

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Mariusz Kozakiewicz

**Dyskretyzacja zagadnień
parabolicznych metodą dekompozycji
obszaru**

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
Prof. dr hab. Maksymilian Dryja
Instytut Matematyki Stosowanej

Czerwiec, 2007

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

.....

data

.....

podpis autora rozprawy

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

.....

data

.....

podpis promotora rozprawy

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych typu parabolicznego, rzędu drugiego, umożliwiającą realizację równoległą. Skonstruowano i przeanalizowano dwie dyskretyzacje rozważanego zagadnienia oparte na metodzie dekompozycji obszaru.

Dla jednowymiarowego obszaru określoności zmiennej przestrzennej rozważono dyskretyzację bazującą na metodzie różnic skończonych względem zmiennych przestrzennej i czasowej. W przypadku wielokątnego obszaru określoności zmiennej przestrzennej, zaproponowano dyskretyzację bazującą na metodzie elementu skończonego względem zmiennej przestrzennej i metodzie różnic skończonych względem zmiennej czasowej. Dla zaproponowanych schematów udowodniono twierdzenia o bezwarunkowej stabilności i o rzędzie zbieżności w dwóch normach: *silnej* i *słabej*. Przeprowadzono odpowiednie eksperymenty numeryczne potwierdzające wyniki teoretyczne. Ponadto, w celu sprawdzenia przydatności zaproponowanych schematów do obliczeń równoległych, wykonano testy na sieci komputerowej. Eksperymenty te pokazały optymalność rozważanych algorytmów ze względu na obliczenia równoległe.

Słowa kluczowe

zagadnienie początkowo-brzegowe typu parabolicznego rzędu drugiego, metoda różnic skończonych, metoda elementu skończonego, metoda dekompozycji obszaru, obliczenia równoległe

Klasyfikacja tematyczna

65F10

65N30

65Y05

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Zagadnienie paraboliczne jednowymiarowe. Metoda różnic skończonych	9
2.1	Sformułowanie różniczkowe zagadnienia	9
2.2	Metoda różnic skończonych	9
2.3	Zadanie dyskretne	12
2.4	Analiza stabilności	20
2.4.1	Silne normy	20
2.4.2	Słabe normy	27
2.5	Analiza zbieżności	28
2.5.1	Silne normy	29
2.5.2	Słabe normy	33
2.6	Lematy pomocnicze	44
3	Zagadnienie paraboliczne dwuwymiarowe. Metoda elementu skończonego	49
3.1	Sformułowanie uogólnione zadania	49
3.2	Metoda elementu skończonego	50
3.3	Zadanie dyskretne	56
3.4	Analiza stabilności	63
3.4.1	Silne normy	64
3.4.2	Słabe normy	72
3.5	Analiza zbieżności	73
3.5.1	Silne normy	74
3.5.2	Słabe normy	83
3.6	Lematy pomocnicze	95
4	Eksperymenty numeryczne	131
4.1	Eksperymenty numeryczne - 1D	131
4.1.1	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H	133
4.1.2	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i zmiennym H	137
4.1.3	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H	141
4.1.4	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i zmiennym H	144
4.2	Eksperymenty numeryczne - 2D	147
4.2.1	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H	149
4.2.2	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i zmiennym H	153
4.2.3	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H	157
4.2.4	Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i zmiennym H	160

4.3	Eksperymenty numeryczne na sieci komputerowej	163
4.3.1	Zadanie jednowymiarowe	164
4.3.2	Zadanie dwuwymiarowe	165
5	Podsumowanie	169
A	Lematy dodatkowe	171

1 Wstęp

Wiele zadań praktycznych współczesnej nauki i techniki wymaga wyznaczenia rozwiązania opisującego go zagadnienia różniczkowego, a ponieważ analityczne rozwiązywanie zagadnień różniczkowych jest w większości przypadków niemożliwe, dlatego poszukujemy określonego przybliżenia interesującego nas rozwiązania dokładnego. Przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych stanowi jedno z najważniejszych wyzwań stawianych przed współczesnymi komputerami i specjalistami z dziedziny szeroko rozumianej *analizy numerycznej*.

Dyskretyzacja równań różniczkowych *metodą różnic skończonych (MRS)* i *metodą elementu skończonego (MES)*, najczęściej stosowanymi w praktyce obliczeniowej (patrz np. [13], [16], [18], [20], [23], [24]), prowadzi do rzadkich, ale bardzo wielkich układów równań algebraicznych (często rzędu milionów niewiadomych), które są bardzo źle uwarunkowane. Numeryczne rozwiązywanie układów równań algebraicznych powstałych w wyniku dyskretyzacji, których uwarunkowanie jest wielomianową funkcją wymiaru przestrzeni niewiadomych, jest zadaniem bardzo trudnym, a przy dużej liczbie niewiadomych wręcz niewykonalnym dla komputera wyposażonego w pojedynczy procesor. Współcześnie do tego typu zadań stosuje się tzw. *superkomputery* (-komputery o wielu procesorach) i *klastry obliczeniowe*, jednak aby efektywnie wykorzystać moc obliczeniową sprzętu, należy zaprojektować odpowiedni *algorytm równoległy*, zobacz np. [15].

Jedną z metod umożliwiających projektowanie algorytmów równoległych jest *metoda dekompozycji obszaru (MDO)* (patrz monografie np. [11], [21], [25]). Jest ona odpowiednikiem podejścia *dziel i rządź* (patrz np. [14]), na gruncie teorii przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. *MDO* jest nowoczesną metodą rozwiązywania zagadnień różniczkowych, pozwalającą w pełni wykorzystać możliwości współczesnych *superkomputerów* i *klastrów obliczeniowych*.

W *MDO* wyróżnić możemy dwa podejścia. Pierwsze z nich daje możliwość projektowania równoległych algorytmów rozwiązywania wielkich układów równań algebraicznych powstałych np. w wyniku standardowej dyskretyzacji równań różniczkowych cząstkowych z wykorzystaniem *MRS*, *MES* lub ich kombinacji - zobacz np. [1]. W podejściu drugim natomiast *MDO* daje możliwość projektowania równoległej dyskretyzacji. W tym przypadku wyjściowe zagadnienie różniczkowe jest przeformułowywane, z zagadnienia postawionego na obszarze Ω na szereg podzadań określonych na rozłącznych podobszarach Ω_i , stanowiących rozkład Ω . Dopiero te podzadania są dyskretyzowane np. *MRS*, *MES* lub kombinacją tych metod - patrz np. [2], tak aby miała miejsce aproksymacja zagadnienia wyjściowego podzadaniami o

kreślonymi na obszarach Ω_i i sformułowane zadanie dyskretne miało dobre własności numeryczne.

Stosowanie obu wyżej wymienionych podejść *MDO* daje możliwość zaprojektowania takiego algorytmu równoległego, za pomocą którego rozwiązania przybliżonego dla danego zagadnienia różniczkowego, poszukujemy jako sumy słabo ze sobą powiązanych lub prawie zupełnie niezależnych podzadań lokalnych i rozwiązania zadania globalnego o małym wymiarze. Dekompozycja oryginalnego zadania gwarantuje zmniejszenie wymiaru lokalnych podzadań i umożliwia stosunkowo nieskomplikowaną równoległą implementację procesu obliczeniowego.

Rozwiązanie przybliżone dla danego zadania wyjściowego otrzymywane jest najczęściej *iteracyjnie*. W sposobie tym zadania lokalne rozwiązywane są wielokrotnie do uzyskania określonych warunków zgodności w punktach nodalnych tzw. *grubej siatki*, siatki wyznaczonej przez dekompozycję wyjściowego obszaru Ω na odpowiednie podobszary Ω_i . W tym podejściu, między kolejnymi iteracjami, w punktach nodalnych *grubej siatki*, wymieniana jest informacja pomiędzy rozwiązaniami określonymi na sąsiadujących ze sobą podobszarach, a w celu zapewnienia optymalności metody często wymagane jest rozwiązanie pewnego globalnego zadania małego wymiaru, określonego w punktach nodalnych *grubej siatki*. Przykładem może być tutaj cała klasa *metod Schwarza* - patrz np. [11]. Istnieją jednak metody, które pozwalają wyznaczyć globalne rozwiązanie przybliżone po jednokrotnym rozwiązaniu problemów lokalnych, bez konieczności rozwiązywania odpowiedniego zadania globalnego określonego na *grubej siatce*. Metody takie nazywać będziemy dalej *bezpośrednimi*. Przykładem takiej metody może być ta przedstawiona w [2].

Literatura dotycząca *MDO* dla równań różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego nie jest tak bogata, jak odpowiednia dla zagadnień różniczkowych typu eliptycznego (patrz monografie [11], [21], [25] i literaturę tam cytowaną, a także artykuły z *Conferences on Domain Decomposition Method : 1-17*, patrz [26]), można w niej jednak wyróżnić trzy główne grupy tematyczne. Pierwsza z nich, z której ideę zaczerpnęliśmy w tej pracy, prezentowana jest w [2], [3]. Autorzy tych prac konstruuja dyskretyzację z wykorzystaniem *MDO* dekomponując wyjściowy obszar określoności zmiennej przestrzennej. Druga grupa, reprezentowana w [5], polega na konstrukcji dyskretyzacji bazującej na dekompozycji obszaru określoności zmiennej czasowej. Trzecia natomiast polega na przenoszeniu algorytmów *MDO* otrzymanych dla równań eliptycznych na grunt równań typu parabolicznego na ustalonych warstwach czasowych - zobacz np. [1]. Miarodajny przegląd najnowszych metod dekompozycji tego typu zagadnień przedstawiony został w pracy [8].

Celem naszym było skonstruowanie uniwersalnej metody dyskretyzacji, która pozwoli w sposób równoległy poszukiwać aproksymacji rozwiązań zagadnień parabolicznych.

W pracy tej rozważana jest specjalna metoda przybliżonego rozwiązywania zagadnień parabolicznych skonstruowana w oparciu to podejście *MDO*, w którym dyskretyzacja powstaje w wyniku przeformułowania wyjściowego zagadnienia różniczkowego. Zaproponowany schemat bazuje na *schemacie zamkniętym Eulera* (patrz np. [16]). Konstrukcja rozważanej dyskretyzacji jest stosunkowo nieskomplikowana, zapewnia jednak odpowiednią aproksymację zagadnienia wyjściowego oraz umożliwia poszukiwanie rozwiązania w sposób równoległy.

Punktem wyjścia do metody tutaj przedstawionej jest metoda proponowana w pracy [2] i rozwijana dalej w [3]. Prezentowana metoda może być traktowana, jako analog i zarazem uogólnienie do znanej *metody ADI*, służącej do różnicowej dyskretyzacji (względem zmiennej czasowej i przestrzennej) zagadnień parabolicznych - zobacz np. [16], [23]. Podobnie jak w *metodzie ADI*, na każdej warstwie czasowej, rozwiązanie globalne rozważanego przez nas schematu, otrzymywane jest z rozwiązań lokalnych w jednej iteracji, jest to więc *metoda bezpośrednia*. Proponowana przez nas metoda dekompozycji jest także *metodą bezpośrednią*.

Schemat przez nas rozważany może być także traktowany jako pewnego rodzaju uogólnienie *schematu Saulewa* opisanego min. w [22]. Nasz schemat, w przypadku dyskretyzacji *MRS* jest *schematem Saulewa* ale tylko w punktach nodalnych *grubej siatki*, natomiast poza tymi punktami schemat przez nas rozważany jest *schematem zamkniętym Eulera*.

Podejście nasze zilustrujemy na zadaniu modelowym dyskretyzując je dla prostoty *MRS*. Rozważmy zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania parabolicznego drugiego rzędu, określone na $\bar{\Omega} \times [0, T]$, gdzie Ω jest odcinkiem. W najprostszym przypadku dyskretyzacja w naszej metodzie jest następująca. Zagadnienie określone na $\bar{\Omega} \times [0, T]$, przy ustalonym t , zostaje podzielone na dwa zagadnienia postawione na Ω_R i Ω_B , gdzie Ω_R , Ω_B (*Red*, *Black*) są rozłączne i takie że $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_R \cup \bar{\Omega}_B$. Następnie zagadnienia te są niezależnie dyskretyzowane metodą różnic skończonych względem zmiennej przestrzennej i czasowej. Realizacja zaproponowanego schematu przebiegać będzie następująco. Na każdym kroku czasowym, w celu otrzymania rozwiązania globalnego, w pierwszej kolejności rozwiązywany będzie lokalny problem na Ω_R , a następnie, po wymianie informacji na brzegu podobszarów, rozwiązywany będzie lokalny problem na Ω_B .

W rozważanym przypadku, kiedy dokonana została dekompozycja tylko na dwa podobszary, proponowany schemat rozwiązywania jest schematem sekwencyjnym. W przypadku podziału obszaru Ω na większą liczbę naprze-

mian położonych podobszarów typu *Red* i *Black*, proponowana dyskretyzacja w łatwy sposób daje jednak możliwość realizacji równoległej. W pierwszej kolejności niezależnie rozwiązywane mogą być lokalne zadania na pododcinkach typu *Red*, a następnie, po odpowiedniej wymianie informacji pomiędzy sąsiadującymi podobszarami, mogą być rozwiązywane niezależnie lokalne podzadania na pododcinkach typu *Black*.

W pracy rozważono dwa schematy oparte na *MDO*. Dla jednowymiarowego Ω , przy podziale wyjściowego obszaru na pododcinki, skonstruowano schemat z wykorzystaniem *MRS* względem zmiennej przestrzennej i czasowej. Dla wielokąta Ω natomiast zaproponowano dyskretyzację dla szerokiej klasy zagadnień parabolicznych zadanych w sformułowaniu uogólnionym. Dekompozycji wyjściowego obszaru Ω dokonano w oparciu o specjalnie zdefiniowaną *grubą siatkę* (siatkę wyznaczoną przez podział Ω na rozłączne podobszary Ω_i), a do dyskretyzacji użyto *MES* względem zmiennej przestrzennej i *MRS* względem zmiennej czasowej.

Udowodniono, że zaproponowane schematy są bezwarunkowo stabilne, a otrzymane rozwiązanie przybliżone przy założeniu $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $C > 0$ i $\alpha \geq 0$, gdzie τ i h są parametrami dyskretyzacji, zbiega do rozwiązania dokładnego z błędem rzędu $\mathcal{O}(\tau + h^2 + \frac{\tau}{H} + \frac{\tau h^\alpha}{\sqrt{H}})$ w przypadku jednowymiarowego Ω i dyskretyzacji *MRS* i błędem rzędu $\mathcal{O}(\tau + h + \frac{\tau}{H} + \frac{\tau h^\alpha}{\sqrt{H}})$ w przypadku $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ i dyskretyzacji kombinacją *MES* i *MRS*, w odpowiedniej normie. Przy ustalonym H - średnicy najmniejszego podobszaru, rząd zbieżności naszego schematu w rozważanych normach jest taki sam jak rząd zbieżności *schematu zamkniętego Eulera* (patrz np. [16]). Udowodniono także zostało, że rozważane tutaj schematy, bez dodatkowych założeń na stosunek parametrów dyskretyzacji τ i h , zbiegają do rozwiązania dokładnego z błędem rzędu $\mathcal{O}(\tau + h^2 + \frac{\tau}{\sqrt{hH}})$ w przypadku jednowymiarowego Ω i dyskretyzacji *MRS* i błędem rzędu $\mathcal{O}(\tau + h + \frac{\tau}{\sqrt{hH}})$ w przypadku dwuwymiarowego obszaru Ω i dyskretyzacji kombinacją *MES* i *MRS*, w specjalnej *silnej normie*. Normy te nazywać będziemy *silnymi*, ponieważ szacują one odpowiednio zdefiniowany błąd metody, jak i również pochodne różnicowe względem czasu tego błędu.

W porównaniu do metody zaproponowanej w pracy [2], rozważany schemat ma przy założeniu $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $C > 0$ i $\alpha \geq 0$, wyższy rząd zbieżności. Jak podano bez dowodu w [2], schemat tam opisany jest rzędu $\mathcal{O}(\tau^{\frac{1}{2}} + h)$ przy $\tau/h = const$. Istotną różnicą pomiędzy dyskretyzacją proponowaną w tej pracy i tą rozważaną w [2] jest wprowadzenie aproksymacji pochodnych normalnych na brzegach podobszarów tworzących *grubą siatkę*. Taki rodzaj informacji nazywać będziemy dalej *informacją Neumanna*.

Rozważana metoda dyskretyzacji jest również alternatywą dla metody przedstawionej w pracy [3]. Dyskretyzacja prezentowana w [3] oparta jest

na schemacie *Cranka-Nicholsona* - zobacz np. [18]. Udowodniono tam, że proponowany schemat jest stabilny i zbieżny z rzędem $\mathcal{O}\left(\tau + h + \frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$, co także, zważywszy na to że oryginalny *schemat Cranka-Nicholsona* jest rzędu $\mathcal{O}(\tau^2 + h)$, nie było wynikiem optymalnym w tej klasie schematów. Dla schematu rozważanego w naszej pracy udowodniono zbieżność rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h + \frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$, ale w dużo silniejszych normach niż te, którymi posłużyli się autorzy [3]. Normy te bowiem zawierają dodatkowo pochodne różnicowe względem czasu błędu schematu.

Standardowe metody badania stabilności i zbieżności schematów dyskretyzacji zagadnień parabolicznych, wzorowane na zagadnieniach podobnych, których analizę można odnaleźć w literaturze ([16], [18], [20], [23], [24]), nie doprowadziły nas do uzyskania satysfakcjonujących rezultatów. Używając typowych metod badania stabilności nie byliśmy w stanie pokazać bezwarunkowej stabilności naszych schematów, co mimo bardzo obiecujących rezultatów numerycznych, znacznie ograniczało przydatność naszych schematów.

Wprowadzenie wymiany informacji *typu Neumanna* na *grubej siatce* po każdej warstwie czasowej pomiędzy rozwiązaniami określonymi na sąsiadujących podobszarach, było podowem tego, że analiza, która została tutaj przedstawiona jest daleka od ogólnie przyjętej za standardową. W dowodach poszczególnych twierdzeń o stabilności i zbieżności oraz dowodach lematów pomocniczych, zastosowano wiele technicznych chwytów i przekształceń, które choć w założeniu bardzo proste, po pierwszym czytaniu mogą wydawać się dalekie od oczywistych.

W celu przejrzystego przedstawienia metody dyskretyzacji i jej analizy, porządek pracy zorganizowany został w sposób następujący: rozważana dyskretyzacja, będzie wprowadzana stopniowo dla poszczególnych, coraz bardziej złożonych wariantów dekompozycji obszaru.

Naszą analizę rozpoczniemy od części ilustacyjnej. W *Rozdziale 2* rozważymy dyskretyzację modelowego zagadnienia parabolicznego, w którym dokonamy dekompozycji jednowymiarowego obszaru przestrzennego na równe pododcinki - zagadnienia takie będziemy dalej nazywali zagadnieniami jednowymiarowymi. W tej części pracy wprowadzimy dyskretyzację bazującą na *MRS* względem zmiennej przestrzennej i czasowej. Celem tego była przejrzysta prezentacja proponowanego w tej pracy schematu oraz przedstawienie w łatwy sposób dowodów poszczególnych *Twierdzeń* i *Lematów*. Dodatkowym celem konstrukcji schematu czysto różnicowego była chęć pokazania tzw. *superzbieżności* proponowanego schematu, czyli podwyższonego rzędu aproksymacji w porównaniu z dyskretyzacją opartą na *MES*. W *Rozdziale 2* udowodniona zostanie bezwarunkowa stabilność zaproponowanego schematu w *silnych* (zawierających pochodne różnicowe względem czasu rozwiązań)

i słabych normach - odpowiednio Twierdzenia 1 i 2. Udowodnione zostaną także Twierdzenia 3 i 4 o rzędzie zbieżności w odpowiednio silnych i słabych normach. W Twierdzeniu 3 pokazane zostanie, że rząd zbieżności, bez dodatkowych założeń wynosi $\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$, a w Twierdzeniu 4 udowodniona zostanie zbieżność rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \frac{\tau h^\alpha}{\sqrt{H}} + \frac{\tau}{H}\right)$, przy założeniu $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $C > 0$ i $\alpha \geq 0$. Podkreślenia wymaga tu fakt, że założenie $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $C > 0$ i $\alpha \geq 0$, było potrzebne w dowodzie tego twierdzenia, natomiast eksperymenty numeryczne pokazały, że schemat przez nas rozważany jest zbieżny nawet bez tego założenia.

W Rozdziale 3 przedstawiona zostanie główna część pracy zawierająca analizę bardzo ogólnych zagadnień parabolicznych. W tej części pracy przedstawimy metodę dyskretyzacji poprawiającą rezultaty z [2] i [3]. Dla bardzo szerokiej klasy zagadnień parabolicznych w sformułowaniu wariacyjnym, określonych na wielokącie Ω , przedstawiony został model dekompozycji oparty o specjalnie zdefiniowaną grubą triangulację (w przypadku zadania jednowymiarowego gruba triangulacja stanowi grubą siatkę), której elementami będą rozłączne, wielokątne podobszary Ω_{R_i} i Ω_{B_j} , wyjściowego obszaru Ω . Zagadnienia w których $\Omega \subset \mathcal{R}^2$, nazywać dalej będziemy zagadnieniami dwuwymiarowymi. W najprostszym przypadku przykładem takiej dekompozycji jest podział w tzw. kratę (patrz np. [11]), czyli taki podział Ω , że elementy tego podziału mogą mieć wspólną krawędź, wspólny wierzchołek lub być rozłączne. Zaproponowana dyskretyzacja będzie bazować na MES względem zmiennej przestrzennej i MRS względem zmiennej czasowej, tak jak to zostało opisane np. w [18]. Poszczególne dowody stanowiąc będą uogólnienia odpowiednich dowodów z pierwszej części pracy, gdzie rozważany był schemat różnicowy dla zagadnień jednowymiarowych. Część ta, z racji bardzo ogólnego zagadnienia parabolicznego, które przyjęliśmy za wyjściowe, jest znacznie bardziej obszerna, a odpowiednia analiza znacznie bardziej skomplikowana. W tym rozdziale udowodniona zostanie bezwarunkowa stabilność zaproponowanego schematu w silnych i słabych normach - Twierdzenia 5 i 6. Udowodnione zostaną także Twierdzenia 7 i 8 o rzędzie zbieżności w silnych i słabych normach. W Twierdzeniu 7 pokazane zostanie, że rząd zbieżności wynosi $\mathcal{O}\left(\tau + h + \frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$, a w Twierdzeniu 8 udowodniona zostanie zbieżność rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h + \frac{\tau h^\alpha}{\sqrt{H}} + \frac{\tau}{H}\right)$, przy założeniu $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $C > 0$ i $\alpha \geq 0$. Podobnie jak w przypadku zadania jednowymiarowego przy dyskretyzacji MRS, założenie to było potrzebne jedynie do przeprowadzenia dowodu Twierdzenia 8, a odpowiednie eksperymenty numeryczne pokazały, że założenie to nie jest konieczne do zbieżności schematu. Udowodnione tu twierdzenia o zbieżności naszego schematu poprawiają o pół rzędu rezultaty twierdzeń o zbieżności schematów z prac [2] i [3] względem zmiennej

czasowej.

W trzeciej części pracy, zawartej w *Rozdziale 4*, przedstawione zostały wyniki kilkunastu serii eksperymentów numerycznych potwierdzających rezultaty odpowiednich twierdzeń o zbieżności i stabilności schematów. Przeprowadzone zostały eksperymenty zarówno dla schematu różnicowego przy dekompozycji Ω na pododcinki, jak i schematu w sformułowaniu wariacyjnym przy podziale kwadratu Ω w *kratę*.

Dodatkowo, w *Podrozdziale 4.3*, przedstawione zostały wyniki eksperymentów wykonanych na *sieci komputerowej*, mającej symulować *klaster obliczeniowy*. Ich celem było potwierdzenie przydatności proponowanej dyskretyzacji do obliczeń równoległych. Przetestowaliśmy pod tym kątem zarówno schemat różnicowy dla zagadnienia jednowymiarowego, jak i schemat wariacyjny dla zagadnienia określonego na kwadracie, przy dekompozycji na *pasy* (zobacz [11]), czyli taki podział dwuwymiarowego Ω na naprzemian położone podobszary typu *Red* i *Black*, które mogą być albo rozłączne albo posiadać wspólną krawędź. Rezultaty przedstawione w tym podrozdziale potwierdzają bardzo dobre własności proponowanych tutaj schematów w ujęciu obliczeń równoległych.

Pracę kończymy Podsumowaniem (*-Rozdział 5*), w którym zawarte zostały wnioski dotyczące rozważanych schematów oraz plany dotyczące uogólnień i dalszych rozszerzeń naszej metody.

2 Zagadnienie paraboliczne jednowymiarowe. Metoda różnic skończonych

W rozdziale tym przedstawimy dyskretyzację metodą dekompozycji obszaru opartą o *metodę różnic skończonych*, na przykładzie modelowego jednowymiarowego zagadnienia parabolicznego. Wybierając do rozważań modelowe zagadnienie paraboliczne, chcemy tu, w możliwie prosty sposób, wyprowadzić równania naszego schematu oraz przedstawić ideę dowodów poszczególnych *Twierdzeń* i *Lematów*. Dyskretyzacja *metodą różnic skończonych*, w przeciwieństwie do odpowiedniej opartej na *metodzie elementu skończonego*, pozwoli także pokazać tzw. *superzbieżność* proponowanego schematu - czyli wyższy rząd zbieżności błędu schematu względem parametru siatki przestrzennej.

Przedstawiona tu dyskretyzacja i jej analiza w łatwy sposób przenosić się będzie na przypadek modelowego zagadnienia parabolicznego, określonego na prostokącie.

2.1 Sformułowanie różniczkowe zagadnienia

Rozważamy modelowe zagadnienie początkowo-brzegowe w sformułowaniu klasycznym dla równania parabolicznego:

znaleźć $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ takie, że

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & x \in \Omega, \quad t \in (0, T] & (2.1.a) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, & (2.1.b) \\ u(x, t) = 0 & t \in (0, T] \quad x \in \partial\Omega. & (2.1.c) \end{cases}$$

gdzie $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0(0) = u_0(L) = 0$, $f \in C(\Omega \times (0, T])$, Ω jest odcinkiem $\Omega = (0, L)$. Przy tych założeniach zagadnienie (2.1.a)-(2.1.c) jest dobrze postawione i ma jednoznaczne rozwiązanie (patrz np.[17]).

2.2 Metoda różnic skończonych

W podrozdziale tym przedstawiona zostanie metoda dyskretyzacji rozważanego zagadnienia różniczkowego (2.1.a)-(2.1.c) oparta na *MDO* oraz wprowadzone zostaną definicje i oznaczenia potrzebne do dalszej analizy proponowanego schematu.

Zagadnienie (2.1.a)-(2.1.c) dyskretyzujemy *metodą różnic skończonych* (-patrz np. [16]). Na $Q^T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ konstruujemy siatkę przestrzenno-cza-

sową

$$\overline{Q}^{h\tau} = \overline{\Omega}^h \times \omega^\tau$$

o stałych krokach h oraz τ , gdzie

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}^h &= \{x : x = ih \quad i = 0, \dots, P\}, & h &= \frac{L}{P}, \\ \partial\Omega^h &= \{0, L\}, & \Omega^h &= \overline{\Omega}^h \setminus \partial\Omega^h & P \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{N} jest zbiorem liczb naturalnych oraz

$$\omega^\tau = \left\{ t : t = n\tau, n = 0, \dots, N \right\} \cup \left\{ t : t = \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau, n = 0, \dots, N - 1 \right\}$$

$$N = n\tau.$$

gdzie N jest ilością warstw czasowych, na które podzielony został $[0, T]$.

Zdefiniujemy teraz dekompozycję obszaru Ω i zbioru punktów siatki przestrzennej. Wyjściowy obszar Ω , w celu uproszczenia analizy, zostaje podzielony na $2K$ pododcinków jednakowej długości $H = \frac{L}{2K}$. Przy takim założeniu ilość punktów siatki $\overline{\Omega}^h$ wynosi $P = 2KM$, dla pewnego naturalnego M , będącego ilością węzłów pojedynczego pododcinka. Pododcinkom tym nadajemy naprzemian symboliczne kolory *Red-Black* (*Red-Black ordering* - patrz [11],[21]). Mamy zatem

$$\Omega_{R_i} = \left(2(i-1)H, (2i-1)H \right), \quad i = 1, \dots, K,$$

i podobnie

$$\Omega_{B_i} = \left((2(i-1)+1)H, 2iH \right), \quad i = 1, \dots, K.$$

Przy tych oznaczeniach

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_R \cup \overline{\Omega}_B,$$

gdzie

$$\Omega_R = \bigcup_{i=1, \dots, K} \Omega_{R_i} \quad \Omega_B = \bigcup_{j=1, \dots, K} \Omega_{B_j}.$$

Zdefiniujemy teraz podzbiory punktów siatkowych $\overline{\Omega}_R^h$ i $\overline{\Omega}_B^h$ zbioru $\overline{\Omega}^h$. Niech

$$\overline{\Omega}_R^h = \left\{ x : x \in \overline{\Omega}^h \wedge x \in \overline{\Omega}_R \right\}, \quad \overline{\Omega}_B^h = \left\{ x : x \in \overline{\Omega}^h \wedge x \in \overline{\Omega}_B \right\},$$

oznaczają zbiory punktów wyznaczających siatkę przestrzenną na pododcinkach odpowiednio $\overline{\Omega}_R$ i $\overline{\Omega}_B$.

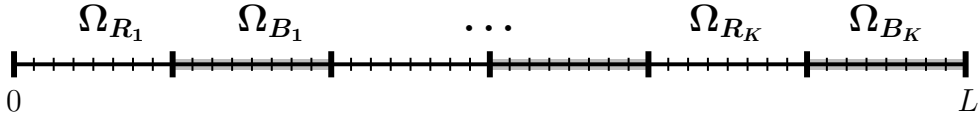
Oznaczmy także przez Ω_Γ^h zbiór tych punktów Ω^h , które należą jednocześnie do $\overline{\Omega}_R$ i $\overline{\Omega}_B$, czyli

$$\Omega_\Gamma^h = \overline{\Omega}_R^h \cap \overline{\Omega}_B^h = \{x : x = iH, i = 1, \dots, 2K - 1\} \subset \Omega^h.$$

Przy przyjętych wyżej definicjach, niech

$$\Omega_R^h = \overline{\Omega}_R^h \setminus (\Omega_\Gamma^h \cup \partial\Omega^h), \quad \Omega_B^h = \overline{\Omega}_B^h \setminus (\Omega_\Gamma^h \cup \partial\Omega^h),$$

oznaczają odpowiednio zbiory wewnętrznych punktów siatowych zbiorów $\overline{\Omega}_R^h$ i $\overline{\Omega}_B^h$. Symbolicznie, opisaną wyżej dyskretyzację przedstawia *Rys. 1*.



Rys. 1

Wprowadzimy teraz definicje przestrzeni, które będą nam potrzebne do analizy rozważanej dyskretyzacji. Wzorować się będziemy na [16].

Przez $L_h^2(\Omega^h)$ oznaczamy będziemy przestrzeń funkcji siatkowych określonych w punktach Ω^h , zerujących się na brzegu obszaru Ω , czyli w punktach $x = 0$ i $x = L$. Dyskretny iloczyn skalarny i kwadrat normy w $L_h^2(\Omega^h)$ definiujemy następująco

$$(u, v)_{L_h^2(\Omega^h)} = \sum_{x \in \Omega^h} u(x)v(x)h, \quad \|v\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 = (v, v)_{L_h^2(\Omega^h)}. \quad (2.2)$$

Wprowadzamy także dyskretne iloczyny skalarne odpowiadające podprzestrzeniom $L_h^2(\Omega_R^h)$, $L_h^2(\Omega_B^h)$, $L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)$, $L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)$, przestrzeni $L_h^2(\Omega^h)$:

$$(v, u)_{L_h^2(\Omega_R^h)} = \sum_{x \in \Omega_R^h} u(x)v(x)h, \quad (v, u)_{L_h^2(\Omega_B^h)} = \sum_{x \in \Omega_B^h} u(x)v(x)h, \quad (2.3)$$

$$(v, u)_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)} = \sum_{x \in \overline{\Omega}_R^h} u(x)v(x)h, \quad (v, u)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} = \sum_{x \in \overline{\Omega}_B^h} u(x)v(x)h. \quad (2.4)$$

Zauważmy, że w odróżnieniu od (2.3), iloczyny skalarne zdefiniowane wzorami (2.4) obejmują sumowaniem także punkty zbioru Ω_Γ^h . Podobnie jak dla przestrzeni $L_h^2(\Omega^h)$, wprowadzone iloczyny skalarne wyznaczają odpowiednio kwadrat normy przestrzeni: $L_h^2(\Omega_R)$, $L_h^2(\Omega_B)$, $L_h^2(\overline{\Omega}_R)$, $L_h^2(\overline{\Omega}_B)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\Omega_R^h)}, & \|u\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\Omega_B^h)}, \\ \|u\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}, & \|u\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}. \end{aligned}$$

Wprowadźmy dodatkowo

$$\|u\|_{L_h^2(\Omega_h^b)}^2 = \sum_{x \in \Omega_h^b} |u(x)|^2 h. \quad (2.5)$$

W dalszej części pracy będziemy używać następujących skrótów

$$\begin{aligned} U(ih, n\tau) &\equiv U_i^n, & f(ih, n\tau) &\equiv f_i^n, \\ U\left(ih, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right) &\equiv U_i^{n+\frac{1}{2}}, & f\left(ih, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right) &\equiv f_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ i &= 0, 1, \dots, 2KM, & n &= 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.6)$$

oraz następujących oznaczeń na pochodne różnicowe

$$\begin{aligned} \partial_x U_i^n &\equiv \frac{1}{h} (U_{i+1}^n - U_i^n), & \bar{\partial}_x U_i^n &\equiv \frac{1}{h} (U_i^n - U_{i-1}^n), \\ \partial_x \bar{\partial}_x U_i^n &\equiv \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{i+1}^n - \bar{\partial}_x U_i^n) = \frac{1}{h^2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_t U_i^n &\equiv \frac{1}{\tau} (U_i^{n+1} - U_i^n), & \partial_{t/2} U_i^n &\equiv (U_i^{n+\frac{1}{2}} - U_i^n) / (\tau/2), \\ \partial_t \partial_t U_i^n &\equiv \frac{1}{\tau} (\partial_t U_i^{n+1} - \partial_t U_i^n), \\ \partial_{t/2} \partial_{t/2} U_i^n &\equiv (\partial_{t/2} U_i^{n+\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_i^n) / (\tau/2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Analogicznie wprowadzamy pochodne różnicowe na połówkowych warstwach czasowych.

Zauważmy, że wprowadzone pochodne różnicowe aproksymują odpowiednie pochodne różniczkowe w punktach $(ih, n\tau)$, dla $i = 0, 1, \dots, 2KM$ i $n = 1, \dots, N$.

2.3 Zadanie dyskretne

W podrozdziale tym wyprowadzona zostanie postać różnicowa dyskretyzacji zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) *MDO*. Najpierw jednak przedstawimy ideę zaproponowanej metody na gruncie *MRS*.

W celu przejrzystości argumentacji ograniczymy się do przypadku dekompozycji odcinka Ω tylko na dwa równe podobszary Ω_R i Ω_B , czyli przyjmiemy, że $K = 1$ i M jest ustaloną liczbą naturalną. Następnie uogólnimy wynik na przypadek dekompozycji obszaru Ω na większą ilość pododcinków.

Punktem wyjścia do stworzenia dyskretyzacji nadającej się do obliczeń równoległych i opartej na *metodzie dekompozycji obszaru*, jest standardowa

dyskretyzacja zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) na siatce $\overline{Q}^{h\tau}$ schematem zamkniętym Eulera (-patrz np. [16],[23]), czyli

dla $n = 1, \dots, N$ znaleźć U_i^n , takie że:

$$\begin{cases} \partial_t U_i^{n-1} - \partial_x \overline{\partial}_x U_i^n = f_i^n & i = 1, \dots, 2M - 1, & (2.9.a) \\ U_i^0 = u_0(ih) & i = 1, \dots, 2M - 1, & (2.9.b) \\ U_0^n = U_{2M}^n = 0 & n = 0, \dots, N. & (2.9.c) \end{cases}$$

Przy zadanym U^{n-1} , wyznaczenie rozwiązania U^n schematu (2.9.a)-(2.9.c) dla ustalonego n , wymaga rozwiązania układu równań algebraicznych z macierzą trójdziagonalną wymiaru $2M \times 2M$.

Zauważym jednak, że jeśli znana jest wartość pochodnej różnicowej $\overline{\partial}_x U_{M+1}^n$, to zadanie wyznaczenia funkcji siatkowej U_i^n dla $i = 1, \dots, M$, redukuje się do znalezienia rozwiązania następującego schematu

$$\begin{cases} \partial_t U_i^{n-1} - \partial_x \overline{\partial}_x U_i^n = f_i^n & i = 1, \dots, M - 1 & (2.10.a) \\ \partial_t U_M^{n-1} + \frac{1}{h} \overline{\partial}_x U_M^n = f_M^n + \frac{1}{h} \overline{\partial}_x U_{M+1}^n, & & (2.10.b) \\ U_0^n = U_{2M}^n = 0 & n = 0, \dots, N. & (2.10.c) \end{cases}$$

co z kolei wymaga rozwiązania układu równań algebraicznych z macierzą trójdziagonalną wymiaru $M \times M$, czyli dwukrotnie mniejszego niż w przypadku dyskretyzacji (2.9.a)-(2.9.c).

Podobnie, jeśli byłaby znana wartość pochodnej różnicowej $\overline{\partial}_x U_M^n$, to funkcja siatkowa U_i^n dla $i = M, \dots, 2M - 1$, byłaby rozwiązaniem schematu

$$\begin{cases} \partial_t U_i^{n-1} - \partial_x \overline{\partial}_x U_i^n = f_i^n & i = M + 1, \dots, 2M - 1 & (2.11.a) \\ \partial_t U_M^{n-1} + \frac{1}{h} \overline{\partial}_x U_{M+1}^n = f_M^n + \frac{1}{h} \overline{\partial}_x U_M^n. & & (2.11.b) \\ U_0^n = U_{2M}^n = 0 & n = 0, \dots, N. & (2.11.c) \end{cases}$$

Zauważmy jednak że, w momencie obliczania U_i^n dla $i = 1, \dots, 2M - 1$ ani $\overline{\partial}_x U_M^n$ ani $\overline{\partial}_x U_{M+1}^n$ nie są wartościami znanymi.

Zaproponowana w tej pracy dyskretyzacja bazuje na pomysłe polegającym na zastąpieniu nieznanymi w momencie obliczania U^n pochodnych różnicowych $\overline{\partial}_x U_M^n$ i $\overline{\partial}_x U_{M+1}^n$, odpowiednimi z poprzedniej warstwy czasowej. Dla rozwiązania zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) z rozwinięcia w szereg Taylora mamy bowiem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_M, n\tau) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_M, (n-1)\tau) + \mathcal{O}(\tau).$$

Przy znanym U^{n-1} , wykorzystując powyższe zależności, możemy próbować aproksymować rozwiązanie zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) na n -tej warstwie czasowej w dwóch krokach.

W pierwszym kroku możemy obliczyć wartości \tilde{U}_i^n dla $i = 1, \dots, M$, ze schematu

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{U}_i^{n-1} - \partial_x \bar{\partial}_x \tilde{U}_i^n = f_i^n, & i = 1, \dots, M-1, & (2.12.a) \\ \partial_t \tilde{U}_M^{n-1} + \frac{1}{h} \bar{\partial}_x \tilde{U}_M^n = f_M^n + \frac{1}{h} \bar{\partial}_x U_{M+1}^{n-1}, & & (2.12.b) \\ \tilde{U}_0^n = \tilde{U}_{2M}^n = 0 & n = 0, \dots, N. & (2.12.c) \end{cases}$$

w drugim \hat{U}_i^n dla $i = M, \dots, 2M-1$, ze schematu

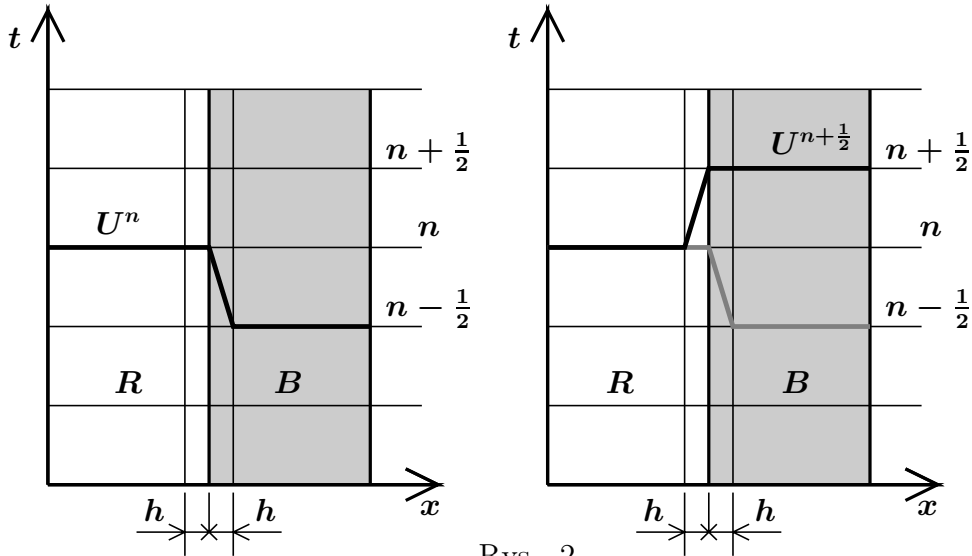
$$\begin{cases} \partial_t \hat{U}_i^{n-1} - \partial_x \bar{\partial}_x \hat{U}_i^n = f_i^n, & i = M+1, \dots, 2M-1, & (2.13.a) \\ \partial_t \hat{U}_M^{n-1} + \frac{1}{h} \bar{\partial}_x \hat{U}_M^n = f_M^n + \frac{1}{h} \bar{\partial}_x U_M^{n-1}. & & (2.13.b) \\ \hat{U}_0^n = \hat{U}_{2M}^n = 0 & n = 0, \dots, N. & (2.13.c) \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że schemat (2.12.a)-(2.12.c) różni się od schematu (2.10.a)-(2.10.c) tylko drugim wyrazem prawej strony odpowiedniego równania w punkcie x_M wziętym na $(n-1)$ -ej warstwie czasowej. Podobnie jest w przypadku (2.13.a)-(2.13.c).

Zauważmy także, że funkcje siatkowe wyznaczone za pomocą dwóch wyżej wypisanych schematów, nie dają żadnych powodów by twierdzić, że zachodzi równość $\tilde{U}_M^n = \hat{U}_M^n$. Należy zatem założyć, że $\tilde{U}_M^n \neq \hat{U}_M^n$ i uwzględnić tą informację przy tworzeniu globalnego rozwiązania U^n . Funkcja ta bowiem jest niezbędna do wyznaczenia aproksymacji zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) na kolejnej, $(n+1)$ -ej warstwie czasowej. Względem U^n liczne są odpowiednie pochodne różnicowe względem czasu i pochodne różnicowe aproksymujące pochodne normalne na brzegach podobszarów Ω_R i Ω_B .

Proponowany schemat dyskretyzacji jest schematem, który bazuje na powyższych obserwacjach. W każdym kroku czasowym rozwiązania przybliżonego zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) poszukiwać będziemy rozwiązując na przemian, ale nie równolegle, niezależne zadania na Ω_R i Ω_B . Na obszarze $\bar{\Omega}_R$ będziemy poszukiwali aproksymacji zagadnienia wyjściowego na pełnych warstwach czasowych, tzn. dla $t = \tau, 2\tau, \dots, n\tau$, natomiast na obszarze $\bar{\Omega}_B$ na połówkowych warstwach czasowych, tzn. dla $t = \frac{1}{2}\tau, \frac{3}{2}\tau, \dots, (N - \frac{1}{2})\tau$. Ponieważ w punkcie x_M rozwiązanie przybliżone jest liczone co pół kroku czasowego, co pół kroku następować będzie wymiana informacji pomiędzy rozwiązaniami określonymi na sąsiednich obszarach, w tym właśnie punkcie. Także co pół kroku czasowego, uaktualniana będzie również różnicowa pochodna w punkcie x_M .

Idę implementacji schematu przy dekompozycji Ω na dwa równe pododcinki, przedstawia *Rys. 2*.



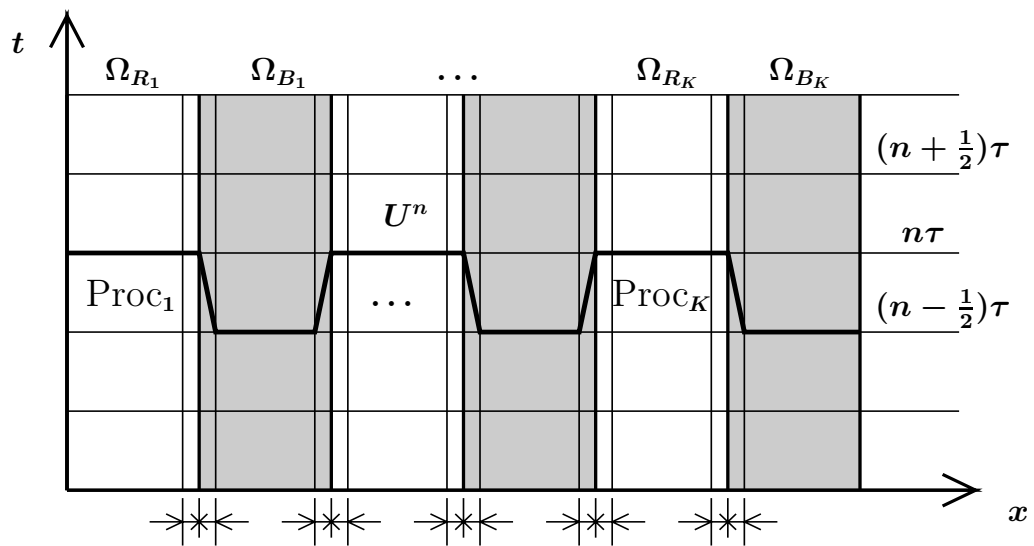
Rys. 2

Uogólnijmy teraz opisaną wyżej sytuację na przypadek dekompozycji Ω na $2K$ naprzemian położonych, równych pododcinków typu *Red* i *Black*, czyli przy założeniach przyjętych w *Podrozdziale 2.2*.

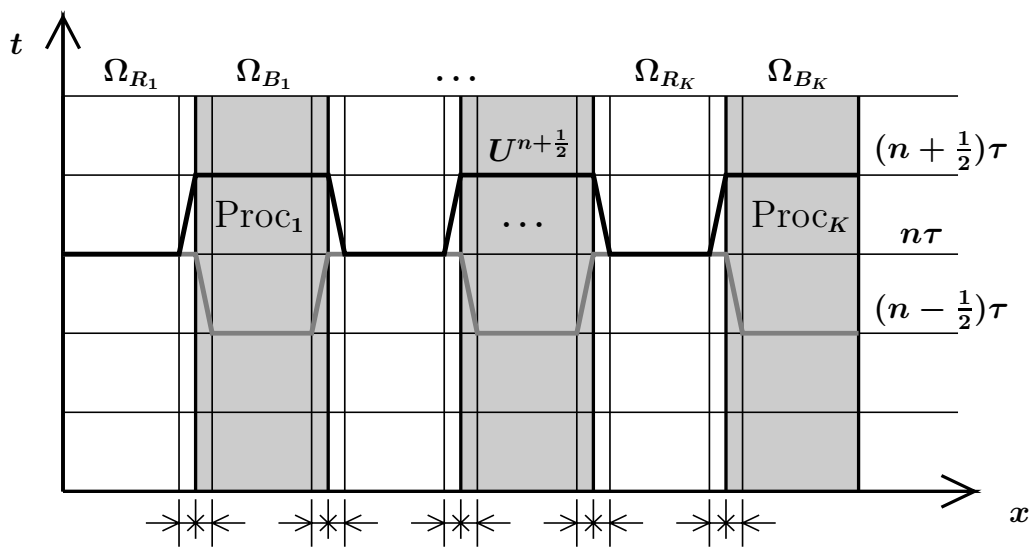
W tym przypadku znalezienie aproksymacji zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) *schematem zamkniętym Eulera*, wymaga rozwiązania na każdej warstwie czasowej układu równań algebraicznych z macierzą trójdiagonalną wymiaru $(2KM) \times (2KM)$, przy $P = 2KM$.

W przypadku proponowanej tu dyskretyzacji, znalezienie aproksymacji zadania (2.1.a)-(2.1.c), sprowadza się do rozwiązania na każdej warstwie czasowej K niepowiązanych ze sobą zadań określonych na obszarach Ω_R , z których każde wymaga rozwiązania układu równań z macierzą trójdiagonalną wymiaru $M \times M$ i tej samej ilości i wymiaru zadań określonych na każdym z obszarów Ω_B . Fakt, że zadania na poszczególnych obszarach Ω_{R_i} dla $i = 1, \dots, K$ są niepowiązane, jest konsekwencją odpowiedniej dekompozycji. Dzieliąc wyjściowy obszar Ω na podobszary wymagaliśmy, żeby podobszary obszaru Ω różnych typów, położone były naprzemian.

Rozważmy sytuację, w której dysponujemy komputerem o K procesorach. W jednym kroku czasowym możemy niezależnie policzyć $U^n(x)$ na każdym z podobszarów typu Ω_R - każdy z K procesorów liczy niezależne zadanie określone na jednym z obszarów Ω_{R_k} dla $k = 1, \dots, K$. W drugim kroku, po wymianie informacji na rozcięciach, niezależnie liczymy $U^{n+\frac{1}{2}}(x)$ na każdym z obszarów Ω_B . Opisaną wyżej sytuację ilustrują *Rys.3-4*.



Rys. 3



Rys. 4

Wypiszemy teraz schemat różnicowy dla wyżej wprowadzonej dyskretyzacji, przy dekompozycji obszaru Ω na $2K$ naprzemian położonych pododcinków typu *Red*, *Black*.

