dots| \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| < \delta\}} \mathbf{1}_{\{S_{t/2} \geq r\}} \mathbf{1}_{\{S_u, S_t \leq R\}}] + \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|\dots| \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| < \delta\}} \mathbf{1}_{\{S_{t/2} \geq r\}} \mathbf{1}_{\{S_u > R \vee S_t > R\}}] \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Najpierw oszacujemy I_1 . Dla $a, b \geq 0$ zachodzi $(a - b)^2 \leq a^2 + b^2$. Z faktu, że dla u bliskich t mamy $u > t/2$ i z monotoniczności subordynatora wynika, że

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sqrt{\mathbf{E}_{\mathcal{P}} [|g(S_t, x, y) - g(S_u, z, w)|^2]} \sqrt{\mathcal{P}(|S_t - S_u| \geq \delta)} \\ &< \sqrt{\mathbf{E}_{\mathcal{P}} [(2c(S_{t/2})^{-d/d_w})^2]} \cdot \frac{\varepsilon}{4\sqrt{4c^2 \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [(S_{t/2})^{-2d/d_w}]} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Z monotoniczności oraz (8.0.1), mamy również

$$I_2 \leq 2c \mathbf{E}_{\mathcal{P}} [(S_{t/2})^{-d/d_w} \mathbf{1}_{\{S_{t/2} < r\}}] < \frac{\varepsilon}{4},$$

oraz, dzięki (8.0.3),

$$I_3 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ostatecznie, z (8.0.2), otrzymujemy

$$I_4 \leq \mathbf{E}_{\mathcal{P}} \left[c \left((S_t)^{-d/d_w} + (S_u)^{-d/d_w} \right) \mathbf{1}_{\{|S_t - S_u| < \delta\}} \mathbf{1}_{\{S_u > R \vee S_t > R\}} \right] \leq 2c(R - 1)^{-d/d_w} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

co kończy dowód punktu (a).

Teraz pokażemy oszacowanie z punktu (b). Wynika ono z twierdzenia 3.1 w [55], tj. mamy, że istnieje stała $O_8 > 0$ (niezależna od M) taka, że

$$\sup_{(x, y) \in \mathcal{K}^{(M)} \times \mathcal{K}^{(M)}} g_M(u, x, y) \leq O_8 \left(u^{-d/d_w} \vee L^{-dM} \right)$$

$$= O_8 \left(u^{-d/d_w} \mathbf{1}_{\{u \in (0, L^{d_w M})\}} + L^{-dM} \mathbf{1}_{\{u \geq L^{d_w M}\}} \right), \quad u > 0.$$

Teraz stosując (1.3.6) dla $\gamma = d/d_w$, dostajemy poszukiwane oszacowanie. Dowód ciągłości $p_M(t, x, y)$ przebiega w ten sam sposób jak w punkcie (a). □

Dowód lematu 3.3.2

Dowód jest analogiczny do dowodu [40, Lemat 2.3]. Jedyna różnica polega na tym, że teraz używamy odległości euklidesowej zamiast geodezyjnej i stosujemy oszacowanie subgaussowskie z [24, Lemat 5.6, Uwaga 3.7]. Na koniec, podobnie jak poprzednio, korzystamy również z właściwości sumowania (1.3.8). □

Dowód lematu 3.3.3

Z twierdzenia Fubiniego-Tonelliego oraz z [55, formuła (3.3) i Lemat 3.5], dostajemy

$$\begin{aligned} C(M, t) &= \sup_{x, y \in \mathcal{K}^{(M)}} \int_0^\infty \sum_{\substack{y' \in \pi_M^{-1}(y) \\ y' \notin \mathcal{K}^{(M+1)}}} g(t, x, y') \eta_t(du) \\ &\leq c_1 \int_0^\infty L^{-dM} \left(\frac{L^M}{t^{1/d_w}} \vee 1 \right)^{d_f - \frac{d_w}{d_J - 1}} \exp \left(-c_2 \left(\frac{L^M}{t^{1/d_w}} \vee 1 \right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}} \right) \eta_t(du) \\ &\leq c_1 \int_0^{L^{d_w M}} L^{-dM} \left(\frac{L^M}{u^{1/d_w}} \right)^{d_f - \frac{d_w}{d_J - 1}} \exp \left(-c_2 \left(\frac{L^M}{u^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}} \right) \eta_t(du) \\ &\quad + c_3 L^{-dM} \eta_t \left(L^{d_w M}, \infty \right). \end{aligned}$$

Dalej dowód przebiega dokładnie w taki sam sposób jak dowód [40, Lemat 2.5 (b)].

Dowód punktu (b) jest podobny do dowodu [40, Lemat 2.7], t.j. zaczynamy od

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} |p(t, x, x) - p_M(t, x, x)| \mu(dx) \\ &\leq \frac{N}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sup_{\substack{x' \in \pi_M^{-1}(x) \\ x' \in \mathcal{K}^{(M+1)} \setminus \mathcal{K}^{(M)}}} p(t, x, x') \mu(dx) + \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{\substack{x' \in \pi_M^{-1}(x) \\ x' \notin \mathcal{K}^{(M+1)}}} p(t, x, x') \mu(dx) \\ &=: \mathcal{A}_M(t) + \mathcal{B}_M(t) \end{aligned}$$

i najpierw zauważmy, że $\mathcal{B}_M(t)$ jest sumą szeregu zbieżnego dzięki punktowi (a). Żeby udowodnić to samo dla $\mathcal{A}_M(t)$, potrzebujemy tylko zmodyfikować oszacowanie w dowodzie cytowanego lematu. Różnica polega na tym, że obszar po którym całkujemy w $\mathcal{A}_M(t)$ musi być

podzielony na dwa różne zbiory E_M^1 i E_M^2 . W naszym, ogólnym wypadku, nie możemy użyć kul w metryce geodezyjnej. Będzie stosować metrykę grafową.

Oznaczmy $V_M^{(M)} = \{v_1, \dots, v_k\}$ i

$$E_M^1 = \bigcap_{i=1}^k \left\{ y \in \mathcal{K}^{(M)} : d_{\lfloor M/2 \rfloor}(y, v_i) > 1 \right\}, \quad E_M^2 = \mathcal{K}^{(M)} \setminus E_M^1. \quad (8.0.4)$$

Przypomnijmy, że $\sup_{(x,y) \in \mathcal{K}^{(\infty)} \times \mathcal{K}^{(\infty)}} p(t, x, y) < \infty$ z Lematu 3.3.1 (a). Ponieważ E_M^2 składa się z k $\lfloor M/2 \rfloor$ -sympleksów (każdy połączony do jednego z wierzchołków $V_M^{(M)}$), mamy, że

$$\frac{\mu(E_M^2)}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} = \frac{k \cdot N^{\lfloor M/2 \rfloor}}{N^M}. \quad (8.0.5)$$

W rezultacie, część $\mathcal{A}_M(t)$ zawierająca całkowanie po zbiorze E_M^2 jest sumą szeregu zbieżnego.

