

O pewnej klasie teoriozbiorowych rozwiązań równania Yanga–Baxtera

Magdalena Wiertel
praca wspólna z M. Mazzottą, P. Stefanelli

Warszawa, styczeń 2026

Definicja

Para (X, r) , gdzie X jest niepustym zbiorem, a $r : X \times X \rightarrow X \times X$ jest teoriozbiorowym rozwiązaniem równania Yanga–Baxtera, gdy na $X \times X \times X$ spełniona jest równość

$$(r \times \text{id})(\text{id} \times r)(r \times \text{id}) = (\text{id} \times r)(r \times \text{id})(\text{id} \times r). \quad (\text{YB})$$

Notacja: $r(x, y) = (\lambda_x(y), \rho_y(x))$, gdzie $\lambda_x, \rho_x : X \rightarrow X$

Rozwiązanie jest

- 1) lewostronnie (prawostronnie) niezdegenerowane, gdy $\lambda_x : X \rightarrow X$ ($\rho_x : X \rightarrow X$) jest bijekcją dla dowolnego $x \in X$,
- 2) niezdegenerowane, gdy jest prawostronnie oraz lewostronnie niezdegenerowane,
- 2) biiektywne, gdy r jest bijekcją.

Przykłady

- 1) $(X, \text{id}_{X \times X})$ jest bijektywnym rozwiązaniem równania (YB), które nie jest lewostronnie ani prawostronnie niezdegenerowane.
- 2) Niech $f, g : X \rightarrow X$ będą bijekcjami na zbiorze X . Wtedy (X, r) zadane jako

$$r(x, y) = (f(y), g(x))$$

jest (niezdegenerowanym) rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy $fg = gf$.

- 3) Gdy G jest grupą, (G, r) takie, że

$$r(x, y) = (y, y^{-1}xy)$$

jest bijektywnym oraz niezdegenerowanym rozwiązaniem.

Przykład - motywacja

Półgrupa S jest inwersyjna, gdy dla dowolnego $s \in S$ istnieje dokładnie jeden element, oznaczany przez s^- taki, że $s^-ss^- = s^-$ oraz $ss^-s = s$.

Definicja

Trójkę $(S, +, \circ)$ nazywamy **słabą klamerką**, gdy S zbiorem z dwoma działaniami takimi, że $(S, +)$ oraz $(S, \circ)$ są półgrupami inwersyjnymi takimi, że

$$x \circ (y + z) = x \circ y - x + x \circ z,$$

$$x \circ x^- = -x + x$$

dla dowolnych $x, y, z \in S$, gdzie $-x$ oraz x^- to odwrotności x w $(S, +)$ oraz $(S, \circ)$. Wtedy

$$\lambda_x(y) = -x + x \circ y, \quad \rho_y(x) = \lambda_x(y)^- \circ x \circ y$$

jest rozwiązaniem równania Yang–Baxtera.

słaba klamerka, w której jest dokładnie jeden idempotent $\iff$ skośna klamerka

Przykład

Gdy S jest **półgrupą Clifforda**, tzn. inwersyjną półgrupą, w której dla dowolnego $x \in S$ zachodzi $xx^{-} = x^{-}x$, to $(S, +, \circ)$ takie, że

$$x + y = x \circ y$$

dla dowolnych $x, y \in S$ jest słabą klamerką.

Wówczas stowarzyszone z nią rozwiązanie jest postaci

$$r(x, y) = (x \circ x^{-} \circ y, y^{-} \circ x \circ y)$$

dla dowolnych $x, y \in S$.

Przykład - własności rozwiązań

Twierdzenie (Catino, Mazzotta, Miccoli, Stefanelli)

Dla dowolnej słabej klamerki $(S, +, \circ)$ półgrupa $(S, +)$ jest **półgrupą Clifforda**.

Gdy dodatkowo także $(S, \circ)$ jest półgrupą Clifforda, to słaba klamerka jest nazywana **dualną słabą klamerką**.

Obserwacja

Dla dowolnego rozwiązania r pochodzącego od słabej klamerki $(S, +, \circ)$ zachodzi

$$rr^{op}r = r, \quad r^{op}rr^{op} = r^{op}, \quad rr^{op} = r^{op}r,$$

gdzie r^{op} to rozwiązanie pochodzące od $(S, +^{op}, \circ)$, gdzie dla dowolnych $a, b \in S$ mamy $a +^{op} b = b + a$.