Rozwiązania przybliżonego zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) poszukujemy za pomocą następującego schematu:

$$\begin{aligned} & \text{znaleźć } U_j^{\frac{1}{2}}, j \in \{j : x_j \in \overline{\Omega}_B^h\}, \text{ takie że:} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \partial_{t/2} U_j^0 - \partial_x \bar{\partial}_x U_j^{\frac{1}{2}} = f_j^{\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j \in \Omega_B^h\}, \\ \partial_{t/2} U_j^0 - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{j+1}^{\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x U_j^0) = f_j^{\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j = (2k-1)H, k = 1, \dots, K\}, \\ \partial_{t/2} U_j^0 - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{j+1}^0 - \bar{\partial}_x U_j^{\frac{1}{2}}) = f_j^{\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j = 2kH, k = 1, \dots, K-1\}, \\ U_j^{\frac{1}{2}} = U_j^0 & j \in \{j : x_j \in \Omega_R^h\}, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.14.a)$$

dla $n = 1, \dots, N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{znaleźć } U_j^n, j \in \{j : x_j \in \overline{\Omega}_R^h\}, \text{ takie że:} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t U_j^{n-1} - \partial_x \bar{\partial}_x U_j^n = f_j^n & j \in \{j : x_j \in \Omega_R^h\}, \\ \partial_{t/2} U_j^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x U_j^n) = f_j^n & j \in \{j : x_j = (2k-1)H, k = 1, \dots, K\}, \\ \partial_{t/2} U_j^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{j+1}^n - \bar{\partial}_x U_j^{n-\frac{1}{2}}) = f_j^n & j \in \{j : x_j = 2kH, k = 1, \dots, K-1\}, \\ U_j^n = U_j^{n-\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j \in \Omega_B^h\}, \end{array} \right. \\ \\ \text{znaleźć } U_j^{n+\frac{1}{2}}, j \in \{j : x_j \in \overline{\Omega}_B^h\}, \text{ takie że:} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t U_j^{n-\frac{1}{2}} - \partial_x \bar{\partial}_x U_j^{n+\frac{1}{2}} = f_j^{n+\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j \in \Omega_B^h\}, \\ \partial_{t/2} U_j^n - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x U_j^n) = f_j^{n+\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j = (2k-1)H, k = 1, \dots, K\}, \\ \partial_{t/2} U_j^n - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x U_{j+1}^n - \bar{\partial}_x U_j^{n+\frac{1}{2}}) = f_j^{n+\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j = 2kH, k = 1, \dots, K-1\}, \\ U_j^{n+\frac{1}{2}} = U_j^n & j \in \{j : x_j \in \Omega_R^h\}, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.14.b)$$

$$U^0(x_j) = u_0(x_j) \quad x \in \overline{\Omega}^h. \quad (2.14.d)$$

Odnotujmy, że każdy z podschematów schematu (2.14.a)-(2.14.d) ma jednoznaczne rozwiązanie, ponieważ macierze odpowiednich układów równań algebraicznych powstałych w wyniku dyskretyzacji, są dodatnio określone.

Zaproponowany schemat dyskretyzacji jest *schematem dwuwarstwowym*, poza punktami $x \in \Omega_{\Gamma}^h$ - czyli na rozcięciach, w których (2.14.a)-(2.14.d) jest

trójwarstwowy.

Implementacja schematu (2.14.a)-(2.14.d) przedstawia się następująco. Niech dane będzie $U^{n-\frac{1}{2}}(x)$. W pierwszym półkroku obliczamy $U^n(x)$ z (2.14.b). Sprowadza się to do rozwiązania K niezależnych zadań określonych na podobszarach $\bar{\Omega}_{R_k}$ dla $k = 1, \dots, K$. Następnie, po obliczeniu $U^n(x)$, uaktualnione zostają wartości $U^{n-\frac{1}{2}}(x)$ i pochodnych różnicowych w punktach $x \in \Omega_{\Gamma}^h$, po czym wyznaczane rozwiązanie $U^{n+\frac{1}{2}}(x)$ z równania (2.14.c). Jego wyznaczenie wymaga rozwiązania K niepowiązanych ze sobą zadań określonych na $\bar{\Omega}_{B_k}^h, k = 1, \dots, K$.

Proponowany schemat, dla zadanego U^n , umożliwia zatem znalezienia rozwiązania globalnego na kolejnej, $(n + 1)$ -ej warstwie czasowej - U^{n+1} , w dwóch krokach. W każdym z kroków musimy rozwiązać K niezależnych układów równań algebraicznych z macierzami trójdiagonalnymi wymiaru $M \times M$. Dla przypomnienia, w standardowej dyskretyzacji *schematem zamkniętym Eulera*, na każdej warstwie czasowej powstaje układ równań algebraicznych, z macierzą trójdiagonalną wymiaru $2KM \times 2KM$. Schemat przez nas proponowany bardzo dobrze nadaje się zatem do obliczeń równoległych. Dysponując komputerem o K procesorach, w pierwszym półkroku czasowym możemy niezależnie policzyć $U^n(x)$ na każdym z podobszarów typu Ω_R - każdy z K procesorów rozwiązuje niezależne zadanie określone na jednym z pododcinków Ω_{R_i} dla $i = 1, \dots, K$. W drugim półkroku, po wymianie informacji na brzegach podobszarów, niezależnie wyznaczamy rozwiązanie $U^{n+\frac{1}{2}}(x)$ na każdym z obszarów Ω_B . Dodajmy tutaj, że ilość informacji wymienianej pomiędzy obszarami różnych typów to tylko dwie liczby : wartość funkcji i odpowiedniej pochodnej różnicowej.

Zbadajmy teraz rząd lokalnej aproksymacji proponowanego schematu. Zauważmy najpierw, że równania (2.14.a)-(2.14.d) wzięte osobno, nie aproksymują równań (2.1.a)-(2.1.c) na odcinku Ω . W punktach $x \in \Omega_{\Gamma}^h$, zamiast aproksymacji lokalnej rzędu $\mathcal{O}(\tau + h^2)$, jak w *schemacie zamkniętym Eulera*, mamy dla każdego z równań lokalną aproksymację rzędu $\mathcal{O}(\tau + \frac{\tau}{h})$. Aby to zauważyć rozważmy aproksymację lokalną w punkcie $x_M \in \Omega_{\Gamma}^h$. Z równania (2.14.b) na n -tej warstwie czasowej w punkcie x_M , dla dostatecznie regularnego rozwiązania zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c), mamy

$$\begin{aligned} & \partial_{t/2} u_M^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x u_{M+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x u_M^n) = \\ & = \partial_{t/2} u_M^{n-\frac{1}{2}} - \partial_x \bar{\partial}_x u_M^n + \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{M+1}^{n-\frac{1}{2}} = \\ & = \partial_t u_M^{n-1} - \partial_x \bar{\partial}_x u_M^n + \mathcal{O} \left(\tau + \frac{\tau}{h} \right). \end{aligned}$$

Oczywiście we wnętrzu podobszarów Ω_R i Ω_B rząd aproksymacji lokalnej

wynosi $\mathcal{O}(\tau + h^2)$, tak jak w *schemacie zamkniętym Eulera*. Zauważmy jednak, że równania (2.14.b)-(2.14.c) wzięte razem na sąsiednich warstwach czasowych, dają w punkcie x_M rząd lokalnej aproksymacji $\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \frac{\tau^2}{h}\right)$. Mamy bowiem w punkcie x_M , po dodaniu stronami równań (2.14.b) i (2.14.c)

$$\left(\partial_{t/2} u_M^{n-\frac{1}{2}} + \partial_{t/2} u_M^n\right) - \frac{2}{h} \left(\frac{\bar{\partial}_x u_{M+1}^{n-\frac{1}{2}} + \bar{\partial}_x u_{M+1}^{n+\frac{1}{2}}}{2} - \bar{\partial}_x u_M^n\right) = \left(f^{n+1} + f^{n+\frac{1}{2}}\right),$$

co można przekształcić do postaci

$$\frac{1}{\tau} \left(u_M^{n+\frac{1}{2}} - u_M^{n-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{h} \left(\frac{\bar{\partial}_x u_{M+1}^{n-\frac{1}{2}} + \bar{\partial}_x u_{M+1}^{n+\frac{1}{2}}}{2} - \bar{\partial}_x u_M^n\right) = \frac{\left(f^{n+1} + f^{n+\frac{1}{2}}\right)}{2}.$$

Stąd lokalna aproksymacja na n -tej warstwie czasowej w punkcie x_M wynosi $\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \frac{\tau^2}{h}\right)$ - podobnie jest dla każdego $x \in \Omega_\Gamma^h$. Oczywiście zarówno we wnętrzu Ω_R jak i we wnętrzu Ω_B , mamy na n -tej warstwie czasowej lokalną aproksymację $\mathcal{O}(\tau + h^2)$.

Rozważmy zachowanie się schematu (2.14.a)-(2.14.d) w przypadku $\tau/h = \text{const}$ oraz przy $\tau/h^2 = \text{const}$, czyli przy najczęściej przyjmowanych stosunkach na kroki *schematu zamkniętego Eulera*. Zauważmy, że przy stałym stosunku parametrów τ/h , dla schematu (2.14.a)-(2.14.d), rząd lokalnej aproksymacji na rozcięciu wynosi

$$\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \tau \frac{\tau}{h}\right) = \mathcal{O}(\tau + h^2).$$

Podobnie, przy stałym stosunku τ/h^2 , rząd lokalnej aproksymacji proponowanego schematu to

$$\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \tau^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\tau}{h^2}}\right) = \mathcal{O}(\tau + h^2).$$

Możemy zatem sformułować

Uwaga 1. Dla schematu (2.14.a)-(2.14.d), przy dostatecznie regularnym rozwiązaniu (2.1.a)-(2.1.c), błąd lokalnej aproksymacji przy $\tau/h = \text{const}$ oraz przy $\tau/h^2 = \text{const}$ nie jest niższy niż dla schematu zamkniętego Eulera.

Uwaga 2. Wprowadzając dodatkowe aproksymacje pochodnych normalnych w punktach Ω_Γ^h , podwyższyliśmy rząd lokalnej aproksymacji względem schematu proponowanego w [2]. Dla schematu rozważanego w [2], w punktach Ω_Γ^h rząd lokalnej aproksymacji wynosi bowiem $\frac{1}{h}$.

2.4 Analiza stabilności

W tym podrozdziale zajmiemy się analizą stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d). Sformułowane i udowodnione zostaną *metodą nierówności energetycznych* (patrz [16]) *Twierdzenia 1* i *2*, o bezwarunkowej stabilności rozważanego schematu w różnych normach.

Wynikiem *Twierdzenia 1* jest bezwarunkowa stabilność schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych* normach - zawierających pochodne względem czasu rozwiązań tego schematu. Rezultatem *Twierdzenia 2* natomiast, które jest wnioskiem z pierwszego, jest stabilność schematu w normach standardowo używanych przy tego typu zadaniach (patrz np. [16],[18]).

Bezpośrednie próby udowodnienia stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w normach ogólnie do tego używanych ([2],[3],[8]) i nazywanych przez nas dalej *normami słabymi*, bez dodatkowych założeń, nie dały satysfakcjonujących rezultatów. Poważnym kłopotem okazała się analiza wprowadzonych przez nas aproksymacji pochodnych różnicowych w punktach Ω_Γ^h . Próby udowodnienia stabilności proponowanego schematu doprowadziły nas do stosunkowo łatwego i przejrzystego sposobu na udowodnienie stabilności w *standardowych* normach. Punktem wyjścia jest pokazanie stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych* normach.

2.4.1 Silne normy

Sformułujemy i udowodnimy teraz następujące twierdzenie o bezwarunkowej stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*, tj. w normach zawartych w lewej stronie oszacowania *Twierdzenia 1*.

Twierdzenie 1 (Silne normy). *Rozwiązania schematu (2.14.a)-(2.14.d) spełniają następujące oszacowanie*

$$\begin{aligned}
& \max_{n=1,\dots,N-1} \left\{ \left\| \partial_{t/2} U^n \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \max_{n=1,\dots,N-1} \left\{ \left\| \partial_t U^n \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left\| \overline{\partial}_x \partial_t U^n \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \overline{\partial}_x \partial_t U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ \left\| f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| f^1 \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_t f^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_t f^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \right. \\
& \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} f^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \left\| \partial_x \overline{\partial}_x U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 \right\},
\end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ, h oraz H .

Uwaga 3. Zwróćmy uwagę na normy po lewej stronie wypisanego wyżej oszacowania. Zawierają one pochodne różnicowe rozwiązań schematu (2.14.a)-(2.14.d), zamiast samych jego rozwiązań. Stąd nazwa stabilności w silnych normach.

Dowód. Dowód oparty jest na metodzie nierówności energetycznych, zastosowanej do schematu powstałego z (2.14.a)-(2.14.d), przez odjęcie od siebie stronami odpowiednich równań, określonych na sąsiednich warstwach czasowych.

W pierwszej kolejności skoncentrujemy się na równaniach schematu (2.14.a)-(2.14.d) określonych na $\bar{\Omega}_R^h$. Następnie, przez analogię, przeniesiemy otrzymane wyniki na odpowiednie równania określone na $\bar{\Omega}_B^h$.

Dla ustalenia uwagi zajmijmy się szczegółowo, równaniami rozważanego schematu określonymi na ustalonym, wewnętrznym pododcinku $\bar{\Omega}_{R_k}^h$, czyli dla $k = 2, \dots, K$. Dla tego podobszaru $\partial\Omega_{R_k}^h = \{x_{2kM}, x_{(2k+1)M}\}$.

Przypomnijmy, że z równań (2.14.b), na n -tej warstwie czasowej w punkcie x_{2kM} mamy

$$\partial_{t/2} U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} \left(\bar{\partial}_x U_{2kM+1}^n - \bar{\partial}_x U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \right) = f_{2kM}^n,$$

zaś z równań (2.14.c) w punkcie x_{2kM} na $(n - \frac{1}{2})$ warstwie czasowej mamy

$$\partial_{t/2} U_{2kM}^{n-1} - \frac{1}{h} \left(\bar{\partial}_x U_{2kM+1}^{n-1} - \bar{\partial}_x U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \right) = f_{2kM}^{n-\frac{1}{2}}.$$

Odejmując stronami dwa powyższe równania, otrzymujemy

$$\partial_{t/2} U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-1} - \frac{\tau}{h} \partial_t \bar{\partial}_x U_{2kM+1}^{n-1} = \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} f_{2kM}^{n-\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Analogicznie, w punkcie $x_{(2k+1)M}$ dostajemy

$$\partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-1} + \frac{\tau}{h} \partial_t \bar{\partial}_x U_{(2k+1)M}^{n-1} = \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Odejmując stronami równanie (2.14.b) na n -tej i $(n - 1)$ -szej warstwie czasowej, dla wszystkich punktów $x_j \in \Omega_{R_k}^h$, otrzymujemy natomiast

$$\partial_t U_j^{n-1} - \partial_t U_j^{n-2} + \tau \partial_t \bar{\partial}_x \bar{\partial}_x U_j^{n-1} = \tau f_j^{n-1}. \quad (2.17)$$

Zapiszmy równania (2.15), (2.16) i (2.17) jako jeden schemat określony

na $\overline{\Omega}_{R_k}^h$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-1} - \frac{\tau}{h} \partial_t \overline{\partial}_x U_{2kM+1}^{n-1} = \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} f_{2kM}^{n-\frac{1}{2}}, \\ \partial_t U_j^{n-1} - \partial_t U_j^{n-2} - \tau \partial_t \partial_x \overline{\partial}_x U_j^{n-1} = \tau \partial_t f_j^{n-1}, \\ \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-1} + \frac{\tau}{h} \partial_t \overline{\partial}_x U_{(2k+1)M}^{n-1} = \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Zbadajmy teraz stabilność schematu (2.18).

W tym celu mnożmy punktowo równania schematu (2.18) przez $h \partial_t U_j^{n-1}$ i sumujemy po $j = 2kM, \dots, (2k+1)M$. Daje to równanie

$$\begin{aligned} h \left(\partial_{t/2} U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-1} \right) \partial_t U_{2kM}^{n-1} + h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} \left(\partial_t U_j^{n-1} - \partial_t U_j^{n-2} \right) \partial_t U_j^{n-1} + \\ + h \left(\partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-1} \right) \partial_t U_{(2k+1)M}^{n-1} + \\ - \tau \partial_t \overline{\partial}_x U_{2kM+1}^{n-1} \partial_t U_{2kM}^{n-1} - \tau h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} \partial_t \partial_x \overline{\partial}_x U_j^{n-1} \partial_t U_j^{n-1} + \\ + \tau \partial_t \overline{\partial}_x U_{(2k+1)M}^{n-1} \partial_t U_{(2k+1)M}^{n-1} = \\ = \frac{\tau h}{2} \partial_{t/2} f_{2kM}^{n-1} \partial_t U_{2kM}^{n-1} + \tau h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} \partial_t f_j^{n-1} \partial_t U_j^{n-1} + \\ + \frac{\tau h}{2} \partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{n-1} \partial_t U_{(2k+1)M}^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Uprośćmy nieco lewą stronę powyższej równości. Zauważmy, że dla trzech pierwszych wyrazów lewej strony (2.19) mają miejsce następujące tożsamości (-zobacz definicje pochodnych różnicowych str. 12)

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega_{\Gamma}^h \quad : \quad h \left(\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}(x) - \partial_{t/2} U^{n-1}(x) \right) \partial_t U^{n-1}(x) = \\ = \frac{1}{2} h \left(\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}(x) - \partial_{t/2} U^{n-1}(x) \right) \left(\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}(x) + \partial_{t/2} U^{n-1}(x) \right) = \\ = \frac{1}{2} h \left\{ \left| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}(x) \right|^2 - \left| \partial_{t/2} U^{n-1}(x) \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

i

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega_{R_k}^h \quad : \quad \left(\partial_t U^{n-1}(x) - \partial_t U^{n-2}(x) \right) \partial_t U^{n-1}(x) = \\ = \frac{1}{2} \left| \partial_t U^{n-1}(x) - \partial_t U^{n-2}(x) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \partial_t U^{n-1}(x) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \partial_t U^{n-2}(x) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Wyrazy czwarty, piąty i szósty lewej strony równości (2.19) upraszczamy stosując wzory sumowania przez części (zobacz [16] - str. 184). Korzystając z nich mamy

$$\begin{aligned}
& -\tau \partial_t \bar{\partial}_x U_{2kM+1}^{n-1} \partial_t U_{2kM}^{n-1} - \tau h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} \partial_t \partial_x \bar{\partial}_x U_j^{n-1} \partial_t U_j^{n-1} + \\
& + \tau \partial_t \bar{\partial}_x U_{(2k+1)M}^{n-1} \partial_t U_{(2k+1)M}^{n-1} = \tau h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M} |\partial_x \bar{\partial}_x U_j^{n-1}|^2. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Podstawmy (2.21), (2.20) i (2.22) do równania (2.19). Daje to następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_{R_k}^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_{R_k}^h)}^2 - \|\partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_{R_k}^h)}^2 \right\} + \\
& + \frac{1}{2} h \left\{ \left| \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right|^2 - \left| \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-1} \right|^2 - \left| \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-1} \right|^2 \right\} + \\
& + \tau h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M} \left| \bar{\partial}_x \partial_t U_j^{n-1} \right|^2 = \\
& = \tau h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} \partial_t f_j^{n-1} \partial_t U_j^{n-1} + \\
& + \frac{\tau h}{2} \left\{ \partial_{t/2} f_{2kM}^{n-1} \partial_t U_{2kM}^{n-1} + \partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{n-1} \partial_t U_{(2k+1)M}^{n-1} \right\} \leq \\
& \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_{R_k}^h)}^2 + h \left| \partial_{t/2} f_{2kM}^{n-1} \right|^2 + h \left| \partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{n-1} \right|^2 \right\} + \\
& + \epsilon \tau \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_{R_k}^h)}^2 + \\
& + \epsilon \tau h \left\{ \left| \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| \partial_{t/2} U_{2kM}^{n-1} \right|^2 + \left| \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{n-1} \right|^2 \right\}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Ostatnią nierówność otrzymaliśmy stosując *Lemat 11* - str. 172 oraz prosty fakt wynikający z definicji pochodnych różnicowych (zobacz str. 12), tj.

$$|\partial_t U^{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2} \left\{ \left| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}(x) \right| + \left| \partial_{t/2} U^{n-1}(x) \right| \right\} \quad \forall x \in \Omega_{\Gamma}^h.$$

Podobne oszacowanie do (2.23), które zostało wyprowadzone dla wewnętrznych podobszarów obszaru $\bar{\Omega}_R^h$, otrzymujemy dla brzegowego podobszaru $\bar{\Omega}_{R_1}^h$.

Ostatecznie, sumując po $k = 1, \dots, K$ nierówności (2.23), dla równań schematu (2.14.a)-(2.14.d) określonych na $\bar{\Omega}_R^h$ i dla $n \geq 2$, otrzymujemy o-

szacowanie

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \|\partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{2} \left\| \partial_{t/2} U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \tau \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \epsilon \tau \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Wypiszemy teraz oszacowanie odpowiadające (2.24), dla równań rozważanego schematu określonych na $\bar{\Omega}_B^h$ i $n > 2$. Dowód tej nierówności jest analogiczny do dowodu (2.24). Tym razem, w pierwszej kolejności odejmujemy od siebie stronami równania (2.14.c) na $(n - \frac{1}{2})$ -ej warstwie czasowej i (2.14.b) na $(n - 1)$ -ej warstwie czasowej by uzyskać równanie w punktach $x \in \Omega_\Gamma^h$. Następnie, aby otrzymać równanie określone w punktach $x \in \Omega_B^h$, odejmujemy od siebie stronami równania (2.14.c), określone odpowiednio na $(n - \frac{1}{2})$ -ej i $(n - \frac{3}{2})$ -ej warstwie czasowej. Postępując dalej jak przy dowodzie (2.24) dostajemy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}} - \partial_t U^{n-\frac{5}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \|\partial_t U^{n-\frac{5}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\| \partial_{t/2} U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{2} \left\| \partial_{t/2} U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \tau \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U_j^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \epsilon \tau \left\{ \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Dla $n = 2$, postępując jak wyżej, otrzymujemy nieco inne oszacowanie. Wynika, to z różnicy pomiędzy (2.14.a) i (2.14.c) w wewnętrznych punktach siatki Ω_B^h . Zwróćmy uwagę, że w pierwszym z wyżej wymienionych równań pochodna rozwiązania dyskretnego względem czasu to $\partial_{t/2} U^0$ - czyli iloraz różnicowy o pół kroku czasowego, natomiast na kolejnych warstwach czasowych mamy $\partial_t U^{n-\frac{1}{2}}$, czyli iloraz różnicowy brany o pełny krok czasowy.

Odpowiednik (2.25) dla $n = 2$, to

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \left\| \partial_t U^{\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left\| \partial_{t/2} U_M^1 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{2} \left\| \partial_{t/2} U_M^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \tau \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \left\| \partial_t f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \epsilon \tau \left\{ \left\| \partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^1 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Dodajmy teraz stronami wyżej otrzymane nierówności rozróżniając dwa przypadki $n = 2$ i $n > 2$.

W przypadku $n = 2$ dodajmy stronami nierówności (2.24) i (2.26).

Dla $n = 3, \dots, N$ dodajmy stronami nierówności (2.24) i (2.25).

Otrzymane w ten sposób nierówności dodajemy do siebie stronami dla $n = 2, \dots, N$. Dodatkowo przenosimy na lewą stronę otrzymanej nierówności wyrazy

$$\epsilon \tau \left\{ \left\| \partial_t U^{N-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{N-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U_M^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}.$$

Daje to oszacowanie postaci

$$\begin{aligned}
& (1 - \tau \epsilon) \left\{ \left\| \partial_t U^{N-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{N-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \left\{ \left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \left\{ \left\| \partial_{t/2} U^n \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \frac{\tau}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_t f^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \left\| \partial_t f^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \\
& + \frac{\tau}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_{t/2} f^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Wybierzmy w nierówności (2.27) $\epsilon < \frac{1}{2\tau}$ i skorzystajmy z następującej nierówności

$$(1 - \tau\epsilon) \left\{ \left\| \partial_t U^{N-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{N-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} \geq \\ \geq \frac{1}{2} \left\{ \left\| \partial_t U^{N-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{N-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}.$$

Następnie trzykrotnie stosujemy *nierówność Gronwall'a - Lemat 7*, str. 171. Bierzemy $\gamma_n = \left\| \partial_t U^{N-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2$ i po przeniesieniu wszystkich pozostałych wyrazów na lewą stronę (2.27) pierwszy raz korzystamy z *Lematu Gronwall'a*. Czynność tą powtarzamy dla $\gamma_n = \left\| \partial_t U^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2$ i po raz trzeci dla $\gamma_n = \left\| \partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$. Takie postępowanie daje

$$\begin{aligned} & \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \left\| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_t f^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t f^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_{t/2} f^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \left\{ \left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} \right\}. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Zauważmy, że podane wyżej oszacowanie *a priori*, nie oznacza jeszcze stabilności, bowiem po prawej stronie tego oszacowania występują wyrazy określone na połówkowej i pierwszej warstwie czasowej, tj.

$$\left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2.$$

W celu ich wyeliminowania korzystamy z *Lematu 1* - str. 44.

Zwróćmy także uwagę, że wyrazy lewej strony powyższej nierówności (2.28), zawierają jedynie $\left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}$. Oszacowanie w normie $\left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}$ otrzymujemy korzystamy z faktów

$$\left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = \left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$$

oraz

$$\left\| \partial_t U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \leq \frac{1}{2} \left\{ \left\| \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \left\| \partial_{t/2} U^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right\}.$$

Podobnie otrzymujemy oszacowanie $\left\| \partial_t U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}$. \square

2.4.2 Słabe normy

Udowodnimy teraz bezwarunkową stabilność schematu (2.14.a)-(2.14.d) w normach słabszych niż w *Twierdzeniu 1*, ale najczęściej stosowanych przy tego typu schematach - zobacz [16], [23].

Twierdzenie 2 (Słabe normy). *Rozwiązania schematu (2.14.a)-(2.14.d) spełniają następujące oszacowanie*

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\bar{\partial}_x U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=0, \dots, N-1} \left\{ \|U^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\bar{\partial}_x U^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\ \leq & \mathcal{M} \left\{ \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|f^1\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_t f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \left. + \|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + \|\bar{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + \|\partial_x \bar{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ, h oraz H .

Dowód. Dowód *Twierdzenia* sprowadza się do zastosowania *Lematu 13* - str. 172 i *Lematu 1* - str. 44 do *Twierdzenia 1* - str. 20, o stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*. Zauważmy bowiem, że na mocy *Lematu 13*

$$\|\bar{\partial}_x U^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|\bar{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\bar{\partial}_x \partial_t U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\}, \quad (2.29)$$

oraz

$$\|U^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \max_{n=0, \dots, N-1} \|\partial_t U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\}. \quad (2.30)$$

Zatem z (2.29) i (2.30) dostajemy

$$\begin{aligned}
& \|U^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\overline{\partial}_x U^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq \\
& \leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\overline{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \right. \\
& \left. + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\overline{\partial}_x \partial_t U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \max_{n=0, \dots, N-1} \|\partial_t U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\}. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Analogicznie dla wyrazów określonych na $\overline{\Omega}_B^h$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \|U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\overline{\partial}_x U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \leq \\
& \leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\overline{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \right. \\
& + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \max_{n=1, \dots, N-1} \|\partial_t U^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \\
& \left. + \tau \|\overline{\partial}_x \partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \tau \sum_{i=0}^{N-1} \|\overline{\partial}_x \partial_t U^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że część wyrazów prawych stron nierówności (2.31) i (2.32), tzn.

$$\begin{aligned}
& \max_{n=1, \dots, N-1} \|\partial_t U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\overline{\partial}_x \partial_t U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \\
& + \max_{n=1, \dots, N-1} \|\partial_t U^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \tau \sum_{i=0}^{N-1} \|\overline{\partial}_x \partial_t U^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2,
\end{aligned}$$

możemy oszacować korzystając z *Twierdzenia 1*.

Pozostałe wyrazy, tj.

$$\|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \tau \|\overline{\partial}_x \partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \|\overline{\partial}_x \partial_t U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2,$$

szacujemy z *Lematu 1*. □

2.5 Analiza zbieżności

W tym podrozdziale zajmiemy się analizą zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d). Głównym wynikiem są *Twierdzenia 3* i *4*, zawierające oszacowanie błędu zbieżności schematu w odpowiednio *silnych* i *słabych normach*.

Niech $u(x, n\tau)$, $u\left(x, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right)$ będą rozwiązaniami zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c) i niech $U(x, n\tau)$, $U\left(x, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right)$ będą rozwiązaniami schematu (2.14.a)-(2.14.d) dla ustalonego $x \in \overline{\Omega}^h$ i $n \geq 0$. Zdefiniujemy błąd rozwiązania przybliżonego jako funkcje siatkowe postaci:

$$\eta(x, n\tau) \equiv \begin{cases} U(x, n\tau) - u(x, n\tau), & x \in \overline{\Omega}_R^h, \\ U(x, n\tau) - u(x, (n - \frac{1}{2})\tau), & x \in \Omega_B^h, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\eta(x, (n + \frac{1}{2})\tau) \equiv \begin{cases} U(x, (n + \frac{1}{2})\tau) - u(x, n\tau), & x \in \Omega_R^h, \\ U(x, (n + \frac{1}{2})\tau) - u(x, (n + \frac{1}{2})\tau), & x \in \overline{\Omega}_B^h. \end{cases} \quad (2.34)$$

Zwróćmy uwagę, że w punktach siatkowych $x \in \Omega_R^h$ błąd rozwiązania zdeiniowany jest jako różnica odpowiedniego rozwiązania przybliżonego i *rozwiązania dokładnego*, tzn. rozwiązania zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c), na pełnych warstwach czasowych, natomiast dla $x \in \Omega_B^h$ rozwiązanie schematu (2.14.a)-(2.14.d) porównywane jest z *wartością dokładną* na połówkowych warstwach czasowych. W punktach $x \in \Omega_B^h$, rozwiązanie schematu porównujemy z *rozwiązaniem dokładnym* branym co pół kroku czasowego. Wybór takiej właśnie definicji błędu wynika z postaci rozwiązań U^n oraz $U^{n+\frac{1}{2}}$. Przypomnijmy, że funkcja $U^n(x)$ dla $x \in \overline{\Omega}_R^h$ jest wyznaczana z równania (2.14.b), natomiast dla $x \in \Omega_B^h$, wartości funkcji $U^n(x)$ są przenoszone z poprzedniego półkroku czasowego. Wartości rozwiązania w wewnętrznych punktach Ω_B^h powinny być zatem porównywane z rozwiązaniem dokładnym branym pół warstwy czasowej niżej względem tej, z którą porównujemy rozwiązanie schematu w punktach należących do $\overline{\Omega}_R^h$. Podobnie jest w przypadku definicji funkcji błędu na $(n + \frac{1}{2})$ -ej warstwie czasowej. Wartości *rozwiązania przybliżonego* w punktach $x \in \Omega_B^h$ liczone są co pół kroku czasowego, stąd konieczność ich porównywania z *rozwiązaniem dokładnym* co pół kroku czasowego.

2.5.1 Silne normy

Sformułujmy teraz następujące twierdzenie o rzędzie zbieżności błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*.

Twierdzenie 3 (Silne normy). *Niech u będzie rozwiązaniem (2.1.a)-(2.1.c), takim że $u \in C^{4,3}(\overline{\Omega} \times [0, T])$. Dla η^n i $\eta^{n+\frac{1}{2}}$, zachodzi następujące szacowanie*

$$\begin{aligned} & \max_{n=0, \dots, N-1} \left\{ \left\| \partial_{t/2} \eta^n \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} \eta^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \left\| \partial_{t/2} \eta^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \partial_t \eta^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \left\{ \left\| \overline{\partial}_x \partial_{t/2} \eta^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \overline{\partial}_x \partial_t \eta^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=1, \dots, N-1} \left\{ \left\| \partial_t \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \partial_t \eta^n \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \left\| \overline{\partial}_x \partial_t \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \overline{\partial}_x \partial_t \eta^n \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\} \leq \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH} \right), \end{aligned}$$

gdzie M jest stałą dodatnią niezależną od τ , h oraz H .

Uwaga 4. Zwróćmy uwagę na normy, w których mierzony jest błąd zbieżności proponowanej dyskretyzacji. Twierdzenie powyższe podaje oszacowanie pochodnych względem czasu błędu rozwiązań rozważanego schematu, a nie bezpośrednio błędu rozwiązań schematu (2.14.a)-(2.14.d). Przypomnijmy, że tego typu normy w tej pracy nazywamy normami silnymi.

Uwaga 5. Zwróćmy uwagę na zachowanie rzędu zbieżności błędu rozważanego schematu w silnych normach, przy ustalonych stosunkach parametrów dyskretyzacji τ, h i H :

1. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h^{\frac{3}{2}}) = \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}),$$

2. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $\frac{H}{h} = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h) = \mathcal{O}(h),$$

3. przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}),$$

4. przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $\frac{H}{h} = \text{const}$ nie ma zbieżności.

Te cztery przypadki zostaną w dalszej części pracy - Rozdziale 4, skonfrontowane z wynikami odpowiednich eksperymentów numerycznych.

Dowód. Dowód tego Twierdzenia jest wnioskiem z Twierdzenia 1 - str. 20 o stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w silnych normach i lokalnej aproksymacji rozważanego schematu.

Wypiszmy schemat dla błędu naszego schematu dla równań określonych na $\bar{\Omega}_R^h$ dla $n > 1$. Podstawiając $U^n = \eta^n + u^n$ do schematu (2.14.a)-(2.14.d) i korzystając z błędu aproksymacji pochodnych różniczkowych odpowiednimi

ilorazami różnicowymi możemy napisać

$$\begin{cases}
\partial_t \eta_j^{n-1} - \partial_x \bar{\partial}_x \eta_j^n & = \tau \rho_j^1(u^n) + h^2 \rho_j^2(u^n) \\
& j \in \{j : x_j \in \Omega_R^h\}, \\
\partial_{t/2} \eta_j^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x \eta_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x \eta_j^n) & = \tau \rho_j^1(u^n) + h^2 \rho_j^2(u^n) - \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} \\
& j \in \{j : x_j = (2k-1)H, k = 1, \dots, K\}, \\
\partial_{t/2} \eta_j^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x \eta_{j+1}^n - \bar{\partial}_x \eta_j^{n-\frac{1}{2}}) & = \tau \rho_j^1(u^n) + h^2 \rho_j^2(u^n) + \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_j^{n-\frac{1}{2}} \\
& j \in \{j : x_j = 2kH, k = 1, \dots, K-1\}, \\
\eta_j^n = \eta_j^{n-\frac{1}{2}} & j \in \{j : x_j \in \Omega_B^h\},
\end{cases} \quad (2.35.b)$$

i podobnie dla równań określonych na $\bar{\Omega}_B^h$ dla $n > 1$

$$\begin{cases}
\partial_t \eta_j^{n-\frac{1}{2}} - \partial_x \bar{\partial}_x \eta_j^{n+\frac{1}{2}} & = \tau \rho_j^1(u^{n+\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{n+\frac{1}{2}}) \\
& j \in \{j : x_j \in \Omega_B^h\}, \\
\partial_{t/2} \eta_j^n - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x \eta_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x \eta_j^n) & = \tau \rho_j^1(u^{n+\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_j^n \\
& j \in \{j : x_j = (2k-1)H, k = 1, \dots, K\}, \\
\partial_{t/2} \eta_j^n - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x \eta_{j+1}^n - \bar{\partial}_x \eta_j^{n+\frac{1}{2}}) & = \tau \rho_j^1(u^{n+\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{j+1}^n \\
& j \in \{j : x_j = 2kH, k = 1, \dots, K-1\}, \\
\eta_j^{n+\frac{1}{2}} = \eta_j^n & j \in \{j : x_j \in \Omega_R^h\}.
\end{cases} \quad (2.35.c)$$

Dla $n = 1$ na dla równań określonych na $\bar{\Omega}_B^h$ mamy natomiast

$$\begin{cases}
\partial_{t/2} \eta_j^0 - \partial_x \bar{\partial}_x \eta_j^{\frac{1}{2}} & = \tau \rho_j^1(u^{\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{\frac{1}{2}}) \\
& j \in \{j : x_j \in \Omega_B^h\}, \\
\partial_{t/2} \eta_j^0 - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x \eta_{j+1}^{\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x \eta_j^0) & = \tau \rho_j^1(u^{\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{\frac{1}{2}}) + \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_j^0 \\
& j \in \{j : x_j = (2k-1)H, k = 1, \dots, K\}, \\
\partial_{t/2} \eta_j^0 - \frac{1}{h} (\bar{\partial}_x \eta_{j+1}^0 - \bar{\partial}_x \eta_j^{\frac{1}{2}}) & = \tau \rho_j^1(u^{\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{\frac{1}{2}}) - \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{j+1}^0 \\
& j \in \{j : x_j = 2kH, k = 1, \dots, K-1\}, \\
\eta_j^{\frac{1}{2}} = \eta_j^0 & j \in \{j : x_j \in \Omega_R^h\}.
\end{cases} \quad (2.35.a)$$

Tutaj

$$\rho_j^1(u^n) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t); \quad t \in \left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \tau, \left(n + \frac{1}{2}\right) \tau \right),$$

oraz

$$\rho_j^2(u^n) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, n\tau); \quad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}).$$

Podzielmy błąd naszego schematu na dwie części.

Pierwszy z nich to błąd lokalnej aproksymacji określony w każdym punkcie siatkowym wynikający z aproksymacji pochodnych różniczkowych $\frac{\partial u}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ odpowiednimi ilorazami różnicowymi $\partial_t u$ i $\partial_x \bar{\partial}_x u$. Oznaczać go dalej będziemy przez

$$z_j^n = \tau \rho_j^1(u^n) + h^2 \rho_j^2(u^n), \quad z_j^{n+\frac{1}{2}} = \tau \rho_j^1(u^{n+\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_j^2(u^{n+\frac{1}{2}}).$$

Drugi błąd to błąd lokalnej aproksymacji, określony tylko w punktach $x \in \Omega_\Gamma^h$, czyli na brzegach odpowiednich podobszarów. Wynika on z aproksymacji pochodnych normalnych odpowiednimi ilorazami różnicowymi z poprzedniej warstwy czasowej. Składają się na niego wyrazy : $-\frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \partial_x u_{kM}^n$ oraz $\frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{kM}^n$ gdzie $k = 1, \dots, 2K$.

Korzystając z *Twierdzenia 1* (stabilność jest własnością schematu) i z faktu, że $\eta^0(x) \equiv 0$ dla każdego $x \in \Omega^h$, otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned} & \max_{n=0, \dots, N-1} \left\{ \left\| \partial_{t/2} \eta^n \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=0, \dots, N-1} \left\{ \left\| \partial_t \eta^n \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \partial_t \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left\| \bar{\partial}_x \partial_t \eta^n \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \bar{\partial}_x \partial_t \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left\{ \left\| z^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left\| z^1 \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_t z^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_t z^n \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\| \partial_{t/2} z^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \left\| \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \right. \\ & \quad \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\| \partial_{t/2} z^n \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \left\| \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^n \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Oszacujmy teraz wyrazy prawej strony oszacowania (2.36).

W pierwszej kolejności zauważmy, że przy założeniu $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t) \right| \leq C$ oraz

$\left| \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} \right| \leq C$ dla każdego $(x, t) \in Q^T$, mamy

$$\begin{aligned} & \left\| z^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| z^1 \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_t z^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_t z^n \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_{t/2} z^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} z^n \right\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} \leq \mathcal{M} (\tau^2 + h^4), \end{aligned} \quad (2.37)$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą zależną jedynie od rozwiązania zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c).

Przejdźmy teraz do oszacowania pozostałych wyrazów prawej strony nierówności (2.36), tj. wyrazów z czynnikami $\frac{\tau}{2h}$. Przy założeniu, $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}(x, t) \right| \leq C$ dla każdego $(x, t) \in Q^T$, korzystając z faktu, że ilość elementów zbioru Ω_Γ^h wynosi $|\Omega_\Gamma^h| = \frac{L}{H}$ gdzie L jest długością Ω , a H szerokością pojedynczego podobszaru, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \left\| \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^n \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} = \\ & = \frac{\tau^2}{4h} \sum_{x \in \Omega_\Gamma^h} \left| \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^0(x) \right|^2 + \\ & + \frac{\tau^3}{4h} \sum_{n=2}^N \sum_{x \in \Omega_\Gamma^h} \left\{ \left| \partial_{t/2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^{n-\frac{1}{2}}(x) \right|^2 + \left| \partial_{t/2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u^n(x) \right|^2 \right\} \leq \mathcal{M} \frac{L}{H} \frac{\tau^2}{h}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą niezależną od τ , h i H .

Podstawiając oszacowania (2.37) i (2.38) do nierówności (2.36) otrzymujemy oszacowanie zawarte w tezie *Twierdzenia 3*. \square

2.5.2 Słabe normy

Sformułujemy i udowodnimy teraz *Twierdzenie* o rzędzie zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w słabszych, ogólnie do tego typu zadań używanych normach. Podaje ono oszacowanie bezpośrednio błędu rozwiązań schematu, a nie tak jak to miało miejsce w *Twierdzeniu 3* pochodnych błędu względem czasu. Przypomnijmy, że w tej pracy normy tego typu nazywamy *normami słabymi*.

Twierdzenie 4 (Słabe normy). Niech u będzie rozwiązaniem (2.1.a)-(2.1.c), takim, że $u \in C^{4,3}(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Przy $\tau/h^{\frac{3}{2}+\alpha} = \text{const}$ i $\alpha \geq 0$ dla $\eta^{n-\frac{1}{2}}$ i η^n (-zobacz (2.33)-(2.34)) zachodzi następujące oszacowanie

$$\max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \tau \sum_{i=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} \right),$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ , h oraz H .

Uwaga 6. Zwróćmy uwagę na rząd zbieżności błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w zaproponowanych normach, przy ustalonych stosunkach parametrów dyskretyzacji τ , h i H :

1. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h^2) = \mathcal{O}(h^2),$$

2. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $\frac{H}{h} = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau^{\frac{1}{2}} + h^2) = \mathcal{O}(h).$$

Zauważmy, że w przypadku $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$, rząd zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) jest taki sam, jak w przypadku schematu zamkniętego Eulera - patrz np. [16].

Zachowanie schematu przy w wyżej wymienionych przypadkach zostanie skonfrontowane w Rozdziale 4 z wynikami odpowiednich eksperymentów numerycznych.

Uwaga 7. Zauważmy, że tak jak z Twierdzenia 1 wynika Twierdzenie 2, że zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w silnych normach, wynika zbieżność rozważanego schematu w normach słabych. Bez dodatkowych założeń o τ , h oraz H mamy zatem zbieżność w sensie słabych norm rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$.

Dowód. Dowód przebiegać będzie nieco inaczej niż dowód Twierdzenia 3 - str. 29 - o zbieżności w silnych normach. Bezpośrednie próby przeniesienia idei dowodu Twierdzenia 3 dają słabsze oszacowanie zbieżności błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d), niż podawane w tezie dowodzonego tutaj Twierdzenia.

W pierwszej kolejności zajmiemy się szczegółowo równaniami schematu (2.14.a)-(2.14.d) określonymi na wewnętrznym pododcinku $\bar{\Omega}_{R_k}^h$, czyli dla

Dla skrajnego podobszaru $\overline{\Omega}_{R_1}^h$ otrzymujemy analogiczne do powyższego szacowanie.

Sumujemy te nierówności stronami po wszystkich podobszarach $\overline{\Omega}_{R_k}^h$ dla $k = 1, \dots, K$ stosując dodatkowo tożsamość

$$(\eta_j^n - \eta_j^{n-1})\eta_j^n = \frac{1}{2}|\eta_j^n - \eta_j^{n-1}|^2 + \frac{1}{2}|\eta_j^n|^2 - \frac{1}{2}|\eta_j^{n-1}|^2.$$

Dla $n \geq 1$ pozwala to napisać

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^2}{2} \|\partial_t \eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \|\overline{\partial}_x \eta^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)} + \\ & \quad + \frac{\tau^2}{16} \|\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{1}{4} \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{4} \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ & \leq \epsilon \tau \left\{ \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \frac{\tau}{\epsilon} \|(\tau + h^2)\rho(u^n)\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \\ & \quad - \tau \sum_{k=1}^{K-1} \overline{\partial}_x \eta_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{2kM}^n + \tau \sum_{k=1}^K \overline{\partial}_x \eta_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{(2k-1)M}^n + \\ & \quad + \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^{K-1} \partial_{t/2} \overline{\partial}_x u_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{2kM}^n - \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^K \partial_{t/2} \overline{\partial}_x u_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{(2k-1)M}^n. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Analogicznie, mnożąc równanie (2.35.c) przez $h\tau\eta^{n+\frac{1}{2}}$, dla $n > 1$ na $\overline{\Omega}_B^h$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^2}{2} \|\partial_t \eta^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\eta^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \tau \|\overline{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \\ & \quad + \frac{\tau^2}{16} \|\partial_{t/2} \eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{1}{4} \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{4} \|\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ & \leq \epsilon \tau \left\{ \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \frac{\tau}{\epsilon} \|(\tau + h^2)\rho(u^{n-\frac{1}{2}})\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \\ & \quad + \tau \sum_{k=1}^{K-1} \overline{\partial}_x \eta_{2kM+1}^{n-1} \eta_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \tau \sum_{k=1}^K \overline{\partial}_x \eta_{(2k-1)M}^{n-1} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} + \\ & \quad - \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^{K-1} \partial_{t/2} \overline{\partial}_x u_{2kM+1}^{n-1} \eta_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^K \partial_{t/2} \overline{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Dla $n = 1$ dostajemy na $\overline{\Omega}_B^h$ nieco inną nierówność. Jest to spowodowane różnicą pomiędzy równaniami (2.14.a) i (2.14.c). Zauważmy, że w pierwszym półkroku czasowym, opisywanym równaniami (2.14.a), pochodna czasowa

we wnętrzu Ω_B^h jest aproksymowana ilorazem różnicowym o pół kroku czasowego. W przypadku kolejnych kroków czasowych na $\overline{\Omega}_B^h$, zadanych równaniami (2.14.c), pochodna czasowa jest aproksymowana ilorazem różnicowym brany o pełen krok czasowy. Uwzględniając tą różnicę dla $n = 1$, z równania (2.35.a) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{2} \|\partial_{t/2} \eta^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\eta^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \tau \|\overline{\partial}_x \eta^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \\
& \quad + \frac{\tau^2}{16} \|\partial_{t/2} \eta^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{1}{4} \|\eta^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{4} \|\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\
& \leq \epsilon \tau \left\{ \|\eta^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \frac{\tau}{\epsilon} \|(\tau + h^2) \rho(u^{\frac{1}{2}})\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \\
& \quad + \tau \sum_{k=1}^{K-1} \overline{\partial}_x \eta_{2kM+1}^0 \eta_{2kM}^{\frac{1}{2}} - \tau \sum_{k=1}^K \overline{\partial}_x \eta_{(2k-1)M}^0 \eta_{(2k-1)M}^{\frac{1}{2}} + \\
& \quad - \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^{K-1} \partial_{t/2} \overline{\partial}_x u_{2kM+1}^0 \eta_{2kM}^{\frac{1}{2}} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^K \partial_{t/2} \overline{\partial}_x u_{(2k-1)M}^0 \eta_{(2k-1)M}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Zsumujemy teraz otrzymane nierówności.

Dla $n = 1$ dodajemy stronami nierówności (2.41) i (2.43).

Dla $n > 1$ dodajemy stronami nierówności (2.41) i (2.42).

Po takim sumowaniu parami, sumujemy teraz stronami otrzymane nierówności względem $n = 1, \dots, N$. Takie postępowanie, po odpowiednim pogru-

powaniu wyrazów i wykorzystaniu równania (2.14.d), daje

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{2} \left\{ \|\partial_{t/2}\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \|\partial_t\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \sum_{n=1}^N \|\partial_t\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{\tau^2}{16} \sum_{n=1}^N \left\{ \|\partial_{t/2}\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2}\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left\{ \|\eta^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^N\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \frac{1}{4} \|\eta^N\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \quad + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \|\bar{\partial}_x\eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right\} \leq \\
& \leq \left\{ \epsilon\tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} \right\}_{S_1} + \\
& \quad + \left\{ \tau \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \bar{\partial}_x\eta_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x\eta_{(2k-1)M}^{n-1} \right\} \eta_{(2k-1)M}^n \right\}_{S_2} + \\
& \quad - \left\{ \tau \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K-1} \left\{ \bar{\partial}_x\eta_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x\eta_{2kM+1}^{n-1} \right\} \eta_{2kM}^n \right\}_{S_3} + \\
& + \left\{ \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \bar{\partial}_x\eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \partial_{t/2}\eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right\}_{S_4} - \left\{ \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K-1} \bar{\partial}_x\eta_{2kM+1}^{n-\frac{1}{2}} \partial_{t/2}\eta_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \right\}_{S_5} + \\
& + \left\{ \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \partial_{t/2}\bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2}\bar{\partial}_x u_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{(2k-1)M}^n \right\} \right\}_{S_6} + \\
& - \left\{ \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K-1} \left\{ \partial_{t/2}\bar{\partial}_x u_{2kM+1}^{n-1} \eta_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2}\bar{\partial}_x u_{2kM}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{2kM}^n \right\} \right\}_{S_7} + \\
& + \frac{\tau}{\epsilon} \sum_{n=1}^N \left\{ \|(\tau + h^2)\rho(u^n)\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|(\tau + h^2)\rho(u^{n-\frac{1}{2}})\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left\{ \|\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \frac{1}{4} \|\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 = \\
& = S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 - S_7 + \mathcal{M}(\tau^2 + h^4). \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Uprościmy teraz lewą stronę nierówności (2.44). Osobno szacować będziemy sumy prawej strony tej nierówności oznaczone przez S_2, S_4, S_6 , a następnie, przez analogię wypiszemy oszacowania sum S_3, S_5, S_7 .