Gdy $x \in E_M^1$ i $x' \in \pi_M^{-1}(x) \setminus \mathcal{K}^{(M)}$, to $d_{\lfloor M/2 \rfloor}(x, x') > 2$, zatem z [39, Lemat A.2] mamy, że $|x - x'| > c_4 L^{M/2}$. Używając wzoru na subordynację dla gęstości $p(t, x, y)$ oraz subgaussowskich oszacowań z [46] dla gęstości $g(u, x, y)$, dostajemy

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{E_M^1} \sup_{\substack{x' \in \pi_M^{-1}(x) \\ x' \in \mathcal{K}^{(M+1)} \setminus \mathcal{K}^{(M)}}} p(t, x, x') \mu(dx) \leq c_5 \int_0^\infty u^{-d/d_w} e^{-c_6 \left(\frac{L^{M/2}}{u^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}} \eta_t(du).$$

Łącząc te szacowania otrzymujemy

$$\mathcal{A}_M(t) \leq c_7 \left(N^{-M/2} + \int_0^\infty u^{-d/d_w} e^{-c_6 \left(\frac{L^{M/2}}{u^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}} \eta_t(du) \right),$$

ze stałymi c_6, c_7 niezależnymi od M , i od tego miejsca dowód przebiega w ten sam sposób jak dowód [40, Lemma 2.7].

□

Dowód istnienia IDS

Dowód twierdzenia 5.1.3

1. DLA POTENCJAŁU KRATOWEGO

Dowód twierdzenia 5.1.3 opiera się na ogólnym podejściu z [40], które jest modyfikacją argumentu, pierwotnie użytego w przypadku ruchu Browna ewoluującego wśród przeszkód Poissona na przestrzeniach hiperbolicznych [67, 68] oraz na trójkącie Sierpińskiego [56].

Wywnioskujemy zbieżność miar $\Lambda_{M,\omega}^D$ i $\Lambda_{M,\omega}^N$ ze zbieżności ich transformat Laplace'a $\mathbb{L}_M^D(t,\omega), \mathbb{L}_M^N(t,\omega)$ (zob, (5.1.17) i (5.1.18)).

Wartości oczekiwane transformat Laplace'a nie muszą być monotoniczne względem M ($\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathbb{L}_M^D$ było monotoniczne w przypadku ruchu Browna na trójkącie Sierpińskiego i potencjałów Poissona). Zbieżność \mathbb{L}_M^D i \mathbb{L}_M^N nie będzie analizowana bezpośrednio — zamiast tego zastąpimy początkowy potencjał typu kratowego V^ω , potencjałem speriodyzowanym jak w (5.1.2), będziemy rozważać warunki brzegowe typu Neumanna (tj. procesy odbijane) i teraz będziemy mogli udowodnić monotoniczność, a następnie zbieżność. Niech:

$$\mathcal{L}_{M^*}^D(t,\omega) := \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} p(t,x,x) \mathbf{E}_t^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V_M^\omega(X_s) ds}; t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} \right] \mu(dx) \quad (8.0.6)$$

oraz

$$\mathcal{L}_{M^*}^N(t,\omega) := \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M \rangle})} \int_{\mathcal{K}^{\langle M \rangle}} p_M(t,x,x) \mathbf{E}_{M,t}^{x,x} \left[e^{-\int_0^t V_M^\omega(X_s^M) ds} \right] \mu(dx) \quad (8.0.7)$$

(M^* w powyższym zapisie oznacza, że te obiekty są zdefiniowane dla potencjału speriodyzowanego V_M^ω zamiast początkowego V^ω).

Ustalmy $t > 0$ oraz trajektorię procesu $(X_s)_{s \leq t}$ na $\mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}$. Pokażemy, że wartości oczekiwane $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s)) ds}$ są malejące względem M (przez $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ oznaczamy wartość oczekiwaną względem prawdopodobieństwa \mathbb{Q} , patrz Definicja 5.1.1).

Lemat 8.0.1 *Dla każdego $t > 0$ oraz $M \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(\pi_{M+1}(X_s)) ds} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s)) ds}. \quad (8.0.8)$$

Powyższa monotoniczność będzie następnie użyta do udowodnienia, że dla każdego ustalonego $t > 0$, wartości oczekiwane $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_{M^*}^N(t,\omega)$ są malejące gdy M rośnie, a zatem są zbieżne gdy $M \rightarrow \infty$, do skończonej granicy $\mathbb{L}(t)$ i granica ta jest monotonicznie malejąca.

Wniosek 8.0.1 *Niech $\mathcal{K}^{\langle \infty \rangle}$ będzie nieograniczonym fraktalem zagnieźdżonym z GLP oraz niech zachodzą założenia **(B)**, **(Q)**, i **(A0)**–**(A2)**. Wtedy, dla dowolnego $t > 0$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}_{M^*}^N(t,\omega)$ maleje do skończonej granicy $\mathbb{L}(t)$ gdy $M \rightarrow \infty$.*

Kolejny lemat pokazuje, że wartości oczekiwane $\mathcal{L}_{M^*}^D(t,\omega)$, $\mathbb{L}_M^D(t,\omega)$ i $\mathbb{L}_M^N(t,\omega)$ zbiegają do takiej samej granicy co $\mathcal{L}_{M^*}^N(t,\omega)$ gdy $M \rightarrow \infty$. Co więcej, okaże się, że ich prawie pewne granice pokrywają się (nie wiemy jeszcze, że istnieją).