Przykład - własności rozwiązań

Stwierdzenie

Dla dowolnej dualnej słabej klamerki $(S, +, \circ)$ zbiory $\Lambda(S) = \{\lambda_x | x \in S\}$ oraz $\rho(S) = \{\rho_x | x \in S\}$ są podpółgrupami Clifforda w monoidzie S^S składającym się ze wszystkich funkcji $S \rightarrow S$.

Wniosek

Dla dowolnego rozwiązania $r(x, y) = (\lambda_x(y), \rho_y(x))$ pochodzącego od dualnej słabej klamerki oraz dowolnego λ_x istnieje λ_x^- takie, że

$$\lambda_x^- \lambda_x \lambda_x^- = \lambda_x^-, \quad \lambda_x \lambda_x^- \lambda_x = \lambda_x, \quad \lambda_x^- \lambda_x = \lambda_x \lambda_x^-.$$

Rozwiązania quasi-bijektywne oraz quasi-niezdegenerowane

Definicja (Mazzotta, Stefanelli, W.)

Rozwiązanie (X, r) , gdzie $r(x, y) = (\lambda_y(x), \rho_x(y))$ jest

- 1) **quasi-bijektywne**, gdy istnieje rozwiązanie (X, r^-) takie, że

$$rr^-r = r, \quad r^-rr^- = r^- \quad \text{oraz} \quad r^-r = rr^-,$$

- 2) **lewostronnie quasi-niezdegenerowane**, gdy dla dowolnego $x \in X$ istnieje $\lambda_x^- : X \rightarrow X$ takie, że dla dowolnych $x, y \in X$

$$\lambda_x \lambda_x^- \lambda_x = \lambda_x, \quad \lambda_x^- \lambda_x \lambda_x^- = \lambda_x^-, \quad \lambda_x^0 := \lambda_x \lambda_x^- = \lambda_x^- \lambda_x, \quad \lambda_x^0 \lambda_y = \lambda_y \lambda_x^0,$$

- 3) **quasi-niezdegenerowane**, gdy jest lewostronnie oraz prawostronnie quasi-niezdegenerowane.

Obserwacja

Dla dowolnej półgrupy S oraz $a \in S$, jeśli istnieje $x \in S$ takie, że $axa = a$, $xax = x$ oraz $ax = xa$, to x jest wyznaczone jednoznacznie.

Szkic dowodu

Warunki z obserwacji gwarantują, że a oraz x są we wspólnej H -klasie zawierającej także idempotent ax . Z twierdzenia Greena wynika, że ta klasa musi być podgrupą w S , a stąd teza.

Wniosek

- 1) Dla dowolnego rozwiązania quasi-bijektywnego (X, r) , rozwiązanie r^- jest wyznaczone jednoznacznie.
- 2) Dla dowolnego rozwiązania lewostronnie quasi-niezdegenerowanego (X, r) oraz $x \in X$ funkcja λ_x^- jest wyznaczona jednoznacznie.

Przykłady

- 1) Dowolne rozwiązanie (X, r) pochodzące od słabej klamerki jest quasi-bijektywne, gdzie $r^- = r^{op}$. Gdy słaba klamerka jest dualna, to rozwiązanie jest także quasi-niezdegenerowane.
- 2) Dowolne rozwiązanie spełniające warunek $r^3 = r$ jest quasi-bijektywne.
- 4) Dla dowolnego zbioru X rozpatrzmy przemienne ze sobą funkcje $f, g : X \rightarrow X$. Wówczas

$$r(x, y) = (f(y), g(x))$$

jest rozwiązaniem quasi-niezdegenerowanym, gdy f oraz g mają odwrotności f^- oraz g^- takie, że $ff^- = f^-f$ oraz $gg^- = g^-g$.

- 5) Rozwiązanie $r(x, y) = (x, y)$ jest quasi-bijektywne ($r^- = r$), ale nie jest lewostronnie ani prawostronnie quasi-niezdegenerowane dla $|X| > 1$, ponieważ $\lambda_x^0 \lambda_y \neq \lambda_y \lambda_x^0$ dla $x \neq y$.