W pierwszej kolejności zajmiemy się drugą sumą prawej strony (2.44), czyli wyrażeniem

$$|S_2| = \tau \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \bar{\partial}_x\eta_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x\eta_{(2k-1)M}^{n-1} \right\} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right|. \quad (2.45)$$

Zauważmy, że z równania (2.35.c) dla $n > 1$ i z równania (2.35.a) dla $n = 1$, w punkcie x_j dla $j = (2k - 1)M$, mamy

$$\begin{aligned} & \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-1} - \frac{1}{h} \left(\bar{\partial}_x \eta_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x \eta_{(2k-1)M}^{n-1} \right) = \\ & = \tau \rho_{(2k-1)M}^1(u^{n-\frac{1}{2}}) + h^2 \rho_{(2k-1)M}^2(u^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1}, \end{aligned}$$

co przekształcić możemy do postaci

$$\begin{aligned} & \bar{\partial}_x \eta_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{\partial}_x \eta_{(2k-1)M}^{n-1} = \\ & = h \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-1} - h \tau \rho_{(2k-1)M}^1(u^{n-\frac{1}{2}}) + h^3 \rho_{(2k-1)M}^2(u^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M+1}^{n-1} = \\ & = h \left\{ \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-1} + \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Po wstawieniu powyższego wyniku do (2.45) otrzymujemy następującą równość

$$|S_2| = \tau h \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-1} + \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right\} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right|.$$

Zastosujmy do S_2 , *Lemat 11* - str. 172 dla każdego ustalonego $n = 1, \dots, N$. Daje to

$$\begin{aligned} |S_2| & \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left| \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right|^2 + \\ & + \frac{\tau h^2}{\epsilon} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \left| \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-1} \right|^2 + \left| \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Następnie wyrazy pierwszej sumy, tzn. $|\eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}}|$, dla każdego ustalonego $k = 1, \dots, K$ oraz $n = 1, \dots, N$, szacujemy korzystając z *Lematu 9* - str. 172. Takie postępowanie daje

$$\begin{aligned} |S_2| & \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 + \left(1 + \frac{L}{H}\right) \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 \right\} + \\ & + \frac{\tau h^2}{\epsilon} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \left| \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-1} \right|^2 + \left| \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right|^2 \right\}, \end{aligned}$$

a ponieważ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 & = \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2, \\ \sum_{k=1}^K \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 & = \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2, \end{aligned} \tag{2.46}$$

otrzymujemy dalej

$$|S_2| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \left(1 + \frac{L}{H}\right) \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \frac{\tau h^2}{\epsilon} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \left| \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)K}^{n-1} \right|^2 + \left| \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right|^2 \right\}.$$

Wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{(1+\frac{L}{H})}$ dostajemy

$$|S_2| \leq \tilde{\epsilon} \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \frac{h}{\tilde{\epsilon}} \left(1 + \frac{L}{H}\right) \tau \sum_{n=1}^N \|\partial_{t/2} \eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau h^2}{\tilde{\epsilon}} \left(1 + \frac{L}{H}\right) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left| \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right|^2. \quad (2.47)$$

Zauważmy, że korzystając z *Twierdzenia 3* - o zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*, drugą sumę prawej strony powyższej nierówności możemy oszacować w sposób następujący

$$\begin{aligned} \frac{h}{\tilde{\epsilon}} \left(1 + \frac{L}{H}\right) \tau \sum_{n=1}^N \|\partial_{t/2} \eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 &\leq \mathcal{M} \frac{h}{\tilde{\epsilon}} \left(1 + \frac{L}{H}\right) \max_{n=1, \dots, N} \|\partial_{t/2} \eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ &\leq \frac{h}{\tilde{\epsilon}} \left(1 + \frac{L}{H}\right) \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH} \right) \leq \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{H^2} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ponieważ $K = \frac{L}{H}$, trzecią spośród sum prawej strony (2.47) szacujemy przez

$$\frac{\tau h^2}{\tilde{\epsilon}} \left(1 + \frac{L}{H}\right) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left| \rho(u^n) \left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h} \right) \right|^2 \leq \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{H^2} \right). \quad (2.49)$$

Korzystając z oszacowań (2.48) i (2.49) w nierówności (2.47), otrzymujemy ostatecznie

$$|S_2| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{H^2} \right). \quad (2.50)$$

Analogiczne oszacowanie otrzymujemy dla sumy $|S_3|$, czyli trzeciej sumy prawej strony nierówności (2.44). Tym razem dokonujemy odpowiedniego podstawienia z równania (2.35.c) dla $n \geq 1$, ale w punkcie x_j dla $j = 2kM$. Reszta dowodu przebiega w identyczny sposób.

Przejdźmy do oszacowania czwartej sumy prawej strony nierówności (2.44), czyli wyrażenia oznaczonego przez S_4 .

Zauważmy, że przy założeniu $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $\alpha \geq 0$, możemy napisać

$$\begin{aligned} |S_4| &= \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \bar{\partial}_x \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \partial_{t/2} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq \\ &\leq C\tau h^{\frac{3}{2}+\alpha} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left| \bar{\partial}_x \eta_{M+1}^{n-\frac{1}{2}} \right| \left| \partial_{t/2} \eta_M^{n-\frac{1}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Zaznaczmy tutaj, że jest to jedyne miejsce w dowodzie tego *Twierdzenia*, w którym zakładamy, że $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $\alpha \geq 0$.

Pogrupujemy odpowiednio wyrazy otrzymanej nierówności, po czym kolejno, dla każdego iloczynu, zastosujemy *Lemat 11* - str. 172.

$$\begin{aligned} |S_4| &\leq C\tau h^{\frac{3}{2}+\alpha} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{h} \left| \bar{\partial}_x \eta_{M+1}^{n-\frac{1}{2}} \right| \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{h} \left| \partial_{t/2} \eta_M^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq \\ &\leq C\tau h^{\frac{1}{2}+\alpha} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \sqrt{h} \left| \bar{\partial}_x \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right| \sqrt{h} \left| \partial_{t/2} \eta_M^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq \\ &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\| \bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{C^2 \tau h^{1+2\alpha}}{\epsilon} \sum_{n=1}^N \left\| \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2. \quad (2.51) \end{aligned}$$

Podobnie jak wyżej przy szacowaniu S_2 , do oszacowania drugiej sumy prawej strony (2.51) posłużymy się *Twierdzeniem 3* - o zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*. Na mocy tego *Twierdzenia* mamy

$$\begin{aligned} \frac{C^2 \tau h^{1+2\alpha}}{\epsilon} \sum_{n=1}^N \left\| \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 &\leq \frac{C^2 h^{1+2\alpha}}{\epsilon} \max_{n=1, \dots, N} \left\| \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ &\leq \frac{C^2 h^{1+2\alpha}}{\epsilon} \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH} \right) \leq C^2 \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} \right). \end{aligned}$$

Uwzględniając otrzymany wynik w (2.51) otrzymujemy zatem

$$|S_4| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\| \bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} \right). \quad (2.52)$$

Piątą sumę prawej strony (2.44), czyli wyrażenie oznaczone symbolem S_5 , szacujemy w identyczny sposób co S_4 .

Zajmijmy się teraz szóstą sumą prawej strony nierówności (2.44). Rozbijmy tę sumę z *warunku trójkąta* na dwie sumy

$$\begin{aligned} |S_6| &= \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{(2k-1)M}^n \right\} \right| \\ &\leq \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M+1}^{n-\frac{1}{2}} \eta_{(2k-1)M}^n \right| = \\ &= S_{61} + S_{62}. \quad (2.53) \end{aligned}$$

Oszacujemy kolejno wyrażenia oznaczone przez S_{61} , S_{62} .

Zacznijmy od S_{61} . Skorzystajmy z *Lematu 9* - str. 172. Na mocy tego *Lematu* możemy napisać

$$|\eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}}| \leq C \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{H}} \right) \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_{R_k})} \right\}.$$

Przekształćmy S_{61} do postaci

$$\begin{aligned} |S_{61}| &= \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \eta_{(2k-1)M}^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq \\ &\leq \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{H}} \right) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left| \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \right| \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)} + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)} \right\}. \end{aligned}$$

Do powstałej sumy zastosujemy teraz *Lemat 11* - str. 172 i otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned} |S_{61}| &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{\tau^3}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{H} \right) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left| \partial_{t/2} \bar{\partial}_x u_{(2k-1)M}^{n-1} \right|^2. \end{aligned}$$

Korzystając z zależności $K = \frac{L}{H}$ oraz faktów (2.46), dostajemy

$$|S_{61}| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 \right\} + \mathcal{M} \frac{\tau^2}{H^2}.$$

Identyczne oszacowanie otrzymujemy dla wyrażenia S_{62} prawej strony nierówności (2.53). Ostatecznie zatem z nierówności (2.53) mamy

$$|S_6| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \mathcal{M} \frac{\tau^2}{H^2}. \quad (2.54)$$

Sumę oznaczoną S_7 , prawej strony wyrażenia (2.44), szacujemy w ten sam sposób co S_6 .

Przepisujemy teraz nierówność (2.44) uwzględniając oszacowania (2.50), (2.52) i (2.54). Następnie korzystamy z prostej nierówności

$$\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq 2\|\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau^2}{2}\|\partial_{t/2}\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2,$$

i po przeniesieniu odpowiednich wyrazów ostatniej warstwy czasowej na lewą stronę, otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^2}{2} \left\{ \|\partial_{t/2}\eta^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \|\partial_t\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \sum_{n=1}^N \|\partial_t\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \frac{\tau^2}{16}(1-\epsilon\tau) \sum_{n=1}^N \left\{ \|\partial_{t/2}\eta_M^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2}\eta_M^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} - \epsilon\tau \right) \left\{ \|\eta^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^N\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 \right\} + \frac{1}{4}(1-\epsilon\tau) \|\eta^N\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & \quad + \tau(1-\epsilon) \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \|\bar{\partial}_x\eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right\} \leq \\ & \leq \epsilon\tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} \right). \quad (2.55) \end{aligned}$$

Wybieramy w powyższej nierówności $\epsilon \leq \min \left\{ \frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2} \right\}$. Następnie korzystamy z *Lematu Gronwall'a - Lematu 7* str. 171, biorąc

$$\gamma_n = \|\eta^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^N\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\eta^N\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2.$$

Daje to oszacowanie postaci

$$\begin{aligned} & \max_{n=0,\dots,N} \left\{ \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \max_{n=1,\dots,N-1} \tau^2 \left\{ \|\partial_{t/2}\eta^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2}\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \|\bar{\partial}_x\eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right\} \leq \\ & \quad + \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} \right). \quad (2.56) \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrazy $\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2$ i $\|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2$ nie są określone na domknięciu odpowiednich podobszarów. Oszacowania w normach $\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2$ i $\|\eta^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2$ otrzymujemy korzystając z nierówności

$$\|\eta^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq 2\|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + 2\|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$$

oraz

$$\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \leq 2\|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{\tau^2}{2}\|\partial_{t/2}\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + 2\|\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2,$$

których prawe strony zawierają wyrazy oszacowane nierównością (2.56). \square

2.6 Lematy pomocnicze

W tym podrozdziale zawarty został lemat pomocniczy, wykorzystany w dowodach *Twierdzeń 1, 2*.

W poniższym *Lemacie 1* podajemy oszacowanie pochodnych różnicowych względem czasu z połówkowej i pierwszej warstwy czasowej przez odpowiednie wyrazy zawierające jedynie u_0 oraz prawą stronę zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c).

Lemat 1. *Rozwiązania podschematów (2.14.a) i (2.14.b) dla $n = 1$, spełniają oszacowanie*

$$\begin{aligned} & \left\{ \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \tau \left\{ \|\partial_t \bar{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \bar{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left\{ \|\partial_x \bar{\partial}_x u_0\|_{L_h^2(\Omega)}^2 + \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|f^1\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \|\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ, h oraz H .

Dowód. W pierwszej kolejności zajmijmy się wyrazami tezy *Lematu* określonymi na wewnętrznym podobszarze $\overline{\Omega}_{B_k}^h$, gdzie $k = 1, \dots, K-1$. Następnie rozszerzymy otrzymany wynik na brzegowy podobszar $\overline{\Omega}_{B_K}^h$, po czym przeprowadzimy analogiczną analizę dla równań schematu (2.14.a)-(2.14.d) określonych na $\overline{\Omega}_R^h$.

Zauważmy, że dla pododcinka $\overline{\Omega}_{B_k}^h$ równanie (2.14.a) można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \partial_{t/2} U_{(2k-1)M}^0 - \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U_{(2k-1)M+1}^0 = f_{(2k-1)M}^{\frac{1}{2}} + \partial_x \bar{\partial}_x U_{(2k-1)M}^0, \\ \partial_{t/2} U_j^0 - \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0 = f_j^{\frac{1}{2}} + \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0, & j \in \{j : x_j \in \Omega_{B_k}^h\}, \\ \partial_{t/2} U_{2kM}^0 + \frac{\tau}{2h} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U_{2kM}^0 = f_{2kM}^{\frac{1}{2}} + \partial_x \bar{\partial}_x U_{2kM}^0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Do powyższego schematu zastosujemy *metodę nierówności energetycznych*. Dla $j = (2k-1)M, \dots, 2kM$, mnożymy równanie (2.57) przez $h\partial_{t/2}U_j^0$ i sumujemy względem j . Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& h \sum_{j=(2k-1)M}^{2kM} \left| \partial_{t/2} U_j^0 \right|^2 + \\
& -\frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U_{(2k-1)M+1}^0 \partial_{t/2} U_{(2k-1)M}^0 - \frac{\tau h}{2} \sum_{j=(2k-1)M+1}^{2kM-1} \partial_{t/2} \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0 \partial_{t/2} U_j^0 + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \partial_x U_{2kM}^0 \partial_{t/2} U_{2kM}^0 = \\
& = h \sum_{j=(2k-1)M}^{2kM} f_j^{\frac{1}{2}} \partial_{t/2} U_j^0 + h \sum_{j=(2k-1)M}^{2kM} \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0 \partial_{t/2} U_j^0. \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Do drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu lewej strony powyższej równości stosując *wzory sumowania przez części* otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U_{(2k-1)M+1}^0 \partial_{t/2} U_{(2k-1)M}^0 - \frac{\tau h}{2} \sum_{j=(2k-1)M+1}^{2kM-1} \partial_{t/2} \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0 \partial_{t/2} U_j^0 + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \partial_x U_{2kM}^0 \partial_{t/2} U_{2kM}^0 = \frac{\tau h}{2} \sum_{j=(2k-1)M+1}^{2kM} \left| \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U_j^0 \right|^2.
\end{aligned}$$

Możemy zatem przepisać równość (2.58) do postaci

$$\begin{aligned}
& h \sum_{j=(2k-1)M}^{2kM} \left| \partial_{t/2} U_j^0 \right|^2 + \frac{\tau h}{2} \sum_{j=(2k-1)M+1}^{2kM} \left| \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U_j^0 \right|^2 = \\
& = h \sum_{j=(2k-1)M}^{2kM} f_j^{\frac{1}{2}} \partial_{t/2} U_j^0 + h \sum_{j=(2k-1)M}^{2kM} \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0 \partial_{t/2} U_j^0.
\end{aligned}$$

Do prawej strony powyższej równości stosujemy *Lemat 11* - str. 172. Dla odpowiednio małego ϵ daje to oszacowanie dla wyrazów określonych na wewnętrznych podobszarach $\bar{\Omega}_B^h$ postaci

$$\begin{aligned}
& \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{B_k}^h)}^2 + \tau \left\| \partial_{t/2} \bar{\partial}_x U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{B_k}^h)}^2 \leq \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ \left\| f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{B_k}^h)}^2 + \left\| \partial_x \bar{\partial}_x U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{B_k}^h)}^2 \right\}. \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Podobne oszacowanie otrzymujemy dla równań pierwszej warstwy czasowej schematu (2.14.a)-(2.14.d) określonych na skrajnym podobszarze $\Omega_{B_K}^h$.

Sumujemy stronami nierówności (2.59) po wszystkich podobszarach $\Omega_{B_k}^h$ dla $k = 1, \dots, K$. Daje to

$$\left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \tau \left\| \partial_{t/2} \overline{\partial}_x U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \leq \mathcal{M} \left\{ \left\| f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \partial_x \overline{\partial}_x U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\}.$$

Przejdźmy teraz do dowodu analogicznego oszacowania dla wyrazów tezy *Lematu* określonych na $\overline{\Omega}_R^h$. Rozważmy szczegółowo równania naszego schematu określone na wewnętrznym podobszarze $\overline{\Omega}_{R_k}^h$ dla $k = 2, \dots, K$, po czym, podobnie jak wyżej przenieśmy otrzymany wynik na skrajny podobszar $\overline{\Omega}_{R_1}^h$.

Zauważmy że, z równania (2.14.a) dla $j = 2kM$ mamy

$$\partial_{t/2} U_{2kM}^0 - \frac{1}{h} \left(\overline{\partial}_x U_{2kM+1}^0 - \overline{\partial}_x U_{2kM}^{\frac{1}{2}} \right) = f_{2kM}^{\frac{1}{2}},$$

a z równania (2.14.a) dla $n = 1$, w punkcie x_{2kM} mamy

$$\partial_{t/2} U_{2kM}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{h} \left(\overline{\partial}_x U_{2kM+1}^1 - \overline{\partial}_x U_{2kM}^{\frac{1}{2}} \right) = f_{2kM}^1.$$

Odejmijmy stronami dwa powyższe równania. Daje to równanie

$$\partial_{t/2} U_{2kM}^{\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{2kM}^0 - \frac{\tau}{h} \partial_t \overline{\partial}_x U_{2kM+1}^0 = \frac{\tau}{2} f_{2kM}^{\frac{1}{2}}.$$

Podobnie dla $j = (2k+1)M$ dostajemy

$$\partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^{\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^0 + \frac{\tau}{h} \partial_t \overline{\partial}_x U_{(2k+1)M}^0 = \frac{\tau}{2} f_{(2k+1)M}^{\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ dla każdego $x \in \Omega_\Gamma^h$ mamy

$$\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}(x) = 2\partial_t U^0(x) - \partial_{t/2} U^0(x),$$

możemy równanie (2.14.b) dla $n = 1$ przepisać w postaci

$$\begin{cases} 2\partial_t U_{2kM}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h} \partial_t \overline{\partial}_x U_{2kM+1}^0 = \frac{\tau}{2} f_{2kM}^{\frac{1}{2}} + 2\partial_{t/2} U_{2kM}^0 \\ \partial_t U_j^0 - \tau \partial_t \overline{\partial}_x \overline{\partial}_x U_j^1 = f_j^1 + \partial_x \overline{\partial}_x U_j^0 & j \in \{j : x_j \in \Omega_{R_k}^h\}, \\ 2\partial_t U_{(2k+1)M}^{\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h} \partial_t \overline{\partial}_x U_{(2k+1)M}^0 = \frac{\tau}{2} f_{(2k+1)M}^{\frac{1}{2}} + 2\partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Powtarzamy dowód oszacowania (2.59) mnożąc równania schematu (2.60)

przez $h\partial_t U_j^0$, dla $j = 2kM, \dots, (2k+1)M$. Dostajemy

$$\begin{aligned}
2h|\partial_t U_{2kM}^0|^2 + h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} |\partial_t U_j^0|^2 + 2h|\partial_t U_{(2k+1)M}^0|^2 + \frac{\tau h}{2} \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M} |\partial_t \bar{\partial}_x U_j^0|^2 = \\
= h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} f_j^1 \partial_t U_j^0 + h \sum_{j=2kM+1}^{(2k+1)M-1} \partial_x \bar{\partial}_x U_j^0 \partial_t U_j^0 + \\
+ 2h\partial_{t/2} U_{2kM}^0 \partial_t U_{2kM}^0 + 2h\partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^0 \partial_t U_{(2k+1)M}^0 + \\
+ \frac{\tau h}{2} \partial_{t/2} f_{2kM}^{\frac{1}{2}} \partial_t U_{2kM}^0 + \frac{\tau h}{2} \partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{\frac{1}{2}} \partial_t U_{(2k+1)M}^0.
\end{aligned}$$

Stosując *Lemat 11* - str. 172, do prawej strony powyższej równości. Po przeniesieniu odpowiednich wyrazów na lewą stronę dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
(1 - \epsilon) \left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 + \tau \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_{R_k}^h)}^2 \leq \\
\leq \frac{1}{\epsilon} \left\{ \|f^1\|_{L_h^2(\Omega_{R_k}^h)}^2 + \right. \\
\left. + h\tau \left(|\partial_{t/2} f_{2kM}^{\frac{1}{2}}|^2 + |\partial_{t/2} f_{(2k+1)M}^{\frac{1}{2}}|^2 \right) + h \left(|\partial_{t/2} U_{2kM}^0|^2 + |\partial_{t/2} U_{(2k+1)M}^0|^2 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Dla skrajnego podobszaru $\bar{\Omega}_{R_1}^h$ otrzymujemy analogiczne oszacowanie. Sumujemy otrzymane nierówności po $k = 1, \dots, K$. Daje to

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \left\| \bar{\partial}_x \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 \leq \\
\leq \mathcal{M} \left\{ \|f^1\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \|\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}
\end{aligned}$$

Wyraz $\|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$ prawej strony powyższej nierówności szacujemy korzystając z (2.60). Ostatecznie dla równań schematu określonych na $\bar{\Omega}_R^h$ dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \left\| \partial_t \bar{\partial}_x U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 \leq \\
\leq \mathcal{M} \left\{ \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \|f^1\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \tau \|\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_x \bar{\partial}_x U^0\|_{L_h^2(\Omega)}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Pozostaje pokazać oszacowanie dla wyrazu $\|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned}
\|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq 2 \left\{ 4\|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} \leq \\
\leq C \left\{ \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Łącząc (2.60) i (2.61) oraz (2.62) dostajemy *tezę Lematu*. \square

3 Zagadnienie paraboliczne dwuwymiarowe. Metoda elementu skończonego

W tym rozdziale uogólnimy metodę dyskretyzacji wprowadzoną w *Rozdziale 2* na przypadek bardziej ogólnej dekompozycji wielokąta Ω . Dla szerokiej klasy zagadnień początkowo-brzegowych dla równań parabolicznych, zadanych w sformułowaniu uogólnionym i określonych na wielokącie Ω , proponujemy metodę dekompozycji obszaru bazującą na *metodzie elementu skończonego* względem zmiennej przestrzennej i *metodzie różnic skończonych* względem zmiennej czasowej.

Celem, który chcemy w tej części pracy osiągnąć jest przedstawienie przydatności proponowanej dyskretyzacji do obliczeń równoległych dla ogólnych zagadnień parabolicznych. Dla ustalenia uwagi wprowadzimy triangulację złożoną z elementów trójkątnych, ale uzyskane wyniki przenosić się będą na inne rodzaje elementów - np. elementy czworokątne. Przedstawimy i przeanalizujemy tu schemat dyskretyzacji, który przy stosunkowo nieskomplikowanej implementacji, pozwala na bardzo efektywne zrównoleglenie procesu obliczeniowego z jednoczesnym zachowaniem odpowiedniego rzędu zbieżności przy optymalnym doborze parametrów dyskretyzacji.

W *Podrozdziale 3.4* przy odpowiednich założeniach udowodnimy twierdzenia o stabilności proponowanego schematu w *silnych* i *ślabych normach*.

W *Podrozdziale 3.5* udowodnimy twierdzenia o rzędzie zbieżności schematu w *silnych* i *ślabych normach*. Pokazane także zostanie, że przy ustalonej dekompozycji - przy ustalonym parametrze H i przy ustalonym stosunku parametrów dyskretyzacji $\tau/h^2 = const$, rząd zbieżności naszego schematu wynosi $\mathcal{O}(\tau+h)$, czyli jest taki sam jak rząd zbieżności *schematu zamkniętego Eulera*. Zauważmy, że *schemat zamknięty Eulera* ma przy $\frac{\tau}{h^2} = const$ optymalne własności.

3.1 Sformułowanie uogólnione zadania

Rozważamy zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania parabolicznego w postaci uogólnionej:

znaleźć $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$ takie, że

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right)_{L^2(\Omega)} + \mathcal{A}(t; u, \varphi) = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad t \in (0, T) \quad p.w. \quad (3.1.a)$$

$$(u, \varphi)_{L^2(\Omega)} = (u_0, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \varphi \in L^2(\Omega) \quad (3.1.b)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t; u, \varphi) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(x, t) D_i u(x) D_j v(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) D_i u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} c(x, t) u(x) v(x) dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zakładamy, że $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ jest wielokątem, $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$ oraz $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. O funkcjach $a_{i,j}, b_i, c$ dla $i, j = 1, 2$, zakładamy, że są klasy $L^\infty(\Omega \times (0, T])$. Zakładamy również, dla każdego $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$\exists \theta > 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \theta (\xi_1^2 + \xi_2^2). \quad (3.3)$$

Przy przyjętych założeniach zadanie (3.1.a)-(3.1.b) jest dobrze postawione, ma jednoznaczne rozwiązanie i jest stabilne (-patrz np.[17],[19]).

3.2 Metoda elementu skończonego

W poniższym podrozdziale przedstawimy metodę dyskretyzacji rozważanego zagadnienia różniczkowego w sformułowaniu wariacyjnym (3.1.a)-(3.1.b).

Zagadnienie (3.1.a)-(3.1.b) dyskretyzujemy stosując *MRS* względem zmiennej czasowej t i *MES* względem na zmiennej przestrzennej x (-patrz np. [16],[18]). W celu ustalenia uwagi zastosujemy triangulację złożoną z elementów trójkątnych, ale według naszej wiedzy, zaprezentowane tu wyniki dają się łatwo uogólnić na przypadek triangulacji złożonej z elementów innego typu, np. elementów czworokątnych.

W pierwszej kolejności jednak wprowadzimy definicje i oznaczenia potrzebne do sformułowania zadania dyskretnego i jego późniejszej analizy.

Na $[0, T]$, bez zmniejszania ogólności, wprowadzamy siatkę czasową ω^τ o stałym kroku czasowym $\frac{1}{2}\tau$, tzn.

$$\omega^\tau = \left\{ t : t = n\tau, n = 0, \dots, N \right\} \cup \left\{ t : t = \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau, n = 0, \dots, N - 1 \right\}$$

gdzie $T = N\tau$.

Na obszarze Ω wprowadzamy podział na trójkąty e_i , który tworzy triangulację \mathcal{T}^h , tj.

1. $\cup_i e_i = \overline{\Omega}$,
2. dla $i \neq j$ trójkąty e_i i e_j albo mają część wspólną pustą albo mają wspólny wierzchołek lub bok.

Niech h_i oznacza najdłuższy bok trójkąta e_i , zaś $h = \max_i h_i$. Zakładamy także, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf \alpha_i \geq \alpha_0,$$

gdzie α_i jest najmniejszym kątem trójkąta e_i , α_0 stałą dodatnią niezależną od h . Są to standardowe założenia o postaci elementów triangulacji - zobacz [16].

Przez $\bar{\Omega}^h$ oznaczać będziemy zbiór punktów nodalnych wyznaczonych przez elementy triangulacji \mathcal{T}^h , tj. zbiór wierzchołków trójkątów e_i , a przez Ω^h oznaczać będziemy te punkty zbioru $\bar{\Omega}^h$, które nie należą do $\partial\Omega$. Triangulację \mathcal{T}^h często nazywać będziemy dalej *drobną triangulacją*.

Na tak zdefiniowanej triangulacji \mathcal{T}^h definiujemy przestrzeń elementu skończonego w następujący sposób

$$V^h(\Omega) = \left\{ v : v \in C(\bar{\Omega}), \quad v|_{e_i} \in P_1(e_i), \quad v(x) = 0 \text{ dla } x \in \partial\Omega \right\};$$

gdzie $P_1(e_i)$ oznacza zbiór wielomianów zmiennych x_1, x_2 stopnia 1, określonych w elemencie e_i . Dowodzi się, że $V^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, zobacz np. [13]. Symbolem $\varphi_i(x)$ oznaczać będziemy standardową funkcję bazową przestrzeni $V^h(\Omega)$ związaną z węzłem $x_i \in \Omega^h$ (-patrz np. [16]), taką że dla punktów nodalnych $x_j \in \bar{\Omega}^h$ zachodzi

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

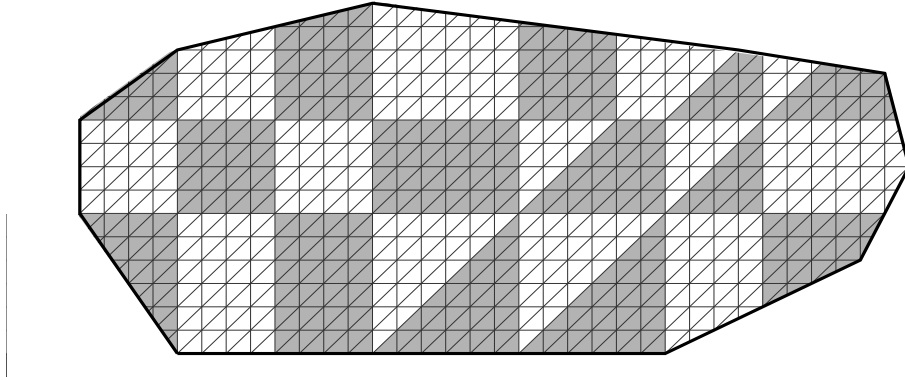
Na tak zdefiniowanej triangulacji \mathcal{T}^h , wprowadzamy *grubą triangulację* \mathcal{T}^H w następujący sposób. Niech $\bar{\Omega} = \bigcup_i \bar{\Omega}_i$, gdzie Ω_i są wielokątami takimi, że krawędzie każdego takiego wielokąta wyznaczone są przez krawędzie trójkątów e_k *drobnej triangulacji* \mathcal{T}^h . Każde dwa takie wielokąty *grubej triangulacji* mogą być albo rozłączne albo posiadać wspólną krawędź albo posiadać wspólny wierzchołek, a liczba ich wierzchołków nie zależy od parametru h triangulacji \mathcal{T}^h . Tak wyznaczone wielokąty nazywać dalej będziemy elementami *grubej triangulacji* \mathcal{T}^H . Elementy triangulacji \mathcal{T}^H dzielimy na dwie grupy w następujący sposób:

1. $\bar{\Omega}_R = \bigcup_{i \in I_R} \bar{\Omega}_{R_i}$, $\bar{\Omega}_B = \bigcup_{i \in I_B} \bar{\Omega}_{B_i}$;
2. $\bar{\Omega}_R \cup \bar{\Omega}_B = \bar{\Omega}$;
3. każde dwa elementy $\bar{\Omega}_{R_p}, \bar{\Omega}_{R_q}$ dla $p, q \in I_R$ oraz każde dwa elementy $\bar{\Omega}_{B_r}, \bar{\Omega}_{B_s}$ $r, s \in I_B$ mogą być albo rozłączne albo mieć wspólny wierzchołek;

4. każde dwa elementy $\overline{\Omega}_{R_p}, \overline{\Omega}_{B_q}$ dla $p \in I_R, q \in I_B$ mogą być albo rozłączne albo mieć wspólną krawędź;

Tak wprowadzona *gruba triangulacja* \mathcal{T}^H definiuje dekompozycję obszaru Ω . Podobszynom nadaliśmy symboliczne kolory *Red*, *Black* podobnie jak np. w [11].

Przykładową dekompozycją wielokąta Ω na trójkąty i czworokąty, przedstawiona została na *Rys. 5*. Kolorem białym oznaczone zostały podobszary Ω_{R_i} , a ciemnym podobszary typu Ω_{B_i} .



Rys. 5

Niech H_k będzie średnicą Ω_k -elementu triangulacji \mathcal{T}^H . Przez H, \mathbf{H} oznaczajmy odpowiednio minimalną i maksymalną spośród średnic wszystkich podobszarów wyznaczających dekompozycję Ω

$$H = \min_{k \in (I_R \cup I_B)} H_k,$$

$$\mathbf{H} = \max_{k \in (I_R \cup I_B)} H_k.$$

Symbolem Γ oznaczajmy tzw. *grubą siatkę*. Definiujemy ją następująco

$$\Gamma = \left\{ \partial\Omega_R \cap \partial\Omega_B \right\} \setminus \partial\Omega, \quad (3.4)$$

natomiast

$$\Gamma^h = \left\{ x \in \Omega^h \wedge x \in \Gamma \right\}, \quad (3.5)$$

oznacza zbiór tych punktów nodalnych z Ω^h , które należą jednocześnie do Γ . Przez $\partial\Omega^h$ rozumiemy zbiór tych punktów Ω^h , które należą do $\partial\Omega$.

Zdefiniujmy podzbiory Ω^h . Niech

$$\overline{\Omega}_R^h = \left\{ x : x \in \Omega^h \wedge x \in \overline{\Omega}_R \right\}, \quad \overline{\Omega}_B^h = \left\{ x : x \in \Omega^h \wedge x \in \overline{\Omega}_B \right\}.$$

Przy tych oznaczeniach niech

$$\Omega_R^h \equiv \overline{\Omega}_R^h \setminus (\Gamma^h \cup \partial\Omega^h), \quad \Omega_B^h \equiv \overline{\Omega}_B^h \setminus (\Gamma^h \cup \partial\Omega^h).$$

Wprowadzamy podprzestrzenie przestrzeni $V^h(\Omega)$ związane z obszarami Ω_R oraz Ω_B .

$$V_R^h(\Omega) = \left\{ v : v \in V^h(\Omega), v(x) = 0 \text{ dla } x \in \Omega_B^h \right\};$$

$$V_B^h(\Omega) = \left\{ v : v \in V^h(\Omega), v(x) = 0 \text{ dla } x \in \Omega_R^h \right\}.$$

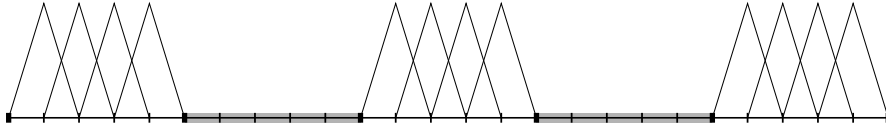
Zauważmy, że część wspólna zdefiniowanych podprzestrzeni jest niepusta. Zbiór nośników funkcji należących do części wspólnej $V_R^h(\Omega) \cap V_B^h(\Omega)$ będziemy oznaczali symbolem Ω_δ . Dodatkowo niech

$$\Omega_{\delta_R} = \Omega_\delta \cap \Omega_R, \quad \Omega_{\delta_B} = \Omega_\delta \cap \Omega_B.$$

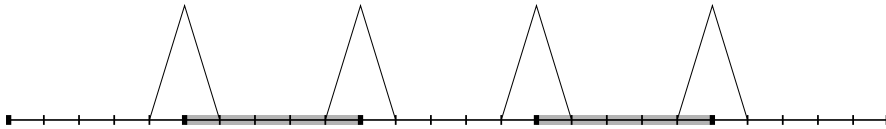
Definiujemy także podprzestrzeń

$$V_\delta^h(\Omega) = \left\{ v : v \in V^h(\Omega), v(x) = 0 \text{ dla } x \in \Omega_R^h \cup \Omega_B^h \right\}.$$

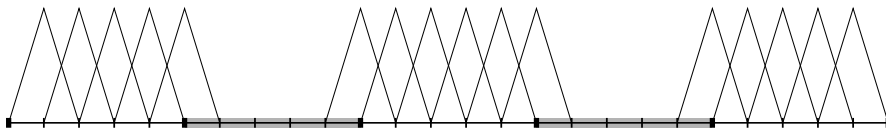
Na Rys. 6, 7, 8 schematycznie, dla przypadku $\Omega = (0, L) \subset \mathcal{R}$, przedstawione zostały funkcje bazowe podprzestrzeni $V_R^h(\Omega)$, $V_\delta^h(\Omega)$ oraz $V_B^h(\Omega)$ przestrzeni $V^h(\Omega)$. Kolorem ciemnym zaznaczony został obszar Ω_B .



Rys. 6
Funkcje bazowe przestrzeni $V_R^h(\Omega)$.



Rys. 7
Funkcje bazowe przestrzeni $V_\delta^h(\Omega)$.



Rys. 8
Funkcje bazowe przestrzeni $V_B^h(\Omega)$.

Wprowadzimy teraz oznaczenia potrzebne do prezentacji schematu i jego późniejszej analizy. Iloczyn skalarny przestrzeni $L^2(\Omega)$ będziemy oznaczali przez

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx.$$

Dyskretnym odpowiednikiem przestrzeni $L^2(\Omega)$ jest $L_h^2(\Omega^h)$ - przestrzeń tych funkcji siatkowych, określonych w węzłach Ω^h , które zerują się w punktach nodalnych zbioru $\partial\Omega^h$ (-patrz np. [16]). Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, normę w tej przestrzeni wyznacza następujący dyskretny iloczyn skalarny

$$(u, v)_{L_h^2(\Omega^h)} = \sum_{x \in \Omega^h} \omega_x u(x)v(x)h^2, \quad \|v\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 = (v, v)_{L_h^2(\Omega^h)},$$

gdzie $\omega_x = \frac{1}{6} \sum_{i \in \mathcal{N}(x)} |\det B_i|$, $\mathcal{N}(x)$ jest zbiorem tych elementów triangulacji \mathcal{T}^h , których wierzchołkiem jest punkt x , a B_i jest macierzą przejścia pomiędzy danym elementem, a elementem regularnym - patrz [3]. Zauważmy, że przy przyjętych założeniach o triangulacji \mathcal{T}^h

$$\forall u, v \in V^h(\Omega) \quad (u, v)_{L_h^2(\Omega^h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Wprowadzamy także dyskretne iloczyny skalarne odpowiadające podprzestrzeniom przestrzeni $L_h^2(\Omega^h) : L_h^2(\Omega_R^h), L_h^2(\Omega_B^h), L_h^2(\bar{\Omega}_R^h), L_h^2(\bar{\Omega}_B^h) :$

$$(v, u)_{L_h^2(\Omega_R^h)} = \sum_{x \in \Omega_R^h} \omega_x u(x)v(x)h^2, \quad (v, u)_{L_h^2(\Omega_B^h)} = \sum_{x \in \Omega_B^h} \omega_x u(x)v(x)h^2,$$

oraz

$$(v, u)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} = \sum_{x \in \bar{\Omega}_R^h} \omega_x u(x)v(x)h^2, \quad (v, u)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} = \sum_{x \in \bar{\Omega}_B^h} \omega_x u(x)v(x)h^2.$$

Podobnie jak dla przestrzeni $L_h^2(\Omega^h)$, wprowadzone iloczyny skalarne wyznaczają odpowiednio normy przestrzeni: $L_h^2(\Omega_R^h), L_h^2(\Omega_B^h), L_h^2(\bar{\Omega}_R^h), L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\Omega_R^h)}, & \|u\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\Omega_B^h)}, \\ \|u\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}, & \|u\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 &= (u, u)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definiujemy także normę dyskretną dla funkcji z podprzestrzeni $V_\delta^h(\Omega)$

$$\|u\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 = \sum_{x \in \Gamma^h} \omega_x |u(x)|^2 h^2. \quad (3.7)$$

Niech także

$$\|u\|_{L_h^2(\Gamma)}^2 = \sum_{x \in \Gamma^h} \omega_x |u(x)|^2 h. \quad (3.8)$$

Używać będziemy następujących oznaczeń dla funkcji ciągłych

$$U((ih_1, jh_2), n\tau) \equiv U_{ij}^n \quad (3.9)$$

i pochodnych różnicowych względem t - zobacz [16]

$$\begin{aligned} \partial_t U_{ij}^n &\equiv \frac{1}{\tau} (U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n), & \partial_t \partial_t U_{ij}^n &\equiv \frac{1}{\tau} (\partial_t U_{ij}^{n+1} - \partial_t U_{ij}^n), \\ \partial_{t/2} U_{ij}^n &\equiv (U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^n) / (t/2), \\ \partial_{t/2} \partial_{t/2} U_{ij}^n &\equiv (\partial_{t/2} U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U_{ij}^n) / (t/2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Zdefiniujmy także następujące operatory obcięcia z przestrzeni $V^h(\Omega)$ do jej podprzestrzeni. Niech

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\overline{R}} : V^h(\Omega) &\longrightarrow V_{\overline{R}}^h(\Omega), & \mathcal{R}_R : V^h(\Omega) &\longrightarrow V_R^h(\Omega), \\ \text{gdzie} & & & \\ (\mathcal{R}_{\overline{R}}v)(x) &= \begin{cases} v(x) & x \in \overline{\Omega}_R^h \\ 0 & x \in \Omega_B^h \end{cases} & (\mathcal{R}_Rv)(x) &= \begin{cases} v(x) & x \in \Omega_R^h \\ 0 & x \in \overline{\Omega}_B^h \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\overline{B}} : V^h(\Omega) &\longrightarrow V_{\overline{B}}^h(\Omega), & \mathcal{R}_B : V^h(\Omega) &\longrightarrow V_B^h(\Omega), \\ \text{gdzie} & & & \\ (\mathcal{R}_{\overline{B}}v)(x) &= \begin{cases} v(x) & x \in \overline{\Omega}_B^h \\ 0 & x \in \Omega_R^h \end{cases} & (\mathcal{R}_Bv)(x) &= \begin{cases} v(x) & x \in \Omega_B^h \\ 0 & x \in \overline{\Omega}_R^h. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ponadto

$$\mathcal{R}_\delta : V^h(\Omega) \longrightarrow V_\delta^h(\Omega),$$

gdzie

$$(\mathcal{R}_\delta v)(x) = \begin{cases} v(x) & x \in \Gamma^h \\ 0 & x \notin \Gamma^h. \end{cases} \quad (3.13)$$

Operatory powyższe działają w sposób następujący. Dane funkcje ciągłe z przestrzeni $v \in V^h(\Omega)$ zachowują wartość we wszystkich punktach nodalnych należących odpowiednio do $\overline{\Omega}_R^h$, Ω_R^h , $\overline{\Omega}_B^h$, Ω_B^h , Γ^h i przyjmują wartość zero w pozostałych punktach nodalnych zbioru $\overline{\Omega}^h$.

3.3 Zadanie dyskretne

W tym podrozdziale wyprowadzimy równania schematu, którego użyjemy do dyskretyzacji zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b) oraz uzasadnimy ich postać na gruncie metod wariacyjnych stosowanych przy rozwiązywaniu zagadnień różniczkowych. Pokażemy i uzasadnimy także przydatność zaproponowanej dyskretyzacji do obliczeń równoległych.

W dalszej części tego rozdziału często będziemy porównywali naszą dyskretyzację ze *schematem zamkniętym Eulera* przy sformułowaniu w postaci wariacyjnej. Przypomnijmy go zatem (patrz np. [16],[24])

dla $n = 1, \dots, N$, znaleźć $U^n \in V^h(\Omega)$, takie że:

$$\begin{cases} (\partial_t U^{n-1}, \varphi)_{L^2(\Omega)} + \mathcal{A}(n\tau; U^n, \varphi) = (f^n, \varphi) & \forall \varphi \in V^h(\Omega) & (3.14.a) \\ (U^0, \varphi) = (u_0, \varphi) & \forall \varphi \in L^2(\Omega). & (3.14.b) \end{cases}$$

W celu przejrzystości prezentacji idei metody założmy przez chwilę, że dla każdego $u, v \in H_0^1(\Omega)$ i $n = 0, \dots, N$

$$\mathcal{A}(n\tau; u, v) \equiv \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} D_i u(x) D_i v(x) dx. \quad (3.15)$$

Założmy także, że Ω jest prostokątem, a dekompozycji wyjściowego obszaru Ω dokonamy w tzw. *pasy* (patrz [11]). Założenia to mają na celu jedynie uproszczenie zapisu i poprawienie przejrzystości argumentacji podczas wprowadzania metody.

Punktem wyjścia naszych rozważań jest idea dyskretyzacji zaproponowana w [2] i rozwijana dalej w [3]. Przypomnijmy ją po krótku.

W pracy [2] sformułowanie klasyczne odpowiadające zagadnieniu (3.1.a)-(3.1.b), przy założeniu (3.15), ma postać

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & x \in \Omega, \quad t \in (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & t \in (0, T] \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aby otrzymać postać uogólnioną, równanie to mnożone jest skalarnie w przestrzeni $L^2(\Omega)$ przez funkcję próbną $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Daje to

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega)} - (\Delta u(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Natępnie do iloczynu skalarnego zawierającego Δu stosujemy *wzory Greena* i po uwzględnieniu jednorodnego warunku brzegowego dostajemy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 (D_i u(\cdot, n\tau), D_i \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)},$$

gdzie symbolem D_i oznaczyliśmy pochodną $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ w *sensie uogólnionym*.

Postępując dalej jak w pracy [2], iloczyn skalarny zawierający pochodne uogólnione $(D_i u, D_i \varphi)_{L^2(\Omega)}$ określony na całym obszarze Ω , rozbijany jest na sumę iloczynów skalarnych $(D_i u, D_i \varphi)_{L^2(\Omega_R)}$, $(D_i u, D_i \varphi)_{L^2(\Omega_B)}$, określonych odpowiednio na Ω_R i Ω_B , tzn.

$$\sum_{i=1}^2 (D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 (D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega_R)} + \sum_{i=1}^2 (D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega_B)}.$$

Zadanie dyskretne w [2] otrzymujemy łącząc ze sobą metodę różnic skończonych i metodę elementu skończonego w odpowiedni sposób. Po zdefiniowaniu przestrzeni dyskretnych na $\bar{\Omega} \times [0, T]$ w sposób analogiczny, jak to miało miejsce w poprzednim *Rozdziale 3*, w każdym kroku czasowym rozwiązywane są dwa kolejne zadania określone tylko na Ω_R i na Ω_B .

Schemat rozważany w tej pracy powstaje w wyniku rozbicia zadania różniczkowego tuż po skalarnym przemnożeniu przez funkcję próbną $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, ale przed całkowaniem przez zastosowaniem *wzrorów Greena*. Podobnie jak przy wyprowadzeniu metody dyskretyzacji z pracy [2], po skalarnym przemnożeniu odpowiedniej postaci klasycznej zagadnienia przez funkcję próbną $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ na n -tej warstwie czasowej, otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega)} - (\Delta u(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)},$$

po czym przedstawiamy drugi iloczyn skalarny w postaci sumy

$$(\Delta u(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega_R)} + (\Delta u(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega_B)}$$

i całkujemy przez części każdy ze składników powyższej sumy z osobna. Daje to

$$\begin{aligned} & - (\Delta u(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)} = \\ & = \sum_{i=1}^2 (D_i u(\cdot, n\tau), D_i \varphi)_{L^2(\Omega_R)} - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_R}(x, n\tau) \varphi(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^2 (D_i u(\cdot, n\tau), D_i \varphi)_{L^2(\Omega_B)} - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_B}(x, n\tau) \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie η_R, η_B są zewnętrznymi wersorami normalnymi dla odpowiednich Ω_{R_i} i Ω_{B_j} w danym punkcie $x \in \Gamma$ - pamiętamy tu, że dokonaliśmy dekompozycji wyjściowego prostokąta Ω na *pasy*. Oczywiście wyrazy określone na Γ -

odpowiednie całki z pochodnych normalnych, dają w sumie zero, jednak my nadal będziemy je trzymali w równaniu.

Zauważmy zatem, że jeśli wyrazy $\frac{\partial u}{\partial \eta_R}(x, n\tau)$ i $\frac{\partial u}{\partial \eta_B}(x, n\tau)$ byłyby znane dla $\forall x \in \Gamma^h$ w momencie obliczania wartości funkcji u^n , to zadanie znaleźć $u \in (\cdot, n\tau) \in H_0^1(\Omega)$, takie że

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 (D_i u(\cdot, n\tau), D_i \varphi)_{L^2(\Omega)} = \\ & = (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

można próbować rozbić na dwie grupy niezależnych zadań

dla każdego $i = 1, \dots, I_R$ znaleźć $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega_{R_i})$ takie, że

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_{R_i})} + \sum_{i=1}^2 (D_i u(\cdot, n\tau), D_i \varphi)_{L^2(\Omega_{R_i})} = \\ & = (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega_{R_i})} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_B}(x, n\tau) \varphi(x) dx, \\ & \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega_{R_i}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

oraz

dla każdego $j = 1, \dots, I_B$ znaleźć $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega_{B_j})$ takie, że

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_{B_j})} + \sum_{i=1}^2 (D_i u(\cdot, n\tau), D_i \varphi)_{L^2(\Omega_{B_j})} = \\ & = (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega_{B_j})} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_R}(x, n\tau) \varphi(x), \\ & \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega_{B_j}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Zauważmy, że sumując stronami równania (3.19) i (3.20) otrzymujemy równania (3.18) ponieważ

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_B}(x, n\tau) \varphi(x) dx, + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta_R}(x, n\tau) \varphi(x) = 0.$$

Wypisane wyżej równania (3.19)-(3.20) stanowią punkt wyjścia do stworzenia schematu użytego przez nas do dyskretyzacji zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b).

Zastanówmy się nad korzyściami z zaproponowanego wyżej podejścia w ujęciu obliczeń równoległych.

Zauważmy, że jeśli po odpowiedniej dyskretyzacji, np. takiej jak w [2], chcielibyśmy znaleźć rozwiązanie przybliżone dla (3.18) za pomocą wspomnianego wyżej *schematu zamkniętego Eulera*, to jego wyznaczenie na każdej

warstwie czasowej, sprowadziłyby się do rozwiązania układu równań algebraicznych z macierzą pięciodiagonalną wymiaru $\dim(V^h(\Omega)) \times \dim(V^h(\Omega))$ - przypomnijmy, że do rozważań przyjęliśmy prostokątny obszar Ω .

W przypadku zadań (3.19)-(3.20), po wprowadzeniu tej samej dyskretyzacji, wyznaczenie odpowiedniego rozwiązania przybliżonego dla $u(x, n\tau)$, sprowadza się do rozwiązania zadania na podobszarze Ω_R oraz i podobnego zadania na podobszarze Ω_B . Przy podziale prostokąta Ω na $2K$ naprzemian położonych *pasków* typu *Red*, *Black*, zadania te wymagają rozwiązania układów równań z macierzami pięciodiagonalnymi wymiaru $\frac{\dim(V^h(\Omega))}{2K} \times \frac{\dim(V^h(\Omega))}{2K}$. W tym przypadku obszary tego samego typu były albo rozłączne. Fakt ten umożliwia rozseparowanie pojedynczego zadania określonego na Ω_R czy Ω_B na K podzadań określonych na podobszarach tego samego typu - odpowiednio $\Omega_{R_i}, \Omega_{B_j}$ dla $i, j = 1, \dots, K$.

Niestety, w momencie obliczania $u(x, n\tau)$, pochodne normalne $\frac{\partial u}{\partial \eta_R}(x, n\tau)$ i $\frac{\partial u}{\partial \eta_B}(x, n\tau)$ w punktach $x \in \Gamma^h$ nie są znane. W pracy [2] w odpowiednich schematach tych wyrazów nie ma. Główną ideą, na której bazuje proponowana przez nas dyskretyzacja i jednocześnie modyfikacja względem schematu rozważanego w [2], jest aproksymacja w punktach $x \in \Gamma^h$ pochodnych normalnych $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, n\tau)$ odpowiednimi pochodnymi normalnymi z poprzednio obliczonej warstwy czasowej, tzn. $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, (n-1)\tau)$.