Lemat 8.0.2 *Ustalmy $t > 0$.*

(a) *Zachodzi*

$$\sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathbb{L}_M^D(t, \omega) - \mathbb{L}_M^N(t, \omega))^2 < \infty;$$

w szczególności,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathbb{L}_M^D(t, \omega) - \mathbb{L}_M^N(t, \omega))^2 = 0.$$

(b) *Zachodzi*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathcal{L}_{M^*}^D(t, \omega) - \mathcal{L}_{M^*}^N(t, \omega)) = 0 \quad i \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathbb{L}_M^D(t, \omega) - \mathcal{L}_{M^*}^D(t, \omega)) = 0.$$

Z wniosku 8.0.1 i lematu 8.0.2 otrzymujemy następujący wniosek

Wniosek 8.0.2 *Dla dowolnego $t > 0$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_M^D(t, \omega)]$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{L}_{M^*}^D(t, \omega)]$ i $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{L}_M^N(t, \omega)]$ są również zbieżne gdy $M \rightarrow \infty$ do $\mathbb{L}(t)$ zadanej we Wniosku 8.0.1.*

Teraz, gdy wiemy, że ciąg wartości oczekiwanych jest zbieżny, naszym ostatnim krokiem technicznym jest wykazanie, że szeregi wariancji zmiennych losowych $\mathbb{L}_M^D(t, \omega)$ i $\mathbb{L}_M^N(t, \omega)$ są zbieżne.

Lemat 8.0.3 *Dla każdego $t > 0$ zachodzi*

$$\sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{L}_M^D(t, \omega) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_M^D(t, \omega)]^2 < \infty \tag{8.0.9}$$

oraz

$$\sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{L}_M^N(t, \omega) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_M^N(t, \omega)]^2 < \infty \tag{8.0.10}$$

Po udowodnieniu wniosku 8.0.1 i lematu 8.0.3, dowód twierdzenia 5.1.3 przebiega niemal tak samo jak dowód Twierdzenia 3.2 w [40].

Dowód lematu 8.0.1

Rozważamy rzutowanie $\pi_M : \mathcal{K}^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{K}^{(M)}$. Każdy punkt z $V_0^{(M+1)}$ jest rzutowany przez π_M na punkt w $V_0^{(M)}$, a zatem

$$V_0^{(M+1)} = \bigcup_{y \in V_0^{(M)}} \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}$$

a ta suma jest rozłączna. Dlatego dla każdego ustalonego $t > 0$ i trajektorii procesu X mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(\pi_{M+1}(X_s)) ds} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(M+1)}} \xi_y(\omega) \sum_{y' \in \pi_{M+1}^{-1}(y)} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(M)}} \sum_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} \xi_{\tilde{y}}(\omega) \sum_{y' \in \pi_{M+1}^{-1}(\tilde{y})} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \prod_{y \in V_0^{(M)}} \exp \left(- \sum_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} \xi_{\tilde{y}}(\omega) \int_0^t \sum_{y' \in \pi_{M+1}^{-1}(\tilde{y})} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds \right) \\
&= \prod_{y \in V_0^{(M)}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \sum_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} \xi_{\tilde{y}}(\omega) a_{\tilde{y}} \right) = (*)
\end{aligned}$$

gdzie

$$a_{\tilde{y}} = \int_0^t \sum_{y' \in \pi_{M+1}^{-1}(\tilde{y})} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds,$$

ponieważ wszystkie $\xi_{\tilde{y}}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zauważmy, że $a_{\tilde{y}}$ nie zależą od ω .

Ustalmy teraz $y \in V_0^{(M)}$ i niech $C_y = \left\{ \tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)} : a_{\tilde{y}} > 0 \right\}$. Załóżmy najpierw, że $C_y \neq \emptyset$. Ponumerujmy elementy zbioru C_y jako \tilde{y}_i , dla $1 \leq i \leq n = \#C_y$. Wtedy, używając uogólnionej nierówności Höldera

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (|X_1 \dots X_n|) \leq (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} |X_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \dots (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} |X_n|^{p_n})^{\frac{1}{p_n}}$$

dla $X_i = e^{-\xi_{\tilde{y}_i} a_{\tilde{y}_i}}$ i $p_i = \frac{1}{a_{\tilde{y}_i}} \sum_{j=1}^n a_{\tilde{y}_j}$ (oczywiście zachodzi, $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \xi_{\tilde{y}_i}(\omega) a_{\tilde{y}_i} \right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \prod_{i=1}^n e^{-\xi_{\tilde{y}_i}(\omega) a_{\tilde{y}_i}} \\
&\leq \prod_{i=1}^n \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\xi_{\tilde{y}_i}(\omega) \sum_{j=1}^n a_{\tilde{y}_j}} \right)^{\frac{a_{\tilde{y}_i}}{\sum_{j=1}^n a_{\tilde{y}_j}}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\xi_y(\omega) \sum_{j=1}^n a_{\tilde{y}_j}}.
\end{aligned}$$

Ponownie, ostatnia równość jest konsekwencją tego, że wszystkie zmienne losowe $\xi_{\tilde{y}_i}$ są i.i.d.

To daje, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \sum_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} \xi_{\tilde{y}}(\omega) a_{\tilde{y}} \right) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \xi_y(\omega) \sum_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} a_{\tilde{y}} \right).$$

Jeśli $C_y = \emptyset$, wtedy powyższa nierówność jest oczywista. W konsekwencji,

$$(*) \leq \prod_{y \in V_0^{(M)}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(-\xi_y(\omega) \sum_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} \int_0^t \sum_{y' \in \pi_{M+1}^{-1}(\tilde{y})} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds \right).$$

Ostatecznie, ponieważ $\pi_M \circ \pi_{M+1} = \pi_M$ ([39, Wniosek 3.3]), mamy, że dla każdego $y \in V_0^{(M)}$ zachodzi

$$\pi_M^{-1}(y) = \bigcup_{\tilde{y} \in \pi_M^{-1}(y) \cap V_0^{(M+1)}} \pi_{M+1}^{-1}(\tilde{y})$$

i ta suma jest rozłączna. Przegrupowując składniki w powyższej sumie, dostajemy, że jest ona równa

$$\begin{aligned} & \prod_{y \in V_0^{(M)}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(-\xi_y(\omega) \int_0^t \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) \int_0^t \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(\pi_{M+1}(X_s), y') ds \right). \end{aligned}$$

Stosując **(A2)**, dochodzimy do wniosku, że ostatnia wartość oczekiwana jest mniejsza lub równa