Definicja

Para $(X, \triangleright)$ jest **shelfem**, gdzie X jest zbiorem, a $\triangleright : X \times X \rightarrow X$, gdy dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi

$$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z). \quad (\text{SD})$$

Oznaczmy $L_x = x \triangleright - : X \rightarrow X$. Wówczas (SD) można przepisać jako

$$L_x L_y = L_{L_x(y)} L_x$$

Funkcja $r(x, y) = (y, y \triangleright x)$ jest rozwiązaniem (YB) $\iff (X, \triangleright)$ jest shelfem

Definicja (Mazzotta, Stefanelli, W.)

Shelf $(X, \triangleright)$ jest **quasi-rackiem**, gdy lewostronne mnożenia L_x spełniają

$$L_x L_x^- L_x = L_x, \quad L_x^- L_x L_x^- = L_x^-, \quad L_x^0 := L_x L_x^- = L_x^- L_x, \quad \text{oraz} \quad L_x^0 L_y = L_y L_x^0.$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Jeśli dodatkowo $L_x(x) = x$ dla dowolnego $x \in X$, to $(X, \triangleright)$ jest **quasi-quandlem**.

Przykłady

- 1) Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz $f : X \rightarrow X$ idempotentem.
Wówczas

$$x \triangleright y := f(y)$$

jest quasi-rackiem.

- 2) Załóżmy, że S jest półgrupą Clifforda oraz niech $e \in S$ będzie idempotentem. Wówczas

$$x \triangleright y := x^{-1} y x e,$$

dla dowolnych $x, y \in S$ zadaje strukturę quasi-racka na S , gdzie $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$ dla dowolnego $x \in S$.

- 3) Podobnie, gdy S jest półgrupą Clifforda, $(S, \triangleright)$ takie, że

$$x \triangleright y := x y^{-1} x$$

jest quasi-quandlem na S .

Rozwiązania pochodzące od quasi-racków

Definicja

Założmy, że $(X, \triangleright)$ jest quasi-rackiem. Wówczas przez $r_{\triangleright}$ będziemy oznaczać następującą funkcję $X \times X \rightarrow X \times X$

$$r_{\triangleright}(x, y) = (L_x^0(y), L_y(x)) .$$

Przykłady

- 1) Niech $(X, \triangleright)$ będzie quasi-rackiem takim, że $x \triangleright y = f(y)$ dla pewnego f takiego, że $f^2 = f$. Wtedy

$$r_{\triangleright}(x, y) = (f(y), f(x))$$

jest rozwiązaniem równania (YB).

- 2) Gdy $(S, \triangleright)$, gdzie S jest półgrupą Clifforda oraz $x \triangleright y = xy^{-1}x$, otrzymujemy rozwiązanie

$$r_{\triangleright}(x, y) = (x^0 y, yx^{-1}y) .$$

Kiedy quasi-racki zadają rozwiązanie równania Yanga–Baxtera?

Twierdzenie (Mazzotta, Stefanelli, W.)

Niech $(X, \triangleright)$ będzie quasi-rackiem takim, że zachodzi co najmniej jeden z warunków

$$L_{L_x(y)}^0 = L_x^0 L_y^0$$

lub

$$L_y(x) = L_{L_x^0(y)}(x)$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Wówczas

$$r_{\triangleright}(x, y) = (L_x^0(y), L_y(x))$$

jest quasi-niezdegenerowanym rozwiązaniem (YB).

Kiedy quasi-racki zadają rozwiązanie równania Yanga–Baxtera?

Wniosek

Niech $(X, \triangleright)$ będzie quasi-rackiem takim, że dla dowolnych $x \in X$ zachodzi

$$L_x^0(x) = x.$$

Wówczas $r_\triangleright$ jest quasi-niezdegenerowanym rozwiązaniem.

Szkic dowodu

Założmy, że $L_x^0(x) = x$. Korzystając z tego, że $L_x L_y = L_{L_x(y)} L_x$ otrzymujemy

$$L_x^0 L_y = L_x^- L_{L_x(y)} L_x = L_x^- L_{L_x(L_x^0(y))} L_x = L_x^0 L_{L_x^0(y)}.$$

Dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi

$$L_y(x) = L_y L_x^0(x) = L_x^0 L_y(x) = L_x^0 L_{L_x^0(y)}(x) = L_{L_x^0(y)}(x),$$

a więc spełniony jest jeden z warunków z twierdzenia. Zatem $r_\triangleright$ jest quasi-niezdegenerowanym rozwiązaniem.