W każdym kroku czasowym rozwiązania przybliżonego zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b) poszukiwać będziemy rozwiązując naprzemian niezależne zadania na Ω_R i Ω_B . Na obszarze $\bar{\Omega}_R$ będziemy poszukiwali aproksymacji zagadnienia wyjściowego na pełnych warstwach czasowych, tzn. $t \in \{\tau, 2\tau, \dots, n\tau\}$, natomiast na obszarze $\bar{\Omega}_B$ na połówkowych warstwach czasowych, tzn. $t \in \{\frac{1}{2}\tau, \frac{3}{2}\tau, \dots, (N - \frac{1}{2})\tau\}$. Ponieważ w punktach $x \in \Gamma^h$ rozwiązanie przybliżone jest liczone co pół kroku czasowego, co pół kroku następować będzie wymiana informacji pomiędzy obszarami, w tych właśnie punktach. Także co pół kroku czasowego, uaktualniana będzie również wartość różnicowej pochodnej w punktach $x \in \Gamma^h$.

W odróżnieniu od schematu przedstawionego w [2] i [3], rozważana tutaj dyskretyzacja uwzględnia aproksymacje pochodnych normalnych na brzegach odpowiednich podobszarów. Wprowadzając aproksymację pochodnych normalnych, spodziewamy się podwyższenia rzędu lokalnej aproksymacji względem schematu proponowanego w [2] a także [3] a zatem podwyższenia rzędu zbieżności. Wprowadzenia aproksymacji pochodnych normalnych na brzegach podobszarów powoduje jednak, że proponowany przez nas schemat wymaga bardziej skomplikowanej analizy niż [3].

Zajmijmy się uogólnieniem sytuacji rozważonej wyżej. Rozważmy implementację naszego schematu w przypadku wielokątnego obszaru Ω , przy

dekompozycji opartej o pierwotnie zdefiniowaną *grubą triangulację* \mathcal{T}^H . Definiując *grubą triangulację* wymagaliśmy, żeby obszary tego samego typu były albo rozłączne albo miały wspólne tylko wierzchołki. Fakt ten umożliwia rozseparowanie pojedynczego zadania określonego na Ω_R czy Ω_B na szereg podzadań określonych na podobszarach tego samego typu - odpowiednio $\Omega_{R_i}, \Omega_{B_j}$ dla $i \in I_R, j \in I_B$. Istnieje cała klasa algorytmów - zobacz np. [11], [25], pozwalająca na rozbitcie zadania określonego na *słabo ze sobą powiązanych* podobszarach Ω_{R_i} dla $i \in I_R$, na I_R niezależnych zadań, z których każde jest określone tylko na jednym z podobszarów Ω_{R_i} . Rozbitcie takie otrzymywane jest przeważnie przez eliminacje w pierwszej fazie obliczeń niewiadomych z wnętrza podobszarów Ω_{R_i} , a następnie rozwiązanie globalnego układu równań z niewiadomymi tylko w punktach Γ^h , które są wierzchołkami elementów triangulacji \mathcal{T}^H . Podobnie jest oczywiście w przypadku równań określonych na podobszarach Ω_B .

Zanim przedstawimy zadanie dyskretne, wprowadźmy konieczne do jego opisu oznaczenia. Niech

$$\mathcal{A}(n\tau; u, v) \equiv \mathcal{A}^n(u, v) \quad n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \left(N - \frac{1}{2}\right), N.$$

Definiujemy także rozbitcie

$$\mathcal{A}^n(u, v) = \mathcal{A}_R^n(u, v) + \mathcal{A}_B^n(u, v), \quad (3.21)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^n(u, v) = & \int_{\Omega_R} \sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(x, t)(n\tau, x) D_i u(x) D_j v(x) dx + \\ & + \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) D_i u(x) v(x) dx + \int_{\Omega_R} c(x, t) u(x) v(x) dx, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B^n(u, v) = & \int_{\Omega_B} \sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}(t, x)(n\tau, x) D_i u(x) D_j v(x) dx + \\ & + \int_{\Omega_B} \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) D_i u(x) v(x) dx + \int_{\Omega_B} c(x, t) u(x) v(x) dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Oczywiście równość (3.21) zachodzi dla $\forall u, v \in V^h(\Omega)$, bowiem $V^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

Wprowadźmy także *pochodną formy* dwuliniowej $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$. Niech dla $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \left(N - \frac{1}{2}\right), N$ oraz dla każdego $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\partial_t[\mathcal{A}^n](u, v) \equiv \frac{1}{\tau} \left(\mathcal{A}^{n+1}(u, v) - \mathcal{A}^n(u, v) \right). \quad (3.24)$$

Analogicznie definiować będziemy $\partial_{t/2}[\mathcal{A}^n]$ oraz $\partial_t[\mathcal{A}_R^n]$, $\partial_{t/2}[\mathcal{A}_R^n]$, $\partial_t[\mathcal{A}_B^n]$ i $\partial_{t/2}[\mathcal{A}_B^n]$. Pochodne te są dobrze zdefiniowane, bowiem założyliśmy, że współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}^n(\cdot, \cdot) : a_{ij}, b_i, c$ są ciągłe.

Wprowadźmy także dla $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in V^h(\overline{\Omega}_R)$ następujący formy dwuliniowe, którego celem będzie aproksymacja całek zawierających odpowiednie pochodne normalne. Niech dla $n = 0, \dots, N$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_R^n &: H_0^1(\Omega) \times V_\delta^h(\Omega) \longrightarrow \mathcal{R} \\ \hat{\mathcal{A}}_R^n(u, v) &\equiv \mathcal{A}_R^n(u, \mathcal{R}_\delta(v)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Podobnie wprowadzamy dla $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in V^h(\overline{\Omega}_B)$ i $n = 0, \dots, N - 1$ formy dwuliniowe

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_B^{n+\frac{1}{2}} &: H_0^1(\Omega) \times V_\delta^h(\Omega) \longrightarrow \mathcal{R} \\ \hat{\mathcal{A}}_B^{n+\frac{1}{2}}(u, v) &\equiv \mathcal{A}_B^{n+\frac{1}{2}}(u, \mathcal{R}_\delta(v)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Form dwuliniowych zdefiniowanych wyżej użyjemy do *aproksymacji pochodnych normalnych* na brzegach odpowiednich podobszarów. Zwróćmy uwagę, że formy te określone są jedynie na odpowiednio Ω_{δ_R} i Ω_{δ_B} .

Niech także

$$\begin{aligned} (f^n, \varphi)_{L^2(\Omega)} &= (f(\cdot, n\tau), \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \text{dla } n = 1, \dots, N, \\ (f^{n+\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega)} &= \left(f\left(\cdot, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right), \varphi \right)_{L^2(\Omega)} \quad \text{dla } n = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Wprowadźmy również pochodne różnicowe postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_t U^n(x) &= \begin{cases} (U^{n+1}(x) - U^{n+\frac{1}{2}}(x))/\tau & x \notin \Gamma^h \\ (U^{n+1}(x) - U^{n+\frac{1}{2}}(x))/(\tau/2) & x \in \Gamma^h \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 0 \\ \tilde{\partial}_t U^{n-\frac{1}{2}}(x) &= \begin{cases} (U^{n+\frac{1}{2}}(x) - U^n(x))/\tau & x \notin \Gamma^h \\ (U^{n+\frac{1}{2}}(x) - U^n(x))/(\tau/2) & x \in \Gamma^h. \end{cases} \quad \text{dla } n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zauważmy, że w powyższych definicjach odpowiednie pochodne różnicowe w punktach nodalnych należących do wnętrza podobszarówbrane są o pełen krok czasowy, natomiast w punktach nodalnych $x \in \Gamma^h$ pochodne te to ilorazy różnicowebrane o pół kroku czasowego.

Rozwiązania przybliżonego zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b) poszukiwać będziemy za pomocą następującego schematu

znaleźć $U^{\frac{1}{2}} \in V_B^h(\Omega)$, takie że:

$$\begin{cases} \left(\partial_{t/2} U^0, \varphi \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = (f^{\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \\ U^{\frac{1}{2}}(x) = U^0(x) \quad x \in \Omega_R^h \end{cases} \quad \forall \varphi \in V_B^h(\Omega) \quad (3.29.a)$$

dla $n = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \text{znaleźć } U^n \in V_R^h(\Omega), \text{ takie że:} \\ \left(\tilde{\partial}_t U^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(U^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(U^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = (f^n, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} \\ U^n(x) = U^{n-\frac{1}{2}}(x) \quad x \in \Omega_B^h \end{cases} \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega) \quad (3.29.b)$$

$$\begin{cases} \text{znaleźć } U^{n+\frac{1}{2}} \in V_B^h(\Omega), \text{ takie że:} \\ \left(\tilde{\partial}_t U^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \mathcal{A}_B^{n+\frac{1}{2}}(U^{n+\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^n(U^n, \varphi) = (f^{n+\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \\ U^{n+\frac{1}{2}}(x) = U^n(x) \quad x \in \Omega_R^h \end{cases} \quad \forall \varphi \in V_B^h(\Omega) \quad (3.29.c)$$

$$\left(U^0, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega^h)} = (u_0, \varphi)_{L_h^2(\Omega^h)} \quad \forall \varphi \in V^h(\Omega) \quad (3.29.d)$$

Jedyną różnicą pomiędzy schematem prezentowanym w [2] i (3.29.a)-(3.29.d), stanowią trzecie wyrazy lewych stron równań (3.29.a), (3.29.b), (3.29.c), czyli odpowiednio wyrazy $\hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi)$, $\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(U^{n-\frac{1}{2}}, \varphi)$, $\hat{\mathcal{A}}_R^n(U^n, \varphi)$. Stanowią one wprowadzone przez nas aproksymacje pochodnych normalnych. Zauważmy, że na danej warstwie czasowej są to wyrazy znane, więc w procesie obliczeniowym stanowiąc będą prawe strony odpowiednich układów równań algebraicznych.

Zauważmy, że każdy z podschematów (3.29.a)-(3.29.d) ma jednoznaczne rozwiązanie, bowiem macierze odpowiednich układów równań algebraicznych powstałych w wyniku dyskretyzacji są dodatnio określone. Zauważym ponadto, że $\tilde{\partial}_t U^n(x) \equiv 0$ dla $x \in \Omega_B^h$ oraz $\tilde{\partial}_t U^{n+\frac{1}{2}}(x) \equiv 0$ dla $x \in \Omega_R^h$. Przyjęta przez nas definicja pochodnych różnicowych względem czasu w (3.28) powoduje, że schemat (3.29.a)-(3.29.d) jest *schematem dwuwarstwowym*, poza rozcięciem Γ , na którym jest *trójwarstwowy* (-patrz np [16]). Taka definicja pochodnych różnicowych po t, zapewnia także wymianę informacji na brzegach

sąsiadujących podobszarów co pół kroku czasowego.

Implementacja schematu (3.29.a)-(3.29.d) wygląda następująco. Niech dane będzie $U^{n-\frac{1}{2}}(x)$ dla każdego $x \in \bar{\Omega}^h$. Zauważmy, że poszukiwana funkcja $U^n(x)$ jest dana dla każdego $x \in \Omega_B^h$, ponieważ na mocy (3.29.b) jest równa $U^{n-\frac{1}{2}}(x)$ i zadanie jej wyznaczenia sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego układu równań odpowiadających obszarowi Ω_R . Konstrukcja *grubej triangulacji* \mathcal{T}^H , zapewnia między innymi *słabe powiązania* obszarów tego samego typu, tzn. dwa obszary typu *Red* lub typu *Black* mogą być albo rozłączne albo posiadać wspólny wierzchołek. Konsekwencją tego jest fakt, że zadania określone na obszarze Ω_R są *słabo ze sobą powiązane* - jedynie poprzez niewiadome w wierzchołkach elementów *grubej triangulacji* \mathcal{T}^H i można to zadanie rozbić na szereg podzadań określonych na poszczególnych podobszarach Ω_i^R .

Problem ten może być rozwiązany na przykład *metodą blokowych eliminacji Gaussa*, w których jako pierwsze obliczane są z globalnego układu równań wartości $U^n(x)$ w wierzchołkach *grubej triangulacji* \mathcal{T}^H , a następnie - lokalnie obliczane są wartości $U^n(x)$ we wnętrzach odpowiednich podobszarów. Jeden z wariantów takiego algorytmu został opisany między innymi w [16] - patrz *Algorytm z macierzą pojemnościową*. Wiele innych wariantów rozwiązywania tego typu problemów można znaleźć np. w [11], [21] i [25] - patrz *metody strukturalne* w podanych pozycjach.

Po wyznaczeniu funkcji U^n , w następnym półkrokukroku czasowym analogicznie wyznaczamy funkcję $U^{n+\frac{1}{2}}(x)$ z równania (3.29.c).

Zaproponowany schemat bardzo dobrze nadaje się zatem do obliczeń równoległych. Poprzez specjalną konstrukcję *grubej triangulacji* pojedynczy półkrok czasowy może być zrealizowany niemal równoległe - modulo wyznaczenie niewiadomych w wierzchołkach elementów \mathcal{T}^H .

Rozważmy sytuację w której $|I_R| = |I_B| = K$ i posiadamy komputer wyposażoną w K procesorów. W pierwszym półkroku czasowym, K procesorów wykonuje obliczenia na K podobszarach Ω_R , a w następnym K procesorów wykonuje obliczenia na K podobszarach Ω_B . W ten sposób, po dwóch taktach komputera wieloprocessorowego, zaczynając od $U^{n-\frac{1}{2}}$ mamy obliczoną funkcję $U^{n+\frac{1}{2}}$.

3.4 Analiza stabilności

W podrozdziale tym zajmiemy się analizą stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d). Sformułowane i udowodnione zostaną twierdzenia o stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w różnych normach : *słabych* - standardowo używanych przy tego typu zadaniach (patrz np. [16],[18]) oraz normach *silnych* -

związanych z pochodnymi względem czasu rozwiązań rozważanego schematu. *Twierdzenia 5 i 6* są uogólnieniem *Twierdzeń 1 i 2*, które zostały udowodnione w *Podrozdziale 2.4* na przypadek ogólnej dyskretyzacji bazującej na sformułowaniu wariacyjnym ogólnego zagadnienia parabolicznego.

W dalszej części pracy zakładać będziemy, że współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; \cdot, \cdot)$ oprócz warunków wymienionych przy sformułowaniu zadania w postaci uogólnionej - patrz str. 49, spełniają dodatkowo następujące założenia

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dla każdego } (x, t) \in \Omega \times [0, T]: \\ |a_{i,j}(x, t)| \leq a_{\max}, \quad |b_i(x, t)| \leq b_{\max}, \quad |c(x, t)| \leq c_{\max}, \\ \left| \frac{\partial a_{i,j}}{\partial t}(x, t) \right| \leq \tilde{a}_{\max}, \quad \left| \frac{\partial b_i}{\partial t}(x, t) \right| \leq \tilde{b}_{\max}, \quad \left| \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \right| \leq \tilde{c}_{\max}, \\ \left| \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x}(x, t) \right| \leq \check{a}_{\max}, \\ \text{dla } i, j = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3.30)$$

3.4.1 Silne normy

Sformułujemy i udowodnimy teraz następujące *Twierdzenie 5* o bezwarunkowej stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*, które jest odpowiednikiem *Twierdzenia 1* z *Podrozdziału 2.4.1*.

Twierdzenie 5 (Silne normy). *Niech $u_0 \in H^2(\Omega)$ i współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30). Wtedy istnieje takie τ_0 , że dla $\tau \leq \tau_0$ rozwiązania schematu (3.29.a)-(3.29.d) spełniają następujące oszacowanie*

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \|\partial_{t/2} f^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & \left. + \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ , h oraz H .

Uwaga 8. W przypadku tak ogólnego równania parabolicznego i przy przyjętych założeniach o regularności formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; \cdot, \cdot)$, warunek $\tau \leq \tau_0$ jest warunkiem naturalnym. Przy podobnych założeniach standardowy schemat zamknięty Eulera, do bezwarunkowej stabilności również wymaga spełnienia warunku $\tau \leq \tau_0$ - patrz prace [6] i [7]. Jeśli dodatkowo założymy, że dla każdego $t \in [0, T]$ współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; u, v)$ są niezależne od czasu t , tzn. $\mathcal{A}(t; u, v) \equiv \mathcal{A}(u, v)$, oraz że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $v \in H_0^1(\Omega)$ mamy $C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}(v, v)$, to do stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w silnych normach, nie będzie konieczne założenie $\tau \leq \tau_0$.

Dowód. W dowodzie powyższego Twierdzenia, które jest uogólnieniem Twierdzenia 1, badana jest stabilność schematu powstałego z (3.29.a)-(3.29.d), w wyniku odjęcia od siebie stronami odpowiednich równań określonych na sąsiednich warstwach czasowych.

W pierwszej kolejności skoncentrujemy się na równaniach określonych na $\overline{\Omega}_R$. Następnie przeniesiemy otrzymane wyniki na równania rozważanego schematu określone na $\overline{\Omega}_B$.

Zauważmy, że odejmując stronami równanie (3.29.b) na n -tej warstwie i (3.29.c) na $(n - \frac{1}{2})$ -ej warstwie czasowej, dla $\varphi \in V_\delta^h(\Omega)$ dostajemy

$$\begin{aligned} & \left(\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \hat{\mathcal{A}}_R^n(U^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(U^{n-1}, \varphi) = \\ & = \frac{\tau}{2} (\partial_{t/2} f^{n-\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_\delta)} \quad \forall \varphi \in V_\delta^h(\Omega), \end{aligned} \quad (3.31)$$

bowiem dla każdego $\varphi \in V_\delta^h(\Omega)$ zachodzi tożsamość $\mathcal{A}_R^n(u, \varphi) \equiv \hat{\mathcal{A}}_R^n(u, \varphi)$ - patrz definicje form dwuliniowych $\mathcal{A}_R^n(\cdot, \cdot)$ i $\hat{\mathcal{A}}_R^n(\cdot, \cdot)$ - str. 61.

Podobnie, odejmując stronami (3.29.b) na n -tej warstwie czasowej i (3.29.b) na $(n - 1)$ -ej warstwie czasowej, dla $\varphi \in V_R^h(\Omega)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(U^n, \varphi) - \mathcal{A}_R^{n-1}(U^{n-1}, \varphi) = \\ & = \tau (\partial_t f^{n-1}, \varphi)_{L^2(\Omega_R)} \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Zauważmy, że $\mathcal{A}_R^n(u, \varphi)$ możemy przedstawić w następujący sposób

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^n(u, \varphi) &= \mathcal{A}_R^n(u, \mathcal{R}_R(\varphi)) + \mathcal{A}_R^n(u, \mathcal{R}_\delta(\varphi)) = \\ &= \mathcal{A}_R^n(u, \varphi_R) + \hat{\mathcal{A}}_R^n(u, \varphi_\delta), \\ \varphi &= \varphi_R + \varphi_\delta, \quad \varphi_R \in V_R^h(\Omega), \quad \varphi_\delta \in V_\delta^h(\Omega). \end{aligned}$$

Korzystając z tego zapisujemy (3.31) i (3.32) jako jedno równanie określone

dla każdego $\varphi \in V_R^h(\Omega)$

$$\begin{aligned}
& \left(\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(U^n, \varphi) - \mathcal{A}_R^{n-1}(U^{n-1}, \varphi) = \\
& = \begin{cases} \tau \left(\partial_t f^{n-1}, \varphi \right)_{L^2(\Omega_R)} & \varphi \in V_R^h(\Omega) \\ \frac{\tau}{2} \left(\partial_{t/2} f^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L^2(\Omega_\delta)} - \left(\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} & \varphi \in V_\delta^h(\Omega). \end{cases} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Zbadajmy teraz stabilność otrzymanego schematu. W tym celu wybieramy w (3.33) $\varphi = \partial_t U^{n-1}$ i korzystamy z tożsamości

$$\begin{aligned}
& \left(\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}, \partial_t U^{n-1} \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} = \\
& = \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Pozwala to przekształcić schemat (3.33) do postaci

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \\
& \quad + \left(\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U^{n-1}, \partial_t U^{n-1} \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& \quad + \mathcal{A}_R^n(U^n, \partial_t U^{n-1}) - \mathcal{A}_R^{n-1}(U^{n-1}, \partial_t U^{n-1}) = \\
& = \tau \left(\partial_t f^{n-1}, \mathcal{R}_R(\partial_t U^{n-1}) \right)_{L^2(\Omega_R)} + \frac{\tau}{2} \left(\partial_{t/2} f^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t U^{n-1}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Zauważmy następnie, że dla każdego $x \in \Gamma^h$ zachodzi

$$\partial_t U^{n-1}(x) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}(x) + \partial_{t/2} U^{n-1}(x) \right\}. \quad (3.36)$$

Dla $n \geq 2$ dostajemy zatem z równania (3.35) następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-1} - \partial_t U^{n-2}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \quad + \mathcal{A}_R^n(U^n, \partial_t U^{n-1}) - \mathcal{A}_R^{n-1}(U^{n-1}, \partial_t U^{n-1}) = \\
& = \tau \left(\partial_t f^{n-1}, \mathcal{R}_R(\partial_t U^{n-1}) \right)_{L^2(\Omega_R)} + \frac{\tau}{4} \left(\partial_{t/2} f^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t U^{n-1}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \leq \\
& \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right\} + \epsilon \tau \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \\
& \quad + \epsilon \tau \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Ostatnią nierówność otrzymaliśmy stosując kolejno *Lematy 11* i *12* - str. 172. Na mocy tych *Lematów* mamy bowiem

$$\begin{aligned} & \|\partial_t U^{n-1}\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 \leq C \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq \\ & \leq 2C \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} \leq \\ & \leq 2C \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy oszacowanie dla równań określonych na $\overline{\Omega}_B$ i $n > 2$. Dowód tego oszacowania jest podobny do dowodu (3.37). Tym razem, w pierwszej kolejności odejmujemy od siebie stronami równania (3.29.c) na $(n - \frac{1}{2})$ -ej warstwie czasowej i (3.29.b) na $(n - 1)$ -ej warstwie czasowej by uzyskać równanie dla funkcji $\varphi \in V_\delta^h(\Omega)$. Następnie, aby otrzymać równanie określone dla funkcji $\varphi \in V_B^h(\Omega)$, odejmujemy stronami równania (3.29.c) określone odpowiednio na $(n - \frac{1}{2})$ -ej i $(n - \frac{3}{2})$ -ej warstwie czasowej. Postępując dalej jak przy dowodzie (3.37) dostajemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-\frac{5}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}} - \partial_t U^{n-\frac{5}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\ & + \tau \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & + \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(U^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t U^{n-\frac{3}{2}}) - \mathcal{A}_B^{n-\frac{3}{2}}(U^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t U^{n-\frac{3}{2}}) \leq \\ & \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right\} + \epsilon \tau \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 + \\ & + \epsilon \tau \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Dla $n = 2$ otrzymujemy nieco inne oszacowanie. Jest to spowodowane różnicą pomiędzy równaniami (3.29.a) i (3.29.c). Zauważmy, że w punktach Ω_B^h w pierwszym z wyżej wymienionych równań, pochodna rozwiązania dyskretnego względem czasu to $\partial_{t/2} U^0$, czyli iloraz różnicowy o pół kroku czasowego, natomiast na kolejnych warstwach czasowych mamy już odpowiedni iloraz różnicowy brany o pełen krok czasowy. Odpowiednik (3.38) dla $n = 2$, to

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\partial_t U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t U^{\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & + \mathcal{A}_B^{\frac{3}{2}}(U^{\frac{3}{2}}, \partial_t U^{\frac{1}{2}}) - \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \partial_t U^{\frac{1}{2}}) \leq \\ & \leq \frac{\tau}{\epsilon} \left\{ \|\partial_t f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 + \|\partial_{t/2} f^1\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right\} + \epsilon \tau \|\partial_t U^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 + \\ & + \epsilon \tau \left\{ \|\partial_{t/2} U^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Dodajmy teraz stronami otrzymane wyżej nierówności, rozróżniając dwa przypadki $n = 2$ i $n > 2$.

W przypadku gdy $n = 2$ dodajemy stronami nierówności (3.37) i (3.39), zaś dla $n > 2$ dodajemy stronami nierówności (3.37) i (3.38).

Tak powstałe nierówności sumujemy następnie stronami dla $n = 2, \dots, N$.

Po redukcji wyrazów podobnych daje to oszacowanie postaci

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_t U^{N-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{N-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \sum_{n=2}^N \left\{ \mathcal{A}_R^n(U^n, \partial_t U^{n-1}) - \mathcal{A}_R^{n-1}(U^{n-1}, \partial_t U^{n-1}) \right\} + \\
& \quad + \sum_{n=2}^N \left\{ \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(U^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t U^{n-\frac{3}{2}}) - \mathcal{A}_B^{n-\frac{3}{2}}(U^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t U^{n-\frac{3}{2}}) \right\} \leq \\
& \quad \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{\tau}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{\tau}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Zajmijmy się oszacowaniem niektórych wyrazów otrzymanego wyrażenia. W tym celu zapiszmy nierówności (3.40) w symbolicznej postaci

$$L + S_1 + S_2 \leq P, \tag{3.41}$$

gdzie symbolem L oznaczyliśmy trzy pierwsze wyrazy lewej strony (3.40) objęte nawiasami klamrowymi, zaś S_1 i S_2 oznaczają kolejne sumy lewej strony. Symbolem P oznaczyliśmy całą prawą stronę (3.40).

Przy wprowadzonych oznaczeniach zastosujemy *Lemat 2* - str. 95. Dodatkowo przenosimy wyrazy ostatniej warstwy czasowej tj.

$$\|\partial_t U^{N-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2, \|\partial_t U^{N-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2, \|\partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2,$$

na lewą stronę nierówności.

Wybieramy odpowiednio małe τ , tak żeby

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{\epsilon} (b_{\max}^2 + c_{\max} + \epsilon) \right) \geq \frac{1}{4}.$$

Takie postępowanie daje

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left\{ \|\partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_t U^{N-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{N-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau (\theta - \epsilon) \sum_{n=2}^N \left\{ \left| \partial_t U^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \left| \partial_t U^{n-\frac{3}{2}} \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^{N-1} \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \right. \\
& \quad + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \\
& \quad + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \\
& \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left| U^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \left\| U^{n-1} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + \left| U^{n-\frac{3}{2}} \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \left\| U^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\} \right\}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Następnie, podobnie jak w końcowej części dowodu *Twierdzenia 1*, trzykrotnie stosujemy *nierówność Gronwall'a - Lemat 7*, str. 171. Za pierwszym razem w *nierówności Gronwall'a* bierzemy

$$\gamma_n = \|\partial_t U^{N-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2,$$

za drugim

$$\gamma_n = \|\partial_t U^{N-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2.$$

Ostatni raz stosujemy *nierówność Gronwall'a* z

$$\gamma_n = \|\partial_{t/2} U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2.$$

Daje to oszacowanie postaci

$$\begin{aligned}
& \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\
& + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|U^{n-1}\|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^{n-1}\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + \|U^{n-\frac{3}{2}}\|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\} \right\}. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że wyrazy lewej strony powyższej nierówności zawierają jedynie $\|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}$. Oszacowanie w normie określonej na domknięciu podobszaru, tzn. $\|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}$ otrzymujemy korzystając z faktów

$$\|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 = \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$$

oraz

$$\|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \leq \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right\}.$$

Podobnie otrzymujemy oszacowanie $\|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}$.

Na mocy *Lematu 13* - str. 172, zastosowanego do lewej strony nierówności (3.43), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \|U^N\|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|U^{N-\frac{1}{2}}\|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \leq \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\
& + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + \|U^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \\
& \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|U^{n-1}\|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^{n-1}\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + \|U^{n-\frac{3}{2}}\|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Do powyższej nierówności raz jeszcze stosujemy *Lemat Gronwall'a - Lemat 7*, przyjmując

$$\gamma_n = |U^N|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + |U^{N-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2,$$

i dostajemy

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ |U^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + |U^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |U^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Wróćmy jeszcze raz do nierówności (3.43). Zauważmy, że nierówność (3.44) możemy wykorzystać do oszacowania niektórych wyrazów prawej strony (3.43) tj.

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=2}^N \left\{ |U^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^{n-1}\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + |U^{n-\frac{3}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\} \leq \\ & \leq C(T) \max_{n=1, \dots, N} \left\{ |U^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + |U^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Na mocy powyższej nierówności z (3.43) i (3.44) otrzymujemy zatem następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\partial_{t/2} U^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \|\partial_t U^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ |\partial_t U^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t U^{n-\frac{3}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |U^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ostatnie wyrazy prawych stron nierówności (3.44) i (3.45), tj.

$$\|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \quad (3.46)$$

szacujemy z *Lematu 3* - str. 98.

Zauważmy także, że na mocy *Lematu 14* - str. 174, mamy

$$\begin{aligned} |U^0|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq 2 \left(|U^0 - u_0|_{H^1(\Omega)}^2 + |u_0|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \leq \\ &\leq C_1 h^2 |u_0|_{H^2(\Omega)}^2 + 2 |u_0|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Na mocy $\|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)} \leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$, zobacz [13]. \square

3.4.2 Słabe normy

Sformułujemy i udowodnimy teraz *Twierdzenie 6* o stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *słabych normach*. Jest ono uogólnieniem *Twierdzenia 2* z *Podrozdziału 2.4.2* na rozważaną w tym rozdziale dyskretyzację.

Twierdzenie 6 (Słabe normy). *Niech $u_0 \in H^2(\Omega)$ i współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) (-str. 64). Wtedy istnieje takie τ_0 , że dla $\tau \leq \tau_0$, rozwiązania schematu (3.29.a)-(3.29.d) spełniają następujące oszacowanie*

$$\begin{aligned} \max_{n=1, \dots, N} \left\{ |U^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + |U^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} &\leq \\ &\leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ , h oraz H .

Uwaga 9. *Twierdzenie 6 jest wnioskiem z Twierdzenia 5, więc Uwaga 8, dotyczy także Twierdzenia 6, tzn. jeśli dodatkowo założymy, że współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; u, v)$ są niezależne od czasu t , tzn. $\mathcal{A}(t; u, v) \equiv \mathcal{A}(u, v)$, oraz że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $v \in H_0^1(\Omega)$ mamy $C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}(v, v)$, to do stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w sensie Twierdzenia 6, nie będzie konieczne założenie $\tau \leq \tau_0$.*

Dowód. Dowód jest modyfikacją dowodu *Twierdzenia 5* - o stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*.

Przypomnijmy otrzymaną w tym dowodzie nierówność (3.44)

$$\begin{aligned} \max_{n=1, \dots, N} \left\{ |U^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|U^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega_R^h})}^2 + |U^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|U^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega_B^h})}^2 \right\} \leq \\ \leq \mathcal{M} \left\{ \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_t f^{n-1}\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|\partial_t f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L^2(\Omega_B)}^2 \right\} + \right. \\ \left. + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} f^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} f^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \right. \\ \left. + \|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |U^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \right. \\ \left. + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona tej nierówności pokrywa się z lewą stroną nierówności z tezy tego *Twierdzenia*. Pozostaje więc oszacować wyrazy prawej strony, tj. wyrazy

$$\|U^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |U^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t U^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$$

Wyrazy te szacujemy tak jak w końcowej części *Twierdzenia 5* - patrz nierówności (3.46) i (3.47). \square

3.5 Analiza zbieżności

W tym podrozdziale zajmiemy się analizą zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d). Głównym rezultatem są *Twierdzenie 7*, w którym dowodzimy rzędu zbieżności rozwiązań rozważanego schematu w *silnych normach* oraz *Twierdzenie 8*, w którym dowodzimy rzędu zbieżności rozwiązań schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *normach słabych*.

Błąd zbieżności schematu, przy ustalonym t w punktach nodalnych definiujemy podobnie jak w *Podrozdziale 2.5*, jednak w tym przypadku jest to funkcja ciągłego argumentu $x \in \Omega$ i dyskretna względem argumentu t . Niech zatem $\xi(x, n\tau), \xi(x, (n + \frac{1}{2})\tau) \in V^h(\Omega)$, będą takimi funkcjami, że w punktach nodalnych $x \in \Omega^h$, przy ustalonym n , zdefiniowane są w sposób następujący

$$\xi(x, n\tau) \equiv \begin{cases} U(x, n\tau) - W(x, n\tau) & x \in \overline{\Omega_R^h}, \\ U(x, n\tau) - W(x, (n - \frac{1}{2})\tau) & x \in \Omega_B^h, \end{cases} \quad (3.48)$$

oraz

$$\xi \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) \equiv \begin{cases} U \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) - W(x, n\tau) & x \in \Omega_R^h, \\ U \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) - W \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) & x \in \overline{\Omega}_B^h, \end{cases} \quad (3.49)$$

gdzie $W(x, n\tau)$ jest ciągłą, kawałkami liniową interpolacją rozwiązania zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b), opartą na wartościach $u(x, n\tau)$ w punktach nodalnych $x \in \Omega^h$. Funkcje $U(x, n\tau)$, $U \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) \in V^h(\Omega)$ natomiast są rozwiązaniami schematu (3.29.a)-(3.29.d). Zwróćmy uwagę, że dla tak zdefiniowanych funkcji ξ^n i $\xi^{n+\frac{1}{2}}$ zachodzi $\tilde{\partial}_t \xi^{n-1} \in V_R^h(\Omega)$ i $\tilde{\partial}_t \xi^{n-\frac{1}{2}} \in V_B^h(\Omega)$, gdzie odpowiednie pochodne różnicowe po t zostały zdefiniowane w (3.28) - str. 61.

Zdefiniujmy także następujące funkcje

$$\eta(x, n\tau) = u(x, n\tau) - W(x, n\tau)$$

oraz

$$\eta \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) = u \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right) - W \left(x, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right)$$

dla każdego $x \in \Omega$ i $n = 0, \dots, N$. Zauważmy, że funkcje η^n i $\eta^{n+\frac{1}{2}} \notin V^h(\Omega)$.

W dalszej części pracy zakładamy będziemy, że współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; \cdot, \cdot)$ oprócz warunków regularności wymienionych przy sformułowaniu zadania w postaci uogólnionej (-zobacz str. 49 oraz warunków (3.30)) - dostatecznych dla zapewnienia stabilności schematu (-zobacz str. 64), spełniają dodatkowo następujące założenia,

$$\begin{cases} \text{dla każdego } (x, t) \in \Omega \times [0, T]: \\ \left| \frac{\partial^2 a_{i,j}}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq \hat{a}_{\max}, \quad \left| \frac{\partial^2 b_i}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq \hat{b}_{\max}, \quad \left| \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq \hat{c}_{\max}, \\ \left| \frac{\partial^3 a_{i,j}}{\partial t^3}(x, t) \right| \leq \bar{a}_{\max}, \quad \left| \frac{\partial^3 b_i}{\partial t^3}(x, t) \right| \leq \bar{b}_{\max}, \quad \left| \frac{\partial^3 c}{\partial t^3}(x, t) \right| \leq \bar{c}_{\max}, \\ \text{dla } i, j = 1, 2. \end{cases} \quad (3.50)$$

3.5.1 Silne normy

Sformułujemy i udowodnimy teraz następujące *Twierdzenie 7* o oszacowaniu błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*. *Twierdzenie 7* jest uogólnieniem *Twierdzenia 3* z *Podrozdziału 2.5.1*.

Twierdzenie 7 (Silne normy). *Niech $u^0 \in H^2(\Omega)$ oraz niech rozwiązanie u zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b) będzie funkcją taką, że $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T); H^3(\Omega))$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2((0, T); H^2(\Omega))$, $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$. Niech dodatkowo współczynniki formy $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) oraz założenia (3.50). Wtedy*

istnieje takie τ_0 , że dla $\tau \leq \tau_0$, błąd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) spełnia następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \max_{n=1, \dots, N-1} \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_t \xi^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ + \tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ |\partial_t \xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH} \right), \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ , h oraz H , zaś odpowiednie pochodne różnicowe po t zdefiniowane są wzorami (3.10).

Uwaga 10. Zwróćmy uwagę na normy, w których mierzony jest błąd zbieżności proponowanego schematu. Twierdzenie powyższe podaje oszacowanie pochodnych różnicowych względem czasu błędu zbieżności rozważanego schematu, a nie błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d). Przypomnijmy, że w tej pracy takie normy błędu zbieżności schematu nazywamy silnymi normami. Zwróćmy uwagę na rząd zbieżności błędu w normach silnych, przy ustalonych stosunkach parametrów dyskretyzacji τ , h i H :

1. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h + h^{\frac{3}{2}}) = \mathcal{O}(h),$$

2. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $\frac{H}{h} = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h + \tau^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(h),$$

3. przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h + \tau^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}),$$

4. przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $\frac{H}{h} = \text{const}$ nie ma zbieżności.

Rezultaty powyższe zostaną w Rozdziale 4 potwierdzone wynikami odpowiednich eksperymentów numerycznych.

Uwaga 11. W przypadku tak ogólnego równania parabolicznego i przyjętych założeniach o regularności współczynników formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; \cdot, \cdot)$, warunek $\tau \leq \tau_0$ jest warunkiem naturalnym. Przy założeniach przyjętych o formie $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ schemat zamknięty Eulera, także wymaga spełnienia warunku $\tau \leq \tau_0$ - patrz prace [6] i [7]. Jeśli dodatkowo założymy, że dla każdego $t \in [0, T]$ współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; u, v)$ są niezależne od czasu t , tzn. $\mathcal{A}(t; u, v) \equiv \mathcal{A}(u, v)$ oraz że istnieje $C > 0$, takie że dla każdego $v \in H_0^1(\Omega)$ mamy $C\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}(v, v)$, to do zbieżności schematu w silnych normach nie będzie konieczne założenie $\tau \leq \tau_0$.

Dowód. Dowód bazuje na dowodzie stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) - Twierdzenie 5 - zobacz str. 64.

W pierwszej kolejności szczegółowo zajmiemy się równaniami schematu (3.29.a)-(3.29.d), określonymi na Ω_R , a następnie przeniesiemy otrzymany wynik na równania określone na Ω_B .

Wypiszemy teraz schemat dla błędu zbieżności odpowiadający schematowi (3.29.a)-(3.29.d) dla równań określonych na Ω_R .

Podstawiając do równania (3.29.b) za $U^n = \xi^n + W^n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\partial}_t \xi^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = \\ = & (f^n, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\tilde{\partial}_t W^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} - \mathcal{A}_R^n(W^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) \\ & \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \end{aligned}$$

Zauważmy następnie, że z równania (3.1.a), dla każdego $\varphi \in V_R^h(\Omega)$ mamy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} + \mathcal{A}^n(u^n, \varphi) = (f^n, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})},$$

gdzie przez $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau)$ oznaczamy pochodną względem czasu rozwiązania u zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c), w chwili czasowej $n\tau$.

Odejmując dwa powyższe równania stronami dostajemy

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\partial}_t \xi^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = \\ = & \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\tilde{\partial}_t W^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \\ & + \mathcal{A}_R^n(\eta^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi). \\ & \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \end{aligned}$$

Rozpiszmy formę dwuliniową $\mathcal{A}_R^n(\eta^n, \varphi)$, na wyrazy zawierające współczynniki a_{ij} , b_i oraz c , zgodnie z jej definicją (3.2) - str. 50. Następnie do prawej strony dodajmy i odejmiemy odpowiedni dyskretny iloczyn skalarny zawierający $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau)$. Takie postępowanie prowadzi powyższe równanie do

postaci

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\partial}_t \xi^{n-1}, \varphi)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = \\
= & \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau) - \partial_t W^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau) - \partial_{t/2} W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& + \sum_{i,j=1}^2 (a_{i,j}^n D_i \eta^n, D_j \varphi)_{L^2(\Omega_R)} + \left(c^n \eta^n + \sum_{i=1}^2 b_i^n D_i \eta^n, \varphi \right)_{L^2(\Omega_R)} + \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \\
& + \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi). \\
& \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora rozwiązania u względem zmiennej t , dla każdego $x \in \Omega^h$ mamy

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t}(x, n\tau) - \partial_t W^{n-1}(x) = \tau \rho(u^n), \\
\rho(u^n) & = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)(x, t), \quad t \in ((n-1)\tau, (n+1)\tau).
\end{aligned}$$

Wykorzystując to, równość (3.51) przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\partial}_t \xi^{n-1}, \varphi)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = \\
& = \tau (\rho(u^n), \varphi)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \left(c^n \eta^n + \sum_{i=1}^2 b_i^n D_i \eta^n, \varphi \right)_{L^2(\Omega_R)} + \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \\
& + \sum_{i,j=1}^2 (a_{i,j}^n D_i \eta^n, D_j \varphi)_{L^2(\Omega_R)} + \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi). \\
& \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy *schemat dla błędu* dla równań schematu (3.29.a)-(3.29.d) określonych na Ω_B dla $n > 1$. Tym razem podstawiamy $U^{n+\frac{1}{2}} = \xi^{n+\frac{1}{2}} + W^{n+\frac{1}{2}}$ do równania (3.29.c) i postępując jak wyżej otrzymujemy

następujące równanie

$$\begin{aligned}
& \left(\tilde{\partial}_t \xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \mathcal{A}_B^{n+\frac{1}{2}}(\xi^{n+\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^n(\xi^n, \varphi) = \\
& = \tau \left(\rho(u^{n+\frac{1}{2}}), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \left(c^{n+\frac{1}{2}} \eta^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^2 b_i^{n+\frac{1}{2}} D_i \eta^{n+\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L^2(\Omega_B)} + \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right), \varphi \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \\
& + \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} D_i \eta^{n+\frac{1}{2}}, D_j \varphi \right)_{L^2(\Omega_B)} + \hat{\mathcal{A}}_R^{n+\frac{1}{2}}(u^{n+\frac{1}{2}}, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^n(W^n, \varphi). \\
& \forall \varphi \in V_B^h(\Omega). \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Równanie dla błędu metody odpowiadające równaniu (3.29.a) jest nieco inne od powyższego (3.53). Istotną różnicą jest to, że pierwszy wyraz prawej strony, to w tym przypadku $(\partial_{t/2} \xi^0, \varphi)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}$ zamiast $(\tilde{\partial}_t \xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}$. Jest to związane z inną aproksymacją pochodnej różnicowej względem czasu w równaniu (3.29.a) względem (3.29.c) w punktach nodalnych $x \in \Omega_B^h$. W pierwszym półkroku czasowym, na Ω_B otrzymujemy następujące *równanie dla błędu*

$$\begin{aligned}
& \left(\partial_{t/2} \xi^0, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(\xi^{\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(\xi^0, \varphi) = \\
& = \tau \left(\rho(u^{\frac{1}{2}}), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \left(c^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^2 b_i^{\frac{1}{2}} D_i \eta^{\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L^2(\Omega_B)} + \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2} \tau \right), \varphi \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2} \tau \right), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + \\
& + \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}^{\frac{1}{2}} D_i \eta^{\frac{1}{2}}, D_j \varphi \right)_{L^2(\Omega_B)} + \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^0(W^0, \varphi). \\
& \forall \varphi \in V_B^h(\Omega). \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Równania (3.52),(3.53),(3.54) stanowią równania *schematu błędu* dla schematu (3.29.a)-(3.29.d). Mając na celu przejrzystość dowodu tego twierdzenia, posłużymy się teraz analogią do dowodu *Twierdzenia 5*. Powtarzmy dowód *Twierdzenia 5* dla równań (3.52),(3.53),(3.54). W pierwszej kolejności z równania (3.52) eliminujemy wyraz $\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi)$ kosztem wyrazu $\hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \varphi)$ równania (3.53) określonego na $(n - \frac{1}{2})$ warstwie czasowej. Następnie, w

tak przekształconym równaniu (3.52) wybieramy $\varphi = \partial_t \xi^{n-1}$, po czym w odpowiedni sposób korzystamy z *Lemat 11* - str. 172, tak jak w dowodzie *Twierdzenia 5*. Czynności te powtarzamy następnie dla równania (3.53). Po uproszczeniu, dodaniu stronami i zsumowaniu tak otrzymanych nierówności po warstwach czasowych, otrzymujemy w miejsce nierówności (3.45) z dowodu *Twierdzenia 5*, następujące oszacownie

$$\begin{aligned}
& \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& + \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau \sum_{n=2}^N \left\{ |\partial_t \xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \mathcal{M} \left\{ B_R + B_B + C_R + C_B + \rho_R + \rho_B + S_R + S_B + A + \right. \\
& + \|\partial_t \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& - \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\} + \\
& - \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{3}{2}}(W^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\}, \quad (3.55)
\end{aligned}$$

gdzie

$$B_R \equiv \frac{1}{\tau} \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left\| b_i^n D_i \eta^n - b_i^{n-1} D_i \eta^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2, \quad (3.56)$$

$$C_R \equiv \frac{1}{\tau} \sum_{n=2}^N \left\| c^n \eta^n - c^{n-1} \eta^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2, \quad (3.57)$$

$$\rho_R = \|\tau \rho(u^n)\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \|\tau \partial_t \rho(u^n)\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2, \quad (3.58)$$

$$S_R = \tau \sum_{n=2}^N \left| \left(\partial_t \left(\frac{\partial u}{\partial t} (\cdot, n\tau) \right), \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} + \right. \\ \left. - \left(\partial_t \left(\frac{\partial u}{\partial t} (\cdot, n\tau) \right), \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^n)} \right|, \quad (3.59)$$

$$A = \sum_{n=2}^N \left\{ \left(a_{i,j}^n D_i \eta^n - a_{i,j}^{n-1} D_i \eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L^2(\overline{\Omega}_R)} + \right. \\ \left. + \left(a_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} D_i \eta^{n-\frac{1}{2}} - a_{i,j}^{n-\frac{3}{2}} D_i \eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}} \right)_{L^2(\overline{\Omega}_B)} \right\}. \quad (3.60)$$

Wyraz B_B, C_B, ρ_B oraz S_B zdefiniowane są w ten sam sposób jak B_R, C_R, ρ_R, S_R z tą istotną różnicą, że nośniki odpowiednich iloczynów skalarnych to w tym przypadku Ω_B , a wszystkie funkcje brane są pół warstwy czasowej niżej.

Zajmijmy się oszacowaniem wyrazów prawej strony (3.55).

Zacznijmy od wyrażenia oznaczonego przez B_R , zdefiniowanego w (3.56). Zauważmy, że korzystając z założonej regularności współczynników b_i możemy napisać

$$B_R \equiv \frac{1}{\tau} \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left\| b_i^n D_i \eta^n - b_i^{n-1} D_i \eta^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = \\ = \frac{1}{\tau} \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left\| b_i^n (D_i \eta^n - D_i \eta^{n-1}) + \tau \partial_t b_i^{n-1} D_i \eta^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq \\ \leq \frac{b_{\max}}{\tau} \sum_{n=2}^N \left| \eta^n - \eta^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \tau \tilde{b}_{\max} \sum_{n=2}^N \left| \eta^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2. \quad (3.61)$$

Zauważmy dalej, że $\eta^n - \eta^{n-1} = (u^n - u^{n-1}) - (W^n - W^{n-1})$ oraz że funkcja $(W^n - W^{n-1})$ jest interpolacją funkcji $(u^n - u^{n-1})$. Na mocy *Twierdzenia 9* - str. 173, mamy zatem

$$\frac{b_{\max}}{\tau} \sum_{n=2}^N \left| (u^n - u^{n-1}) - (W^n - W^{n-1}) \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 \leq \\ \leq C \frac{b_{\max}}{\tau} \sum_{n=2}^N h^2 \|u^n - u^{n-1}\|_{H^2(\Omega_R)}^2 = C b_{\max} \tau h^2 \sum_{n=2}^N \|\partial_t u^{n-1}\|_{H^2(\Omega_R)}^2 = \\ = C b_{\max} \tau h^2 \sum_{n=2}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial t} (\cdot, (n-1)\tau) + \tau \rho(u^{n-1}) \right\|_{H^2(\Omega_R)}^2 \leq \mathcal{M} h^2, \quad (3.62)$$

gdzie $\rho(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_t$, $t \in ((n-1)\tau, (n+1)\tau)$.

Podobnie, korzystając z *Twierdzenia 9*, drugi z wyrazów prawej strony nierówności

(3.61) szacujemy następująco

$$\tau \tilde{b}_{\max} \sum_{n=2}^N \left| \eta^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 \leq C \tau h^2 \sum_{n=2}^N \left\| u^{n-1} \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{M} h^2. \quad (3.63)$$

Korzystając z (3.62) oraz (3.63) w (3.61) otrzymujemy zatem

$$B_R \leq \mathcal{M}(u) h^2. \quad (3.64)$$

W analogiczny sposób jak przy szacowaniu B_R , korzystając z *Twierdzenia 9*, otrzymujemy następujące oszacowanie wyrażenia C_R , zdefiniowanego wyrażeniem (3.57)

$$C_R \leq \mathcal{M}(u) h^2. \quad (3.65)$$

Oczywiście zachodzi również

$$\rho_R = \left\| \tau \rho(u^n) \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \sum_{n=2}^N \left\| \tau \partial_t \rho(u^n) \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 \leq \mathcal{M}(u) \tau^2. \quad (3.66)$$

Zajmiemy się teraz wyrazem prawej strony nierówności (3.55) oznaczonym przez S_R - patrz (3.59). Korzystając z *rozwinęcia w szereg Taylora* przekształcamy to wyrażenie do postaci w której mamy już pochodne różniczkowe zamiast odpowiednich ilorazów różnicowych względem czasu

$$\begin{aligned} S_R \leq & \tau \sum_{n=2}^N \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, n\tau), \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, n\tau), \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right| + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left| \left(\tau \dot{\rho}(u), \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} \right| + \tau \sum_{n=2}^N \left| \left(\tau \dot{\rho}(u), \partial_t \xi^{n-1} \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right|, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tau \dot{\rho}(u^n) &= \partial_t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, n\tau) \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, n\tau) \\ \dot{\rho}(u^n) &= \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t), \quad t \in ((n-1)\tau, (n+1)\tau). \end{aligned}$$

Dla każdego ustalonego $n = 1, \dots, N$ do składników pierwszej sumy prawej strony oszacowania S_R , stosujemy *Lemat 8* - str. 172. Do dwóch pozostałych wyrazów stosujemy kolejno *Lematy 11* i *12* - str. 172. Daje to oszacowanie

postaci

$$\begin{aligned}
S_R &\leq \epsilon\tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \\
&+ \frac{\tau h^2}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, n\tau) \right\|_{H^2(\Omega_R)}^2 + \frac{\tau^3}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \|\dot{\rho}(u^n)\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq \\
&\leq \epsilon\tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \mathcal{M}(u) (h^2 + \tau^2). \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Analogicznie szacujemy wyrazy określone na Ω_B , tj. B_B, C_B, ρ_B oraz S_B prawej strony nierówności (3.55).