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp \left(- \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) \int_0^t \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(\pi_M(X_s), y') ds \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s)) ds},$$

co kończy dowód. □

Dowód wniosku 8.0.1

Ustalmy $t > 0$. Z lematów 3.3.4(a) oraz 8.0.1 i dzięki zawieraniu $\pi_{M+1}^{-1}(x) \subset \pi_M^{-1}(\pi_M(x))$, możemy napisać dla μ -prawie wszystkich $x \in \mathcal{K}^{(M+1)}$

$$\begin{aligned} & p_{M+1}(t, x, x) \mathbf{E}_{M+1, t}^{x, x} [\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(X_s^{M+1}) ds}] \\ &= \sum_{x' \in \pi_{M+1}^{-1}(x)} p(t, x, x') \mathbf{E}_t^{x, x'} [\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(\pi_{M+1}(X_s)) ds}] \\ &\leq \sum_{x' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(x))} p(t, x, x') \mathbf{E}_t^{x, x'} [\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(\pi_{M+1}(X_s)) ds}] \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{x' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(x))} p(t, x, x') \mathbf{E}_t^{x, x'} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} e^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s)) ds} \right].$$

Korzystając z tego oszacowania, definicji $\mathcal{L}_{M^*}^N(t, \omega)$ i lematu 3.3.4(b), możemy dowodzić analogicznie jak w drugiej części dowodu Twierdzenia 3.1 w [40] otrzymując, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{L}_{(M+1)^*}^N(t, \omega)] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{L}_{M^*}^N(t, \omega)], \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

Ponieważ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathcal{L}_{M^*}^N(t, \omega) \geq 0$, a zatem zbiega to do skończonej granicy $\mathbb{L}(t)$ gdy $M \rightarrow \infty$. Co kończy dowód. \square

Dowód lematów 8.0.2 oraz 8.0.3

Dowody lematów 8.0.2 i 8.0.3 podane poniżej przebiegają analogicznie do dowodów Stwierdzenia 3.1 i Lematów 3.1-3.2 z [40]. Główna różnica polega na tym, że pracujemy z innym typem losowych potencjałów a przestrzeń stanów jest teraz nieograniczonym fraktalem zagnieźdzonym (trójkąt Sierpińskiego który był badany w cytowanym artykule jest jednym z najprostszych zagnieźdzonych fraktali). Powoduje to dodatkowe problemy geometryczne, które są rozwiązywane przy użyciu metryki grafowej (metryka geodezyjna może w ogóle nie być zdefiniowana) i zasady porównania z [39, Lemat A.2]. Dlatego prześledzimy tylko główne etapy dowodów.

Dowód lematu 8.0.2.

Najpierw pokażemy punkt (a). Dzięki poniższemu argumentowi z początku [40, Proposition 3.1] otrzymujemy, że dla każdego ustalonego $t > 0$ istnieje stała $c = c(t)$ taka, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\mathbb{L}_M^D(t, \omega) - \mathbb{L}_M^N(t, \omega))^2 \leq c(R_{1,M}(t) + R_{2,M}(t)), \quad M \in \mathbb{Z}_+,$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_{1,M}(t) &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x, x} [t \geq \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx) \\ R_{2,M}(t) &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} \sum_{x' \in \pi_M^{-1}(x), x' \neq x} p(t, x, x') \mu(dx) \\ &= \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} (p_M(t, x, x) - p(t, x, x)) \mu(dx). \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe ograniczenie nie zależy od ω . Zgodnie z Lematem 3.3.3 (b), $R_{2,M}(t)$ jest wyrazem szeregu zbieżnego, więc wystarczy oszacować $R_{1,M}(t)$.

Oznaczmy wierzchołki z $V_M^{(M)}$ przez v_i , $1 \leq i \leq k$, oraz niech $\Delta_{\lfloor M/2 \rfloor, v_i} \subset \mathcal{K}^{(M)}$, będzie $\lfloor M/2 \rfloor$ -sympleksem o wierzchołku v_i . Jeśli proces startuje z $x \in \mathcal{D}_M := \mathcal{K}^{(M)} \setminus \bigcup_{i=1}^k \Delta_{\lfloor M/2 \rfloor, v_i}$, to, z [39, Lemma A.2], mamy

$$\{t \geq \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}\} \subseteq \left\{ \sup_{0 < s \leq t} d_{\lfloor M/2 \rfloor}(x, X_s) > 2 \right\} \subseteq \left\{ \sup_{0 < s \leq t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2} \right\},$$

gdzie stała c_1 , jest niezależna od M . Mamy również

$$\left\{ \sup_{0 < s \leq t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2} \right\} \subseteq \left\{ \sup_{0 < s \leq t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2} \right\} \cup \left\{ \sup_{t/2 < s \leq t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2} \right\}.$$

Przypomnijmy, że $\mu(\mathcal{K}^{(M)} \setminus \mathcal{D}_M) = kN^{\lfloor M/2 \rfloor}$. Zatem, korzystając z górnego oszacowania z Lematu 3.3.1(a), wzoru (3.3.10) oraz symetryczności miary mostowej, dostajemy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{P}_{x,x}^t [t \geq \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx) \\ & \leq c_2 \mu(\mathcal{K}^{(M)} \setminus \mathcal{D}_M) + \int_{\mathcal{D}_M} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x,x} [t \geq \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx) \\ & \leq c_3 \left(N^{M/2} + N^M \sup_{x \in \mathcal{K}^{(M)}} \mathbf{P}^x \left[\sup_{0 < s \leq t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2} \right] \right). \end{aligned}$$

I w związku z tym

$$R_{1,M}(t) \leq c_3 \left(N^{-M/2} + \sup_{x \in \mathcal{K}^{(M)}} \mathbf{P}^x \left[\sup_{0 < s \leq t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2} \right] \right),$$

co jest, dzięki Lematowi 3.3.2, składnikiem szeregu zbieżnego. Dowód punktu (a) jest zakończony.

Dowód pierwszej zbieżności w (b) przebiega analogicznie jak w punkcie (a) i go pomijamy. Pokazujemy tylko drugą zbieżność.