Kiedy quasi-racki zadają rozwiązanie równania Yanga–Baxtera?

Stwierdzenie

Niech $(X, \triangleright)$ będzie quasi-rackiem takim, że dla dowolnych $x \in X$ zachodzi

$$L_x^0(x) = x.$$

Wówczas $r_\triangleright$ jest quasi-bijektywnym rozwiązaniem.

Można sprawdzić, że w tym przypadku

$$r_\triangleright^-(x, y) = (L_x^-(y), L_y^0(x)).$$

W szczególności, gdy $L_x(x) = x$ dla $x \in X$, rozwiązanie $r_\triangleright$ jest quasi-niezdegenerowane i quasi-bijektywne.

Przykłady

$$L_{L_x(y)}^0 = L_x^0 L_y^0$$

$$L_y(x) = L_{L_x^0(y)}(x)$$

$$L_x^0(x) = x$$

- 1) Dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow X$ takiej, że $f^2 = f$, quasi-rack taki, że $L_x(y) = f(y)$ spełnia oba warunki z twierdzenia.
- 2) Niech X będzie półgrupą Clifforda, $e \in X$ idempotentem oraz $L_x(y) = x^{-1}yxe$. Wtedy

$$L_{L_x^0(y)}(x) = L_{x^0ye}(x) = x^0y^{-1}xyx^0e = L_y(x).$$

Z drugiej strony, $L_x^0(x) = xe \neq x$, więc trzeci nie musi zachodzić.

Rozwiązanie

$$r_{\triangleright}(x, y) = (x^0ye, y^{-1}xye)$$

jest quasi-niezdegenerowane oraz quasi-bijektywne.

Przykłady c.d.

$$\begin{aligned}L_{L_x(y)}^0 &= L_x^0 L_y^0 \\ L_y(x) &= L_{L_x^0(y)}^0(x)\end{aligned}$$

Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Wówczas $L_1 = L_4 = (1111)$, $L_2 = \text{id}_X$ oraz $L_3 = (1231)$ zadaje na X strukturę quasi-racka. Wówczas

$$L_{L_3(2)}^0 = L_2 = \text{id}_X \neq L_3 = L_3^0 L_2^0,$$

oraz

$$L_2(3) = 3 \neq 2 = L_{L_2^0(3)}^0(2),$$

ale $r_{\triangleright}(x, y) = (L_x^0(y), L_y(x))$ będące postaci

$$\begin{aligned}(x, y) &\mapsto (1, 1) \text{ dla } (x, y) \notin \{(2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}, \\ (2, 3) &\mapsto (1, 2), \quad (3, 2) \mapsto (2, 1), \quad (3, 3) \mapsto (3, 3),\end{aligned}$$

jest (quasi-niezdegenerowanym) rozwiązaniem równania (YB).

n	$r(n)$	$qr(n)$	$ds(n)$	$qr^{(*)}(n)$	$qr^{(**)}(n)$	$qr^{(***)}(n)$
$n = 2$	2	5	4	4	4	3
$n = 3$	6	31	20	17	19	13
$n = 4$	19	325	169	90	151	91

$r(n)$ - liczba racków na zbiorze n -elementowym

$qr(n)$ - liczba quasi-racków na zbiorze rozmiaru n

$ds(n)$ - liczba quasi-racków, dla których $r_{\triangleright}$ jest rozwiązaniem

$qr^{(*)}(n)$ - liczba quasi-racków spełniających $L_{L_x(y)}^0 = L_x^0 L_y^0$

$qr^{(**)}(n)$ - liczba quasi-racków spełniających $L_y(x) = L_{L_x^0(y)}(x)$

$qr^{(***)}(n)$ - liczba quasi-racków spełniających $L_x^0(x) = x$

Stwierdzenie

Dla rozwiązania niezdegenerowanego $r(x, y) = (\lambda_x(y), \rho_y(x))$ wiadomo, że $(X, \triangleright_r)$, gdzie

$$x \triangleright_r y := \lambda_x \rho_{\lambda_y^{-1}(x)}(y)$$

jest shelfem. Rozwiązanie jest bijektywne wtedy i tylko wtedy, gdy $(X, \triangleright_r)$ jest rackiem.

$$\text{rack}(X, \triangleright) \rightsquigarrow r(x, y) = (y, y \triangleright x) \rightsquigarrow (X, \triangleright_r) = (X, \triangleright)$$