Zauważmy także, że korzystając z *Lematu 11* - str. 172, wyrażenia (3.60) możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}
A &\leq \frac{1}{\epsilon\tau} \sum_{n=2}^N \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left\| a_{i,j}^n D_i \eta^n - a_{i,j}^{n-1} D_i \eta^{n-1} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left\| a_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} D_i \eta^{n-\frac{1}{2}} - a_{i,j}^{n-\frac{3}{2}} D_i \eta^{n-1} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\} + \\
&\quad + \epsilon\tau \sum_{n=2}^N \left\{ |\partial_t \xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Postępując dalej z pierwszą sumą prawej strony powyższego wyrażenia jak przy szacowaniu (3.56) otrzymujemy

$$A \leq \epsilon\tau \sum_{n=2}^N \left\{ |\partial_t \xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} + \mathcal{M}(u) h^2. \quad (3.68)$$

Wstawmy wyżej uzyskane oszacowania (3.64)-(3.68) do nierówności (3.55). Po przeniesieniu odpowiednich wyrazów na lewą stronę otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned}
& \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_h^b)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_h^b)}^2 \right\} + \\
& + (1 - \epsilon\tau) \max_{n=2, \dots, N} \left\{ \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau(1 - \epsilon) \sum_{n=2}^N \left\{ |\partial_t \xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \mathcal{M}_1 \left\{ \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \right. \\
& - \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\} + \\
& \left. - \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{3}{2}}(W^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\} \right\} + \\
& + \mathcal{M}_1 \left\{ \|\partial_t \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_h^b)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} + \\
& + \mathcal{M}_2 (\tau^2 + h^2). \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Do czterech pierwszych sum prawej strony wyrażenia (3.69) stosujemy *Lemat 4* - str. 106. Następnie w celu oszacowania wyrazów

$$\left\{ \|\partial_t \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_h^b)}^2 \right\},$$

stosujemy *Lemat 5* - str. 116. Ponieważ na mocy *Lematu 14* - str. 174 mamy

$$\left\{ \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} \leq h^2 |u_0|_{H^2(\Omega)}^2,$$

przenosząc odpowiednie wyrazy na lewą stronę otrzymanej nierówności. \square

3.5.2 Słabe normy

Sformułujemy i udowodnimy teraz *Twierdzenie 8* o zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w słabych normach. Jest ono uogólnieniem *Twierdzenia 4* z *Podrozdziału 2.5.2*.

Twierdzenie 8 (Słabe normy). *Niech $u^0 \in H^2(\Omega)$ oraz rozwiązanie u zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b) będzie funkcją taką, że $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T); H^3(\Omega))$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2((0, T); H^2(\Omega))$, $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$. Niech dodatkowo współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) oraz założenia*

(3.50). Wtedy istnieje takie τ_0 , że dla $\tau \leq \tau_0$ przy założeniu $\frac{\tau}{h^{\frac{3}{2}+\alpha}} = \text{const}$ dla $\alpha \geq 0$, błąd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) spełnia następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right), \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ , h oraz H .

Uwaga 12. Podobnie jak w przypadku Twierdzenia 7, jeśli dodatkowo założymy, że dla współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; u, v)$ są niezależne od czasu t , tzn. $\mathcal{A}(t; u, v) \equiv \mathcal{A}(u, v)$ oraz że istnieje $C > 0$, takie że dla każdego $v \in H_0^1(\Omega)$ mamy $C\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}(v, v)$, to do zbieżności schematu w sensie Twierdzenia 8, nie będzie konieczne założenie $\tau \leq \tau_0$.

Uwaga 13. Zwróćmy uwagę na rząd zbieżności błędu schematu (3.29.a)-(3.29.d) w zaproponowanych normach, przy ustalonych stosunkach parametrów dyskretyzacji τ , h i H :

1. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}(\tau + h) = \mathcal{O}(h),$$

2. przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $\frac{H}{h} = \text{const}$ błąd zbieżności jest rzędu

$$\mathcal{O}\left(\tau + h + \tau^{\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{O}(h).$$

Zauważmy, że w przypadku (1) rząd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) jest taki sam, jak w przypadku schematu zamkniętego Eulera - patrz np. [16]. Przy tych założeniach ($\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$) błąd zbieżności schematu zamkniętego Eulera, a więc i rozważanego w tej pracy jest optymalny, zobacz [24].

Uwaga 14. Zauważmy, że tak jak z Twierdzenia 5 wynika Twierdzenie 6, że zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w silnych normach, wynika zbieżność rozważanego schematu w normach słabych. Bez dodatkowych założeń o τ , h oraz H mamy zatem zbieżność w sensie słabych norm rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h + \frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$.

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest uogólnieniem dowodu *Twierdzenia 4*. Podobnie jak tam, w pierwszej kolejności szczegółowo zajmiemy się równaniami schematu (3.29.a)-(3.29.d) określonymi na Ω_R , poczym otrzymany wynik przeniesiemy na równania schematu (3.29.a)-(3.29.d) określone na obszarze Ω_B .

Przypomnijmy równanie (3.29.b). Biorąc w tym równaniu $U^n = \xi^n + W^n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t \xi^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \left(\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = \\ & = (f^n, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} + \\ & - \left(\partial_t W^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} - \left(\partial_{t/2} W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} - \mathcal{A}_R^n(W^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) \\ & \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Z równania (3.1) mamy natomiast

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} + \mathcal{A}_R^n(u^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \varphi) = (f^n, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} \\ & \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Wyeliminujmy teraz z równania (3.70) wyraz $(f^n, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})}$, kosztem wyrazu podobnego z równania (3.71). Po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów oraz dodaniu i odjęciu od prawej strony wyrażenia $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}$, dostajemy

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t \xi^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \left(\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) = \\ & = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \\ & \quad + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} - \left(\partial_t W^{n-1}, \varphi \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \\ & \quad + \left(\partial_t W^{n-1} - \partial_{t/2} W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ & \quad + \mathcal{A}_R^n(\eta^n, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \varphi) \\ & \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Wyberzmy w powyższej równości $\varphi = \tau \xi^n$. Na mocy prostych równości

$$\begin{aligned} \tau \left(\partial_t \xi^{n-1}, \xi^n \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} &= \frac{\tau^2}{2} \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2, \\ \tau \left(\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} &= \frac{\tau^2}{4} \|\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2, \end{aligned}$$

z (3.72) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{2} \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \\
& + \frac{\tau^2}{4} \|\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \quad \tau \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \xi^n) + \tau \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) = \\
= & \left\{ \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \xi^n \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \xi^n \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right\}_{T_1} + \\
& + \left\{ \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau) - \partial_t W^{n-1}, \xi^n \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right\}_{T_2} + \\
& + \left\{ \tau \left(\partial_t W^{n-1} - \partial_{t/2} W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right\}_{T_3} + \\
& \quad + \{ \tau \mathcal{A}_R^n(\eta^n, \xi^n) \}_{T_4} + \\
& + \left\{ \tau \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \xi^n) - \tau \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) \right\}_{T_5} = \\
& \quad = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \\
& \quad \quad \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega). \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Uprościmy teraz wyrazy T_1, \dots, T_4 otrzymanej wyżej równości (3.73).

W pierwszej kolejności oszacujemy wyrażenie oznaczone przez T_1 . Korzystając *Lematu 8* - str. 172 w jednym kroku otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|T_1| &= \left| \tau \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \xi^n \right)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau), \xi^n \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right\} \right| \leq \\
&\leq \epsilon \tau \|\xi^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \frac{\tau h^2}{\epsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau) \right\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Zauważmy następnie, że korzystając z *rozwinięcia w szereg Taylora* dla każdego $x \in \Omega^h$ mamy

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t}(x, n\tau) - \partial_t W^{n-1}(x) = \tau \rho(u^n), \\
\rho(u^n) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)(x, t), \quad t \in ((n-1)\tau, (n+1)\tau).
\end{aligned}$$

Na mocy powyższego faktu oraz *Lematu 11* - str. 172, mamy zatem

$$\begin{aligned}
|T_2| &= \left| \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, n\tau) - \partial_t W^{n-1}, \xi^n \right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right| \leq \\
&\leq \epsilon \tau \|\xi^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \frac{\tau^3}{\epsilon} \|\rho(u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Podobnie, korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora mamy

$$\begin{aligned}\partial_t W^{n-1}(x) - \partial_{t/2} W^{n-\frac{1}{2}}(x) &= \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, n\tau) + \tau \rho(u^n), \\ \rho(u^n) &= \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)(x, t), \quad t \in ((n-1)\tau, (n+1)\tau).\end{aligned}$$

Pozwala to oszacować wyraz prawej strony (3.73) oznaczony przez T_3 , w następujący sposób

$$\begin{aligned}|T_3| &= \left| \tau \left(\partial_t W^{n-1} - \partial_{t/2} W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right| \leq \\ &\leq \epsilon \tau \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau^3}{\epsilon} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, n\tau) + \rho(u^n) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2.\end{aligned}\quad (3.76)$$

Zauważmy także, że z definicji formy dwuliniowej $\mathcal{A}_R^n(\cdot, \cdot)$, Twierdzenia 9 str. 173 oraz nierówności Schwarza, mamy

$$\begin{aligned}|T_4| &= |\tau \mathcal{A}_R^n(\eta^n, \xi^n)| \leq \tau \left| \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}^n D_i \eta^n, D_j \xi^n)_{L^2(\Omega_R)} \right| + \\ &+ \tau \left| \sum_{i=1}^2 (b_i^n D_i \eta^n, \xi^n)_{L^2(\Omega_R)} \right| + \tau |(c^n \eta^n, \xi^n)_{L^2(\Omega_R)}| \leq \\ &\leq \tau h |u^n|_{H^2(\Omega)} \left\{ a_{\max} |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)} + (b_{\max} + hc_{\max}) \|\xi^n\|_{L^2(\Omega_R)} \right\}.\end{aligned}$$

Na mocy ϵ -nierówności i Lematu 12 - str. 172, daje to

$$|T_4| \leq \epsilon \tau \left\{ |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega_R^h})}^2 \right\} + \frac{\tau h^2}{\epsilon} \mathcal{M}(u).\quad (3.77)$$

Wstawmy wyżej otrzymane oszacowania wyrazów T_1, \dots, T_4 - nierówności odpowiedni (3.74), (3.75), (3.76) oraz (3.77) do równania (3.73). Otrzymamy następujące oszacowanie dla równań schematu (3.29.a)-(3.29.d) określonych na Ω_R

$$\begin{aligned}&\frac{\tau^2}{2} \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \\ &+ \frac{\tau^2}{4} \|\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ &\quad \tau \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \xi^n) + \tau \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) \leq \\ &\leq \epsilon \tau \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 \right\} + \\ &\quad + \tau \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \xi^n) - \tau \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \\ &\quad + \frac{\tau}{\epsilon} (\tau^2 + h^2) \mathcal{M}(u) \quad \forall \varphi \in V_R^h(\Omega).\end{aligned}\quad (3.78)$$

Analogicznie, wychodząc z równania (3.29.c) otrzymujemy dla równań schematu (3.29.a)-(3.29.d) określonych na Ω_B , dla $n > 1$ następujące równanie

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{2} \|\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\
& \quad + \frac{\tau^2}{4} \|\partial_t \xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \|\xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \quad \quad \tau \mathcal{A}_B^{n+\frac{1}{2}}(\xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) + \tau \hat{\mathcal{A}}_R^n(\xi^n, \xi^{n+\frac{1}{2}}) \leq \\
& \leq \epsilon \tau \left\{ \|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + |\xi^{n+\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} + \\
& \quad + \tau \hat{\mathcal{A}}_R^{n+\frac{1}{2}}(u^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) - \tau \hat{\mathcal{A}}_R^n(W^n, \xi^{n+\frac{1}{2}}) + \\
& \quad + \frac{\tau}{\epsilon} (\tau^2 + h^2) \mathcal{M}(u) \quad \forall \varphi \in V_B^h(\Omega). \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Dla $n = 1$ na Ω_B dostajemy nieco inne oszacowanie. Jest to związane z różnicą pomiędzy równaniami (3.29.a) i (3.29.c). Zauważmy, że w pierwszym z wymienionych równań, w punktach nodalnych Ω_B^h , pochodna względem czasu jest aproksymowana odpowiednim ilorazem różnicowym brany o pół kroku czasowego, natomiast w równaniu drugim iloraz różnicowy jest brany o pełen krok czasowy. Dla $n = 1$ dla równań określonych na obszarze Ω_B otrzymujemy odpowiednio oszacowanie

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{2} \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\
& \quad + \frac{\tau^2}{4} \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 - \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \quad \quad \tau \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(\xi^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}}) + \tau \hat{\mathcal{A}}_R^0(\xi^0, \xi^{\frac{1}{2}}) \leq \\
& \leq \epsilon \tau \left\{ \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + |\xi^{\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} + \\
& \quad + \tau \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(u^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}}) - \tau \hat{\mathcal{A}}_R^0(W^0, \xi^{\frac{1}{2}}) + \\
& \quad + \frac{\tau}{\epsilon} (\tau^2 + h^2) \mathcal{M}(u) \quad \forall \varphi \in V_B^h(\Omega). \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Zsumujmy teraz otrzymane nierówności rozróżniając dwa przypadki: $n = 1$ oraz $n > 1$.

Dla $n = 1$ dodajemy stronami nierówności (3.78) i (3.80).

Dla $n > 1$ dodajemy stronami nierówności (3.78) i (3.79).

Następnie sumujemy otrzymane nierówności stronami względem $n = 1, \dots, N$. Po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów, otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\
& \quad + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=1}^N \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\
& \quad + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \xi^n) + \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \leq \\
& \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \mathcal{M}(u) (\tau^2 + h^2) + \\
& \quad - \left[\tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \right]_{S_1} + \\
& \quad + \left[\tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \xi^n) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) \right\} \right] + \\
& \quad + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \Big]_{S_2}. \quad (3.81)
\end{aligned}$$

Przez S_1, S_2 oznaczyliśmy ostatnie sumy prawej strony powyższej nierówności (3.81), objęte odpowiednio oznaczonymi klamrami.

Dalsza część dowodu tego *Twierdzenia* sprowadzania się do oszacowania tych wyrazów.

Zacznijmy od oszacowania sumy S_1 . Podzielmy tę sumę na dwie części i skorzystajmy z *warunku trójkąta* w następujący sposób

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \right| \leq \\
&\leq \tau \left| \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \right| + \\
&\quad + \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right| = S_{11} + S_{12}. \quad (3.82)
\end{aligned}$$

Pierwszą część sumy S_1 , czyli S_{11} szacujemy zgodnie z *Lematem 6* -

str. 124, przez

$$|S_{11}| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega_B^h})}^2 \right\} + \\ + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \quad (3.83)$$

Dowód tego faktu wydzieliliśmy w postaci osobnego *Lematu* tylko i wyłącznie z uwagi na chęć poprawienia przejrzystości dowodu tego *Twierdzenia*.

Oszacujemy teraz wyrażenie S_{12} nierówności (3.82).

$$|S_{12}| = \frac{\tau^2}{2} \left| \sum_{n=1}^N \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right|. \quad (3.84)$$

Rozpisując współczynniki formy dwuliniowej $\hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}})$ oraz korzystając z *nierówności Schwarz*a otrzymujemy

$$|S_{12}| \leq \frac{a_{\max} \tau^2}{2} \sum_{n=1}^N |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_\delta)} |\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\ + \frac{b_{\max} \tau^2}{2} \sum_{n=1}^N |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_\delta)} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ + \frac{c_{\max} \tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \|\xi^{n-1}\|_{L^2(\Omega_\delta)} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}.$$

Z *nierówności odwrotnej* - patrz np. [13], zastosowanej do drugiego wyrazu pierwszego iloczynu otrzymujemy

$$|S_{12}| \leq c \tau^2 \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|\xi^{n-1}\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left(1 + \frac{1}{h} \right) \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)},$$

co przy założeniu $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ daje

$$|S_{12}| \leq C \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|\xi^{n-1}\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} h^{\frac{3}{2}+\alpha} \left(1 + \frac{1}{h} \right) \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}.$$

W tym miejscu należy zaznaczyć, że jest to jedyne miejsce w dowodzie tego *Twierdzenia*, w którym wymagane jest założenie $\frac{\tau}{h^{\frac{3}{2}+\alpha}} = \text{Const}$.

Korzystając z *Lematu 11* - str. 172, przekształcamy dalej wyrażenie S_{12} do postaci

$$|S_{12}| \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega_R^h})}^2 \right\} + \\ + \tau h^{3+2\alpha} \left(1 + \frac{1}{h} \right)^2 \sum_{n=1}^N \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2$$

Zauważmy jednak, że z *Twierdzenia 7* - o zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*, mamy

$$\begin{aligned} h^{3+2\alpha} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^2 \tau \sum_{n=1}^N \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 &\leq Ch^{1+2\alpha} \max_{n=1, \dots, N} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \\ &\leq Ch^{1+2\alpha} \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH} \right) \leq \mathcal{M} \left(h^{1+2\alpha} \tau^2 + h^{3+2\alpha} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} \right). \end{aligned}$$

Ostatecznie zatem S_{12} szacuje się w sposób następujący

$$\begin{aligned} |S_{12}| &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\} + \\ &\quad + \mathcal{M} \left(h^{1+2\alpha} \tau^2 + h^{3+2\alpha} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Łącząc (3.83) i (3.85) otrzymujemy oszacowanie sumy S_1 prawej strony wyrażenia (3.81). Mamy zatem z (3.82) przy $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned} |S_1| &= \left| \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \right| \leq \\ &+ \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \right\} + \\ &\quad + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Przejdziemy teraz do oszacowania sumy S_2 prawej strony nierówności (3.81), czyli wyrażenia

$$\begin{aligned} S_2 &= \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \xi^n) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) \right\} + \\ &+ \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

Pogrupujmy wyrazy tej sumy w następujący sposób

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}](W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}](u^n, \xi^n) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\partial_{t/2} W^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} u^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \\ &\quad + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Oszacujemy kolejno sumy prawej strony powyższej równości. W tym celu posłużymy się analogią do szacowań z dowodu *Lematu 6* - str. 124, który został już przez nas wykorzystany do oszacowania części wyrazów sumy S_1 . Zauważmy, że w *Lemacie*, na który się tutaj powołujemy oszacowane zostało wyrażenie oznaczone przez Z_{32} - (3.171); jego końcowe oszacowanie oznaczone zostało przez (3.173). Otrzymaliśmy tam nierówność

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}] (W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) &\leq \epsilon \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ &+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \end{aligned}$$

Zatem sumując te nierówności po warstwach czasowych $n = 1, \dots, N$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^N \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}] (W^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ &+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \quad (3.88) \end{aligned}$$

Analogicznie szacujemy trzy kolejne sumy prawej strony równości (3.87). Mamy zatem

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ &+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right) + \\ &+ \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

Pozostaje oszacować sumę

$$\begin{aligned} &\tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \xi^n) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} = \\ &= \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}) + \tau \sum_{n=1}^N \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})). \quad (3.89) \end{aligned}$$

Przypomnijmy szacowane kilka stron wcześniej wyrażenie S_{12} - str. 90 oraz nierówność (3.85). Korzystając z niej możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}) &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ &+ \mathcal{M} \left(h^{1+2\alpha} \tau^2 + h^{3+2\alpha} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} \right). \end{aligned}$$

Posłużmy się także jednym z oszacowań, które zostało przeprowadzone przy okazji dowodu *Lematu 6* - str. 124. Przypomnijmy, oszacowane tam wyrażenie Z_{31} - strona 126. Otrzymana tam nierówność (3.170) pozwala napisać

$$\tau \sum_{n=1}^N \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) \leq \sum_{n=1}^N \epsilon \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + h^2 \mathcal{M}(u).$$

Dwie powyższe sumy szacują wyrażenie (3.89). Na tej podstawie mamy zatem

$$S_2 \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-1}|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-1}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \quad (3.90)$$

Wstawmy teraz nierówności (3.86) i (3.90) do (3.81). Dostajemy

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=1}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \frac{\tau^2}{2} \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\ & \quad + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=1}^N \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \frac{1}{2} \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & \quad + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \xi^n) + \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \leq \\ & \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} + \\ & \quad + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ & \quad + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \quad (3.91) \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{1}{2} \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 = \frac{1}{2} \|\xi^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 &= \frac{1}{4} \left\| \xi^N - \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\xi^N\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau^2}{8} \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2, \end{aligned}$$

nierówność (3.91), po przeniesieniu wyrazów ostatniej warstwy czasowej na lewą stronę nierówności, przepisujemy do postaci

$$\begin{aligned}
& (1 - \epsilon\tau) \left\{ \|\xi^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau(1 - \epsilon) \sum_{n=1}^N \left\{ \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \xi^n) + \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \leq \\
& \leq \epsilon\tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \\
& + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \tag{3.92}
\end{aligned}$$

Zapiszmy powyższą nierówność w symbolicznej postaci

$$L + \tau(1 - \epsilon) \sum_{n=1}^N \left\{ \mathcal{A}_R^n(\xi^n, \xi^n) + \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \leq P. \tag{3.93}$$

Zauważmy, że korzystając z założeń o formie $\mathcal{A}^n(\cdot, \cdot)$ i *Lematu 11* - str. 172, nierówność (3.93) możemy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}
& L + \tau(\theta(1 - \epsilon) - \epsilon) \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq P + \\
& + \tau \left(\frac{b_{\max}^2}{\epsilon} + c_{\max} \right) \sum_{n=1}^N \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\}. \tag{3.94}
\end{aligned}$$

Na mocy tej nierówności możemy zatem przepisać (3.92) do postaci

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \epsilon\tau - \tau \left(\frac{b_{\max}^2}{\epsilon} + c_{\max} \right) \right) \left\{ \|\xi^N\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \tau(\theta - \epsilon) \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\
& \leq \epsilon\tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
& + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \\
& + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \tag{3.95}
\end{aligned}$$

Wybierając odpowiednio małe ϵ , tak żeby

$$(\theta - \epsilon) > \frac{\theta}{2},$$

a następnie odpowiednio małe τ , tak żeby

$$\left(1 - \epsilon\tau - \tau \left(\frac{b_{\max}^2}{\epsilon} + c_{\max}\right)\right) > \frac{1}{2},$$

stosujemy *Lemat Gronwall'a - Lemat 7* - str. 171 z

$$\gamma_n = \|\xi^N\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2.$$

Daje to z (3.95) oszacowanie postaci

$$\begin{aligned} & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\ & \leq C(T) \left\{ \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 + \right. \\ & \left. + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h^{2\alpha}}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ponieważ z *Lematu 14* - str. 174, mamy

$$\|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_R^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\xi^0\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + |\xi^0|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Ch^2 \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

□

3.6 Lematy pomocnicze

W podrozdziale tym zawarte są dodatkowe lematy niezbędne do dowodów *Twierdzeń 5, 6, 7, 8*.

W pierwszej kolejności sformułujemy i udowodnimy *Lemat 2*, którego użyliśmy w dowodzie *Twierdzenia 5*.

Lemat 2. *Niech dana będzie nierówność*

$$L + S_1 + S_2 \leq P,$$

gdzie L i P są wyrazami nierówności (3.41), zaś

$$\begin{aligned} S_1 & \equiv \sum_{n=2}^N \left\{ \mathcal{A}_R^n(V^n, \partial_t V^{n-1}) - \mathcal{A}_R^{n-1}(V^{n-1}, \partial_t V^{n-1}) \right\}, \\ S_2 & \equiv \sum_{n=2}^N \left\{ \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(V^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t V^{n-\frac{3}{2}}) - \mathcal{A}_B^{n-\frac{3}{2}}(V^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t V^{n-\frac{3}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

Niech dodatkowo współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}^n(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) (-str. 64). Wtedy ma miejsce następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} & L + \tau(\theta - 2\epsilon) \sum_{n=2}^N \left\{ \left| \partial_t V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \left| \partial_t V^{n-\frac{3}{2}} \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\} \leq \\ & \leq P + \frac{\tau}{\epsilon} (\mathcal{M}_1 + \epsilon) \sum_{n=2}^N \left\{ \left\| \partial_t V^{n-1} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + \left\| \partial_t V^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\} + \\ & + \frac{\tau}{\epsilon} \mathcal{M}_1 \sum_{n=2}^N \left\{ \left| V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \left\| V^{n-1} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_R)}^2 + \left| V^{n-\frac{3}{2}} \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \left\| V^{n-\frac{3}{2}} \right\|_{L^2(\overline{\Omega}_B)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{M}_1 = (b_{\max}^2 + c_{\max})$, $\mathcal{M}_2 = (\tilde{a}_{\max}^2 + \tilde{b}_{\max}^2 + \tilde{c}_{\max}^2)$.

Dowód. W pierwszej kolejności zajmujemy się wyrazami sumy S_1 . Grupując odpowiednio składniki sumy oznaczonej przez S_1 , przepisujemy nierówność

$$L + S_1 + S_2 \leq P, \quad (3.96)$$

do postaci (- patrz definicja $\partial_t[\mathcal{A}_R^{n-1}](\cdot, \cdot)$ - str. 60)

$$L + \sum_{n=2}^N \tau \mathcal{A}_R^n(\partial_t V^{n-1}, \partial_t V^{n-1}) + \tau \sum_{n=2}^N \partial_t[\mathcal{A}_R^{n-1}](V^{n-1}, \partial_t V^{n-1}) + S_2 \leq P,$$

co z kolei, dla uproszczenia zapisujemy jako

$$L + S_{11} + S_{12} + S_2 \leq P. \quad (3.97)$$

Zauważmy, że korzystając z definicji i założeń o formie $\mathcal{A}_R^n(\cdot, \cdot)$ mamy

$$\begin{aligned} S_{11} & \geq \tau\theta \sum_{n=2}^N \left| \partial_t V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left(b_i(\cdot, n\tau) D(\partial_t V^{n-1}), \partial_t V^{n-1} \right)_{L^2(\overline{\Omega}_R)} + \\ & + \tau \sum_{n=2}^N \left(c(\cdot, n\tau) \partial_t V^{n-1}, \partial_t V^{n-1} \right)_{L^2(\overline{\Omega}_R)}. \end{aligned}$$

Skorzystajmy z powyższej nierówności w (3.97). Dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned} & L + \tau\theta \sum_{n=2}^N \left| \partial_t V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + S_{12} + S_2 \leq \\ & \leq P - \tau \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left(b_i(\cdot, n\tau) D(\partial_t V^{n-1}), \partial_t V^{n-1} \right)_{L^2(\overline{\Omega}_R)} + \\ & \quad - \tau \sum_{n=2}^N \left(c(\cdot, n\tau) \partial_t V^{n-1}, \partial_t V^{n-1} \right)_{L^2(\overline{\Omega}_R)}. \end{aligned}$$

Stosując *Lemat 11* - str. 172, do pojedynczych składników sum prawej strony otrzymanej nierówności, po przeniesieniu odpowiednich wyrazów na lewą stronę, dostajemy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} L + \tau (\theta - \epsilon) \sum_{n=2}^N \left| \partial_t V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + S_{12} + S_2 &\leq \\ &\leq P + \tau \left(\frac{b_{\max}^2}{\epsilon} + c_{\max} \right) \sum_{n=2}^N \left\| \partial_t V^{n-1} \right\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Zajmijmy się teraz wyrazami lewej strony nierówności (3.97), oznaczonymi przez S_{12} . Korzystając z definicji formy dwuliniowej $\mathcal{A}_R^{n-1}(\cdot, \cdot)$ i *Lematu 11* otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_{12}| &\leq \tau \sum_{n=2}^N \sum_{i,j=1}^2 \left| \left(\partial_t a_{i,j}^{n-1} D V^{n-1}, D \left(\partial_t V^{n-1} \right) \right)_{L^2(\bar{\Omega}_R)} \right| + \\ &\quad + \tau \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left| \left(\partial_t b_i^{n-1} D V^{n-1}, \partial_t V^{n-1} \right)_{L^2(\bar{\Omega}_R)} \right| + \\ &\quad + \tau \sum_{n=2}^N \left| \left(\partial_t c^n V^{n-1}, \partial_t V^{n-1} \right)_{L^2(\bar{\Omega}_R)} \right| \leq \\ &\leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \left| \partial_t V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \left\| \partial_t V^{n-1} \right\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2 \right\} + \\ &+ \frac{\tau}{\epsilon} \left(\tilde{a}_{\max}^2 + \tilde{b}_{\max}^2 \right) \sum_{n=2}^N \left| V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \frac{\tau \tilde{c}_{\max}^2}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\| V^{n-1} \right\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Uwzględniając wynik nierówności (3.99) w (3.98), otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} L + \tau (\theta - 2\epsilon) \sum_{n=2}^N \left| \partial_t V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + S_2 &\leq \\ &\leq P + \tau \left(\frac{b_{\max}^2}{\epsilon} + c_{\max} + \epsilon \right) \sum_{n=2}^N \left\| \partial_t V^{n-1} \right\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2 + \\ &+ \frac{\tau}{\epsilon} \left(\tilde{a}_{\max}^2 + \tilde{b}_{\max}^2 \right) \sum_{n=2}^N \left| V^{n-1} \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 + \frac{\tau \tilde{c}_{\max}^2}{\epsilon} \sum_{n=2}^N \left\| V^{n-1} \right\|_{L^2(\bar{\Omega}_R)}^2. \end{aligned}$$

Analogicznie jak wyrazy nierówności (3.96) oznaczone symbolem S_1 , szacujemy wyrazy oznaczone przez S_2 . \square

W poniższym lemacie zajmiemy się oszacowaniem pochodnych różnicowych względem czasu schematu (3.29.a)-(3.29.d) po dwóch pierwszych półkrokach czasowych. *Lemat 3* wykorzystany został w dowodach *Twierdzeń 5* oraz *6*.

Lemat 3. Niech $u_0 \in H^2(\Omega)$ i współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) (-str. 64). Wtedy istnieje takie τ_0 , że dla $\tau \leq \tau_0$, rozwiązania schematu (3.29.a)-(3.29.d) spełniają oszacowanie

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \left\| \partial_{t/2} U^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_B^h)}^2 + \\ & \quad + \tau \left(\left| \partial_{t/2} U^0 \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \left| \partial_t U^0 \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 \right) \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left(\left\| f^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \left\| f^1 \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \left\| u_0 \right\|_{H^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą niezależną od τ , h oraz H .

Dowód. Przypomnijmy pierwsze równanie schematu (3.29.a). Dla $\varphi \in V_B^h(\Omega)$ mamy

$$\left(\partial_{t/2} U^0, \varphi \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = (f^{\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}.$$

Przepiszmy to równanie do postaci

$$\begin{aligned} \left(\partial_{t/2} U^0, \varphi \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} U^0, \varphi) + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^0, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) \\ = (f^{\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Zauważmy, że dla $\varphi \in V_B^h(\Omega)$ możemy napisać

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^0, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = \\ & = \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^0, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(U^0, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(U^0, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = \\ & = \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^0, \varphi) - \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^0](U^0, \varphi). \end{aligned}$$

Wstawmy otrzymaną tożsamość do równania (3.100) przyjmując $\varphi = \partial_{t/2} U^0$. Daje to

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} U^0, \partial_{t/2} U^0) = \\ & = \left(f^{\frac{1}{2}}, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} - \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^0, \partial_{t/2} U^0) + \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^0](U^0, \varphi) = \\ & = I_1 - I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Oszacujmy kolejne wyrazy prawej strony równania (3.101) oznaczone symbolami I_1, I_2, I_3 .

Korzystamy kolejno z *Lematu 11* - str. 172 oraz *Lematu 12* - str. 172 o równoważności norm $L^2(\Omega_B)$ i $L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)$ dla funkcji z przestrzeni $V_B^h(\Omega)$. Daje to następujące oszacowanie wyrazu I_1 równości (3.101)

$$|I_1| = \left| \left(f^{\frac{1}{2}}, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \right| \leq \epsilon \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 \quad (3.102)$$

Zajmijmy się teraz drugim wyrazem prawej strony (3.101) oznaczonym przez I_2 . Po rozpisaniu formy dwuliniowej $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ i z nierówności trójkąta mamy

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(U^0, \partial_{t/2} U^0) \right| \leq \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i U^0, D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{\frac{1}{2}} D_i U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right| + \left| \left(c^{\frac{1}{2}} U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right| = I_{21} + I_{22} + I_{23}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Kolejno zajmujemy się uproszczeniem wyrażeń I_{21}, I_{22}, I_{23} .

Oszacujemy teraz pierwszy wyraz prawej strony nierówności (3.103), oznaczony wyżej przez I_{21} . Dodając i odejmując u_0 do pierwszego argumentu iloczynu skalarnego dostajemy

$$\begin{aligned} |I_{21}| &= \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} (D_i(U^0 - u_0) + D_i u_0), D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i(U^0 - u_0), D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right| + \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i u_0, D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right|. \end{aligned}$$

Ponieważ $\partial_{t/2} U^0 \in V_B^h(\Omega)$ - zeruje się we wszystkich punktach nodalnych Ω_R^h , korzystając z *wzorów Green'a*, przy założeniu że $u^0 \in H^2(\Omega)$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i u_0, D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i,j}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i u_0, D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} = \\ &= \sum_{i,j}^2 \left(D_j (a_{i,j} D_i u_0), \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}. \end{aligned}$$

Wykorzystajmy ten fakt w oszacowaniu drugiego wyrazu prawej strony I_{21} , a następnie do obu wyrazów prawej strony zastosujmy *nierówność Schwarz'a* - str. 172. Otrzymamy oszacowanie

$$\begin{aligned} |I_{21}| &\leq a_{\max} \|U^0 - u_0\|_{H^1(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \|\partial_{t/2} U^0\|_{H^1(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} + \\ &+ (a_{\max} + \check{a}_{\max}) \|u_0\|_{H^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}. \end{aligned}$$

Do pierwszego czynnika pierwszego iloczynu prawej strony otrzymanej wyżej nierówności stosujemy *Lemat 14* - str. 174 o własnościach rzutu $L^2(\Omega)$, a do drugiego *nierówność odwrotną*. Następnie korzystamy z ϵ -nierówności. Takie postępowanie daje

$$\begin{aligned} |I_{21}| &\leq a_{\max} h \|u_0\|_{H^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \frac{c}{h} \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} + \\ &+ (a_{\max} + \check{a}_{\max}) \|u_0\|_{H^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \leq \\ &\leq \epsilon \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2_h(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{a_{\max}^2 + \check{a}_{\max}^2}{\epsilon} \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Przejdźmy teraz do oszacowania wyrazu prawej strony równości (3.103) oznaczonego przez I_{22} . Podobnie jak przy oszacowaniu I_{21} , do pierwszego argumentu iloczynu skalarnego w odpowiedni sposób dodajemy i odejmujemy funkcję u_0 i korzystamy z *nierówności trójkąta*. Daje to

$$|I_{22}| \leq \left| \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{\frac{1}{2}} D_i (U^0 - u_0), \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right| + \left| \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{\frac{1}{2}} D_i u_0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega)} \right|.$$

Ponieważ $\partial_{t/2} U^0(x) \equiv 0$ dla każdego $x \in \Omega_R^h$, z *nierówności Schwarz*, po odpowiednim przegrupowaniu wyrazów, mamy dalej

$$|I_{22}| \leq b_{\max} \left\{ |U^0 - u_0|_{H^1(\Omega_R)} + |u_0|_{H^1(\Omega_R)} \right\} \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}.$$

Ponieważ na mocy *Lemat 14* - str. 174, mamy $|U^0 - u_0|_{H^1(\Omega_R)} \leq h |u_0|_{H^2(\Omega_R)}$, z ϵ -nierówności i *Lematu 12*, otrzymujemy ostatecznie

$$|I_{22}| \leq \epsilon \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2_h(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{b_{\max}^2}{\epsilon} \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (3.105)$$

Ponieważ $\|U^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$, na mocy *Lematu 11*, wyraz I_{23} prawej strony (3.103) daje się oszacować w następujący sposób

$$|I_{23}| \leq \epsilon \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2_h(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{c_{\max}^2}{\epsilon} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.106)$$

Korzystając z oszacowania (3.104), (3.105), (3.106) otrzymujemy zatem z nierówności (3.103) następujące oszacowanie

$$|I_2| \leq \epsilon \|\partial_{t/2} U^0\|_{L^2_h(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{(a_{\max} + \check{a}_{\max} + b_{\max} + c_{\max})^2}{\epsilon} \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (3.107)$$

Pozostaje oszacować ostatnie wyrazy prawej strony równania (3.101), oznaczone symbolem I_3 . Rozpisując formy $\hat{\mathcal{A}}_R(\cdot, \cdot)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^0](U^0, \partial_{t/2} U^0) \right| = \\ &= \left| \frac{\tau}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(\partial_{t/2} a_{i,j}^0 D_i U^0, D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_{\delta_R})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\partial_{t/2} b_i^0 D_i U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_{\delta_R})} + \frac{\tau}{2} \left(\partial_{t/2} c^0 U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_{\delta_R})} \right|. \end{aligned}$$

Do dwóch pierwszych iloczynów skalarnych dodajemy i odejmujemy $D_i u_0$. Daje to

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \frac{\tau}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(\partial_{t/2} a_{i,j}^0 \left(D_i (U^0 - u_0) + D_i u_0 \right), D_j \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_{\delta_R})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\partial_{t/2} b_i^0 \left(D_i (U^0 - u_0) + D_i u_0 \right), \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_{\delta_R})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau}{2} \left(\partial_{t/2} c^0 U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_{\delta_R})} \right|. \end{aligned}$$

Korzystamy z *nierówności trójkąta*, a następnie z *nierówności Schwarz*. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \tau |\partial_t a_{\max}| \left| U^0 - u_0 \right|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} \left| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} U^0) \right|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} + \\ &\quad + \tau |\partial_t b_{\max}| \left| U^0 - u_0 \right|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} \left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} U^0) \right\|_{L^2(\Omega_{\delta_R})} + \\ &\quad + \tau |\partial_t a_{\max}| |u_0|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} \left| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} U^0) \right|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} + \\ &\quad + \tau \left(|\partial_t b_{\max}| |u_0|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} + |\partial_t c_{\max}| \left\| U^0 \right\|_{L^2(\Omega_{\delta_R})} \right) \left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} U^0) \right\|_{L^2(\Omega_{\delta_R})}. \end{aligned}$$

Do wyrazu $|U^0 - u_0|_{H^1(\Omega_{\delta_R})}$ stosujemy *Lemat 14*, a do $\left| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} U^0) \right|_{H^1(\Omega_{\delta_R})}$ *nierówność odwrotną*. Takie postępowanie daje

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \tau h |\partial_t a_{\max}| \|u_0\|_{H^2(\Omega_{\delta_R})} \frac{c}{h} \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ &\quad + \tau h |\partial_t b_{\max}| \|u_0\|_{H^2(\Omega_{\delta_R})} \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ &\quad + \tau |\partial_t a_{\max}| \sqrt{\frac{h}{H}} \|u_0\|_{H^2(\Omega_R)} \frac{c}{h} \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ &\quad + \tau \left(|\partial_t b_{\max}| |u_0|_{H^1(\Omega_{\delta_R})} + |\partial_t c_{\max}| \left\| U^0 \right\|_{L^2(\Omega_{\delta_R})} \right) \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}. \quad (3.108) \end{aligned}$$

W powyższym oszacowaniu skorzystaliśmy z *Lematu 12* - str. 172 oraz w oszacowaniu trzeciego wyrazu z *Lematu 15* - str. 174.

Ponieważ dla funkcji z przestrzeni $V_R^h(\Omega)$ zachodzi

$$\left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \leq c\sqrt{h} \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\Gamma^h)},$$

korzystając z *Lematu 11*, nierówność (3.108) przekształcamy dalej do postaci

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{\tau}{\sqrt{H}} |\partial_t a_{\max}| \|u_0\|_{H^2(\Omega_R)} \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L^2(\Gamma^h)} + \\ &+ \epsilon \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \tau^2 \mathcal{M} \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega_R)}^2 + \|U^0\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right). \end{aligned}$$

Zastosujemy *Lemat 10* - str. 172 do drugiego wyrazu $\left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L^2(\Gamma^h)}$. Dostajemy

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{\tau |\partial_t a_{\max}|}{\sqrt{H}} \|u_0\|_{H^2(\Omega_R)} \left\{ \epsilon \left| \partial_{t/2} U^0 \right|_{H^1(\Omega_B)} + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{H}} \right) \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L^2(\Omega_B)} \right\} + \\ &+ \epsilon \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \tau^2 \mathcal{M} \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega_R)}^2 + \|U^0\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right). \end{aligned}$$

Do pierwszego iloczynu prawej strony powyższej nierówności raz jeszcze stosujemy ϵ -nierówność i ostatecznie, na mocy faktu

$\|U^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \epsilon \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \tau \epsilon \left| \partial_{t/2} U^0 \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \\ &+ \mathcal{M} \left(\frac{\tau}{H} + \left(\frac{\tau}{H} \right)^2 \right) \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Wstawiamy teraz otrzymane nierówności (3.102), (3.107) i (3.109) do (3.101). Otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} &\left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} U^0, \partial_{t/2} U^0) \leq \\ &\leq \epsilon \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \epsilon \tau \left| \partial_{t/2} U^0 \right|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \mathcal{M} \left(1 + \frac{\tau}{H} + \left(\frac{\tau}{H} \right)^2 \right) \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Dla uproszczenia przepisujemy ją do postaci

$$L + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} U^0, \partial_{t/2} U^0) \leq P, \quad (3.111)$$

gdzie $L = \left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2$, P oznaczają całą lewą stronę nierówności (3.110).

Po rozpisaniu formy $\mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ dostajemy

$$\begin{aligned} L + \frac{\tau}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(a(\cdot, \frac{1}{2}\tau) D_i \left(\partial_{t/2} U^0 \right), D_j \left(\partial_{t/2} U^0 \right) \right)_{L^2(\Omega_B)} &\leq \\ &\leq P - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^2 \left(b(\cdot, \frac{1}{2}\tau) D_i \left(\partial_{t/2} U^0 \right), \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B)} + \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \left(c(\cdot, \frac{1}{2}\tau) \partial_{t/2} U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B)}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Zauważmy, że

$$\frac{\tau}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(a(\cdot, \frac{1}{2}\tau) D_i \left(\partial_{t/2} U^0 \right), D_j \left(\partial_{t/2} U^0 \right) \right)_{L^2(\Omega_B)} \geq \frac{\theta\tau}{2} |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2.$$

Mamy zatem z nierówności (3.112)

$$\begin{aligned} L + \frac{\theta\tau}{2} |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 &\leq P + \\ - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^2 \left(b(\cdot, \frac{1}{2}\tau) D_i \left(\partial_{t/2} U^0 \right), \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B)} &+ \\ - \frac{\tau}{2} \left(c(\cdot, \frac{1}{2}\tau) \partial_{t/2} U^0, \partial_{t/2} U^0 \right)_{L^2(\Omega_B)}. & \end{aligned} \quad (3.113)$$

Zastosujmy *Lemat 11* - str. 172, do dwóch ostatnich wyrazów prawej strony otrzymanej wyżej nierówności. Daje to

$$\begin{aligned} L + \frac{\theta\tau}{2} |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 &\leq P + \\ &\leq \epsilon\tau |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \frac{\tau}{\epsilon} \left(b_{\max}^2 + c_{\max} \right) \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Zatem z (3.110) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left\| \partial_{t/2} U^0 \right\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{\theta\tau}{2} |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq \\ &\leq \left(\epsilon + \frac{\tau}{\epsilon} \left(b_{\max}^2 + c_{\max} \right) \right) \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \epsilon\tau |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \mathcal{M} \left(1 + \frac{\tau}{H} + \left(\frac{\tau}{H} \right)^2 \right) \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Wybieramy odpowiednio małe ϵ , tak żeby $\epsilon \leq \frac{a_0}{4}$ i po przeniesieniu odpowiednich wyrazów na lewą stronę dostajemy

$$\begin{aligned} & \left(1 - \left(\epsilon + \frac{\tau}{\epsilon} (b_{\max}^2 + c_{\max})\right)\right) \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{\theta\tau}{4} |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} \|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \mathcal{M} \left(1 + \frac{\tau}{H} + \left(\frac{\tau}{H}\right)^2\right) \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dla odpowiednio małego $\tau \leq \tau_0$, gdzie τ_0 takie że

$$\left(1 - \left(\epsilon + \frac{\tau_0}{\epsilon} (b_{\max}^2 + c_{\max})\right)\right) \geq \frac{1}{2},$$

przy $\frac{\tau}{H} \leq \text{const}$, dostajemy zatem ostatecznie

$$\begin{aligned} & \|\partial_{t/2} U^0\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \tau |\partial_{t/2} U^0|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left(\|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2\right). \end{aligned} \tag{3.115}$$

Przejdźmy teraz do oszacowania wyrazów tezy tego *Lematu*, określonych na obszarze Ω_R . Z równania (3.29.b) na pierwszej warstwie czasowej $\forall \varphi \in V_R^h(\Omega)$ mamy

$$\left(\tilde{\partial}_t U^0, \varphi\right)_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} + \mathcal{A}_R^1(U^1, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_B^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \varphi) = (f^1, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})}.$$

Wyraz $\hat{\mathcal{A}}_B^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \varphi)$ możemy wyeliminować kosztem $\hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi)$. Mamy bowiem z równania (3.29.a) dla $\varphi \in V_\delta^h(\Omega)$

$$\left(\partial_{t/2} U^0, \varphi\right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = (f^{\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_\delta)}.$$

Odejmując stronami dwa powyższe równania dostajemy.

$$\begin{aligned} & 2\left(\partial_t U^0, \varphi\right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \left(\partial_t U^0, \varphi\right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \mathcal{A}_R^1(U^1, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = \\ & = (f^1, \varphi)_{L^2(\Omega_R \cup \Omega_{\delta_B})} - (f^{\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\Omega_\delta)} + 2\left(\partial_{t/2} U^0, \varphi\right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Zauważmy także, że

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_R^1(U^1, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) = \tau \mathcal{A}_R^1(\partial_t U^0, \varphi) + \\ & + \mathcal{A}_R^1(U^0, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^1(U^0, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^1(U^0, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \varphi) \end{aligned}$$

oraz $\forall \varphi \in V_R^h(\Omega)$

$$\mathcal{A}_R^1(U^0, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^1(U^0, \varphi) \equiv \mathcal{A}_R^1(U^0, \mathcal{R}_R(\varphi)) \equiv \mathcal{A}^1(U^0, \mathcal{R}_R(\varphi)).$$

Z (3.115) mamy także oszacowania wyrazu $\|\partial_{t/2}U^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}$.

Korzystając z powyższych obserwacji powtarzamy dowód oszacowania (3.115) wybierając w (3.116) $\varphi = \partial_t U^0$. W analogiczny sposób otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned} & \left\| \partial_t U^0 \right\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \tau \left| \partial_t U^0 \right|_{H^1(\Omega_R)}^2 \leq \\ & \leq \mathcal{M} \left(\|f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R}^h)}^2 + \|f^1\|_{L^2(\Omega_R)}^2 + \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Pozostaje jeszcze oszacować $\|\partial_{t/2}U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}$. Zauważmy jednak, że prawdziwa jest nierówność.

$$\begin{aligned} \|\partial_{t/2}U^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} & \leq \left(\|\partial_{t/2}U^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + 2\|\partial_t U^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right) \leq \\ & \left(\|\partial_{t/2}U^0\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)} + 2\|\partial_t U^1\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)} \right) \end{aligned} \quad (3.118)$$

Wyrazy prawej strony tej nierówności zostały oszacowane wyżej - patrz (3.115) i (3.117).

Dodając stronami nierówności (3.115), (3.117) oraz (3.118), otrzymujemy oszacowanie zawarte w tezie *Lematu*. \square

Poniższy lemat ma charakter pomocniczy i został wydzielony z dowodu *Twierdzenia 7* w celu poprawienia przejrzystości całego dowodu.

Lemat 4. Niech współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}^n(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) (-str. 64) oraz (3.50) (-str. 74). Dodatkowo niech $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T); H^3(\Omega))$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2((0, T); H^2(\Omega))$, $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$. Przy tych założeniach zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& - \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\} + \\
& - \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{3}{2}}(W^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\} \leq \\
& \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_h^s)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_h^s)}^2 \right\} + \\
& + \epsilon \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_h^s)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_h^s)}^2 \right\} + \mathcal{M} \left(h^2 + \frac{\tau^2}{hH} \right),
\end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ, h oraz H .

Dowód. Oznaczmy poszczególne grupy wyrazów z tezy Lematu 4 w sposób następujący.

$$\begin{aligned}
P^n(u, \xi) &= \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^n(u^n, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\}. \quad (3.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{n-\frac{1}{2}}(W, \xi) &= \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{3}{2}}(W^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\}. \quad (3.120)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że przy wprowadzonych oznaczeniach mamy

$$P^{n-\frac{1}{2}}(W, \xi) = -P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi) + P^{n-\frac{1}{2}}(u, \xi).$$

Przyjęta konwencja pozwala nam zapisać lewą stronę nierówności z tezy *Lematu* w postaci

$$P^n(u, \xi) - P^{n-\frac{1}{2}}(W, \xi) = P^n(u, \xi) - P^{n-\frac{1}{2}}(u, \xi) + P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi). \quad (3.121)$$

Zajmiemy się teraz uproszczeniem wyrażenia (3.119), po czym otrzymane wyniki wykorzystane zostaną do uproszczenia (3.120).

Zgodnie z definicją $\hat{\mathcal{A}}_R^n(\cdot, \cdot)$ - patrz str. 61, dla każdego $u, v \in V^h(\Omega)$ zachodzi następująca tożsamość

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_R^n(u, v) &= \mathcal{A}^k(n, \mathcal{R}_\delta(v)) - \hat{\mathcal{A}}_B^n(u, v) \\ \forall k &= \frac{1}{2}, 1, \dots, \left(n - \frac{1}{2}\right), N. \end{aligned}$$

Korzystając z tego w wyrażeniu (3.119), po przegrupowaniu wyrazów otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} P^n(u, \xi) &= \\ &= \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} \partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\ &+ \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](\partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}](\partial_{t/2} u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} u^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\mathcal{A}^{n-1}](u^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Oznaczmy sześć pierwszych sum powyższej równości przez $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$. Oszacujemy je teraz zaczynając od pierwszej sumy - S_1 .