Najpierw zauważmy, że

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{L}_M^D(t, \omega) - \mathcal{L}_M^{D^*}(t, \omega) \right) \right| \leq \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} [|F(t, M)|; t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx),$$

gdzie

$$\begin{aligned} F(t, M) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\exp \left(- \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(\infty)}} \xi_y(\omega) W(X_s, y) ds \right) \right. \\ \left. - \exp \left(- \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(X_s, y') ds \right) \right). \end{aligned}$$

Używając dokładnie tej samej notacji i argumentacji, co w dowodzie części (a), możemy napisać:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} [|F(t, M)|; t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx) \\
& \leq \frac{c_4 \mu(\mathcal{K}^{(M)} \setminus \mathcal{D}_M)}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} + \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{D}_M} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} [|F(t, M)|; t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx) \\
& = c_4 \frac{kN^{\lfloor M/2 \rfloor}}{N^M} + \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{D}_M} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} [|F(t, M)|; t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}] \mu(dx).
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik zbiega do 0 gdy $M \rightarrow \infty$. Wystarczy zatem pokazać, że drugi składnik również zbiega do zera; oznaczmy go przez $I(t, M)$. Mamy

$$\begin{aligned}
I(t, M) & \leq \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{D}_M} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x,x} [|F(t, M)|; t < \tau_{\mathcal{D}_M}] \mu(dx) \\
& \quad + \frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{D}_M} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x,x} [t \geq \tau_{\mathcal{D}_M}] \mu(dx) \\
& =: I_1(t, M) + I_2(t, M).
\end{aligned}$$

Żeby oszacować $I_1(t, M)$ użyjemy nierówności $|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$, $x, y > 0$ i faktu, że W oraz ξ_y są nieujemne.

$$\begin{aligned}
& |F(t, M)| \\
& \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left| \exp \left(- \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(\infty)}} \xi_y(\omega) W(X_s, y) \, ds \right) - \exp \left(- \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(X_s, y') \, ds \right) \right| \\
& \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left| \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(\infty)}} \xi_y(\omega) W(X_s, y) \, ds - \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} W(X_s, y') \, ds \right|.
\end{aligned}$$

Teraz, zauważmy, że dla każdego $x \in \mathcal{K}^{(\infty)}$ mamy

$$\sum_{y \in V_0^{(\infty)}} \xi_y(\omega) W(x, y) = \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) W(x, y) + \sum_{y \in V_0^{(\infty)} \setminus V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) W(x, y)$$

i

$$\sum_{y \in V_0^{(M)}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y)} \xi_{y'}(\omega) W(x, y') = \sum_{y \in V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) W(x, y) + \sum_{y \in V_0^{(M)}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \{y\}} \xi_{y'}(\omega) W(x, y').$$

Dzięki tej obserwacji, z twierdzenia Fubini'ego i faktu, że wszystkie zmienne losowe na kracie wraz z funkcją profilu W są nieujemne, otrzymujemy, że powyższa wartość oczekiwana może

być oszacowana przez

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \int_0^t \left(\sum_{y \in V_0^{(\infty)} \setminus V_0^{(M)}} \xi_y(\omega) W(X_s, y) + \sum_{y \in V_0^{(M)}} \sum_{y' \in \pi_M^{-1}(y) \setminus \{y\}} \xi_{y'}(\omega) W(X_s, y') \right) ds \\ \leq 2\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \xi \int_0^t \sum_{y \in V_0^{(\infty)} \setminus V_0^{(M)}} W(X_s, y) ds. \end{aligned}$$

Ponieważ $X_s \in \mathcal{D}_M$ dla $0 \leq s \leq t$ i $y \in V_0^{(\infty)} \setminus V_0^{(M)}$, mamy $d_{\lfloor M/2 \rfloor}(X_s, y) > 2$ dla $0 \leq s \leq t$.

Co daje

$$\begin{aligned} I_1(t, M) &\leq \frac{2\kappa}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{D}_M} p(t, x, x) \mathbf{E}_t^{x, x} \left[\int_0^t \sum_{y \in V_0^{(\infty)} \setminus V_0^{(M)}} W(X_s(\omega), y) ds; t < \tau_{\mathcal{D}_M} \right] \mu(dx) \\ &\leq c_5 \sup_{z \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \sum_{y \in V_0^{(\infty)} \setminus B_{\lfloor M/2 \rfloor}(z, 1)} W(z, y), \end{aligned}$$

gdzie stała $c_5 > 0$ niezależna od M . A dzięki **(A1)** jest to składnik szeregu zbieżnego.

Żeby pokazać, że $I_2(t, M)$ jest również składnikiem szeregu zbieżnego, powtarzamy kroki z dowodu punktu (a) dla odpowiedniego zbioru $\mathcal{D}'_M \subset \mathcal{D}_M$. Dowód punktu (b) jest zakończony.

□

Dowód lematu 8.0.3.

Dowód tego lematu przebiega podobnie do dowodu [40, Lemat 3.2], niemniej, w pewnych fragmentach nieco się różni. Ograniczymy się do wyjaśnienia tych różnic.

Najpierw zauważmy, że ze względu na Lemat 8.0.2(a), podobnie jak w dowodzie [40, Lemat 3.2], wystarczy ustalić (8.0.9). Rozważamy rodzinę miar $(\nu_M)_{M \in \mathbb{Z}_+}$ zadaną przez

$$\nu_M := \left(\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x, x} \mu(dx) \right)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{Q}^{\otimes 3}, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \quad (8.0.11)$$

zdefiniowaną na przestrzeni produktowej $\tilde{\Omega} = D([0, t], \mathcal{K}^{(\infty)})^2 \times \Omega^3$, oraz niemalejący ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_M)_{M \in \mathbb{Z}_+}$ taki, że $a_M \leq M$, $M \in \mathbb{Z}_+$. Wartości ciągu ustalimy później.

Dla $m \in \mathbb{Z}_+$ ustalamy

$$V^{\omega, m}(x) := \sum_{y \in V_0^{(\infty)} \cap B_m(x, 1)} \xi_y(\omega) W(x, y) \quad (8.0.12)$$

i

$$\tilde{V}^{\omega, m}(x) := \sum_{y \in V_0^{(\infty)} \setminus B_m(x, 1)} \xi_y(\omega) W(x, y), \quad (8.0.13)$$

gdzie kula $B_m(x, 1)$ oznacza kulę w metryce m -grafowej, tzn. dla $x \in \mathcal{K}^{(\infty)} \setminus V_m^{(\infty)}$ jest to $\Delta_m(x)$, m -sympleks zawierający x ; dla $x \in V_m^{(\infty)}$ jest to suma m -sympleksów połączonych z x (jest ich $\text{rank}(x) \in \{1, 2, 3\}$). Oznaczmy również dla $M \in \mathbb{Z}_+$

$$F_M(w, \omega) := e^{-\int_0^t V^{\omega, a_M}(X_s(w)) ds} \quad \text{and} \quad \tilde{F}_M(w, \omega) := e^{-\int_0^t \tilde{V}^{\omega, a_M}(X_s(w)) ds}.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{L}_M^D - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}_M^D]^2 &= \int_{\tilde{\Omega}} \prod_{i=1}^2 \left(F_M(w_i, \omega_0) \tilde{F}_M(w_i, \omega_0) - F_M(w_i, \omega_i) \tilde{F}_M(w_i, \omega_i) \right) \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\{t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}(w_i)\}} \cdot d\nu_M(w_1, w_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2) \\ &=: \int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{X}(w_1, w_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2) d\nu_M(w_1, w_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Podzielmy zbiór $\tilde{\Omega}$ na trzy rozłączne zbiory:

$$\begin{aligned} D_0^M &:= \left\{ (w_1, w_2) \in D([0, t], \mathcal{K}^{(\infty)})^2 : \text{for every } s_1, s_2 \in [0, t] \ d_{a_M}(X_{s_1}(w_1), X_{s_2}(w_2)) > 2 \right\} \times \Omega^3, \\ D_1^M &:= \left\{ (w_1, w_2) \in D([0, t], \mathcal{K}^{(\infty)})^2 : d_{a_M+3}(X_0(w_1), X_0(w_2)) > 2 \text{ i istnieją } s_1, s_2 \in (0, t] \right. \\ &\quad \left. \text{takie, że } d_{a_M}(X_{s_1}(w_1), X_{s_2}(w_2)) \leq 2 \right\} \times \Omega^3, \\ D_2^M &:= \tilde{\Omega} \setminus (D_0^M \cup D_1^M). \end{aligned}$$

Będziemy całkować \mathcal{X} po każdym z tych zbiorów osobno. Zwróćmy uwagę, że wszystkie te zbiory są teraz Korzystając okazji, poprawiamy definicję zbiorów D_0^M i D_1^M na s. 1272 w [40]: należy je również zdefiniować za pomocą $s_1, s_2 \in [0, t]$ jak wyżej zamiast pojedynczego $s \in [0, t]$. Ponadto a_M zdefiniowane za pomocą metryki m -grafowej $d_m(x, y)$. powinno być użyte w definicji D_0^M zamiast c_M .

Używając tego samego argumentu co dowodzie przytoczonego lematu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^2 \left(F_M(w_i, \omega_0) \tilde{F}_M(w_i, \omega_0) - F_M(w_i, \omega_i) \tilde{F}_M(w_i, \omega_i) \right) \\ &\leq \prod_{i=1}^2 (F_M(w_i, \omega_0) - F_M(w_i, \omega_i)) \\ &\quad + 2 - \left(\tilde{F}_M(w_1, \omega_0) \tilde{F}_M(w_2, \omega_2) + \tilde{F}_M(w_2, \omega_0) \tilde{F}_M(w_1, \omega_1) \right). \end{aligned}$$

Dla danego $M \in \mathbb{Z}_+$ i trajektorii $X_s(w)$, funkcjonal $F_M(w, \cdot)$ zależy tylko od tych punktów kraty z $V_0^{(\infty)}$, które znajdują się w zbiorze $X_{[0, t]}^{a_M}(w) := \bigcup_{s \in [0, t]} B_{a_M}(X_s(w), 1)$. Z definicji

D_0^M widzimy, że na tym zbiorze mamy $X_{[0,t]}^{a_M}(w_1) \cap X_{[0,t]}^{a_M}(w_2) = \emptyset$, a zatem zmienne losowe $F_M(w_1, \omega_0) - F_M(w_1, \omega_1)$ i $F_M(w_2, \omega_0) - F_M(w_2, \omega_2)$ są $\mathbb{Q}^{\otimes 3}$ -niezależne. W konsekwencji,

$$\int_{D_0^M} \prod_{i=1}^2 (F_M(w_i, \omega_0) - F_M(w_i, \omega_i)) \mathbf{1}_{\{t < \tau_{\mathcal{K}^{(M)}}(w_i)\}} d\nu_M(w_1, w_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2) = 0$$

i analogicznie jak w dowodzie przytoczonego lematu, uwzględniając nierówność Jensena i założenie, że wszystkie zmienne losowe są nieujemne i całkowalne, otrzymujemy

$$\int_{D_0^M} \mathcal{X} d\nu_M \leq ct \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \xi \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \sum_{y \notin B_{a_M}(x, 1)} W(x, y), \quad (8.0.14)$$

gdzie stała $c > 0$, jest niezależna od M .

Na zbiorze D_1^M mamy

$$\sup_{s \in (0, t]} d_{a_M}(X_0(w_i), X_s(w_i)) > 2, \quad \text{dla } i = 1 \text{ lub } i = 2. \quad (8.0.15)$$

Z definicji D_1^M mamy, że $d_{a_M+3}(X_0(w_1), X_0(w_2)) > 2$, co daje, że $X_0(w_1)$ i $X_0(w_2)$ są w osobnych $(a_M + 3)$ -sympleksach.

Jeśli, w przeciwieństwie do (8.0.15), zarówno dla $i \in \{1, 2\}$, jak i wszystkich $s \in (0, t]$ było $d_{a_M}(X_0(w_i), X_s(w_i)) \leq 2$, to dla obu $i = 1, 2$ trajektorie $X_s(w_i)$ mieściłyby się wewnątrz $B_{a_M}(X_0(w_i), 2)$. Oznaczałoby to, że te dwie trajektorie procesu do czasu t nie są bliżej siebie niż w dwóch różnych a_M -sympleksach dołączonych do wierzchołków wspólnego $(a_M + 3)$ -sympleksu. W rzeczywistości byłyby to oddzielne $(a_M + 1)$ -sympleksy wewnątrz dwóch różnych $(a_M + 2)$ -sympleksów. Oznaczałoby, że $d_{a_M}(X_{s_1}(w_1), X_{s_2}(w_2)) \geq 6$ dla wszystkich $s_1, s_2 \in (0, t]$, ponieważ ścieżka implementująca odległość grafową musi przechodzić przez inny a_M -sympleks wewnątrz $(a_M + 1)$ -sympleksu zawierający $X_{s_1}(w_1)$, a następnie przez inny $(a_M + 1)$ -sympleks wewnątrz $(a_M + 2)$ -sympleksu zawierającego $X_{s_1}(w_1)$, czyli co najmniej dwa dodatkowe a_M -sympleksy. Symetrycznie, musi przejść dalej przez co najmniej trzy a_M -sympleksy wewnątrz $(a_M + 2)$ -sympleksu zawierającego $X_{s_2}(w_2)$.