Obserwacja

Niech $(X, \triangleright)$ będzie quasi-rackiem, a $r(x, y) = (L_x^0(y), L_y(x))$ związanym z nim rozwiązaniem (YB). Gdy spełniony jest warunek $L_y(x) = L_{L_x^0(y)}(x)$, to

$$\lambda_x \rho_{\lambda_y^{-1}(x)}(y) = L_x^0 L_{L_y^0(x)}(y) = L_x^0 L_x(y) = x \triangleright y,$$

dla dowolnych $x, y \in X$. Podobnie, także quasi-racki spełniające pozostałe warunki z twierdzenia mają tę własność.

Twierdzenie (Mazzotta, Stefanelli, W.)

Niech (X, r) będzie lewostronnie quasi-niezdegenerowanym rozwiązaniem takim, że

$$\begin{aligned}\lambda_{\lambda_x(y)}^0 &= \lambda_x^0 \lambda_y^0, \\ \rho_y(x) &= \lambda_{\lambda_x(y)}^0 \rho_{\lambda_x^0(y)}(x), \\ \lambda_x^0 \rho_y &= \rho_y \lambda_x^0,\end{aligned}$$

dla $x, y \in X$. Wówczas $(X, \triangleright_r)$ jest shelfem, gdzie

$$x \triangleright_r y := \lambda_x \rho_{\lambda_y^-(x)}(y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Przykłady

- 1) Niech (S, r_S) będzie rozwiązaniem pochodzącym od dualnej słabej klamerki $(S, +, \circ)$, tzn.

$$\lambda_x(y) = -x + x \circ y, \quad \rho_y(x) = \lambda_x(y)^- \circ x \circ y.$$

Wtedy można sprawdzić, że warunki z twierdzenia są spełnione oraz

$$x \triangleright_r y = -x + y + x.$$

Zatem $(X, \triangleright_r)$ jest quasi-quandlem.

- 2) Niech $r(x, y) = (f(y), g(x))$, gdzie $f = (122)$, $g = (223)$. Wtedy jeden z warunków z twierdzenia nie jest spełniony, $fg = (222)$ oraz $(X, \triangleright_r)$ zadane jako $x \triangleright_r y = \lambda_x \rho_{\lambda_y^-(x)}(y) = fg(y)$ jest quasi-rackiem.

Przykłady

Wniosek

Jeśli (X, r) jest lewostronnie quasi-niezdegenerowanym rozwiązaniem postaci

$$r(x, y) = (\lambda(y), \rho_y(x))$$

oraz dla dowolnego $x \in X$ spełnione są warunki

$$\lambda^0 \rho_x = \rho_x \lambda^0 \quad \text{oraz} \quad \rho_x = \lambda^0 \rho_{\lambda^0(x)},$$

to

$$s(x, y) = (\lambda^0(y), \lambda \rho_{\lambda^0(y)}(x))$$

jest quasi-niezdegenerowanym rozwiązaniem.

Pytania otwarte

- 1) Czy dowolne quasi-niezdegenerowane rozwiązanie (X, r) jest quasi-bijektywne?
- 2) Czy shelf $(X, \triangleright_r)$ pochodzący od lewostronnie quasi-niezdegenerowanego oraz quasi-bijektywnego rozwiązania spełniającego warunki z twierdzenia jest quasi-rackiem?

Bibliografia

- C41 A. H. Clifford, Semigroups admitting relative inverses, Ann. of Math. (2) 42 (1941) 1037–1049.
- CMMS22 F. Catino, M. Mazzotta, M. M. Miccoli, P. Stefanelli, Set-theoretic solutions of the Yang–Baxter equation associated to weak braces, Semigroup Forum 104 (2) (2022) 228–255.
- DRS24 A. Doikou, B. Rybołowicz, P. Stefanelli, Quandles as pre-Lie skew braces, set-theoretic Hopf algebras & universal R-matrices, J. Phys. A: Math. Theor. 57 (40) (2024) 405203
- ESS99 P. Etingof, T. Schedler, and A. Soloviev. Set-theoretical solutions to the quantum. Yang-Baxter equation. Duke Math. J., 100(2) (1999) 169–209.
- GV117 L. Guarnieri and L. Vendramin. Skew braces and the Yang–Baxter equation. Math. Comp. 86 (2017).

Dziękuję za uwagę!