Bezpośrednio z definicji operatora $\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ - patrz (3.26), mamy

$$\begin{aligned} S_1 &= \left| \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} \partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) \right| = \\ &= \left| \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} \partial_{t/2} u^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1})) \right|. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Z rozwinięcia w szereg Taylora względem zmiennej t wiemy natomiast, że

$$\partial_{t/2}\partial_{t/2}u^{n-1}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, (n-1)\tau) + C\tau\rho(u),$$

gdzie

$$\rho(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t), \quad t \in ((n-1)\tau, (n+1)\tau).$$

Korzystając z tego przekształcamy dalej (3.123) do postaci

$$S_1 \leq \left| \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau), \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right) \right| + \\ + \left| \frac{\tau^3}{4} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\rho(u), \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right) \right|.$$

Rozpisujemy kolejne wyrazy zgodnie z definicją formy dwuliniowej $\mathcal{A}_B(\cdot, \cdot)$ - patrz (3.22). Dla ustalonego $n = 2, \dots, N$, do każdego wyrazu stosujemy nierówność Schwarz. Ponieważ funkcje $a_{i,j}$, b_j , c są ograniczone otrzymujemy nierówność

$$S_1 \leq \frac{a_{\max}\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \left| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\ + \frac{b_{\max}\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ + \frac{c_{\max}\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} \left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ + \frac{a_{\max}\tau^3}{4} \sum_{n=2}^N |\rho(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} \left| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\ + \frac{\tau^3}{4} \sum_{n=2}^N \left(b_{\max} |\rho(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} + c_{\max} \|\rho(u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right) \left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}. \quad (3.124)$$

Zauważmy, że na mocy Lematu 15 - str. 174

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \sqrt{\frac{h}{H}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right\|_{H^2(\Omega)},$$

a na mocy nierówności odwrotnej mamy natomiast

$$\left| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \frac{c}{h} \left\| \mathcal{R}_\delta \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}.$$

Zauważmy również, że korzystając z *Lematu 12* - str. 172 i definicji (3.13), możemy napisać

$$\left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} \leq C \left\| \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-1}) \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \leq C \left\| \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}.$$

Skorzystajmy z powyższych nierówności w (3.124). Daje to oszacowanie

$$\begin{aligned} S_1 \leq C \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{a_{\max}}{\sqrt{hH}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right\|_{H^2(\Omega)} + b_{\max} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \right. \\ \left. + c_{\max} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, (n-1)\tau) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left\| \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ + \frac{\tau^3}{4} \sum_{n=2}^N \left\{ \frac{a_{\max}}{\sqrt{hH}} \|\rho(u)\|_{H^2(\Omega)} + b_{\max} |\rho(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} + \right. \\ \left. + c_{\max} \|\rho(u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left\| \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}. \end{aligned}$$

Dla każdego ustalonego $n = 2, \dots, N$ do każdego wyrazu powyższej sumy stosujemy *Lemat 11* - str. 172. Daje to ostatecznie

$$S_1 \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\| \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \quad (3.125)$$

Przejdźmy teraz do oszacowania sumy S_2 prawej strony równości (3.122).

Postępujemy tak, jak to miało miejsce przy szacowaniu S_1 , z tą różnicą, że zamiast *rozwinęcia w szereg Taylora* funkcji $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, korzystamy z *rozwinęcia* funkcji $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$. Analogicznie do (3.125) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) \leq \\ &\leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\| \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Analogicznie otrzymujemy także oszacowania podobnych sum S_3 i S_4 prawej strony równości (3.122)

$$\begin{aligned} S_3 + S_4 &= \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](\partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\ &+ \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}](\partial_{t/2} u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) \leq \\ &\leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \left\| \partial_t \xi^{n-1} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Oszacujemy teraz piątą sumę prawej strony równości (3.122), tj.

$$S_5 = \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} (\partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}). \quad (3.128)$$

Zauważmy, że dla każdego punktu nodalnego $x \in \Gamma^h$ mamy

$$\partial_t \xi^{n-1}(x) - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{2} \left(\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}(x) - \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{3}{2}}(x) \right).$$

Pogrupujemy teraz wyrazy sumy S_5 korzystając z tej tożsamości w następujący sposób

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{\tau}{4} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} (\partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}} - \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{3}{2}}) = \\ &= \frac{\tau}{4} \hat{\mathcal{A}}_B^{N-\frac{1}{2}} (\partial_{t/2} u^{N-1}, \partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) - \frac{\tau}{4} \hat{\mathcal{A}}_B^{\frac{3}{2}} (\partial_{t/2} u^1, \partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}) + \\ &- \frac{\tau^2}{8} \sum_{n=2}^{N-1} \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} (\partial_{t/2} \partial_{t/2} u^{n-\frac{1}{2}}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{\tau^2}{8} \sum_{n=2}^{N-1} \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} (\partial_{t/2} \partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}) + \\ &- \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^{N-1} \partial_t [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}] (\partial_{t/2} u^n, \partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}). \quad (3.129) \end{aligned}$$

Oszacujemy teraz pierwszy z wyrazów prawej strony S_5 . Korzystając z *rozwinęcia w szereg Taylora* względem zmiennej t możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, (N-1)\tau) &= \partial_t u^{N-1}(x) + \tau \hat{\rho}(u), \\ \hat{\rho}(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \quad t \in ((N-2)\tau, N\tau). \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego faktu i *nierówności trójkąta* w pierwszym wyrazie prawej strony równości (3.129), otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} &\frac{\tau}{4} \left| \hat{\mathcal{A}}_B^{N-\frac{1}{2}} (\partial_t u^{N-1}, \partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right| \leq \\ &\leq \frac{\tau}{4} \left| \mathcal{A}_B^{N-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, (n-1)\tau), \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right) \right| + \\ &\quad + \frac{\tau^2}{4} \left| \mathcal{A}_B^{N-\frac{1}{2}} (\hat{\rho}(u), \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}})) \right|, \end{aligned}$$

które dalej, z *nierówności Schwarza* przekształcamy dalej do postaci

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\tau}{4} \hat{\mathcal{A}}_B^{N-\frac{1}{2}}(\partial_t u^{N-1}, \partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right| \leq \\
& \leq \frac{\tau}{4} |a_{\max}| \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, (n-1)\tau) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \left| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\
& + \frac{\tau}{4} |b_{\max}| \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, (n-1)\tau) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \|\mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}})\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\
& + \frac{\tau}{4} |c_{\max}| \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, (n-1)\tau) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} \|\mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}})\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\
& + \frac{\tau^2}{4} |a_{\max}| |\hat{\rho}(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} \left| \mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\
& + \frac{\tau^2}{4} \left\{ |b_{\max}| |\hat{\rho}(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} + |c_{\max}| \|\hat{\rho}(u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \|\mathcal{R}_\delta(\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}})\|_{L^2(\Omega_\delta)}.
\end{aligned}$$

Na mocy *Lematu 15* - str. 174, *nierówności odwrotnej* i *Lematu 12* - str. 172, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\tau}{4} \hat{\mathcal{A}}_B^{N-\frac{1}{2}}(\partial_t u^{N-1}, \partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right| \leq \\
& \leq C\tau |a_{\max}| \sqrt{\frac{h}{H}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, (n-1)\tau) \right\|_{H^2(\Omega)} \frac{c}{h} \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& + C\tau^2 \sqrt{\frac{h}{H}} \|\hat{\rho}(u)\|_{H^2(\Omega)} \frac{1}{h} \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& + \tau(1+\tau) \mathcal{M}(u) \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}. \quad (3.130)
\end{aligned}$$

Z *Lemat 11* - str. 172, dostajemy ostatecznie

$$\left| \frac{\tau}{4} \hat{\mathcal{A}}_B^{N-\frac{1}{2}}(\partial_t u^{N-1}, \partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}) \right| \leq \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \mathcal{M} \frac{\tau^2}{hH}. \quad (3.131)$$

Analogicznie otrzymujemy oszacowanie drugiego wyrazu prawej strony równości S_5 - (3.129), czyli

$$\frac{\tau}{4} \hat{\mathcal{A}}_B^{\frac{3}{2}}(\partial_{t/2} u^1, \partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}) \leq \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \mathcal{M} \frac{\tau^2}{hH}. \quad (3.132)$$

Pozostałe wyrazy prawej strony sumy S_5 - równanie (3.128), szacujemy tak jak wyrazy $S_1 - S_4$ prawej strony (3.122). Otrzymujemy zatem oszacowanie

$$\begin{aligned}
S_5 & = \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \leq \\
& \leq \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M} \frac{\tau^2}{hH}.
\end{aligned} \quad (3.133)$$

Podobnie suma S_6 prawej strony (3.122) szacuje się przez

$$\begin{aligned}
|S_6| &= \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}] (u^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \leq \\
&\leq \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
&\quad + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M} \frac{\tau^2}{hH}. \tag{3.134}
\end{aligned}$$

Wstawiamy nierówności (3.125), (3.126), (3.127) (3.133) i (3.134) do równania (3.122). Daje to

$$\begin{aligned}
P^n(u, \xi) &\leq \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}} (\partial_{t/2} u^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\mathcal{A}^{n-1}] (u^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \\
&\quad + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
&\quad + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \tag{3.135}
\end{aligned}$$

W identyczny sposób otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
-P^{n-\frac{1}{2}}(u, \xi) &\leq -\frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-1} (\partial_{t/2} u^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \\
&\quad -\frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\mathcal{A}^{n-\frac{3}{2}}] (u^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \\
&\quad + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
&\quad + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \tag{3.136}
\end{aligned}$$

Dodajmy stronami nierówności (3.135) i (3.136). Po odpowiednim pogrupowa-

niu wyrazów daje to nierówność

$$\begin{aligned}
& P^n(u, \xi) - P^{n-\frac{1}{2}}(u, \xi) \leq \\
& \leq \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \left\{ \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\partial_{t/2} \partial_{t/2} u^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \partial_{t/2}[\mathcal{A}^{n-1}](\partial_{t/2} u^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) \right\} + \\
& + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \left\{ \partial_{t/2}[\mathcal{A}^{n-1}](\partial_{t/2} u^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \partial_{t/2} \partial_{t/2}[\mathcal{A}^{n-\frac{3}{2}}](u^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) \right\} + \\
& \quad + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& \quad + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}.
\end{aligned}$$

Pierwsze cztery sumy powyższej nierówności szacujemy tak jak sumy z wyrażeń $S_1 - S_4$ prawej strony równości (3.122) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& P^n(u, \xi) - P^{n-\frac{1}{2}}(u, \xi) \leq \\
& \leq \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \quad (3.137)
\end{aligned}$$

Wróćmy do równania (3.121) - str. 107. Do dokończenia dowodu tego *Lematu*, pozostaje zatem oszacować wyrażenie

$$\begin{aligned}
P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi) &= \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(\eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) \right\} + \\
& + \sum_{n=2}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-\frac{3}{2}}(\eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right\}. \quad (3.138)
\end{aligned}$$

Korzystając z analogii do (3.122) - przypomnijmy, że rozważane tam było wyrażenie $P^n(u, \xi)$, przepisujemy $P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi)$ do postaci

$$\begin{aligned}
& P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi) = \\
& = \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(\partial_{t/2} \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{3}{2}}](\eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\
& + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{3}{2}}](\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](\partial_{t/2} \eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{3}{2}}](\eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) + \\
& + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-1}(\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\mathcal{A}^{n-\frac{3}{2}}](\eta^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})).
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Podobnie jak przy szacowaniu $P^n(u, \xi)$ i $P^{n-\frac{1}{2}}(u, \xi)$, pierwsze sześć sum szacujemy w sposób następujący

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(\partial_{t/2} \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{3}{2}}](\eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\
& + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{3}{2}}](\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1}) + \frac{\tau^2}{4} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}](\partial_{t/2} \eta^{n-1}, \partial_t \xi^{n-1}) + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \hat{\mathcal{A}}_B^{n-1}(\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{3}{2}}](\eta^{n-\frac{3}{2}}, \partial_t \xi^{n-1} - \partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \leq \\
& \quad \leq \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{N-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\
& + \epsilon \tau \sum_{n=2}^{N-1} \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) \frac{\tau^2}{hH}. \tag{3.140}
\end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do oszacowania siódmej sumy prawej strony równania (3.139), czyli wyrażenia

$$Z = \frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-1}(\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})).$$

Zauważmy, że korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora mamy

$$\eta^{n-\frac{1}{2}}(x) = u^{n-\frac{1}{2}}(x) - W^{n-\frac{1}{2}}(x) = h \frac{\partial u}{\partial x} \left(\hat{x}, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right);$$

$$\hat{x} \in ((x-h), (x+h)),$$

z czego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_{t/2} \eta^{n-\frac{1}{2}}(x) &= h \partial_{t/2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \left(\hat{x}, \left(n - \frac{3}{2} \right) \tau \right) \right) = \\ &= h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \left(\hat{x}, \left(n - \frac{3}{2} \right) \tau \right) + h(h+\tau) \tilde{\rho}(u). \end{aligned}$$

gdzie

$$\hat{x} \in ((x-h), (x+h)), \quad t \in (((n-1)\tau, (n+1)\tau).$$

Przepisujemy zatem Z do postaci

$$\begin{aligned} Z &= \frac{h\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\cdot, n\tau), \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right) = \\ &= \frac{h\tau}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{i,j}^{n-1} D_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\cdot, n\tau) \right), D_j \left(\mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ &\quad + \frac{h\tau}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{n-1} D_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\cdot, n\tau) \right), \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ &\quad + \frac{h\tau}{2} \sum_{n=2}^N \left(c^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\cdot, n\tau), \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} = Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{aligned} \tag{3.141}$$

Ponieważ $\mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})(x) \equiv 0$ dla każdego $x \in \Omega_R^h \cup \Omega_B^h$, z wzorów Greena mamy

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{h\tau}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{i,j}^{n-1} D_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\cdot, n\tau) \right), D_j \left(\mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} = \\ &= \frac{h\tau}{2} \sum_{n=2}^N \sum_{i,j=1}^2 \left(D_j \left(a_{i,j}^{n-1} D_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\cdot, n\tau) \right) \right), \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Stosując następnie *Lemat 11* - str. 172, i *Lemat 12* - str. 172 otrzymujemy

$$|Z_1| \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}h^2. \tag{3.142}$$

Bezpośrednio z *Lematu 11* dla wyrażeń Z_2, Z_3 prawej strony nierówności (3.141) otrzymujemy podobne oszacowanie

$$|Z_2| + |Z_3| \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}h^2. \quad (3.143)$$

Siódmą sumę prawej strony nierówności (3.139) szacujemy zatem w następujący sposób

$$\frac{\tau}{2} \sum_{n=2}^N \mathcal{A}^{n-1}(\partial_{t/2} \eta^{n-\frac{3}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}})) \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}h^2. \quad (3.144)$$

Podobnie postępujemy z ostatnią sumą prawej strony (3.139).

Otrzymujemy zatem oszacowanie następujące oszacowanie wyrazu $P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi)$

$$P^{n-\frac{1}{2}}(\eta, \xi) \leq \epsilon \tau \sum_{n=2}^N \|\partial_t \xi^{n-\frac{3}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}h^2. \quad (3.145)$$

Łącząc (3.137) z (3.145). □

Lemat poniższy podaje oszacowanie pochodnych różnicowych względem czasu błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) po połowkowej i pierwszej warstwie czasowej. Był on potrzebny w dowodzie *Twierdzenia 7*.

Lemat 5. *Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b) takim, że $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T), H^3(\Omega))$ oraz $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2((0, T), H^2(\Omega))$. Niech współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}^n(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) (-str. 64) oraz założenia (3.50) (-74). Wtedy istnieje takie τ_0 , że dla $\tau \leq \tau_0$ błąd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) spełnia oszacowanie*

$$\|\partial_t \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \mathcal{M} \left(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^2}{hH} + \frac{\tau^4}{h^2} \right),$$

gdzie $\xi^0, \xi^{\frac{1}{2}}, \xi^1$ zdefiniowane są wzorami (3.48)-(3.49), zaś \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ, h oraz H .

Dowód. Rozpatrujemy równanie (3.29.a). Po dodaniu i odjęciu odpowiednich ciągłych, elementami liniowych interpolacji rozwiązania zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b), otrzymujemy $\forall \varphi \in V_B^h(\Omega)$

$$\begin{aligned} & (\partial_{t/2} \xi^0, \varphi)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(\xi^{\frac{1}{2}}, \varphi) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(\xi^0, \varphi) = \\ & = (f^{\frac{1}{2}}, \varphi)_{L^2(\overline{\Omega}_B)} - (\partial_{t/2} W^0, \varphi)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} - \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}}, \varphi) + \\ & \quad + \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}}, \varphi) - \hat{\mathcal{A}}_R^0(W^0, \varphi). \end{aligned}$$

Z (3.1.a)-(3.1.b) $\forall \varphi \in V_{\overline{B}}^h(\Omega)$ mamy natomiast

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right), \varphi \right)_{L^2(\Omega)} + \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \left(u^{\frac{1}{2}}, \varphi \right) = \left(f^{\frac{1}{2}}, \varphi \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Odejmujemy stronami dwa powyższe równania dla $\varphi = \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \in V_{\overline{B}}^h(\Omega)$ i otrzymujemy równanie.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}} \left(\xi^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega)} - \left(\partial_{t/2} W^0, \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \\ & + \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \left(u^{\frac{1}{2}} - W^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right) + \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}} \left(W^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}} \right) - \hat{\mathcal{A}}_R^0 \left(W^0, \xi^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Zapiszmy to równanie w symbolicznej postaci

$$\frac{2}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}} \left(\xi^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}} \right) = P, \quad (3.147)$$

gdzie przez P oznaczyliśmy całą prawą stronę równania (3.146). Korzystając z definicji formy $\mathcal{A}_B^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ możemy przekształcić (3.147) do postaci

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i \xi^{\frac{1}{2}}, D_j \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\Omega_B)} + \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{\frac{1}{2}} D_i \xi^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\Omega_B)} + \\ + \left(c^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\Omega_B)} = P. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Ponieważ

$$\sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i \xi^{\frac{1}{2}}, D_j \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L^2(\Omega_B)} \geq \theta |\xi^{\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2,$$

na mocy *Lematu 11* - str. 172, z równania (3.148) otrzymujemy następującą nierówność

$$\left(\frac{1}{\tau} - c_{\max} - \frac{b_{\max}^2}{\epsilon} \right) \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{1}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + (\theta - \epsilon) |\xi^{\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq P. \quad (3.149)$$

Możemy zatem, na mocy (3.147), przekształcić równanie (3.146) do nierówności

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\tau} - c_{\max} - \frac{b_{\max}^2}{\epsilon} \right) \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{1}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + (\theta - \epsilon) |\xi^{\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq \\
& \leq \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right), \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} \right\} + \\
& \quad + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right) - \partial_{t/2} W^0, \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} + \\
& \quad + \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \left(u^{\frac{1}{2}} - W^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right) + \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}} \left(W^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}} \right) - \hat{\mathcal{A}}_R^0 \left(W^0, \xi^{\frac{1}{2}} \right) \right\} = \\
& = \{J_1 - J_2\} + J_3 + J_4 + \{J_5 - J_6\}. \quad (3.150)
\end{aligned}$$

Prawą stronę powyższej nierówności rozszerzyliśmy o dyskretny iloczyn skalarny przestrzeni $L_h^2(\overline{\Omega}_B)$.

Oszacujemy teraz kolejno wyrazy prawej strony równania (3.150).

Ponieważ funkcja $\mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}(x)) \equiv 0$ dla $x \in \Omega_R^h$, korzystając z *Lematu 8* - str. 172, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|J_1 - J_2| &= \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right), \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} \right| \leq \\
&\leq \frac{Mh^2}{\epsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right) \right\|_{H^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \epsilon \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2.
\end{aligned}$$

Wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau}$ i dostajemy

$$|J_1 - J_2| \leq \frac{M\tau h^2}{\tilde{\epsilon}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} (n\tau, \cdot) \right\|_{H^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2. \quad (3.151)$$

Oszacujemy trzeci wyraz prawej strony (3.150)

$$|J_3| = \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \frac{1}{2}\tau \right) - \partial_{t/2} W^0, \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} \right|.$$

Korzystając z *rozwinienia w szereg Taylora* i *Lematu 11* - str. 172, możemy napisać

$$|J_3| = \left| \left(\tau \rho_1(u), \xi^{\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} \right| \leq \frac{\tau^2}{\epsilon} \|\rho_1(u)\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \epsilon \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2.$$

Wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau}$ i dostajemy

$$|J_3| \leq \frac{\tau^3}{\tilde{\epsilon}} \|\rho_1(u)\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2. \quad (3.152)$$

Rozważamy czwarty wyraz prawej strony (3.150). Z rozwinięcia w szereg Taylora mamy

$$|J_4| = \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \left(u^{\frac{1}{2}} - W^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right) \right| = \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \left(h\rho_2(u), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right) \right|,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \rho_2(u)(\hat{x}) &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\tilde{x}, \frac{\tau}{2} \right); & \tilde{x} &= (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2); \\ x_1 &\in (\hat{x}_1 - h, \hat{x}_1 + h), & x_2 &\in (\hat{x}_2 - h, \hat{x}_2 + h). \end{aligned}$$

Rozpisując formę dwuliniową $\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq \left| h \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i \rho_2(u), D_j \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \right| + \\ &\quad + \left| h \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{\frac{1}{2}} D_i \rho_2(u), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \right| + \\ &\quad + \left| h \left(c^{\frac{1}{2}} \rho_2(u), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} \right|. \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \in H_0^1(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})$, stosując wzory Greena mamy

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i \rho_2(u), D_j \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})} = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left(D_j \left(a_{ij}^{\frac{1}{2}} D_i \rho_2(u) \right), \mathcal{R}_{\overline{B}}(\xi^{\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}. \end{aligned}$$

Korzystając z tej nierówności oraz Lematu 11 dostajemy

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq \epsilon \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_B \cup \Omega_{\delta_R})}^2 + \\ &+ \frac{h^2}{\epsilon} \left\{ \check{a}_{\max}^2 \|\rho_2(u)\|_{H^2(\Omega)}^2 + b_{\max}^2 |\rho_2(u)|_{H^1(\Omega)}^2 + b_{\max}^2 \|\rho_2(u)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau}$ i korzystając z Lematu 12, dostajemy

$$|J_4| \leq \frac{C\tau h^2}{\tilde{\epsilon}} \|\rho_2(u)\|_{H^2(\Omega_B)}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2. \quad (3.153)$$

Oszacujemy teraz ostatnie wyraz prawej strony wyrażenia (3.150) oznaczone przez $\{J_5 - J_6\}$. Po odpowiednim pogrupowaniu dostajemy

$$\begin{aligned} |J_5 - J_6| &= \left| \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(W^{\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}}) - \hat{\mathcal{A}}_R^0(W^0, \xi^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \\ &\leq \left| \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{2}\partial_{t/2}W^0, \xi^{\frac{1}{2}}\right) \right| + \left| \frac{\tau}{2}\partial_{t/2}[\hat{\mathcal{A}}_R^0](W^0, \xi^{\frac{1}{2}}) \right| = |J_1^{56}| + |J_2^{56}|. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Oszacujemy pierwszy z wyrazów prawej strony nierówności (3.154).

Z rozwinięcia w szereg Taylora możemy napisać

$$\begin{aligned} |J_1^{56}| &= \left| \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{2}\partial_{t/2}W^0, \xi^{\frac{1}{2}}\right) \right| = \\ &= \frac{\tau}{2} \left| \mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) + (\tau + h)\rho_3(u), \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}})\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{\tau}{2} \left| \mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}})\right) \right| + \frac{\tau(\tau + h)}{2} \left| \mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}\left(\rho_3(u), \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}})\right) \right| \end{aligned}$$

Rozpisując dalej $\mathcal{A}_R^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ z nierówności Schwarz'a mamy dalej

$$\begin{aligned} |J_1^{56}| &\leq \frac{\tau}{2} a_{\max} \left| \frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} \left| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left\{ b_{\max} \left| \frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + c_{\max} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left\| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} (\tau + h) a_{\max} |\rho_3(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} \left| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} (\tau + h) \left\{ b_{\max} |\rho_3(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} + c_{\max} \|\rho_3(u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left\| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Korzystając w pierwszym wyrazie prawej strony otrzymanej nierówności nierówności odwrotnej (patrz np. [18]) i Lematu 15, dostajemy

$$\begin{aligned} |J_1^{56}| &\leq a_{\max} \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{h}{H}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) \right\|_{H^2(\Omega)} \frac{c}{h} \left\| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left\{ b_{\max} \left| \frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) \right|_{H^1(\Omega_\delta)} + c_{\max} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}\left(\cdot, \frac{1}{2}\tau\right) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left\| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ &\quad + a_{\max} \frac{\tau}{2} (\tau + h) |\rho_3(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} \frac{1}{h} \left\| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} (\tau + h) \left\{ b_{\max} |\rho_3(u)|_{H^1(\Omega_\delta)} + c_{\max} \|\rho_3(u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right\} \left\| \mathcal{R}_\delta(\xi^{\frac{1}{2}}) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Na mocy ϵ -nierówności otrzymujemy dalej

$$|J_1^{56}| \leq \epsilon \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \left(h^2 + \frac{\tau^4}{h^2} + \frac{\tau^2}{hH} \right) |\mathcal{M}(u)|^2,$$

wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau}$ ostatecznie dostajemy

$$|J_1^{56}| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}} \left(h^2 + \frac{\tau^4}{h^2} + \frac{\tau^2}{hH} \right) |\mathcal{M}(u)|^2. \quad (3.155)$$

Analogicznie otrzymujemy oszacowanie wyrazu J_2^{56} prawej strony (3.154)

$$\begin{aligned} & |J_2^{56}| \left| \frac{\tau}{2} \partial_{t/2} [\hat{\mathcal{A}}_R^0](W^0, \xi^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \\ & \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}} \left(h^2 + \frac{\tau^4}{h^2} + \frac{\tau^2}{hH} \right) |\mathcal{M}(u)|^2. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Wstawiając (3.155) i (3.156) do (3.154) dostajemy zatem

$$|J_5 - J_6| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}} \left(h^2 + \frac{\tau^4}{h^2} + \frac{\tau^2}{hH} \right) |\mathcal{M}(u)|^2. \quad (3.157)$$

Wstawiamy (3.151), (3.152), (3.153) i (3.157) do (3.150) i przenosimy odpowiednie wyrazy na lewą stronę. Daje to

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\epsilon}{\tau} - c_{\max} - \frac{b_{\max}^2}{\epsilon} \right) \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + \\ & + \frac{1}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + (\theta - \epsilon) |\xi^{\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq \frac{1}{\epsilon} \left(\tau h^2 + \tau^3 + \frac{\tau^3}{hH} + \frac{\tau^5}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Wybieramy odpowiednio małe $\epsilon \leq \frac{1}{2}$, tak żeby $\theta - \epsilon > \frac{\theta}{2}$ i jednocześnie. Zauważmy, że dla odpowiednio małego τ , zachodzi

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{\epsilon}{\tau} - c_{\max} - \frac{b_{\max}^2}{\epsilon} \right) \geq 0.$$

Dla tak wybranego ϵ i odpowiednio małego $\tau \leq \tau_0$ mamy zatem

$$\frac{1}{\tau} \|\xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 + |\xi^{\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \leq \mathcal{M} \left(\tau h^2 + \tau^3 + \frac{\tau^3}{hH} + \frac{\tau^5}{h^2} \right).$$

Dzielimy obustronnie powyższą nierówność przez τ i ostatecznie, pamiętając że $\xi^0(x) \equiv 0$ dla $x \in \Omega^h$, otrzymujemy

$$\|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \leq \mathcal{M} \left(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^2}{hH} + \frac{\tau^4}{h^2} \right). \quad (3.158)$$

Przechodzimy teraz do szacowania wyrazów z obszaru Ω_R . Z równania (3.29.a), dla każdego $\varphi \in V_\delta^h(\Omega)$ mamy

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_R^{\frac{1}{2}}(U^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\varphi)) &= -\hat{\mathcal{A}}_B^0(U^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi)) - (\partial_{t/2}U^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ &\quad + (f^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego, możemy (3.29.b) dla $n = 1$, zapisać w postaci

$$\begin{aligned} 2(\partial_t U^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + (\partial_t U^0, \mathcal{R}_R(\varphi))_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \mathcal{A}_R^1(U^1, \varphi) &= \\ = (f^1, \mathcal{R}_R(\varphi))_{L^2(\Omega_R)} + \frac{\tau}{2}(\partial_{t/2}f^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L^2(\Omega_\delta)} + \\ + \hat{\mathcal{A}}_R^0(U^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi)) + 2(\partial_{t/2}U^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}, \end{aligned}$$

co przekształcamy dalej do

$$\begin{aligned} 2(\partial_t \xi^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + (\partial_t \xi^0, \mathcal{R}_R(\varphi))_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \mathcal{A}_R^1(\xi^1, \varphi) &= \\ = (f^1, \mathcal{R}_R(\varphi))_{L^2(\Omega_R)} - (\partial_t W^0, \mathcal{R}_R(\varphi))_{L_h^2(\Omega_R^h)} - \mathcal{A}_R^1(W^1, \mathcal{R}_R(\varphi)) + \\ - \hat{\mathcal{A}}_R^1(W^1, \mathcal{R}_\delta(\varphi)) + \hat{\mathcal{A}}_R^0(W^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi)) + \\ - \frac{\tau}{2}(\partial_{t/2}f^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L^2(\Omega_\delta)} + 2(\partial_{t/2}\xi^0, \mathcal{R}_\delta(\varphi))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}. \end{aligned} \tag{3.159}$$

Ponieważ dla każdego $\varphi \in V_R^h(\Omega)$ z równań (3.1.a)-(3.1.b), na pierwszej warstwie czasowej mamy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, \tau), \mathcal{R}_R(\varphi) \right)_{L^2(\Omega_R)} + a(u(\cdot, \tau), \mathcal{R}_R(\varphi)) = (f^1, \mathcal{R}_R(\varphi))_{L^2(\Omega_R)}, \tag{3.160}$$

po odjęciu stronami (3.159) i (3.160), dostajemy dla $\varphi = \xi^1$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\tau} (\xi^1, \mathcal{R}_\delta(\xi^1))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \frac{1}{\tau} (\xi^1, \mathcal{R}_R(\xi^1))_{L_h^2(\Omega_R^h)} + \mathcal{A}_R^1(\xi^1, \xi^1) = \\
& = \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, \tau), \mathcal{R}_R(\xi^1) \right)_{L^2(\Omega_R)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, \tau), \mathcal{R}_R(\xi^1) \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} \right\} + \\
& \quad + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, \tau) - \partial_t W^0, \mathcal{R}_R(\xi^1) \right)_{L_h^2(\Omega_R^h)} \right\} + \\
& \quad + a_R(u^1 - W^1, \mathcal{R}_R(\xi^1)) + \\
& \quad - \left\{ \hat{\mathcal{A}}_R^1(W^1, \mathcal{R}_\delta(\xi^1)) - \hat{\mathcal{A}}_R^1(W^1, \mathcal{R}_\delta(\xi^1)) \right\} + \\
& \quad - \frac{\tau}{2} (\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^1))_{L^2(\Omega_\delta)} + 2 (\partial_{t/2} \xi^0, \mathcal{R}_\delta(\xi^1))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} = \\
& \quad = \{K_1 - K_2\} + K_3 - K_4 - \{K_5 - K_6\} - K_7 + K_8.
\end{aligned} \tag{3.161}$$

W celu oszacowania kolejnych wyrazów (3.161) posłużymy się wynikami, które uzyskaliśmy przy szacowaniu (3.150) - str. 118.

Wyraz $|K_1 - K_2|$ szacujemy analogicznie jak $|J_1 - J_2|$.

Wyraz $|K_3|$ szacujemy tak jak $|J_3|$.

Wyraz $|K_4|$ szacujemy tak jak $|J_4|$.

Wyraz $|K_5 - K_6|$ szacujemy tak jak $|J_5 - J_6|$.

Pozostaje ograniczyć wyrazy K_7 oraz K_8 .

Korzystając z *Lemat 11* - str. 172, mamy

$$|K_7| = \left| \frac{\tau}{2} (\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^1))_{L^2(\Omega_\delta)} \right| \leq \frac{\tau^2}{\epsilon} \|\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \epsilon \|\xi^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2,$$

wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau}$ dostajemy

$$|K_7| \leq \frac{\tau^3}{\tilde{\epsilon}} \|\partial_{t/2} f^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2. \tag{3.162}$$

Podobnie szacujemy wyrażenie oznaczone przez K_8 .

$$|K_8| = \left| 2 (\partial_{t/2} \xi^0, \mathcal{R}_\delta(\xi^1))_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right| \leq \frac{4}{\epsilon} \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \epsilon \|\xi^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2,$$

wybierając w powyższym $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau}$ dostajemy

$$|K_8| \leq \frac{\tau}{\tilde{\epsilon}} \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \frac{\tilde{\epsilon}}{\tau} \|\xi^1\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2. \tag{3.163}$$

Podobnie jak przy dowodzie (3.158), przenosimy odpowiednie wyrazy na lewą stronę (3.161), i dla odpowiednio dobranego ϵ i $\tau \leq \tau_0$, dzielimy obie strony powstałego wyrażenia przez τ . Na mocy faktu $\xi^0(x) \equiv 0$ dla $x \in \Omega^h$, otrzymujemy

$$\|\partial_t \xi^1\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq \frac{1}{\epsilon} \left(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^2}{hH} + \frac{\tau^4}{h^2} \right) + \epsilon \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2.$$

W celu oszacowania ostatniego wyrazu korzystamy z (3.158) i ostatecznie

$$\|\partial_t \xi^1\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 \leq |\mathcal{M}(u)|^2 \left(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^2}{hH} + \frac{\tau^4}{h^2} \right). \quad (3.164)$$

Pozostaje pokazać oszacowanie na $\|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2$.

Na mocy (3.158) i (3.164) mamy

$$\begin{aligned} \|\partial_{t/2} \xi^{\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 &= \left\| \frac{\xi^1 - \xi^{\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 = \left\| \frac{(\xi^1 - \xi^0) - (\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^0)}{\frac{\tau}{2}} \right\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ &\leq 8 \|\partial_t \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + 2 \|\partial_{t/2} \xi^0\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq |\mathcal{M}(u)|^2 \left(h^2 + \tau^2 + \frac{\tau^2}{hH} + \frac{\tau^4}{h^2} \right). \end{aligned} \quad (3.165)$$

Łącząc (3.158), (3.164) oraz (3.165) □

Poniższy *Lemat 6* jest lematem pomocniczym, wykorzystanym w dowodzie *Twierdzenia 8* o oszacowaniu błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w słabych normach.

Lemat 6. *Niech funkcje ξ^{n-1} , $\xi^{n-\frac{1}{2}}$ dla $n = 1, \dots, N$ zadane będą wzorami (3.49), str. 74. Niech także współczynniki formy dwuliniowej $\mathcal{A}^n(\cdot, \cdot)$ spełniają założenia (3.30) (-str. 64) oraz (3.50) (-str. 74). Wtedy ma miejsce oszacowanie*

$$\begin{aligned} \tau \left| \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(\xi^{n-1}, \xi^{n-\frac{1}{2}}) \right\} \right| &\leq \\ &\leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ &+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right), \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{M} jest stałą dodatnią niezależną od τ, h oraz H .

Dowód. Dowód tego *Lematu* bazuje na następującej obserwacji wynikającej z postaci równań schematu (3.29.a)-(3.29.d). Zauważmy mianowicie, że z równania (3.29.c) biorąc $U^{n-\frac{1}{2}} = \xi^{n-\frac{1}{2}} + W^{n-\frac{1}{2}}$, dla $\varphi = \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})$ mamy

$$\begin{aligned} & \left(\partial_{t/2} \xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta \xi^{n-\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ & + \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(\xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) = \\ & = (f^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^n))_{L^2(\Omega_\delta)} - \left(\partial_{t/2} W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ & - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right), \end{aligned}$$

a z równania (3.1) dla $\varphi = \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})$ mamy

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} + \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) = \\ & = (f^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}))_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Po odjęciu dwóch powyższych równań otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(\xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) = \\ & = - \left(\partial_{t/2} \xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta \xi^{n-\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \\ & + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} - \left(\partial_{t/2} W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right\} + \\ & + \left\{ \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) + \right. \\ & \left. - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) \right\} = \\ & = Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{aligned} \tag{3.166}$$

Zauważmy, że szacując wyrażenia Z_1, Z_2, Z_3 jednocześnie otrzymamy oszacowanie wyrazów z tezy *Lematu* dla ustalonego n .

Oszacujmy zatem wyrażenia oznaczone przez Z_1, Z_2, Z_3 .

Zauważmy, że pierwszy wyraz prawej strony (3.166) z nierówności *Schwarza* i *Lematu 10* - str. 172 daje

$$\begin{aligned} |Z_1| & = \left| \left(\partial_{t/2} \xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta \xi^{n-\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right| \leq \| \partial_{t/2} \xi^{n-1} \|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \| \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \leq \\ & \leq \| \partial_{t/2} \xi^{n-1} \|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \sqrt{h} \| \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_{L^2(\Gamma)} \leq \\ & \leq \sqrt{h} \| \partial_{t/2} \xi^{n-1} \|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \left\{ | \xi^{n-\frac{1}{2}} |_{H^1(\Omega_B)} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{H}} \right) \| \xi^{n-\frac{1}{2}} \|_{L_h^2(\overline{\Omega_B^h})} \right\}. \end{aligned}$$

Stosując ϵ -nierówność dostajemy zatem

$$|Z_1| \leq \epsilon \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega_B^h})}^2 \right\} + \frac{h}{\epsilon H} \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2. \quad (3.167)$$

Zauważmy także, że korzystając z *Lematu 8* - str. 172 oraz *rozwinięcia w szereg Taylora* mamy

$$\begin{aligned} |Z_2| &= \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} - \left(\partial_{t/2} W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right| \leq \\ &\leq \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right| + \\ &\quad + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right) - \partial_{t/2} W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right| \leq \\ &\leq \frac{h^2}{\epsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \left(\cdot, \left(n - \frac{1}{2} \right) \tau \right) \right\|_{H^2(\Omega_\delta)}^2 + \epsilon \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \left| \left(\tau \rho(u), \xi^{n-\frac{1}{2}} \right)_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} \right|. \end{aligned}$$

Stosując *Lemat 11* - str. 172, otrzymujemy zatem

$$|Z_2| \leq \epsilon \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \mathcal{M}(u) (\tau^2 + h^2). \quad (3.168)$$

Zauważmy również, że z warunku trójkąta mamy

$$\begin{aligned} |Z_3| &= \left| \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(u^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) - \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}}(W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) + \right. \\ &\quad \left. - \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1}(W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) \right| \leq \\ &\leq \left| \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) \right| + \\ &+ \left| \frac{\tau}{2} [\partial_{t/2} \mathcal{A}_R^{n-1}](W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) \right| + \left| \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_R^{n-1}(\partial_{t/2} W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) \right| = \\ &= Z_{31} + Z_{32} + Z_{33}. \quad (3.169) \end{aligned}$$

Z definicji $\mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$ oraz faktu wynikającego z *rozwinięcia w szereg Taylora*, tj. $\eta^{n-\frac{1}{2}} = h\rho(u^{n-\frac{1}{2}})$, mamy

$$\begin{aligned} |Z_{31}| &= \left| \mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\eta^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})) \right| \leq \\ &\leq \left| h \sum_{ij=1}^2 \left(a_{ij}^{n-\frac{1}{2}} D_i \rho(u^{n-\frac{1}{2}}), D_j \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right| + \\ &+ \left| h \sum_{i=1}^2 \left(b_i^{n-\frac{1}{2}} D_i \rho(u^{n-\frac{1}{2}}), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right| + \left| h \left(c^{n-\frac{1}{2}} \rho(u^{n-\frac{1}{2}}), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right|. \end{aligned}$$

Ponieważ $(\mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}))(x) \equiv 0$ dla każdego spoza Γ^h , z wzorów Greena otrzymujemy

$$\begin{aligned} & h \sum_{ij=1}^2 \left(a_{ij}^{n-\frac{1}{2}} D_i \rho(u^{n-\frac{1}{2}}), D_j \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} = \\ & = h \sum_{ij=1}^2 \left(D_j \left(a_{ij}^{n-\frac{1}{2}} D_i \rho(u^{n-\frac{1}{2}}) \right), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)}. \end{aligned}$$

Korzystając z tego oraz *Lematu 11* - str. 172, dostajemy

$$|Z_{31}| \leq \epsilon \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)} + \frac{h^2 \mathcal{M}(u)}{\epsilon}. \quad (3.170)$$

Oszacujemy teraz wyrażenie prawej strony (3.169) oznaczone symbolem Z_{32} . Z ograniczoności pochodnych współczynników formy dwuliniowej $\mathcal{A}_R^{n-\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$, tzn. funkcji z ograniczoności funkcji $\partial_{t/2} a^{n-\frac{1}{2}}$, $\partial_{t/2} b^{n-\frac{1}{2}}$ oraz $\partial_{t/2} c^{n-\frac{1}{2}}$ dostajemy

$$\begin{aligned} |Z_{32}| &= \left| \frac{\tau}{2} [\partial_{t/2} \mathcal{A}_R^{n-1}] \left(W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{\tau}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(\partial_{t/2} a_{ij}^{n-1} D_i W^{n-\frac{1}{2}}, D_j \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right| + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left| \sum_{i=1}^2 \left(\partial_{t/2} b_i^{n-1} D_i W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right| + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left| \left(\partial_{t/2} c^{n-1} W^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right|. \quad (3.171) \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że $W^{n-\frac{1}{2}}$ jest liniowym interpolantem funkcji $u^{n-\frac{1}{2}}$, otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} |Z_{32}| &\leq \frac{\tau}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(\partial_{t/2} a_{ij}^{n-1} D_i u^{n-\frac{1}{2}}, D_j \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right| + \\ &+ \frac{\tau(\tau+h)}{2} \left| \sum_{i,j=1}^2 \left(\partial_{t/2} a_{ij}^{n-1} D_i \rho(u), D_j \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)} \right| + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left(\rho(b, c, u), \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right)_{L^2(\Omega_\delta)}. \quad (3.172) \end{aligned}$$

Z nierówności Schwarzza, Lematu 15 i nierówności odwrotnej dostajemy

$$\begin{aligned}
|Z_{32}| &\leq \frac{C\tau}{2} |u^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_\delta)} |\mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})|_{H^1(\Omega_\delta)} + \\
&+ \frac{C\tau(\tau+h)}{2} |\rho(u^{n-\frac{1}{2}})|_{H^1(\Omega_\delta)} |\mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})|_{H^1(\Omega_\delta)} + \frac{\tau}{2} \|\rho(b, c, u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)} \leq \\
&\leq \frac{C\tau}{2} \left\{ \sqrt{\frac{h}{H}} |u^{n-\frac{1}{2}}|_{H^2(\Omega)} + (\tau+h) |\rho(u^{n-\frac{1}{2}})|_{H^1(\Omega_\delta)} \right\} \frac{c}{h} \|\mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})\|_{L^2(\Omega_\delta)} + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} \|\rho(b, c, u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\|\mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}})\|_{L^2(\Omega_\delta)} \leq h^{\frac{1}{2}} \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Gamma)}$, korzystając z Lematu 10 - str. 172, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|Z_{32}| &\leq \frac{C\tau}{2\sqrt{h}} \left\{ \sqrt{\frac{h}{H}} |u^{n-\frac{1}{2}}|_{H^2(\Omega)} + (\tau+h) |\rho(u^{n-\frac{1}{2}})|_{H^1(\Omega_\delta)} \right\} \cdot \\
&\cdot \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{H}}\right) \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)} \right\} + \frac{\tau}{2} \|\rho(b, c, u)\|_{L^2(\Omega_\delta)} \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega_\delta)}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie, z ϵ -nierówności daje to

$$\begin{aligned}
|Z_{32}| &\leq \epsilon \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
&+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \tag{3.173}
\end{aligned}$$

Analogicznie szacujemy wyraz Z_{33} prawej strony (3.169). Tym razem w miejsce odpowiedniej regularności współczynników formy $\mathcal{A}^{n-\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$, korzystamy z opowiedniej regularności rozwiązania u^{n-1} i dostajemy

$$\begin{aligned}
|Z_{33}| &= \left| \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_R^{n-1} \left(\partial_{t/2} W^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) \right| \leq \\
&\leq \epsilon \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
&+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \tag{3.174}
\end{aligned}$$

Korzystając z oszacowań (3.170), (3.173) oraz (3.174) nierówność (3.169), przepisujemy do postaci

$$\begin{aligned}
|Z_3| &\leq \epsilon \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\
&+ \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \tag{3.175}
\end{aligned}$$

Na mocy oszacowań (3.167), (3.168) oraz (3.175) równość (3.166) przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(\xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) \leq \\ & \leq \epsilon \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \frac{h}{\epsilon H} \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & \quad + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \end{aligned} \quad (3.176)$$

Z nierówności (3.176) mamy zatem

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(\xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) \right\} \leq \\ & \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \frac{h}{\epsilon H} \tau \sum_{n=1}^N \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \\ & \quad + \tau \sum_{n=1}^N \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że korzystając z *Twierdzenia 7* - o zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*,

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\epsilon H} \tau \sum_{n=1}^N \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \frac{h}{\epsilon H} \max_{n=1, \dots, N} \|\partial_{t/2} \xi^{n-1}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \leq \\ & \leq \frac{h}{\epsilon H} \mathcal{M} \left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH} \right) \leq \mathcal{M} \left(\frac{\tau^2 h}{H} + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} \right). \end{aligned}$$

Ostatecznie zatem otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \hat{\mathcal{A}}_B^{n-\frac{1}{2}} \left(\xi^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) + \hat{\mathcal{A}}_R^{n-1} \left(\xi^{n-1}, \mathcal{R}_\delta(\xi^{n-\frac{1}{2}}) \right) \right\} \leq \\ & \leq \epsilon \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & \quad + \mathcal{M}(u) \left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^3}{H} + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^2}{H^2} + \frac{\tau^4}{hH} \right). \end{aligned}$$

□

4 Eksperymenty numeryczne

W rozdziale tym przedstawione zostały wyniki eksperymentów numerycznych, których zadaniem było zbadanie stabilności i zbieżności proponowanej dyskretyzacji w przypadku $\Omega \subset \mathcal{R}$ oraz $\Omega \subset \mathcal{R}^2$. Naszym głównym celem było skonfrontowanie wyników teoretycznych o rzędzie zbieżności, przedstawionych w *Twierdzeniach 3, 4, 7, 8* z wynikami odpowiednio przeprowadzonych eksperymentów numerycznych oraz potwierdzenie stabilności schematów (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d) - wyników *Twierdzeń 1, 2, 5, 6*.

W pierwszej części rozdziału badane były stabilność i zbieżność schematu (2.14.a)-(2.14.d) przy podziale odcinka $\Omega \subset \mathcal{R}$ na pododcinki.

Druga seria eksperymentów miała na celu zbadanie stabilności i zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) przy dekompozycji kwadratu Ω w tzw. *kratę*.

W obu tych seriach szczególną uwagę zwróciliśmy na zależność błędu zbieżności rozważanych metod od ilości podobszarów na jaką został podzielony wyjściowy obszar Ω .

Dodatkowo, w ostatniej części tego rozdziału, w przypadku $\Omega \subset \mathcal{R}$ przy podziale obszaru na większą liczbę pododcinków i w przypadku $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ przy dekompozycji obszaru na tzw. *pasy* (zobacz [11]), przedstawione zostały wyniki eksperymentów przeprowadzonych na *sieci komputerowej*, mającej symulować *klaster obliczeniowy*. W tej części eksperymentów szczególną uwagę zwróciliśmy na przydatność proponowanej dyskretyzacji w ujęciu obliczeń równoległych.

Wszystkie powstałe podczas dyskretyzacji układy równań, były rozwiązywane iteracyjnie metodą *CG* według implementacji podanej w [10]. Zastosowaliśmy *kryterium stopu* : $res = 10^{-20}$.

Kod implementacji został stworzony na bazie języka *C++*, a do obliczeń równoległych wykorzystaliśmy bibliotekę *Message-Passing Interface (MPI)*.

4.1 Eksperymenty numeryczne - 1D

W tym podrozdziale przedstawione zostaną wyniki eksperymentów numerycznych przeprowadzonych z użyciem schematu (2.14.a)-(2.14.d). Ich celem było potwierdzenie stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d), a także potwierdzenie wyników teoretycznych o rzędzie zbieżności rozważanego schematu, tj. oszacowań zawartych w *Twierdzeniach 3, 4*.

Schemat (2.14.a)-(2.14.d) został zastosowany do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania zagadnienia (2.1.a)-(2.1.c), na $\Omega = (0, 10)$, przy $\mathcal{A}(t; u, v) = (Du, Dv)_{L^2(\Omega)}$ i znanym rozwiązaniu dokładnym

$$u(x, t) = x \sin\left(\frac{2\pi}{10}x\right) \cos(t) \quad (4.1)$$

Zachowanie schematu (2.14.a)-(2.14.d) w przypadku innych funkcji wybranych do testów było podobne.

W tej serii doświadczeń, proponowany schemat badany był w przypadku podziału odcinka Ω na naprzemian położone pododcinki typu *Red* i *Black*.

W każdej serii eksperymentów, w celu maksymalnego uproszczenia implementacji przyjęliśmy następujące założenia:

- wyjściowy obszar Ω dzielony był na podobszary jednakowej długości H ;
- na każdym z podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} wprowadzaliśmy taką samą regularną siatkę przestrzenną o stałym kroku h , tak żeby $H = lh$, dla zadanej całkowitej liczby l ;

Przeprowadzone zostały następujące serie eksperymentów:

1. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H ;
2. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym stosunku $\frac{H}{h}$;
3. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H ;
4. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym stosunku $\frac{H}{h}$;

Cztery wyżej wymienione przypadki pozwoliły miarodajnie ocenić zgodność wyników teoretycznych z numerycznymi. Pozwalają one na zbadanie stabilności oraz rzędu zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d). Dają one także możliwość zbadania związku błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) od liczby podobszarów, na które podzielony został wyjściowy obszar Ω .

W kolejnych seriach eksperymentów błąd zrozwiązania schematu (2.14.a)-(2.14.d) oznaczaliśmy przez

- \mathcal{E} , w przypadku *silnych norm*, zobacz *Twierdzenie 3*, tzn.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 \equiv & \max_{n=1, \dots, N-1} \left\{ \|\partial_{t/2}\eta^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2}\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=1, \dots, N-1} \left\{ \|\partial_t\eta^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \|\bar{\partial}_x\partial_t\eta^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\bar{\partial}_x\partial_t\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

- \mathcal{F} , w przypadku *slabych norm*, zobacz *Twierdzenie 4*, tzn.

$$\mathcal{F}^2 \equiv \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ \|\bar{\partial}_x \eta^n\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_R^h)}^2 + \|\bar{\partial}_x \eta^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\bar{\Omega}_B^h)}^2 \right\}.$$

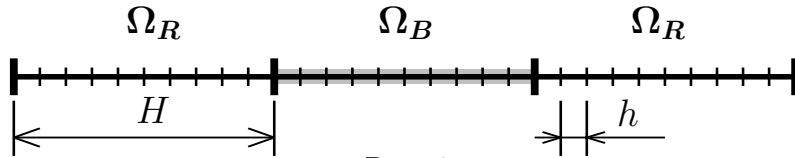
W każdym pojedynczym eksperymencie mierzony był zarówno błąd \mathcal{E} jak i \mathcal{F} , a otrzymane wyniki, po przedstawieniu w osobnych tabelach i na odpowiednich wykresach, porównywane były z wynikami *Twierdzeń 3 i 4*.