Z [39, Lemat A.2] wynika zatem, że

$$\sup_{s \in (0, t]} |X_0(w_i), X_s(w_i)| \geq c_1 L^{a_M}, \quad \text{for } i = 1 \text{ or } i = 2,$$

gdzie stała c_1 niezależna od M , i skoro $0 \leq F_M(w_i, \omega_k) \leq 1$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$, to całka po zbiorze D_1^M może być szacowana przez

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{(M)})} \int_{\mathcal{K}^{(M)}} p(t, x, x) \mathbf{P}_t^{x, x} \left[\sup_{s \in (0, t]} |X_0(w_i), X_s(w_i)| \geq c_1 L^{a_M} \right] \mu(dx). \quad (8.0.16)$$

Używając tej samej argumentacji, co w tym samym kroku dowodu cytowanego lematu, otrzymujemy, że powyższe wyrażenie jest mniejsze lub równe

$$c_2 \sup_{x \in \mathcal{K}^{(\infty)}} \mathbf{P}^x \left[\sup_{s \in (0, t/2]} |X_0(w_i), X_s(w_i)| \geq c_1 L^{a_M} \right], \quad (8.0.17)$$

ze stałą c_2 , niezależną od M .

Ponieważ całka \mathcal{X} nie jest większa niż 1, wystarczy oszacować miarę zbioru D_2^M . Mamy

$$\nu_M(D_2^M) \leq \frac{c_3 \mu\{(x, y) \in \mathcal{K}^{(M)} \times \mathcal{K}^{(M)} : d_{a_M+3}(x, y) \leq 2\}}{(\mu(\mathcal{K}^{(M)}))^2} \leq \frac{4c_3 N^{a_M+3}}{N^M}, \quad (8.0.18)$$

ze stałą c_3 niezależną od M .

Możemy wybrać $a_M = \lfloor M/4 \rfloor$. Wtedy z **(A1)**, (8.0.14) jest wyrazem szeregu zbieżnego a dzięki (3.3.2), (8.0.17) jest również wyrazem szeregu zbieżnego .

□

2. DLA POTENCJAŁU POISSONOWSKIEGO

Dowód jest analogiczny jak w przypadku potencjału kratowego. Jedyna różnica jest w dowodzie lematu 8.0.1 oraz wniosku 8.0.1, w których zamieniamy potencjał kratowy na Poissonowski, pamiętając że pracujemy tym razem przy założeniach **(A0')**, **(A1')** i **(A2)**.

□

Bibliografia

- [1] Balsam, H., *Transition density estimates for subordinated reflected Brownian motion on simple nested fractals*, 2021, available at: arXiv:2106.00081.
- [2] Balsam, H., Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K., *Density of states for the normal Anderson model on nested fractals*, preprint
- [3] Balsam, H., Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K., *IDS for subordinate Brownian motions in Poisson random environment on nested fractals*, preprint.
- [4] Balsam H., Pietruska-Pałuba K., *Transition density estimates for relativistic α -stable processes on metric spaces*. PMS (2020), Vol. 40, Fasc. 2, pages 183 - 204.
- [5] Barlow, M. T., *Diffusion on fractals*, Lectures on Probability and Statistics, Ecole d'Été de Prob. de St. Flour XXV — 1995, Lecture Notes in Mathematics no. 1690, Springer-Verlag, Berlin 1998.
- [6] Barlow, M. T., Bass, R. F., *The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 25 (1989), pp. 225–257.
- [7] Barlow, M. T., Bass, R. F., T. Kumagai, A. Teplyaev, *Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 12 (2010), pp. 655–701.
- [8] Barlow, M. T., Perkins, E. A., *Brownian motion on the Sierpiński gasket*, Prob. Th. Rel. Fields 79 (1988), pp. 543–623.
- [9] Bertoin, J., *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [10] Bertoin, J., *Subordinators: examples and applications*, in: École d'Été de Probabilités de St. Flour XXVII, P. Bernard (ed.), Lecture Notes in Mathematics no. 1717, Springer, 1999, pp. 4–79.

- [11] Bochner, S., *Diffusion Equation and Stochastic Processes*, Proc. Natl. Acad. Sci. 35 (1949), pp. 368–370.
- [12] Bochner, S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, California Monographs in Math. Sci., University of California Press, Berkeley CA, 1955
- [13] Bogdan, K. et al., *Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions* (ed. P. Graczyk, A. Stós), Lecture Notes in Mathematics no. 1980, Springer, Berlin, 2009.
- [14] Bogdan, K., Stós, A., Sztonyk, P., *Harnack inequality for stable processes on d -sets*, Studia Math. 158 (2), (2003), 163–198.
- [15] Carlen, E. A., Kusuoka, S., Stroock, D. W. *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*, Ann. IHP, 23 (1987), 245-287.
- [16] Carmona R., Lacroix J., *Spectral theory of random Schoedinger operators*. Birkhauser, 1990.
- [17] Chaumont, L., Uribe Bravo, G., *Markovian bridges: weak continuity and pathwise constructions*, Ann. Probab., 39 (2) (2011), pp. 609-647
- [18] Chen, Z.-Q., Kumagai, T., *Heat kernel estimates for stable-like processes on d -sets*, Stoch. Proc. Appl. 108 (2003), pp. 27–62.
- [19] Chen, Z.-Q., Kumagai, T., *Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces*. Probab. Theory Related Fields 140 (2008), pp. 277–317.
- [20] Chen, Z.-Q., Song, R., *Two sided eigenvalue estimates for subordinate processes in domains*, J. Funct. Anal. 226, 2005, 90?113.
- [21] Chung, K.L., Zhao, Z., *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Springer, New York, 1995.
- [22] Demuth, M., van Casteren, J.A., *Stochastic Spectral Theory for Self-adjoint Feller Operators*. A Functional Analysis Approach, Birkhäuser, Basel 2000.
- [23] Farkas, W., Jacob, N., *Sobolev Spaces on Non-Smooth Domains and Dirichlet Forms Related to Subordinate Reflecting Diffusions*, Math. Nachr. 224 (2001), 75–104.