4.1.1 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H

W tym podrozdziale przebadane zostały stabilność i zbieżność schematu (2.14.a)-(2.14.d) dla różnych wartości h , przy stałej wartości stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonej z góry dekompozycji Ω , tj. przy ustalonym H .

W tej serii eksperymentów numerycznych skupiliśmy uwagę na najbardziej istotnych własnościach naszego schematu z punktu widzenia praktyki. Dla schematów stosowanych do dyskretyzacji zagadnień parabolicznych, ustalony stosunek $\frac{\tau}{h^2}$ zapewnia bowiem optymalną zbieżność - patrz np. [24]. Z praktycznego punktu widzenia zachowanie się schematu przy ustalonym H , czyli przy ustalonej liczbie podobszarów, na które dokonana została dekompozycja, jest także najbardziej istotną informacją. Zazwyczaj dekompozycji zadania wyjściowego dokonujemy przed rozpoczęciem obliczeń, mając przede wszystkim na uwadze zasoby sprzętowe - np. liczba dostępnych procesorów komputera wieloprocesorowego lub liczba dostępnych jednostek w klastrze obliczeniowym.

W tej serii doświadczeń wyjściowy obszar Ω podzielony został na na trzy podobszary, kolejno *Red*, *Black*, *Red*. Każdy z podobszarów był pododcinkiem o długości $H = \frac{10}{3}$. Dekompozycja ta została przedstawiona na *Rys. 9*.



Rys. 9

Przy ustalonym H zmniejszane było h - krok siatki przestrzennej, której punkty stanowią zbiór Ω^h . W kolejnych seriach doświadczenia h było równe $\left\{ \frac{H}{5}, \frac{H}{10}, \frac{H}{20}, \dots, \frac{H}{320}, \frac{H}{640} \right\}$. Wraz ze zmniejszającym się h , zmniejszane było również τ - krok siatki czasowej, z zachowaniem stałej wartości stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Stosunek ten równy był

jednej z trzech wartości $\{0.1, 1, 10\}$. Przy innych wartościach stosunku $\frac{\tau}{h^2}$, zachowanie schematu (2.14.a)-(2.14.d) było analogiczne do opisywanego tutaj. Za T przyjęliśmy $(2 \cdot \pi)$.

Warto zwrócić uwagę, że przy opisanej wyżej dekompozycji, wybrana do testów funkcja (4.1), ma w punktach *grubej siatki* Ω_{Γ}^h , tj. na rozcięciach, pochodną istotnie różną od zera, która dodatkowo jest zmienna w czasie.

Eksperymenty przeprowadzone przy różnych wartościach stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ potwierdziły stabilność schematu (2.14.a)-(2.14.d). Zachowanie schematu (2.14.a)-(2.14.d) przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2} \gg 10$, nie odbiegało w żaden sposób od jego zachowania przy przedstawionych w tej części pracy wartościach $\frac{\tau}{h^2} = \{0.1, 1, 10\}$.

Wyniki pomiaru błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach* dla tej serii eksperymentów przedstawione zostały w *Tab. 1*.

		$\tau/h^2 = 0.1$		$\tau/h^2 = 1$		$\tau/h^2 = 10$	
k	h	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$
1	$H/5$	8.2765e-2	-	6.2903e-1	-	-	-
2	$H/10$	1.6723e-2	4.9492	1.3730e-1	4.5814	-	-
3	$H/20$	3.9746e-3	4.2075	3.5297e-2	3.8898	4.1373e-1	-
4	$H/40$	1.1596e-3	3.4276	1.1127e-2	3.1722	1.0580e-1	3.9105
5	$H/80$	3.8293e-4	3.0282	3.7857e-3	2.9392	3.7209e-2	2.8434
6	$H/160$	1.3242e-4	2.8918	1.3205e-3	2.8669	1.3198e-2	2.8193
7	$H/320$	4.6473e-5	2.8494	4.6440e-4	2.8435	4.6383e-3	2.8454
8	$H/640$	-	-	-	-	1.6378e-3	2.8320

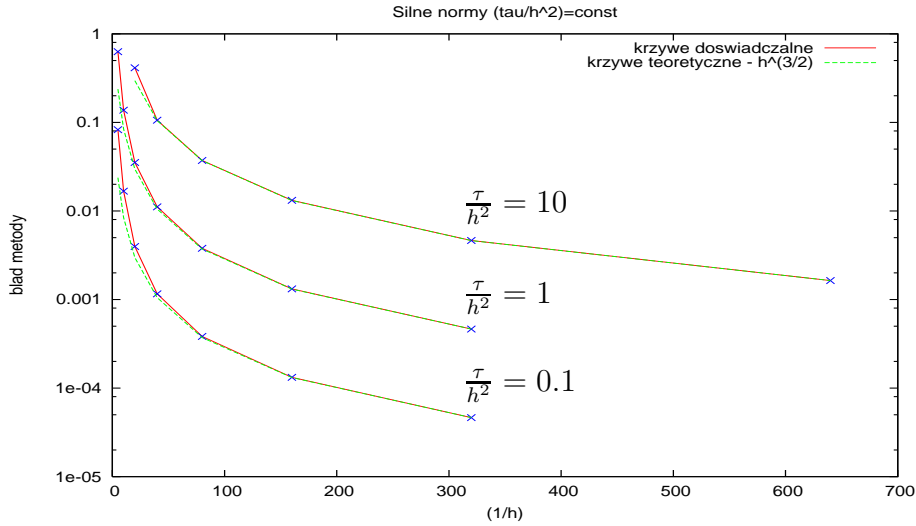
Tab. 1

W kolejnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym h , w kolejnych kolumnach natomiast przedstawione zostały wyniki eksperymentów oraz rząd zbieżności ($\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$) przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

Wyniki z *Tab. 1* przedstawione zostały w postaci trzech krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys. 10*. Krzywe te opisane zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi poziomej *Rys. 10*, odłożone zostały wartości $\frac{H}{h}$, tj. liczba węzłów każdego z podobszarów wyjściowego obszaru Ω . Oś pionowa tego wykresu, na której zastosowaliśmy skalę logarymiczną, wyraża wartość błędu zbieżności schematu.

Przeanalizujmy teraz zgodność eksperymentów z *Twierdzeniem 3*, o zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*. Na mocy *Twierdzenia 3* błąd zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach* jest rzędu $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}}\right)$, co przy $\frac{\tau}{h^2} = const$ i $H = const$ daje

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h^4 + h^4 + \frac{h^4}{h}}\right) = \mathcal{O}\left(h^{\frac{3}{2}}\right).$$



Rys. 10

Na *Rys. 10*, linią przerywaną, zaznaczone zostały dopasowane do każdej krzywej eksperymentalnej, krzywe wyrażające odpowiednie zależności $\mathcal{O}\left(h^{\frac{3}{2}}\right)$. Jak widać, bardzo dobrze opisują one zachowanie błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*. Wyniki eksperymentów są zatem zgodne z *Twierdzenie 3*.

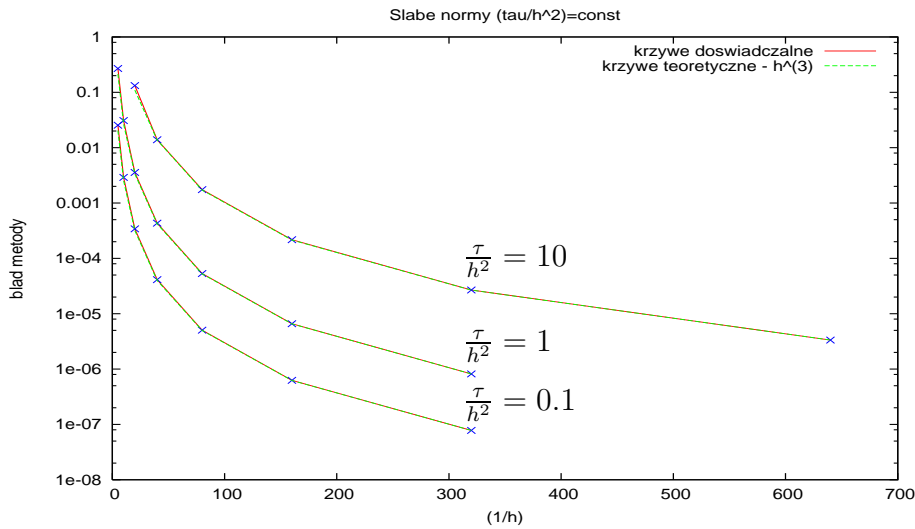
W tej samej serii doświadczeń, przy pomiarze błędu w *silnych normach*, \mathcal{E} , mierzony był także błąd naszego schematu w *normach słabych*, \mathcal{F} . Otrzymane wyniki zawarte zostały w *Tab. 2*.

k	h	$\tau/h^2 = 0.1$		$\tau/h^2 = 1$		$\tau/h^2 = 10$	
		\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$
1	H/5	2.5470e-2	-	2.6961e-1	-	-	-
2	H/10	2.8994e-3	8.7846	3.0862e-2	8.7360	-	-
3	H/20	3.4133e-4	8.4944	3.5610e-3	8.6667	1.3219e-1	-
4	H/40	4.1191e-5	8.2865	4.3290e-4	8.2259	1.3874e-2	9.5279
5	H/80	5.0535e-6	8.1510	5.3196e-5	8.1378	1.7486e-3	7.9343
6	H/160	6.2554e-7	8.0786	6.5850e-6	8.0784	2.1777e-4	8.0296
7	H/320	7.7812e-8	8.0391	8.1880e-7	8.0423	2.6879e-5	8.1019
8	H/640	-	-	-	-	3.3457e-6	8.0339

Tab. 2

W kolejnych wierszach tej tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym h , natomiast w kolejnych kolumnach powyższej tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów oraz rząd zbieżności przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

Dane z *Tab 2* przedstawione zostały w postaci trzech krzywych, narysowanych linią ciągłą na *Rys.11*. Krzywe te zostały opisane wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi odciętych *Rys.11*, odłożone zostały wartości $\frac{H}{h}$, tj. liczba węzłów każdego z podobszarów wyjściowego obszaru Ω . Oś rzędnych tego wykresu, w skali logarytmicznej, wyraża wartość błędu schematu mierzonego w *słabych normach*.



Rys. 11

Przeanalizujemy zgodność wyników eksperymentalnych z *Twierdzeniem 4*, o zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *słabych normach*.

Na mocy tego *Twierdzenia* błąd zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *słabych normach* jest rzędu $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^2}{H^2}}\right)$, co przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$, daje

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2 h}{H} + \frac{\tau^2}{H^2}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h^4 + h^4 + h^5}\right) = \mathcal{O}(h^2).$$

Na *Rys. 11* linią przerywaną zaznaczone zostały dopasowane do każdej krzywej eksperymentalnej zależności $\mathcal{O}(h^3)$. Jak widać, krzywe te bardzo dobrze opisują zachowanie błędów zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *słabych normach*. Wyniki eksperymentów są zatem o rząd lepsze od oszacowania, które zostało podane w *Twierdzeniu 4*.

Jak wiadomo z *teorii schematów różnicowych* - patrz np. [16], [23], takie zachowanie schematu (2.14.a)-(2.14.d) nie jest typowe, ponieważ schematy które są modyfikacją *schematu zamkniętego Eulera* mają rząd zbieżności $\mathcal{O}(\tau + h^2)$. Schemat (2.14.a)-(2.14.d) zbiega zatem za szybko. Podobne zachowanie zaobserwowaliśmy także dla innych przyjętych do testów funkcji. Takie wyniki eksperymentów można próbować wyjaśnić poprzez rozbić błąd analizowanego w *Twierdzeniu 4* na dwie części : błąd w węzłach *grubej siatki* Ω_{Γ}^h oraz błąd w pozostałych punktach Ω^h . Wkład tego pierwszego do globalnego błędu to $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\tau^2 h}{H}}\right)$, co przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ daje

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\tau^2 h}{H}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h^5}\right) = \mathcal{O}\left(h^{\frac{5}{2}}\right).$$

Wszystko wskazuje na to, że przy stosunkowo dużych parametrach dyskretyzacji τ, h , przeważa błąd w punktach *grubej siatki* - Ω_{Γ}^h . Najprawdopodobniej, przy dalszym zagęszczaniu siatki przestrzenno-czasowej szybkość zbieżności wyhamowałaby. Istnieje także możliwość, że oszacowanie podane w *Twierdzeniu 4* nie jest ostre. Nie jesteśmy jednak w stanie tego sprawdzić ze względów technicznych, ponieważ przy naszych zasobach sprzętowych wykonanie koniecznych obliczeń trwałoby za długo lub prawdopodobnie byłoby w ogóle niewykonalne.

4.1.2 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i zmiennym H

W tej serii eksperymentów numerycznych zbadana została zależność błędu zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) od liczby podobszarów, na którą została dokonana dekompozycja wyjściowego obszaru $\Omega = (0, 10)$. Zależność ta jest niezwykle istotna, a błąd idealnego do obliczeń równoległych algorytmu tego typu, powinien możliwie słabo zależeć od liczby podobszarów, na który został podzielony wyjściowy obszar Ω .

W tej serii doświadczeń wyjściowy odcinek Ω dzielony był w kolejnych seriach doświadczeń na coraz większą liczbę naprzemian położonych podobszarów typu *Red* i *Black*.

Przy ustalonym stosunku $\frac{H}{h} = \frac{1}{6}$ zmieniane było H - parametr *grubej siatki* Ω_{Γ}^h . Zachowanie się schematu (2.14.a)-(2.14.d) przy innym stosunku $\frac{h}{H}$ było analogiczne do tutaj opisanego. W kolejnych seriach doświadczenia H było równe $\left\{\frac{10}{2}, \frac{10}{4}, \frac{10}{6}, \dots\right\}$, co znaczy, że odcinek Ω podzielony był kolejno na 2, 4, 6, ... naprzemian położonych podobszarów różnych typów. Wraz ze zmniejszającym się H , proporcjonalnie zmniejszane było h - krok siatki przestrzennej. Wraz ze zmniejszającym się h zmniejszane było również τ z

zachowaniem stałego stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Stosunku ten, podobnie jak w poprzednich seriach eksperymentów, równy był jednej z trzech wartości $\{0.1, 1, 10\}$. Za T , podobnie jak poprzednio, przyjęliśmy $(2 \cdot \pi)$.

Przeprowadzone eksperymenty potwierdzają stabilność schematu, a wyniki otrzymane przy pomiarze błędu w *silnych normach* przedstawione zostały w *Tab. 3*.

W kolejnych wierszach tej tabeli przedstawione zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym H . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki eksperymentów przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

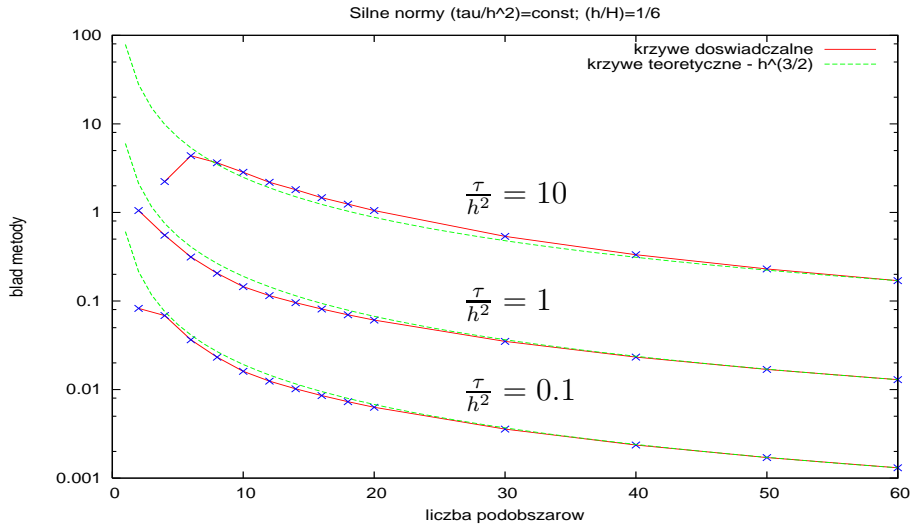
			$\tau/h^2 = 0.1$	$\tau/h^2 = 1$	$\tau/h^2 = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k
1	$L/2$	2	8.2539e-2	1.0497e+0	-
2	$L/4$	4	6.8476e-2	5.5272e-1	2.2322e+0
3	$L/6$	6	3.6453e-2	3.1359e-1	4.3655e+0
4	$L/8$	8	2.3207e-2	2.0572e-1	3.6332e+0
5	$L/10$	10	1.6086e-2	1.4512e-1	2.8428e+0
6	$L/12$	12	1.2450e-2	1.1489e-1	2.1895e+0
7	$L/14$	14	1.0192e-2	9.5665e-2	1.8077e+0
8	$L/16$	16	8.5421e-3	8.1098e-2	1.4682e+0
9	$L/18$	18	7.2909e-3	6.9793e-2	1.2419e+0
10	$L/20$	20	6.3149e-3	6.0804e-2	1.0499e+0
11	$L/30$	30	3.5775e-3	3.4976e-2	5.3603e-1
12	$L/40$	40	2.3646e-3	2.3268e-2	3.3320e-1
13	$L/50$	50	1.7080e-3	1.6867e-2	2.2998e-1
14	$L/60$	60	1.3069e-3	1.2935e-2	1.6971e-1

Tab. 3

Dane z *Tab. 3* przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys. 12*. Krzywe te oznaczone zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi odciętych tego wykresu odłożona została liczba podobszarów, na które podzielony został wyjściowy obszar Ω . Przy przyjętych założeniach, liczba podobszarów K jest proporcjonalna do $\frac{1}{h}$, ponieważ

$$\left(K \sim \frac{1}{H}\right) \wedge (H \sim h) \implies \left(K \sim \frac{1}{h}\right). \quad (4.2)$$

Na osi rzędnych odłożona została wartość błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*.



Rys. 12

Przeanalizujemy teraz zgodność eksperymentów numerycznych z *Twierdzeniem 3*. *Twierdzenie* to mówi, że przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ oraz ustalonym stosunku $\frac{h}{H}$, rząd zbieżności wynosi

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^4 + h^4 + \frac{h^4}{h^2}} \right) = \mathcal{O}(h).$$

Na *Rys. 12*, linią przerywaną, dopasowane zostały do krzywych eksperymentalnych, odpowiednie zależności $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$. Jak widać, wyniki te są o *pół* rzędu lepsze niż te, które podaje *Twierdzenie 3*. Takie zachowanie błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) można próbować wyjaśnić tym, że w wynikach przeprowadzonych eksperymentów, przeważał błąd związany z wnętrzami poszczególnych podobszarów. Dla tych punktów błąd w *słabych normach* jest rzędu $\mathcal{O}(\tau + h^2)$, natomiast błąd związany z węzłami zbioru Ω_{Γ}^h jest rzędu $\mathcal{O}\left(\frac{\tau}{\sqrt{hH}}\right)$ - patrz dowód *Twierdzenia 3*.

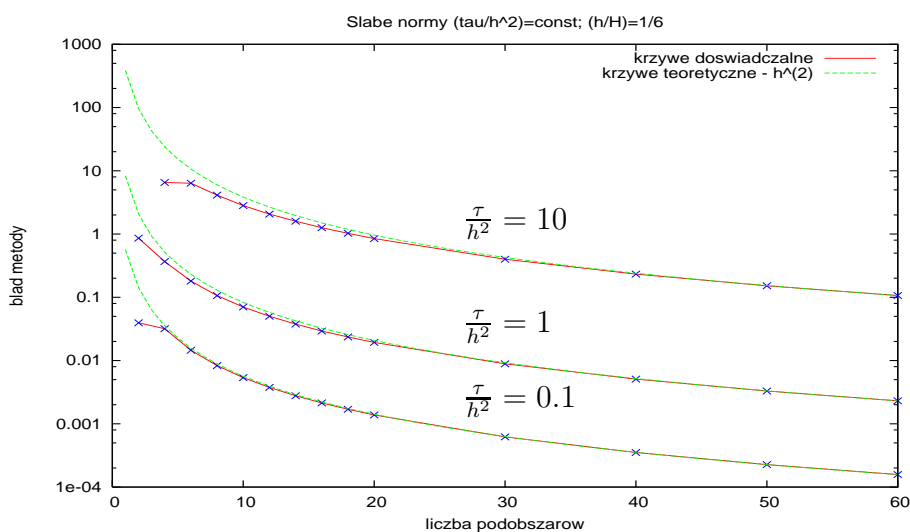
W tej samej serii doświadczeń, mierzony był również błąd schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *słabych normach*. Wartości błędu mierzone w tych normach zostały przedstawione w *Tab. 4*.

W kolejnych wierszach tej tabeli przedstawione zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym H . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki eksperymentów przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

			$\tau/h^2 = 0.1$	$\tau/h^2 = 1$	$\tau/h^2 = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k
1	L/2	2	3.9468e-2	8.6172e-1	-
2	L/4	4	3.1844e-2	3.6743e-1	6.5286e+0
3	L/6	6	1.4590e-2	1.8048e-1	6.3670e+0
4	L/8	8	8.3040e-3	1.0619e-1	4.1171e+0
5	L/10	10	5.3630e-3	7.0380e-2	2.8218e+0
6	L/12	12	3.7515e-3	5.0205e-2	2.0664e+0
7	L/14	14	2.7724e-3	3.7663e-2	1.5966e+0
8	L/16	16	2.1358e-3	2.9318e-2	1.2570e+0
9	L/18	18	1.6957e-3	2.3633e-2	1.0263e+0
10	L/20	20	1.3789e-3	1.9332e-2	8.4787e-1
11	L/30	30	6.2088e-4	8.8923e-3	3.9888e-1
12	L/40	40	3.5192e-4	5.0978e-3	2.3236e-1
13	L/50	50	2.2631e-4	3.2991e-3	1.5189e-1
14	L/60	60	1.5770e-4	2.3092e-3	1.0681e-1

Tab. 4

Dane z *Tab. 4* przedstawione zostały na *Rys. 13*, w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą. Krzywe te opisane zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi odciętych tego wykresu odłożona została liczba podobszarów, na które podzielony został wyjściowy obszar Ω . Przy przyjętych założeniach, liczba podobszarów K jest proporcjonalna do wartości wyrażenia $\frac{1}{h}$ - patrz (4.2). Na osi rzędnych odłożona została wartość błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w słabych normach.



Rys. 13

Zgodnie z *Twierdzeniem 4*, błąd zbieżności rozważanego schematu, przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i stałym stosunku $\frac{h}{H}$, jest rzędu

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{H^2}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h^4 + h^4 + \frac{h^4}{h^2}}\right) = \mathcal{O}(h).$$

Na *Rys. 23*, linią przerywaną, do każdej krzywej eksperymentalnej dopasowano zależność $\mathcal{O}(h^2)$ i jak widać idealnie zgadzają się one z wynikami eksperymentalnymi. Jest ono jednak o rząd lepsze od wyników podawanych w *Twierdzeniu 4*. Zachowanie takie zostało przez nas zaobserwowane także przy innych wartościach parametrów τ , h oraz H jak również przy innych przyjętych do testów funkcjach. Naszym zdaniem sugeruje ono, że *Twierdzenie 4* daje oszacowanie rzędu zbieżności metody, które nie jest optymalne względem zmiennej H .

4.1.3 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H

W tej serii eksperymentów zbadaliśmy zachowanie błędu zbieżności rozważanego schematu przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H . Przedstawiona tu seria eksperymentów jest analogiczna do tej z *Podrozdziału 4.1.1*, z tym że tutaj zakładamy stałość stosunku $\frac{\tau}{h}$, a nie $\frac{\tau}{h^2}$.

Wyjściowy obszar Ω podzielony został na trzy podobszary *Red*, *Black*, *Red*. Przy podziale odcinka Ω na większą liczbę podobszarów zachowanie naszego schematu było analogiczne. Każdy z pododcinków był wymiaru H , gdzie $H = \frac{10}{3}$. Sytuacja ta została przedstawiona na *Rys. 9* - str. 133.

Przy ustalonym H zmieniane było h - parametr siatki przestrzennej każdego z podobszarów $\Omega_{R_i}, \Omega_{B_j}$. W kolejnych seriach doświadczenia h było równe $\left\{\frac{H}{5}, \frac{H}{10}, \frac{H}{20}, \dots, \frac{H}{320}, \frac{H}{640}\right\}$. Wraz ze zmniejszającym się h , zmniejszane było również τ z zachowaniem stałego stosunku $\frac{\tau}{h}$ i równego jednej z trzech wartości 0.1, 1 i 10. Za T przyjęliśmy $(2 \cdot \pi)$.

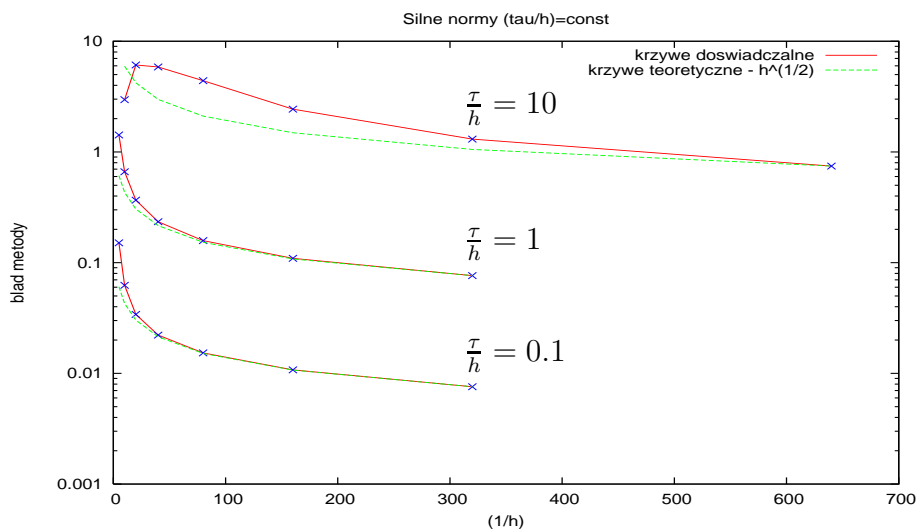
Eksperymenty, które przeprowadziliśmy w tej serii doświadczeń potwierdzają wyniki *Twierdzeń 1* i *2*. Schemat (2.14.a)-(2.14.d) był stabilny nawet przy wartościach stosunku $\frac{\tau}{h} \gg 10$.

W przypadku pomiaru błędu w *silnych normach*, otrzymane dane przedstawione zostały w *Tab. 5*. W kolejnych wierszach tabeli zostały zawarte wyniki eksperymentów przy ustalonej wartości parametru h . Kolejne kolumny tej tabeli zawierają natomiast wyniki eksperymentów oraz rząd zbieżności, przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$.

		$\tau/h = 0.1$		$\tau/h = 1$		$\tau/h = 10$	
k	h	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$
1	$H/5$	1.5086e-1	-	1.4246e+0	-	-	-
2	$H/10$	6.2349e-2	2.4196	6.6204e-1	2.1518	2.9654e+0	-
3	$H/20$	3.4077e-2	1.8297	3.6713e-1	1.8033	6.1105e+0	0.4853
4	$H/40$	2.2181e-2	1.5363	2.3430e-1	1.5669	5.8542e+0	1.0438
5	$H/80$	1.5314e-2	1.4484	1.5820e-1	1.4810	4.4060e+0	1.3287
6	$H/160$	1.0744e-2	1.4254	1.0930e-1	1.4474	2.4360e+0	1.8087
7	$H/320$	7.5738e-3	1.4186	7.6408e-2	1.4305	1.3055e+0	1.8660
8	$H/640$	-	-	-	-	7.4498e-1	1.7524

Tab. 5

Dane z *Tab. 5* przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys.14*. Odpowiednie krzywe podpisane zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h}$. Na osi poziomej *Rys.14*, odłożone zostały wartości $\frac{H}{h}$, tj. liczba węzłów każdego z podobszarów wyjściowego obszaru Ω . Oś pionowa tego wykresu, na której zastosowaliśmy skalę logarymiczną, wyraża wartość błędu zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) mierzona w *silnych normach*.



Rys. 14

Sprawdźmy zgodność eksperymentów z *Twierdzeniem 3*. Na mocy tego *Twierdzenia* błąd zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach* jest rzędu $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}}\right)$, co przy $\frac{\tau}{h} = const$ i $H = const$ daje

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h^2 + h^4 + \frac{h^2}{h}}\right) = \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Na *Rys. 14* linią przerywaną, zaznaczone zostały krzywe odpowiadające zbieżności rzędu $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$. Jak widać, idealnie odzwierciedlają one wyniki eksperymentów numerycznych, co potwierdza zgodność z *Twierdzeniem 3*.

W tej samej części eksperymentów mierzony był także błąd w *normach słabych*, a odpowiednie wyniki przedstawione zostały w *Tab. 6*.

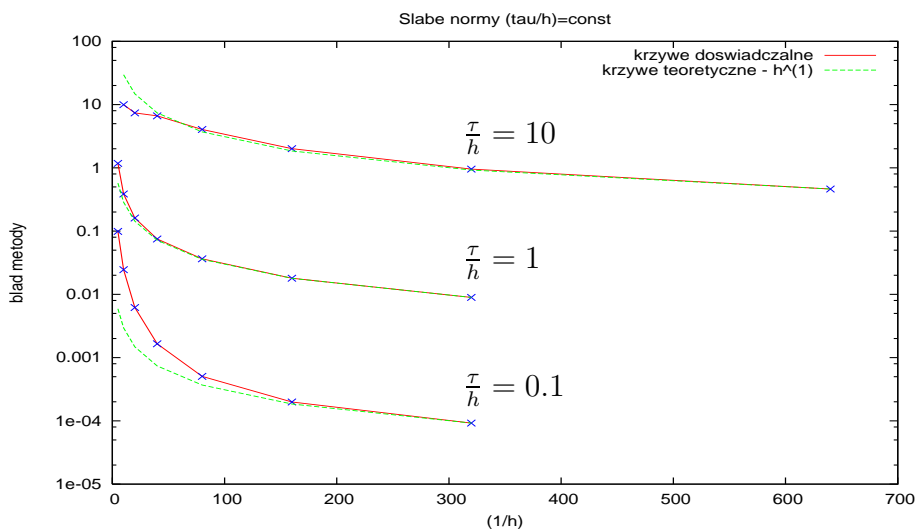
		$\tau/h = 0.1$		$\tau/h = 1$		$\tau/h = 10$	
k	h	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$
1	$H/5$	9.8837e-2	-	1.1765e+0	-	-	-
2	$H/10$	2.4580e-2	4.0210	3.8657e-1	3.0434	9.9524e+0	-
3	$H/20$	6.1867e-3	3.9730	1.6123e-1	2.3976	7.3868e+0	1.3473
4	$H/40$	1.6532e-3	3.7423	7.4902e-2	2.1525	6.6299e+0	1.1142
5	$H/80$	5.0559e-4	3.2698	3.6452e-2	2.0548	4.0501e+0	1.6370
6	$H/160$	1.9880e-4	2.5432	1.7996e-2	2.0256	2.0076e+0	2.0174
7	$H/320$	9.2299e-5	2.1539	8.9529e-3	2.0101	9.5658e-1	2.0987
8	$H/640$					4.6217e-1	2.0698

Tab. 6

W kolejnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym parametrze h triangulacji \mathcal{T}^h . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki eksperymentów przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$.

Dane z *Tab. 6* przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys.15*. Odpowiednie krzywe na *Rys.15*, oznaczone zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h}$. Podobnie jak na innych wykresach, na osi poziomej *Rys.15* odłożone zostały wartości $\frac{H}{h}$, tj. liczba punktów siatki każdego z podobszarów wyjściowego obszaru Ω . Oś pionowa tego wykresu, na której zastosowaliśmy skalę logarytmiczną, wyraża wartość błędu zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) mierzoną w *słabych normach*.

Z przedstawionych danych eksperymentalnych wynika, że przy ustalonym stosunku parametrów $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H , błąd schematu (2.14.a)-(2.14.d) jest rzędu $\mathcal{O}(h)$. Niestety, nie udało się pokazać tej zależności teoretycznie - przypomnijmy, że *Twierdzenie 4* podaje oszacowanie rzędu zbieżności schematu przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^{\frac{3}{2}+\alpha}}$, dla $\alpha \geq 0$.



Rys. 15

4.1.4 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i zmiennym H

Ta seria eksperymentów numerycznych jest analogiem do wcześniej przeprowadzonej i opisanej w *Podrozdziale 4.1.2*. Tym razem, przy zmieniającej się liczbie podobszarów, na które był dzielony wyjściowy odcinek Ω , z zachowaniem stałego stosunku $\frac{h}{H} = \frac{1}{6}$, utrzymywany był stały stosunek $\frac{\tau}{h}$, a nie jak to miało miejsce w *Podrozdziale 4.1.2*, stały stosunek $\frac{\tau}{h^2}$.

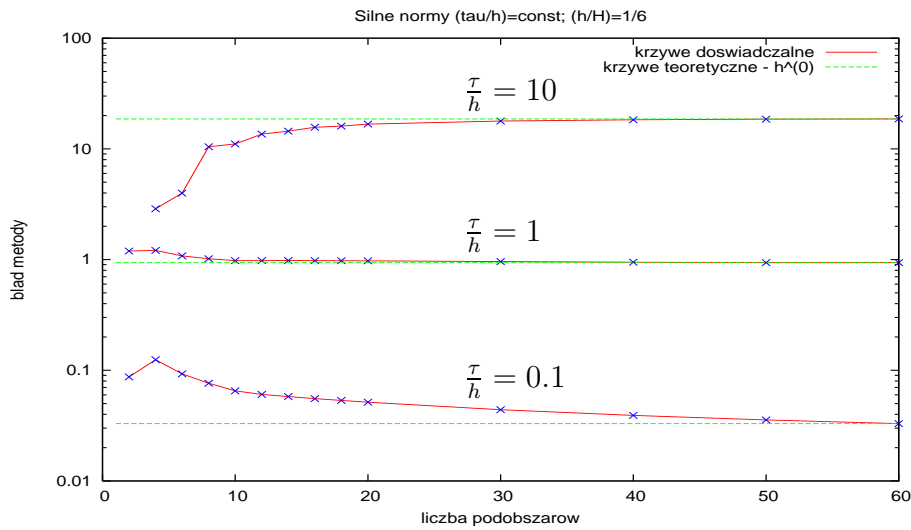
Przeprowadzone obliczenia są zgodne z *Twierdzeniami 1 i 2*, o stabilności schematu (2.14.a)-(2.14.d).

Wyniki tej części eksperymentów, przy pomiarze błędu zbieżności w *silnych normach*, przedstawione zostały w *Tab. 7*. W następujących po sobie wierszach tej tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów dla coraz mniejszych wartości parametru H . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki odpowiednich eksperymentów przy ustalonej wartości stosunku $\frac{\tau}{h}$.

Wyniki z *Tab. 7*, przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą, na *Rys. 16*, które zostały opisane wartościami stosunku $\frac{\tau}{h}$. Na osi odciętych tego wykresu odłożona została liczba podobszarów, na które podzielony został wyjściowy obszar Ω . Przy przyjętych założeniach, liczba podobszarów K jest proporcjonalna do $\frac{1}{h}$, gdzie h jest parametrem siatki przestrzennej - patrz (4.2). Na logarytmicznej osi rzędnych odłożona została wartość błędu zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *silnych normach*.

			$\tau/h = 0.1$	$\tau/h = 1$	$\tau/h = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k
1	$L/2$	2	8.7133e-2	1.1947e+0	-
2	$L/4$	4	1.2442e-1	1.2104e+0	2.8766e+0
3	$L/6$	6	9.2740e-2	1.0790e+0	3.9842e+0
4	$L/8$	8	7.6344e-2	1.0184e+0	1.0452e+1
5	$L/10$	10	6.5200e-2	9.7918e-1	1.1088e+1
6	$L/12$	12	6.0574e-2	9.7877e-1	1.3583e+1
7	$L/14$	14	5.7873e-2	9.8023e-1	1.4461e+1
8	$L/16$	16	5.5493e-2	9.7914e-1	1.5673e+1
9	$L/18$	18	5.3354e-2	9.7629e-1	1.6056e+1
10	$L/20$	20	5.1427e-2	9.7362e-1	1.6724e+1
11	$L/30$	30	4.4029e-2	9.5820e-1	1.7858e+1
12	$L/40$	40	3.9077e-2	9.4702e-1	1.8326e+1
13	$L/50$	50	3.5607e-2	9.3929e-1	1.8542e+1
14	$L/60$	60	3.2968e-2	9.3771e-1	1.8641e+1

Tab. 7



Rys. 16

Zgodnie z *Twierdzeniem 3*, rząd zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) przy ustalonym $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym $\frac{h}{H}$, wynosi

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^2 + h^4 + \frac{h^2}{hh}} \right) = \mathcal{O}(1).$$

Oznacza to, że w tym przypadku rozważany schemat nie jest zbieżny. Jak widać z przedstawionych wyżej eksperymentów, wynika zgodność *Twierdzenia 3* z rzeczywistymi obliczeniami numerycznymi.

W tej samej części eksperymentów mierzyliśmy błąd schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *słabych normach*. Wyniki tej części doświadczeń przedstawione zostały w *Tab. 8*.

			$\tau/h = 0.1$	$\tau/h = 1$	$\tau/h = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k
1	L/2	2	4.4829e-2	1.0119e+0	-
2	L/4	4	8.0938e-2	1.0300e+0	1.5252e+1
3	L/6	6	5.5572e-2	9.0902e-1	1.5013e+1
4	L/8	8	4.2787e-2	8.5266e-1	1.7373e+1
5	L/10	10	3.5310e-2	8.3379e-1	1.9347e+1
6	L/12	12	3.0450e-2	8.2754e-1	2.0517e+1
7	L/14	14	2.7003e-2	8.2622e-1	2.3452e+1
8	L/16	16	2.4449e-2	8.2715e-1	2.5408e+1
9	L/18	18	2.2485e-2	8.2888e-1	2.4876e+1
10	L/20	20	2.0941e-2	8.3092e-1	2.7389e+1
11	L/30	30	1.6389e-2	8.4057e-1	2.8310e+1
12	L/40	40	1.4208e-2	8.4758e-1	2.9636e+1
13	L/50	50	1.2952e-2	8.5258e-1	2.9718e+1
14	L/60	60	1.2140e-2	8.5695e-1	3.0461e+1

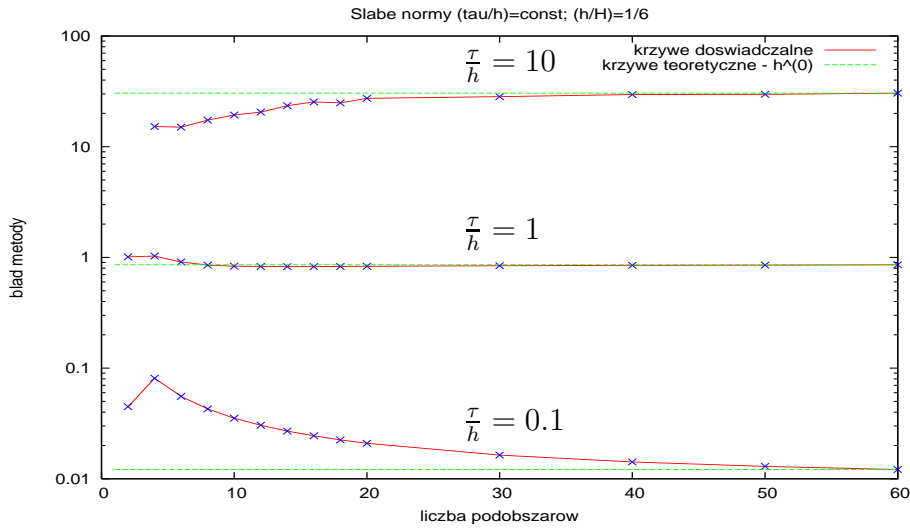
Tab. 8

W kolejnych wierszach *Tab. 8* zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonej wartości H , czyli przy ustalonej *dekompozycji* wyjściowego obszaru Ω . Kolumny tabeli zawierają wyniki doświadczeń przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$.

Dane z *Tab. 8*, przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys. 17*. Krzywe te zostały oznaczone wartościami stosunku $\frac{\tau}{h}$. Podobnie jak przy innych wykresach, na osi odciętych odłożona została liczba podobszarów, na które podzielony został wyjściowy obszar Ω . Przy przyjętych założeniach, liczba podobszarów K jest proporcjonalna do $\frac{1}{h}$ - patrz (4.2). Na osi rzędnych, w skali logarytmicznej, odłożona została wartość błędu schematu (2.14.a)-(2.14.d) w *słabych normach*.

Z przedstawionych danych wynika, że przy $\frac{\tau}{h} = const$ oraz przy $\frac{h}{H} = const$, brak jest zbieżności. Wyniku tego nie możemy niestety skonfrontować z *Twierdzeniem 4*, ponieważ rozważany tutaj przypadek, w którym założyliśmy $\frac{\tau}{h} = const$, nie spełnia założeń tego *Twierdzenia*. Brak zbieżności schematu (2.14.a)-(2.14.d) przy przyjętych założeniach, jest wnioskiem z *Twierdzenia 3*,

zobacz *Uwaga 7*. Oszacowanie rzędu zbieżności w *silnych normach* implikuje bowiem rząd zbieżności w *normach słabych*. Przypomnijmy, że przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ oraz przy $\frac{h}{H} = \text{const}$, udowodniliśmy brak zbieżności w *silnych normach*.



Rys. 17

4.2 Eksperymenty numeryczne - 2D

W tym podrozdziale przedstawione zostaną wyniki odpowiednich eksperymentów numerycznych przeprowadzonych z użyciem schematu (3.29.a)-(3.29.d). Celem tego podrozdziału było potwierdzenie stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d) i jego rzędu zbieżności, tj. zgodności oszacowań teoretycznych zawartych w *Twierdzeniach 7, 8* z rzeczywistymi obliczeniami numerycznymi.

Schemat (3.29.a)-(3.29.d) został zastosowany do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b), z kwadratowym obszarem $\Omega = (0, 10) \times (0, 10)$, przy $\mathcal{A}(t; u, v) = \sum_{i=1}^2 (D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega)}$ i znanym rozwiązaniu dokładnym

$$u((x_1, x_2), t) = x_1 \sin\left(\frac{\pi}{5}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}x_2\right) \cos(5t). \quad (4.3)$$

Zachowanie schematu (3.29.a)-(3.29.d) w przypadku innych funkcji wybranych do testów było identyczne.

W tej serii doświadczeń, proponowany schemat badany był w przypadku podziału obszaru Ω na podobszary z punktami krzyżowymi, które dalej nazywać będziemy *krata*.

W każdej serii eksperymentów, w celu uproszczenia implementacji przyjęliśmy następujące założenia:

- wyjściowy kwadrat Ω dzielony był na kwadratowe podobszary wymiaru $H \times H$ tworzące kratę;
- na każdym z podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} wprowadzaliśmy taką samą regularną triangulację, składającą się z identycznych trójkątów równoramiennych i prostokątnych o ramionach długości h i przeciwprostokątnej długości $\sqrt{2}h$, tak żeby $H = lh$, dla zadanej całkowitej liczby l ;

Podobnie jak w *Podrozdziale 4.1*, przeprowadzone zostały następujące serie eksperymentów:

1. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H ;
2. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym stosunku $\frac{H}{h}$;
3. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H ;
4. przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym stosunku $\frac{H}{h}$;

Naszym zdaniem, cztery wyżej wymienione przypadki pozwoliły miarodajnie ocenić zgodność wyników teoretycznych z numerycznymi. Pozwalają one na zbadanie stabilności oraz rzędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d). Dają także możliwość zbadania rzędu zbieżności naszego schematu w przypadku zmienianego H - parametru *grubej triangulacji* \mathcal{T}^H .

W tej serii eksperymentów do oznaczania błędu schematu (3.29.a)-(3.29.d) przyjęliśmy

- \mathcal{E} , w przypadku *silnych norm*, zobacz *Twierdzenie 7*, tzn.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 \equiv & \max_{n=1, \dots, N-1} \left\{ \|\partial_{t/2} \xi^n\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 + \|\partial_{t/2} \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\Omega_\delta^h)}^2 \right\} + \\ & + \max_{n=1, \dots, N-1} \left\{ \|\partial_t \xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ |\partial_t \xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\partial_t \xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

- \mathcal{F} , w przypadku *słabych norm*, zobacz *Twierdzenie 8*, tzn.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 \equiv & \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \|\xi^n\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_R^h)}^2 + \|\xi^{n-\frac{1}{2}}\|_{L_h^2(\overline{\Omega}_B^h)}^2 \right\} + \\ & + \tau \sum_{n=1}^N \left\{ |\xi^n|_{H^1(\Omega_R)}^2 + |\xi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^1(\Omega_B)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

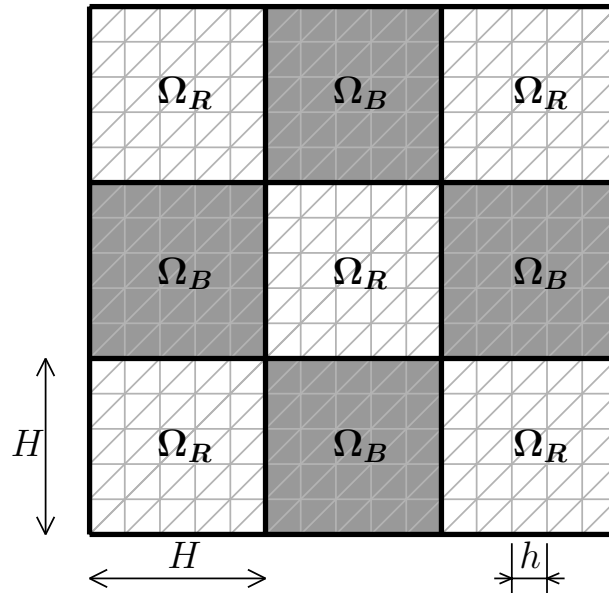
W każdym pojedynczym eksperymencie mierzony był zarówno błąd \mathcal{E} jak i \mathcal{F} , a otrzymane wyniki, po przedstawieniu w osobnych tabelach i na odpowiednich wykresach, konfrontowane były z wynikami *Twierdzeń 7 i 8*.

4.2.1 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H

W tym podrozdziale przebadane zostały stabilność i rząd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) dla różnych wartości h , przy stałej wartości stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonej z góry dekompozycji Ω , tj. przy ustalonym H .

W tej serii eksperymentów numerycznych skoncentrowaliśmy się na najbardziej istotnych własnościach naszego schematu z punktu widzenia praktyki. Dla schematów stosowanych do dyskretyzacji zagadnień parabolicznych ustalony stosunek $\frac{\tau}{h^2}$ zapewnia bowiem optymalną zbieżność - patrz np. [23]. Z praktycznego punktu widzenia zachowanie się schematu przy ustalonym H , czyli przy ustalonej liczbie podobszarów, jest także najbardziej istotną informacją. Zazwyczaj dekompozycji zadania wyjściowego dokonujemy przed rozpoczęciem obliczeń, mając na uwadze przede wszystkim zasoby sprzętowe - np. liczba dostępnych procesorów komputera wieloprocessorowego lub liczba dostępnych jednostek w klastrze obliczeniowym.

W tej serii doświadczeń wyjściowy obszar Ω podzielony został na kratę na dziewięć jednakowych podobszarów: pięć podobszarów typu *Red* i cztery podobszary typu *Black*. Każdy z podobszarów był kwadratem o boku H , gdzie $H = \frac{10}{3}$. Dekompozycja ta została przedstawiona na *Rys. 18*.



Rys. 18

Przy ustalonym H zmniejszane było h - parametr *gęstej* triangulacji \mathcal{T}^h . W kolejnych seriach doświadczenia h było równe $\left\{\frac{H}{5}, \frac{H}{10}, \frac{H}{20}, \frac{H}{40}, \frac{H}{80}, \frac{H}{160}\right\}$. Wraz ze zmniejszającym się h zmniejszane było również τ z zachowaniem stałej wartości stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Stosunek ten równy był jednej z trzech wartości $\{0.1, 1, 10\}$. Przy innych wartościach stosunku $\frac{\tau}{h^2}$, zachowanie schematu (3.29.a)-(3.29.d) było analogiczne do opisywanego tutaj. Za T przyjęliśmy $\left(2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right)$, czyli dwa *okresy* wybranej do testów funkcji (4.3).

Zwróćmy uwagę, że przy opisanej wyżej dekompozycji, wybrana to testów funkcja (4.3), ma na *grubej siatce* Γ pochodną istotnie różną od zera. Pochodna ta jest funkcją zmienną w czasie.

Eksperymenty przeprowadzone przy różnych wartościach stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ potwierdziły stabilność schematu (3.29.a)-(3.29.d). Jest on stabilny także dla $\frac{\tau}{h^2} \gg 10$.

Wyniki tej serii doświadczeń, mierzone w *silnych normach* przedstawione zostały w *Tab. 9*.

		$\tau/h^2 = 0.1$		$\tau/h^2 = 1$		$\tau/h^2 = 10$	
k	h	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$
1	$H/5$	5.9875e+0	-	5.1688e+1	-	-	-
2	$H/10$	1.3213e+0	4.5315	1.0151e+1	5.0919	3.5865e+1	-
3	$H/20$	2.4949e-1	5.2960	2.3054e+0	4.4031	2.8199e+1	1.2719
4	$H/40$	7.3839e-2	3.3788	7.2884e-1	3.1631	8.1813e+0	3.4468
5	$H/80$	2.5753e-2	2.8672	2.5655e-1	2.8409	2.6149e+0	3.1287
6	$H/160$	-	-	9.0680e-2	2.8292	9.1638e-1	2.8535

Tab. 9

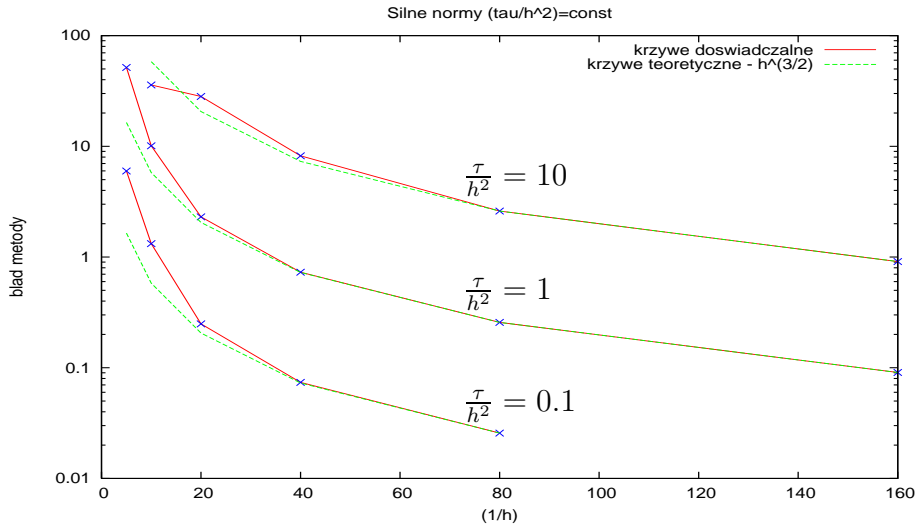
W kolejnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym h . Natomiast w kolejnych kolumnach powyższej tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów oraz rząd zbieżności przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

Wyniki z *Tab. 9* przedstawione zostały w postaci trzech krzywych zaznaczonych linią ciągłą na *Rys.19*. Krzywe te opisane zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi odciętych tego wykresu zaznaczone zostały wartości $\frac{H}{h}$, gdzie h jest parametrem triangulacji \mathcal{T}^h . Na osi rzędnych odłożone zostały w skali logarytmicznej wartości błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*.