- [24] Fitzsimmons, P. J., Hambly, B. M., Kumagai, T.: *Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals*, Comm. Math. Phys. 165 (1994), no. 3, 595–620.
- [25] Fukushima, M., *On the spectral distribution of a disordered system and a range of a random walk* Osaka J. Math. 11, 1974, 73-85.
- [26] Fukushima, M., *Dirichlet forms, diffusion processes, and spectral dimensions for nested fractals*. In: *Ideas and methods in stochastic analysis, stochastics and applications*, 151–161. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1992.
- [27] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M.: *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Walter De Gruyter, Berlin, 1994.
- [28] Grigor'yan, A., *Heat kernels and function theory on metric measure spaces*. In: *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, pp. 143–172, Contemp. Math., 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [29] Grigor'yan A., Hu H., Lau K-S. *Heat kernels on metric measure spaces and an application to semilinear elliptic equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no.5, 2065–2095.
- [30] Havlin, S., Ben-Avraham, D., *Diffusion in disordered media*, Adv. Phys. 36 (1987), pp. 695–798.
- [31] Hawkes, J., *A Lower Lipschitz Condition for the Stable Subordinator*. Z Wahr. verw. Geb. 17, (1971), 23–32.
- [32] Hino, M., Kumagai, T., *A trace theorem for Dirichlet forms on fractals*, J. Funct. Anal. 238 (2006), pp. 578–611.
- [33] Hu, J., Zähle, M., *Potential spaces on fractals*, Studia Math. 170 (2005), pp. 259–281.
- [34] Hu, J., Zähle, M., *Generalized Bessel and Riesz potentials on metric measure spaces*, Potential Anal. 30 (2009), pp. 315–340.
- [35] Jacob, N., Schilling, R., *Some Dirichlet Spaces Obtained by Subordinate Reflected Diffusions*, Rev. Math. Iberoamericana 15 (1999), 59–91.

- [36] Jonsson, A., Wallin, H., *Function spaces on subsets of \mathbb{R}^n* , Mathematical Reports Vol. 2, Part 1, Harwood Acad. Publ. 1984.
- [37] Jonsson, A., *Brownian motion on fractals and function spaces*. Math. Z. 222 (1996), pp. 495–504.
- [38] Jonsson, A., *A trace theorem for the Dirichlet form on the Sierpinski gasket*. Math. Z. 250 (2005), pp. 599–609.
- [39] Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K., *Reflected Brownian motion on simple nested fractals*, Fractals 27 (6), 2019, 1950104 1-29
- [40] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Integrated density of states for Poisson-Schrödinger perturbations of subordinate Brownian motions on the Sierpiński gasket*, Stochastic Process. Appl. 125 (4), 2015, 1244-1281.
- [41] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Lifschitz tail for continuous Anderson models driven by Lévy operators*, Communications in Contemporary Mathematics, 2021. Vol. 23, no. 06, 1–33
- [42] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Lifschitz singularity for subordinate Brownian motions in presence of the Poissonian potential on the Sierpiński gasket*, Stochastic Processes and their Applications, 2018. Vol. 128, no. 11, 3897–3939
- [43] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Lifschitz tail for Alloy-type models driven by the fractional Laplacian*, Journal of Functional Analysis. 2020, vol. 279, no 5, 1–23.
- [44] Kaleta, K., Sztonyk, P., *Small-time sharp bounds for kernels of convolution semigroups*, J. Anal. Math. 132, no. 1 (2017), pp. 355–394.
- [45] Kumagai, T., *Estimates of transition densities for Brownian motion on nested fractals*, Probab. Theory Related Fields 96 (1993), no. 2, 205–224.
- [46] Kumagai, T., *Estimates on transition densities for Brownian motion on nested fractals*, Prob. Th. Rel. Fields, 96 (1993), pp. 205–224.
- [47] Kumagai, T., *Function spaces and stochastic processes on fractals. Fractal geometry and stochastics III*, pp. 221–234, Progr. Probab., 57, Birkhäuser, Basel, 2004.

- [48] Kusuoka, S., *Dirichlet forms on fractals and products of random matrices*. Publ. RIMS Kyoto Univ., 25, 659–680 (1989).
- [49] Lieb, E. H., Seiringer, R., *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2009.
- [50] Lifshitz I.M., *Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems*, Soviet Physics Uspekhi 7 (1965), 549-573.
- [51] Lindstrøm, T., *Brownian motion on nested fractals*, Mem. Amer. Math. Soc. 420 (1990), pp. 1–128.
- [52] Nakao, S., Spectral distribution of Schroedinger operator with random potential, Japan J. Math 3 (1977), 111-139.
- [53] Okura H., *On the spectral distributions of certain integro-differential operators with random potential*, Osaka J. Math. 16 (1979), no. 3, 633-666.
- [54] Olszewski, M., *Stochastic processes on fractals and in random media*, praca doktorska. Wrocław, April 2020.
- [55] Olszewski, M., *Estimates for the transition densities of the reflected Brownian motion on simple nested fractals*, Prob. Math. Statist., 39, (2019), no. 2, 423-440.
- [56] Pietruska-Pałuba, K., *The Lifschitz singularity for the density of states on the Sierpinski gasket*, Probab. Theory Related Fields 89 (1991), no. 1, 1-33.
- [57] Pietruska-Pałuba, K., *The Wiener Sausage Asymptotics on Simple Nested Fractals*, Stochastic Analysis and Applications, 23:1 (2005), 111-135.
- [58] Pietruska-Pałuba, K., Stos, A., *Poincaré inequality and Hajlasz-Sobolev spaces on nested fractals*, Studia Math. 218(1) (2013), 1–28.
- [59] Pietruska-Pałuba, K., *On function spaces related to the fractional diffusions on d-sets*, Stoch. and Stoch. Reports 70 (2000), pp. 153–164.
- [60] Reed, M., Simon, B.,: *Methods on Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.

- [61] Ryznar, M., *Estimates of Green function for relativistic α -stable process*. Potential Anal. 17 (2002), 1–23.
- [62] Sabot, C., *Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 30 (1997), pp. 605–673.
- [63] Schilling, R., Song, R., Vondracek, Z., *Bernstein functions. Theory and applications*. De Gruyter Studies in Mathematics, 37. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2010.
- [64] Shima, T., *Lifschitz tails for random Schrödinger operators on nested fractals*, Osaka J. Math 29, 1992, 749–770.
- [65] Stós, A., *Symmetric α -stable processes on d -sets*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48 (2000), no. 3, 237–245.
- [66] Sturm, K.-T., *Diffusion processes and heat kernels on metric spaces*, Ann. Probab. 26 (1998), pp. 1–55.
- [67] Sznitman, A.S., *Lifschitz tail and Wiener sausage on hyperbolic space*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 1033–1065.
- [68] Sznitman, A.S., *Lifschitz tail on hyperbolic space: Neumann conditions*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 1–30.
- [69] Sznitman, A.S., *Lifschitz tail and Wiener sausage I*, J. Funct. Anal. 94 (1990), 223–246.
- [70] Triebel, H., *Theory of function spaces. III*. Monographs in Mathematics, 100. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [71] Triebel, H., *Fractals and spectra. Related to Fourier analysis and function spaces*, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2011.