Przeanalizujmy teraz zgodność eksperymentów z *Twierdzeniem 7*, o zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*. Na mocy tego *Twierdzenia* błąd zbieżności metody w *silnych normach* jest rzędu $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH}}\right)$,

co przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ daje

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^4 + h^2 + \frac{h^4}{h}} \right) = \mathcal{O}(h).$$



Rys. 19

Na *Rys. 19*, linią przerywaną zaznaczone zostały dopasowane do każdej krzywej eksperymentalnej, krzywe wyrażające odpowiednie zależności $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$. Jak widać, idealnie opisują one zachowanie błędu schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*. Wyniki eksperymentów są zatem o *pół rzędu* lepsze od oszacowania, które podaje *Twierdzenie 7*.

Spróbujmy wyjaśnić takie zachowanie błędu schematu (3.29.a)-(3.29.d). Zwróćmy uwagę, że zarówno błąd \mathcal{E} jak i \mathcal{F} - patrz definicje str. 148, nie zawierają odpowiednich całek przestrzeni $L^2(\Omega)$, a jedynie ich kwadratury. W tym przypadku, przy dostatecznie regularnym rozwiązaniu zagadnienia (3.1.a)-(3.1.b), błąd zbieżności *MES* pokrywa się z błędem zbieżności *MRS*. Przy pomiarze błędu za pomocą kwadratur, opartych na punktach nodalnych Ω^h i tak szczególnym zagadnieniu parabolicznym - prosta postać formy dwuliniowej $\mathcal{A}(t; u, v)$ oraz przyjętych założeniach o parametrze triangulacji \mathcal{T}^h - h , możemy spodziewać się tzw. *superzbieżności*, czyli w tym przypadku zbieżności rzędu $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}}\right)$. Dowód tego faktu dla kwadratowego obszaru Ω jest uogólnieniem dowodu *Twierdzenia 3* na dekompozycję w *sachownicę*.

Przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ daje to

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^4 + \frac{\tau^2}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^4 + h^4 + \frac{h^4}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(h^{\frac{3}{2}} \right),$$

czyli dokładnie pokrywa się z krzywymi dopasowanymi na *Rys. 19* do wyników eksperymentalnych. Nie zmienia to oczywiście faktu, że ta część eksperymentów potwierdza odpowiednie wyniki teoretyczne.

W tej samej serii doświadczeń, przy pomiarze błędu w *silnych normach* - \mathcal{E} , mierzony był także błąd naszego schematu w *normach słabych* - \mathcal{F} . Otrzymane wyniki zawarte zostały w *Tab. 10*.

		$\tau/h^2 = 0.1$		$\tau/h^2 = 1$		$\tau/h^2 = 10$	
k	h	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$
1	$h_0/5$	9.5637e-1	-	8.3676e+0	-	-	-
2	$h_0/10$	1.6159e-1	5.9185	1.6643e+0	5.0277	2.1675e+1	-
3	$h_0/20$	2.3471e-2	6.8847	2.3829e-1	6.9843	3.9396e+0	5.5018
4	$h_0/40$	3.1672e-3	7.4106	3.2072e-2	7.4298	6.4340e-1	6.1231
5	$h_0/80$	4.1179e-4	7.6913	4.1675e-3	7.6957	8.5220e-2	7.5499
6	$h_0/160$	-	-	5.3146e-4	7.8417	1.0938e-2	7.7919

Tab. 10

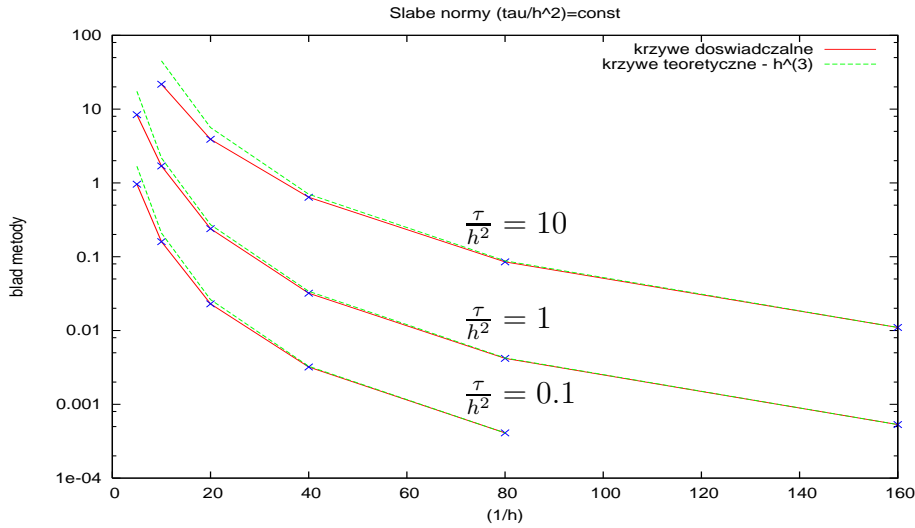
W kolejnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym h , natomiast w kolejnych kolumnach powyższej tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów oraz rząd zbieżności przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

Dane z *Tab. 10* przedstawione zostały w postaci trzech krzywych, narysowanych linią ciągłą na *Rys. 20*. Zostały one oznaczone wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi odciętych odłożono wartości $\frac{H}{h}$. Na osi rzędnych, w skali logarytmicznej, odłożono wartości błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *słabych normach*.

Przeanalizujemy zgodność wyników eksperymentalnych z *Twierdzeniem 8* - o zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *słabych normach*.

Na mocy tego *Twierdzenia* błąd dyskretyzacji w *słabych normach* jest rzędu $\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{hH} + \frac{\tau^2}{H^2}} \right)$, co przy $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$ i $H = \text{const}$, daje

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{hH} + \frac{\tau^2}{H^2}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^4 + h^2 + \frac{h^8}{h}} \right) = \mathcal{O} (h).$$



Rys. 20

Na *Rys. 20*, linią przerywaną, zaznaczone zostały dopasowane do każdej krzywej eksperymentalnej zależności $\mathcal{O}(h^3)$. Jak widać, bardzo dobrze opisuje one zachowanie błędów schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *slabych* normach. Wyniki eksperymentów są zatem znacząco lepsze od oszacowania, które zostało podane w *Twierdzeniu 8*.

Takie właśnie wyniki eksperymentów można próbować wyjaśnić poprzez rozbięcie błędów analizowanego w *Twierdzeniu 8*, na dwie części: błąd w punktach nodalnych *grubej siatki* Γ^h oraz błąd w pozostałych punktach Ω^h . Wkład tego pierwszego do globalnego błędów to $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\tau^4}{h^2 H}}\right)$, co przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ daje

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\tau^4}{h^2 H}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{h^8}{h}}\right) = \mathcal{O}\left(h^{\frac{7}{2}}\right).$$

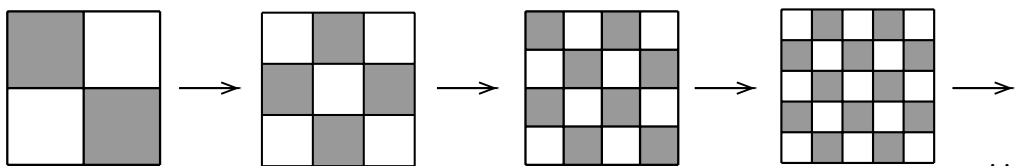
Wszystko wskazuje na to, że przy stosunkowo dużych parametrach dyskretyzacji τ, h , przeważa błąd w punktach *grubej siatki*. Najprawdopodobniej, przy dalszym zagęszczaniu siatki *przestrzenno-czasowej* szybkość zbieżności wyhamowałaby. Nie jesteśmy jednak w stanie tego sprawdzić ze względów technicznych, ponieważ przy naszych zasobach sprzętowych wykonanie koniecznych obliczeń trwałoby za długo lub prawdopodobnie byłoby w ogóle niewykonalne.

4.2.2 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i zmiennym H

W tej serii eksperymentów numerycznych zbadana została zależność błędów zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) od liczby podobszarów, na którą została

dokonana dekompozycja wyjściowego obszaru $\Omega = (0, 10) \times (0, 10)$. Zależność ta jest bardzo istotna, a błąd idealnego do obliczeń równoległych schematów tego typu, powinien możliwie słabo zależeć od liczby podobszarów, na które podzielony został wyjściowy obszar Ω .

W tej serii doświadczeń wyjściowy obszar Ω dzielony był w zagęszczającą się równomierną *kratę*, tj. w kwadraty o zmniejszającym się boku H . Krata ta stanowiła *grubą siatkę* dekompozycji Ω . Sytuację tą przedstawia *Rys. 21*.



Rys. 21

Przy ustalonym stosunku $\frac{H}{h} = \frac{1}{6}$ zmieniane było H - parametr triangulacji \mathcal{T}^H . Zachowanie się schematu (3.29.a)-(3.29.d) przy innym stosunku $\frac{h}{H}$ było analogiczne do tutaj opisanego. W kolejnych seriach doświadczenia H było równe $\left\{ \frac{10}{2}, \frac{10}{4}, \frac{10}{6}, \dots \right\}$. Wraz ze zmniejszającym się H proporcjonalnie zmniejszany było h - parametr triangulacji \mathcal{T}^h i jednocześnie zmniejszane było również τ z zachowaniem stałego stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Stosunek ten, podobnie jak w poprzednich seriach eksperymentów, równy był jednej z trzech wartości $\{0.1, 1, 10\}$.

Za T , podobnie jak poprzednio, przyjęliśmy $\left(2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right)$, czyli dwa *okresy* wybranej do testów funkcji (4.3).

Przeprowadzone eksperymenty potwierdzają stabilność schematu, a wyniki otrzymane przy pomiarze błędu w *silnych normach* przedstawione zostały w *Tab. 11*.

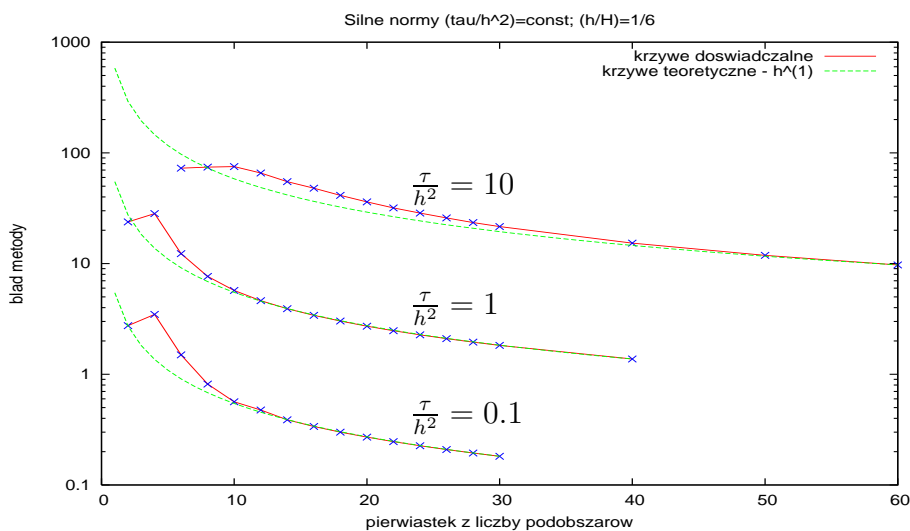
W kolejnych wierszach tej tabeli przedstawione zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym H . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki eksperymentów przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

Dane z *Tab. 11* przedstawione zostały w postaci narysowanych linią ciągłą krzywych na *Rys.22*, a odpowiednie krzywe opisane zostały wartością stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi rzędnych odłożone zostały w skali logarytmicznej wartości błędu w *silnych normach*. Na osi odciętych natomiast pierwiastek z liczby podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} , który jest proporcjonalny do wartości $\frac{1}{h}$. Łączna liczba podobszarów jest bowiem równa $(K)^2$ i dlatego mamy

$$\left(K \sim \frac{1}{H}\right) \wedge (H \sim h) \implies \left(\sqrt{K^2} \sim \frac{1}{h}\right). \quad (4.4)$$

			$\tau/h^2 = 0.1$	$\tau/h^2 = 1$	$\tau/h^2 = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k
1	L/2	4	2.7479e+0	2.3776e+1	-
2	L/4	16	3.4720e+0	2.8249e+1	-
3	L/6	36	1.4974e+0	1.2283e+1	7.2769e+1
4	L/8	64	8.1544e-1	7.6592e+0	7.4380e+1
5	L/10	100	5.6429e-1	5.7127e+0	7.5133e+1
6	L/12	144	4.7516e-1	4.6232e+0	6.5824e+1
7	L/14	196	3.8769e-1	3.9159e+0	5.4977e+1
8	L/16	256	3.3800e-1	3.4073e+0	4.8017e+1
9	L/18	324	3.0028e-1	3.0236e+0	4.1347e+1
10	L/20	400	2.7047e-1	2.7205e+0	3.6040e+1
11	L/30	900	1.8173e-1	1.8226e+0	2.1574e+1
12	L/40	1600	-	1.3740e+0	1.5298e+1
13	L/50	2500	-	-	1.1876e+1
14	L/60	3600	-	-	9.7214e+0

Tab. 11



Rys. 22

Przeanalizujemy teraz zgodność eksperymentów numerycznych z *Twierdzeniem 7*. *Twierdzenie* to mówi, że przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ oraz ustalonym stosunku $\frac{h}{H}$, rząd zbieżności wynosi

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^4 + h^2 + \frac{h^4}{h^2}} \right) = \mathcal{O}(h).$$

Na *Rys. 22*, linią przerywaną, dopasowane zostały do krzywych eksperymentalnych, odpowiednie zależności $\mathcal{O}(h)$. Jak widać, bardzo dobrze oddają one rzeczywiste zachowanie się błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d).

W tej samej serii doświadczeń, mierzony był również błąd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *słabych normach*. Wartości błędu mierzone w tych normach zawiera *Tab. 12*.

			$\tau/h^2 = 0.1$	$\tau/h^2 = 1$	$\tau/h^2 = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k
1	$L/2$	4	1.0603e-1	6.1987e+0	-
2	$L/4$	16	4.9019e-1	5.0018e+0	-
3	$L/6$	36	1.8050e-1	1.9216e+0	2.3202e+1
4	$L/8$	64	8.9357e-2	9.8401e-1	1.5567e+1
5	$L/10$	100	5.3562e-2	6.0878e-1	1.3041e+1
6	$L/12$	144	3.6255e-2	4.1956e-1	1.1324e+1
7	$L/14$	196	2.6389e-2	3.0802e-1	9.0454e+0
8	$L/16$	256	2.0124e-2	2.3599e-1	7.2701e+0
9	$L/18$	324	1.5869e-2	1.8673e-1	5.9128e+0
10	$L/20$	400	1.2840e-2	1.5146e-1	4.8759e+0
11	$L/30$	900	5.6969e-3	6.7669e-2	2.2854e+0
12	$L/40$	1600	-	3.8181e-2	1.3091e+0
13	$L/50$	2500	-	-	8.4578e-1
14	$L/60$	3600	-	-	5.9048e-1

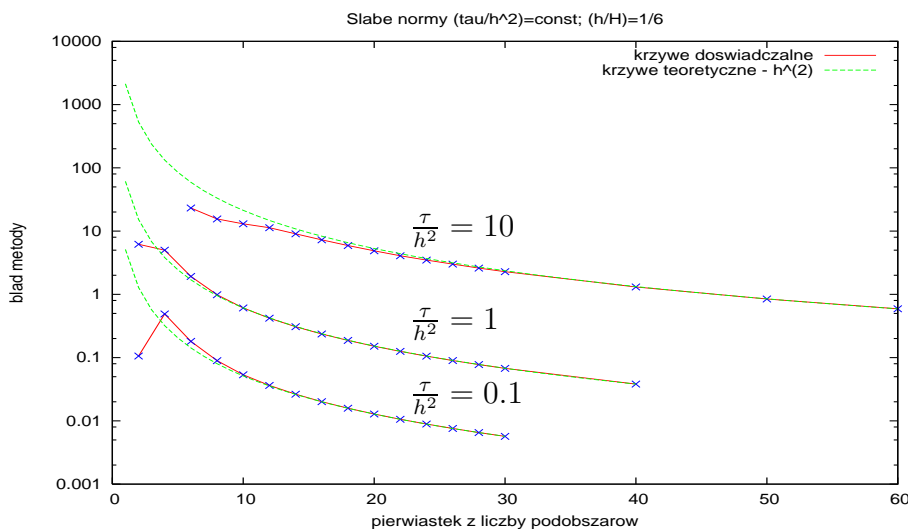
Tab. 12

W kolejnych wierszach tej tabeli przedstawione zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym H . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki eksperymentów przy ustalonym stosunku τ/h^2 .

Dane z *Tab. 12* przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys.23*, a krzywe te podpisano wartościami stosunku $\frac{\tau}{h^2}$. Na osi rzędnych odłożone zostały w skali logarytmicznej wartości błędu w *słabych normach*. Na osi odciętych natomiast, pierwiastek z liczby podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} , który jest proporcjonalny do wartości $\frac{1}{h}$ - patrz (4.4).

Zgodnie z *Twierdzeniem 8*, błąd rozważanego schematu, przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h^2}$ i stałym stosunku $\frac{h}{H}$, jest rzędu

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{hH} + \frac{\tau^2}{H^2}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^4 + h^2 + \frac{h^8}{h^2} + \frac{h^4}{h^2}} \right) = \mathcal{O}(h).$$



Rys. 23

Na *Rys. 23*, linią przerywaną, do każdej krzywej eksperymentalnej dopasowano zależność $\mathcal{O}(h^2)$ i jak widać idealnie zgadzają się one z wynikami eksperymentalnymi. Takiego zachowania błędu schematu (3.29.a)-(3.29.d) nie jesteśmy w stanie do końca wytłumaczyć. Zachowanie takie zostało przez nas zaobserwowane także przy innych wartościach parametrów τ , h oraz H , jak również przy innych przyjętych do testów funkcjach. Naszym zdaniem sugeruje ono, że *Twierdzenie 8* daje oszacowanie rzędu zbieżności metody, które nie jest ostre względem zmiennej H .

4.2.3 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H

W tej serii eksperymentów zbadaliśmy stabilność i rząd zbieżności schematu przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H . Seria ta jest analogiczna do opisanej w *Podrozdziale 4.2.1*, z tym, że tutaj zakładać będziemy stałość stosunku $\frac{\tau}{h}$, a nie $\frac{\tau}{h^2}$.

Wyjściowy obszar Ω podzielony został w *kratę* na dziewięć jednakowych podobszarów: pięć typu *Red* i cztery typu *Black*. Każdy z podobszarów był wymiaru $H \times H$, gdzie $H = \frac{10}{3}$. Sytuacja ta została przedstawiona na *Rys. 18* - str. 149.

Przy ustalonym H zmieniane było h - parametr lokalnej triangulacji każdego z podobszarów $\Omega_{R_i}, \Omega_{B_j}$. W kolejnych seriach doświadczenia h było równe $\left\{ \frac{H}{5}, \frac{H}{10}, \frac{H}{20}, \frac{H}{40}, \frac{H}{80}, \frac{H}{160} \right\}$. Wraz ze zmniejszającym się h zmniejszane było również τ z zachowaniem stałego stosunku $\frac{\tau}{h}$ i równego jednej z dwóch wartości 0.1 i 1. Ze względu na wymiar powstałego zadania, nasze zasoby sprzętowe nie

pozwoiliły na przeprowadzenie miarodajnych eksperymentów numerycznych przy stosunku $\frac{\tau}{h} > 1$.

Za T przyjęliśmy $(2 \cdot \frac{2\pi}{5})$, czyli dwa *okresy* wybranej do testów funkcji (4.3).

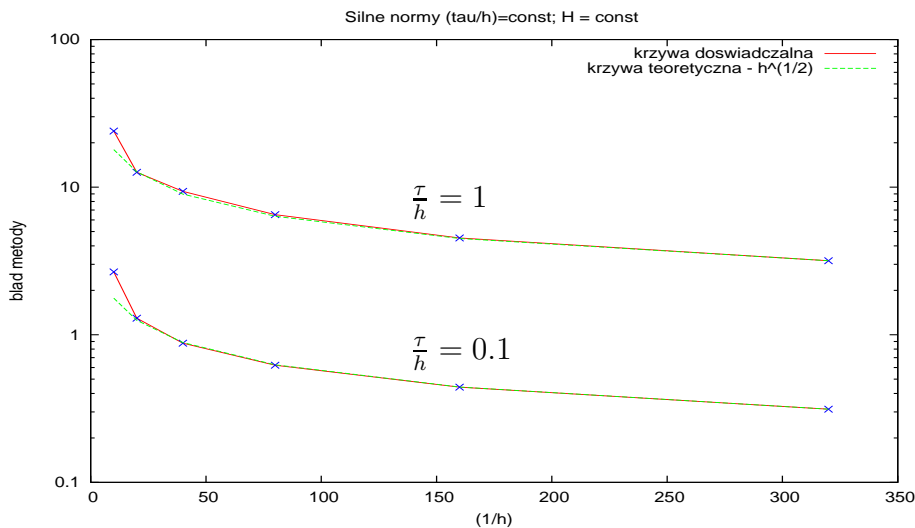
Eksperymenty, które przeprowadziliśmy w tej serii doświadczeń potwierdzają wyniki *Twierdzeń 5 i 6* - o stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d).

W przypadku pomiaru błędu w *silnych normach*, otrzymane dane przedstawione zostały w *Tab. 13*.

k	h	$\tau/h = 0.1$		$\tau/h = 1$	
		\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$	\mathcal{E}_k	$\mathcal{E}_{k-1}/\mathcal{E}_k$
1	H/10	2.6642e+0	-	2.3997e+1	-
2	H/20	1.2942e+0	2.0586	1.2606e+1	1.9036
3	H/40	8.7717e-1	1.4754	9.3639e+0	1.3462
4	H/80	6.2139e-1	1.4116	6.5123e+0	1.4379
5	H/160	4.4136e-1	1.4079	4.5290e+0	1.4379
6	H/320	3.1293e-1	1.4104	3.1730e+0	1.4274

Tab. 13

W kolejnych wierszach tabeli zostały zawarte wyniki eksperymentów przy ustalonej wartości parametru h . Kolejne kolumny tej tabeli zawierają natomiast wyniki eksperymentów oraz rząd zbieżności, przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$.



Rys. 24

Dane z *Tab. 13* przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys.24*. Odpowiednie krzywe oznaczone zostały wartościami

stosunku $\frac{\tau}{h}$. Na osi odciętych odłożone zostały wartości $\frac{1}{h}$, a na osi rzędnych, w skali logarytmicznej, wartości błędu błędu zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach*.

Sprawdźmy zgodność eksperymentów z *Twierdzeniem 7*. Na mocy tego *Twierdzenia* błąd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *silnych normach* jest rzędu $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH}}\right)$, co przy $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ i $H = \text{const}$ daje

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt{h^2 + h^2 + \frac{h^2}{h}}\right) = \mathcal{O}\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Na *Rys. 24* linią przerywaną, zaznaczone zostały krzywe odpowiadające zbieżności rzędu $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$. Jak widać, idealnie odzwierciedlają one wyniki eksperymentów numerycznych, co potwierdza zgodność eksperymentów z *Twierdzeniem 7*.

Wraz z pomiarem błędu oznaczonego przez nas przez \mathcal{E} , mierzony był także błąd w *normach słabych*. Wyniki tej części eksperymentów przedstawione zostały w *Tab. 14*.

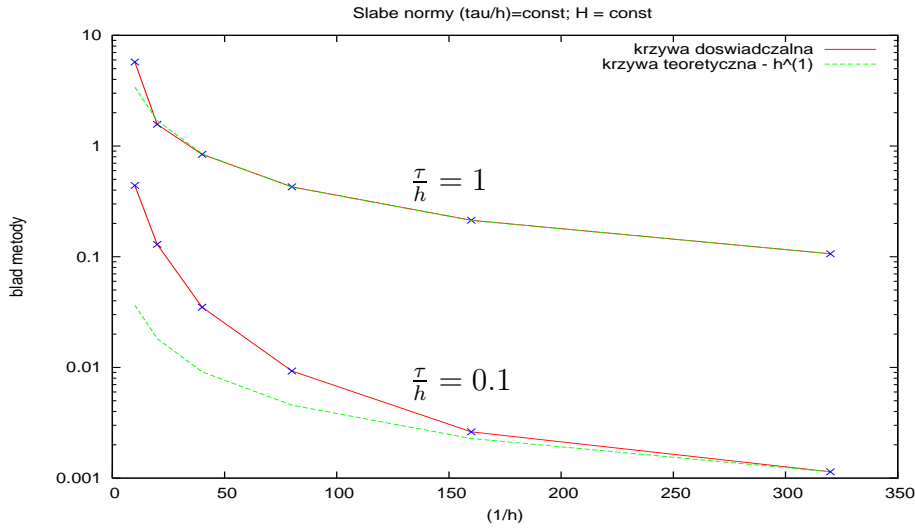
k	h	$\tau/h = 0.1$		$\tau/h = 1$	
		\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{F}_{k-1}/\mathcal{F}_k$
1	H/10	4.4066e-1	-	5.7417e+0	-
2	H/20	1.2933e-1	3.4073	1.5701e+0	3.6569
3	H/40	3.5005e-2	3.6946	8.4008e-1	1.8690
4	H/80	9.2857e-3	3.7698	4.2812e-1	1.9623
5	H/160	2.6196e-3	3.5447	2.1339e-1	2.0063
6	H/320	1.1397e-3	2.2985	1.0635e-1	2.0065

Tab. 14

W kolejnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonym parametrze h triangulacji \mathcal{T}^h . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki eksperymentów przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$.

Dane z *Tab. 14* przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys.25*. Odpowiednie krzywe opisane zostały wartościami stosunku $\frac{\tau}{h}$. Na osi odciętych odłożone zostały wartości $\frac{1}{h}$, a na osi rzędnych, w skali logarytmicznej, wartości błędu w *słabych normach*.

Z przedstawionych danych eksperymentalnych wynika, że przy ustalonym stosunku parametrów $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym H , błąd schematu (3.29.a)-(3.29.d) jest rzędu $\mathcal{O}(h)$. Niestety, nie udało się pokazać tej zależności teoretycznie - przypomnijmy, że *Twierdzenie 8*, podaje oszacowanie rzędu zbieżności schematu przy ustalonym stosunku $\tau/h^{\frac{3}{2}+\alpha}$, dla $\alpha \geq 0$.



Rys. 25

4.2.4 Eksperymenty przy stałym stosunku $\frac{\tau}{h}$ i zmiennym H

Ta seria eksperymentów numerycznych jest analogiem do wcześniej przeprowadzonej i opisanej w *Podrozdziale 4.2.2*. Tym razem, przy zwiększającej się liczbie podobszarów, na które został podzielony wyjściowy kwadrat Ω , z zachowaniem stałego stosunku $\frac{h}{H} = \frac{1}{6}$, utrzymywany był stały stosunek $\frac{\tau}{h}$, a nie jak to miało miejsce w *Podrozdziale 4.2.2*, stały stosunek $\frac{\tau}{h^2}$.

Przeprowadzone obliczenia są zgodne z *Twierdzeniami 5* i *6* - twierdzeniami o stabilności schematu (3.29.a)-(3.29.d).

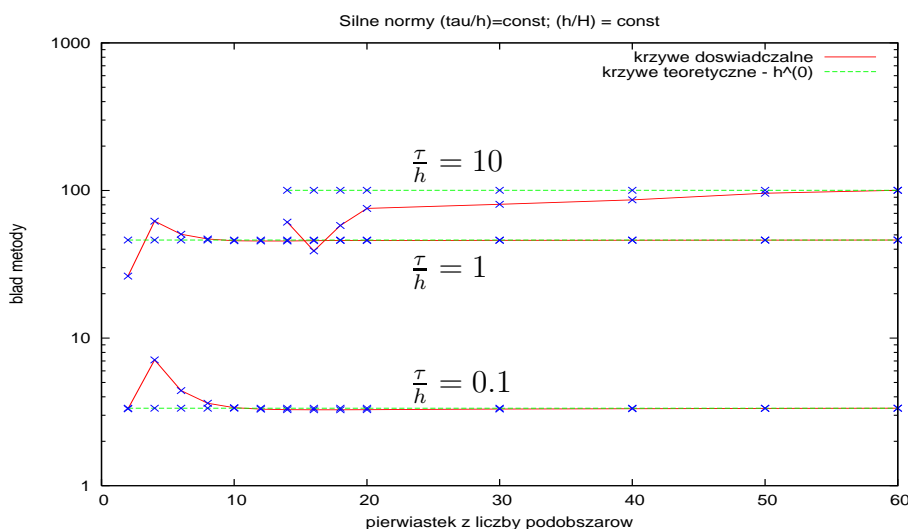
Wyniki tej części eksperymentów, przy pomiarze błędu w *silnych normach*, przedstawione zostały w *Tab. 15*.

W następujących po sobie wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów dla coraz mniejszych wartości parametru H . Kolejne kolumny tabeli zawierają wyniki odpowiednich eksperymentów przy ustalonej wartości stosunku $\frac{\tau}{h}$.

Wyniki z *Tab. 15*, przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys. 26*. Zostały one oznaczone wartościami stosunku $\frac{\tau}{h}$. Na osi rzędnych odłożone zostały, w skali logarytmicznej, wartości błędu w *silnych normach*. Na osi odciętych natomiast pierwiastek z liczby podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} , który jest proporcjonalny do wartości $\frac{1}{h}$ - patrz (4.4).

			$\tau/h = 0.1$	$\tau/h = 1$	$\tau/h = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k	\mathcal{E}_k
1	L/2	4	3.3142e+0	2.6309e+1	-
2	L/4	16	7.1178e+0	6.1979e+1	-
3	L/6	36	4.4057e+0	5.0521e+1	-
4	L/8	64	3.6171e+0	4.6911e+1	-
5	L/10	100	3.3786e+0	4.5665e+1	-
6	L/12	144	3.3001e+0	4.5461e+1	-
7	L/14	196	3.2757e+0	4.5516e+1	6.1040e+1
8	L/16	256	3.2693e+0	4.5723e+1	3.8971e+1
9	L/18	324	3.2704e+0	4.5829e+1	5.7968e+1
10	L/20	400	3.2752e+0	4.5763e+1	7.5592e+1
11	L/30	900	3.3041e+0	4.5950e+1	8.0610e+1
12	L/40	1600	3.3245e+0	4.6043e+1	8.6350e+1
13	L/50	2500	3.3381e+0	4.6098e+1	9.5883e+1
14	L/60	3600	3.3478e+0	4.6134e+1	1.0036e+2

Tab. 15



Rys. 26

Zgodnie z *Twierdzeniem 7*, rząd zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) przy ustalonym $\frac{\tau}{h}$ i ustalonym $\frac{h}{H}$, wynosi

$$\mathcal{O} \left(\sqrt{\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{hH}} \right) = \mathcal{O} \left(\sqrt{h^2 + h^2 + \frac{h^2}{hh}} \right) = \mathcal{O}(1).$$

Jak widać, z przedstawionych wyżej danych, wynika zgodność *Twierdzenia 7* z rzeczywistymi obliczeniami numerycznymi.

W tej samej części eksperymentów mierzyliśmy błąd schematu (3.29.a)-(3.29.d) w *slabych normach*. Wyniki tej części doświadczeń przedstawione zostały w *Tab. 16*.

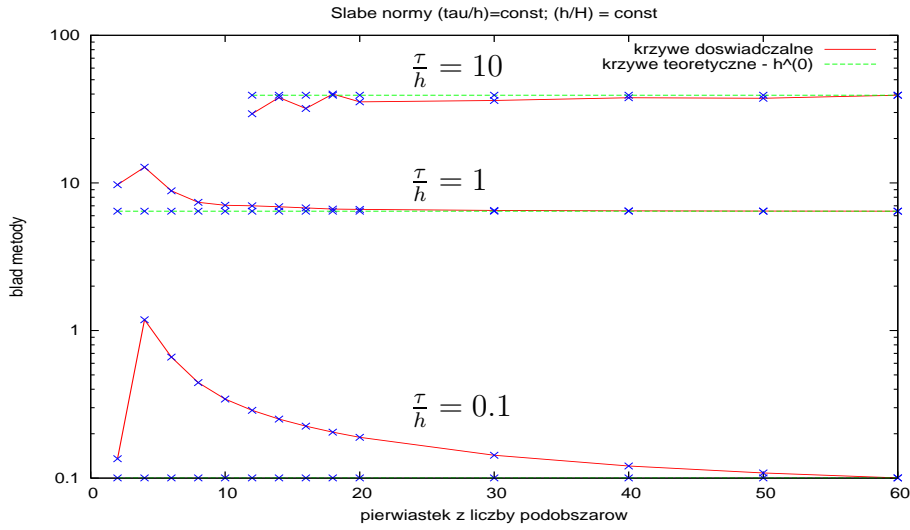
			$\tau/h = 0.1$	$\tau/h = 1$	$\tau/h = 10$
k	H	Liczba podobszarów	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k	\mathcal{F}_k
1	$L/2$	4	1.3540e-1	9.7188e+0	-
2	$L/4$	16	1.1823e+0	1.2779e+1	-
3	$L/6$	36	6.6059e-1	8.8343e+0	-
4	$L/8$	64	4.4382e-1	7.3855e+0	-
5	$L/10$	100	3.4310e-1	7.0598e+0	-
6	$L/12$	144	2.8772e-1	6.9986e+0	2.9426e+1
7	$L/14$	196	2.5126e-1	6.8933e+0	3.7886e+1
8	$L/16$	256	2.2490e-1	6.7732e+0	3.1930e+1
9	$L/18$	324	2.0479e-1	6.6452e+0	3.9987e+1
10	$L/20$	400	1.8893e-1	6.6136e+0	3.5413e+1
11	$L/30$	900	1.4282e-1	6.5116e+0	3.6168e+1
12	$L/40$	1600	1.2091e-1	6.4715e+0	3.7786e+1
13	$L/50$	2500	1.0838e-1	6.4509e+0	3.7474e+1
14	$L/60$	3600	1.0037e-1	6.4389e+0	3.9288e+1

Tab. 16

W kolejnych wierszach powyższej tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentów przy ustalonej wartości H , czyli przy ustalonej *dekompozycji* wyjściowego obszaru Ω . Kolumny tabeli zawierają wyniki doświadczeń przy ustalonym stosunku $\frac{\tau}{h}$.

Dane z *Tab. 16*, przedstawione zostały w postaci krzywych narysowanych linią ciągłą na *Rys. 27*. Na osi rzędnych odłożone zostały, w skali logarytmicznej, wartości błędu w *slabych normach*. Na osi odciętych natomiast pierwiastek z liczby podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} , który jest proporcjonalny do wartości $\frac{1}{h}$ - patrz (4.4).

Z przedstawionych danych wynika, że przy $\frac{\tau}{h} = const$ oraz przy $\frac{h}{H} = const$, brak jest zbieżności. Wyniku tego nie możemy niestety skonfrontować z *Twierdzeniem 8*, ponieważ rozważany tutaj przypadek, w którym założyliśmy $\frac{\tau}{h} = const$, nie spełnia założeń tego *Twierdzenia*. Brak zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) przy przyjętych założeniach, jest wnioskiem z *Twierdzenia 7*, zobacz *Uwaga 14*. Oszacowanie rzędu zbieżności w *silnych normach* implikuje bowiem rząd zbieżności w *normach słabych*. Przypomnijmy, że przy $\frac{\tau}{h} = const$ oraz przy $\frac{h}{H} = const$, udowodniliśmy brak zbieżności w *silnych normach*.



4.3 Eksperymenty numeryczne na sieci komputerowej

W tej serii eksperymentów zbadane zostały potencjalne możliwości schematów (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d) w celu ich wykorzystania do obliczeń równoległych.

Na *sieci komputerowej* zasymulowany został *klaster obliczeniowy*, na którym wykonywane zostały odpowiednie serie eksperymentów numerycznych. Głównym ich celem było zbadanie czasu obliczeń, jako funkcji liczby wykorzystanych do tego celu procesorów. Jako miernik przydatności naszego algorytmu do obliczeń równoległych przyjęliśmy funkcję *Speed Up* (patrz np. [11]), ponieważ naszym celem było porównanie schematów zaproponowanych w tej pracy, (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d), ze *schematem zamkniętym Eulera*, na którym ten schematu bazują. Przypomnijmy definicję funkcji *Speed Up*

$$Speed\ Up(n) = \frac{T_1}{T_n} \quad (4.5)$$

gdzie w naszym przypadku dla danego zadania (przy ustalonych parametrach dyskretyzacji τ oraz h)

- T_1 - czas obliczeń dla *schematu zamkniętego Eulera* odpowiadającego schematowi (2.14.a)-(2.14.d) lub (3.29.a)-(3.29.d);
- T_n - czas obliczeń jednego ze schematów (2.14.a)-(2.14.d) lub odpowiednio (3.29.a)-(3.29.d) przy wykorzystaniu n procesorów.

Przy ustalonych globalnym parametrach τ, h oraz ustalonym T , przeprowadzone zostały obliczenia przy wzrastającej liczbie podobszarów (- czyli zmniejszającym się H), na które dokonywana była dekompozycja wyjściowego obszaru Ω . Jednocześnie, wraz ze wzrostem ilości podobszarów zwiększana była liczba procesorów wykorzystanych w celu obliczeń.

Implementacja obu schematów, wykonana przez autora rozprawy, oparta została o bibliotekę *MPI - Message-Passing Interface*. Powstały program wykonawczy testowany był w jednym z laboratoriów komputerowych *Wydziału Matematyki Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego*.

4.3.1 Zadanie jednowymiarowe

W tym podrozdziale przedstawione zostały wyniki eksperymentów, które miały na celu zbadanie możliwości schematu (2.14.a)-(2.14.d) w celu wykorzystania go do obliczeń równoległych.

Idea równoległej implementacji została zaprezentowana w *Rozdziale 2* i graficznie przedstawiona na *Rys. 2* oraz *Rys. 3-4*.

Eksperyment przebiegał w następujący sposób. Przy ustalonych parametrach $\tau = h = 10^{-5}$ oraz $\frac{T}{\tau} = 20$, wykonywane były serie eksperymentów numerycznych przy zmieniającym się H , czyli przy dekompozycji wyjściowego jednowymiarowego obszaru $\Omega = (0, 10)$, na coraz większą liczbę naprzemian położonych pododcinków typu *Red* i *Black*.

Wyniki tego eksperymentu przedstawia *Tab. 17*. W poszczególnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentu dla ustalonej wartości H . W wierszu pierwszym zawarte zostały wyniki odpowiedniego eksperymentu przeprowadzonego z użyciem *schematu zamkniętego Eulera*. Względem tego wyniku mierzona była wartość funkcji *Speed Up*.

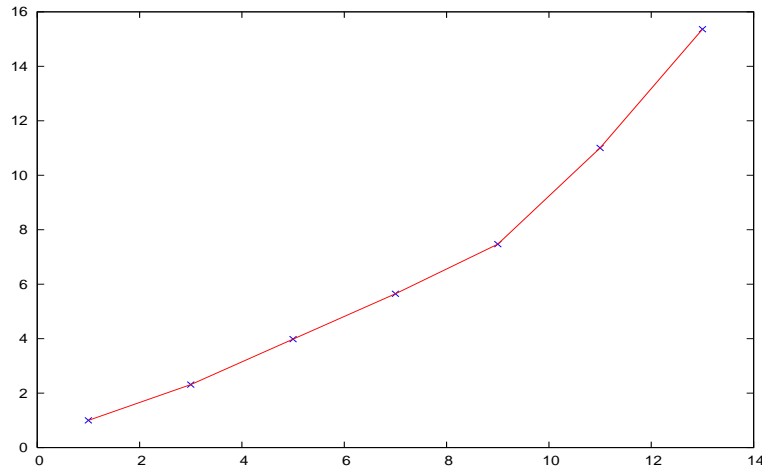
Liczba procesorów	Liczba podobszarów	Czas w sekundach	<i>Speed Up</i>
n		$T(n)$	$T(1)/T(n)$
1	1	465.5	1.0000
3	6	201.2	2.3136
5	10	116.9	3.9820
7	14	82.4	5.6493
9	18	62.3	7.4719
11	22	42.3	11.005
13	26	30.3	15.363

Tab. 17

W pierwszej kolumnie *Tab. 17* podana została liczba wykorzystanych procesorów, w drugiej liczba pododcinków, na które podzielony został obszar Ω .

W kolumnie trzeciej podany został całkowity czas obliczeń w sekundach, a w czwartej wartość funkcji *Speed Up*.

Wyniki eksperymentów zestawione w *Tab. 17*, ilustruje *Rys.28*. Na rysunku tym przedstawiony jest *Speed Up* jako funkcja używanych procesorów. Na osi odciętych odłożona została liczba wykorzystanych procesorów, a na osi rzędnych wartość funkcji *Speed Up*.



Rys. 28

Jak widać z przedstawionych danych, schemat (2.14.a)-(2.14.d) bardzo dobrze nadaje się do obliczeń równoległych. Wraz ze zwiększaniem liczby pracujących procesorów, osiągany jest bardzo wysoki *Speed Up*, który okazuje się być *prawie liniową* funkcją liczby wykorzystanych do obliczeń procesorów, ze współczynnikiem kierunkowym bliskim jedności.

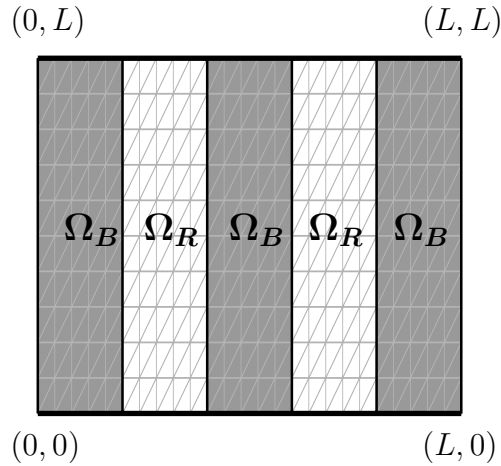
Zauważmy, że przy zwiększającej się liczbie wykorzystanych do obliczeń procesorów *Speed Up* rośnie nieco szybciej niż funkcja *liniowa*. Jest to przede wszystkim skutkiem lepszego wykorzystania pamięci komputerów wraz ze zmniejszającym się rozmiarem *lokalnych podzadań*.

Należy zwrócić uwagę, że badanie efektywności proponowanego schematu w ujęciu obliczeń równoległych, odbywało się na *uczelnianej sieci komputerowej*, a nie na *profesjonalnym klastrze obliczeniowym*, przez co szybkość komunikacji pomiędzy poszczególnymi procesorami, znaczenie wpłynęła na otrzymane wyniki. Na *profesjonalnym klastrze obliczeniowym* *Speed Up* byłby zapewne dużo wyższy.

4.3.2 Zadanie dwuwymiarowe

Celem tej serii eksperymentów, było zbadanie własności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w ujęciu obliczeń równoległych, w przypadku dekompozycji kwadratu Ω na tzw. *pasy*. Schematycznie podział taki został pokazany na *Rys. 29*.

Z praktycznego punktu widzenia dekompozycja na *pas*y nie należy do najlepszych. Jest jednak faktem, że implementacja schematu (3.29.a)-(3.29.d) w przypadku takiej właśnie dekompozycji jest *stosunkowo prosta*. Było to głównym powodem wybrania takiego właśnie wariantu podziału obszaru dwuwymiarowego do przetestowania wydajności schematu (3.29.a)-(3.29.d), pod kątem przydatności do obliczeń równoległych.



Rys. 29

Idea równoległej implementacji przy takiej dekompozycji Ω jest identyczna jak w przypadku dekompozycji $\Omega \subset \mathcal{R}$. Naprzemian prowadzone są obliczenia na podobszarach Ω_{R_i} i Ω_{B_j} , a co pół kroku czasowego τ , wymianie ulega informacja na całym jednowymiarowym brzegu dwóch sąsiadujących ze sobą prostokątnych podobszarów Ω_{R_i} i Ω_{B_j} .

Eksperyment przebiegał w następujący sposób. Przy ustalonych parametrach $\tau = h = \frac{10}{1500}$ oraz $\frac{T}{\tau} = 15$, wykonywane były serie eksperymentów numerycznych przy zmieniającym się H , czyli przy dekompozycji wyjściowego obszaru Ω na coraz większą liczbę pasków. Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku H oznacza mniejszy wymiar pojedynczego paska tworzącego dekompozycję kwadratu Ω .

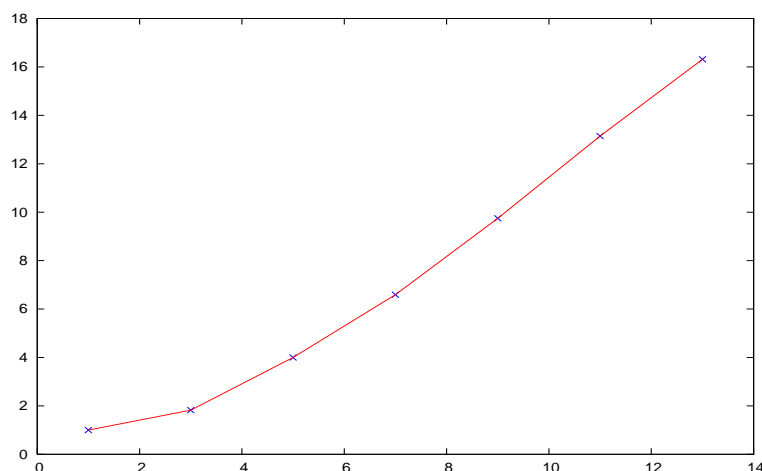
Wyniki tego eksperymentu przedstawione zostały w *Tab.18*. W poszczególnych wierszach tabeli zawarte zostały wyniki eksperymentu dla ustalonej wartości H . W wierszu pierwszym zawarte zostały wyniki odpowiedniego eksperymentu przeprowadzonego z użyciem *schematu zamkniętego Eulera*. Względem tego wyniku mierzona była funkcja *Speed Up*.

W pierwszej kolumnie poniższej tabeli podana została liczba wykorzystanych procesorów, w drugiej liczba pasków, na które podzielony został obszar Ω . W kolumnie trzeciej podany został całkowity czas obliczeń w sekundach, a w czwartej wartość funkcji *Speed Up*.

Liczba procesorów	Liczba pasków	Czas w sekundach	<i>Speed Up</i>
n		$T(n)$	$T(1)/T(n)$
1	1	615.1	1.0000
3	6	337.6	1.8220
5	10	153.9	3.9968
7	14	93.3	6.5927
9	18	63.1	9.7480
11	22	46.8	13.143
13	26	37.7	16.316

Tab. 18

Wyniki zawarte w *Tab. 18* przedstawione zostały na *Rys. 30*. Na osi pionowej odłożone zostały wartości funkcji *Speed Up*. Na osi poziomej odłożona została liczba wykorzystanych procesorów.



Rys. 30

Jak widać schemat (3.29.a)-(3.29.d) już w przypadku dekompozycji na *pasy*, bardzo dobrze nadaje się do obliczeń równoległych. Wraz ze zwiększaniem ilości pracujących procesorów, osiągany jest bardzo wysoki *Speed Up*, który okazuje się być *prawie liniową* funkcją liczby wykorzystanych do obliczeń procesorów.

Zauważmy, że przy przy zwiększającej się ilości pracujących procesorów *Speed Up* rośnie nieco szybciej niż funkcja *liniowa*. Jest to przede wszystkim skutkiem lepszego wykorzystania pamięci komputerów wraz ze zmniejszającym się wymiarem *lokalnych podzadań*. Warto tu dodać, że wymiar wektora

danych w przypadku $n = 1$ - pierwszy wiersz *Tab. 18*, to 2.25 miliona, natomiast dla $n = 13$ - ostatni wiersz tej tabeli, wymiar wektora danych to około 86500.

Podobnie jak w *Podrozdziale 4.3.1*, należy tu zwrócić uwagę, że badanie efektywności proponowanego schematu w ujęciu obliczeń równoległych, odbywało się na *uczelnianej sieci komputerowej*, a nie na *profesjonalnym klastrze obliczeniowym*, przez co szybkość komunikacji pomiędzy poszczególnymi procesorami, znaczenie wpłynęła na otrzymane wyniki. Na *profesjonalnym klastrze obliczeniowym Speed Up* byłby zapewne dużo wyższy.

Również dużo wyższy *Speed Up* byłby zapewne osiągnięty dla wariantu dekompozycji $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ w tzw. *kratę*. Przy ustalonej średnicy pojedynczego podobszaru, a więc z zachowaniem odpowiedniego rzędu błędów zbieżności schematu, wymiar problemów lokalnych przy dekompozycji na *kratę* jest bowiem znacznie mniejszy od rozmiaru problemów lokalnych przy podziale Ω na *pas*y. Celem tej pracy było jednak zbadanie zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d), a implementacja równoległa miała dostarczyć jedynie dodatkowych informacji o potencjalnych możliwościach tego schematu.

5 Podsumowanie

W pracy przedstawiony został *nowy schemat* do dyskretyzacji bardzo ogólnych zagadnień parabolicznych dający możliwość bardzo efektywnej realizacji równoległej. Zawarta w niej została analiza teoretyczna - analiza stabilności i zbieżności, jak i również wyniki odpowiednich eksperymentów numerycznych potwierdzających wyniki teoretyczne. Przedstawione również zostały rezultaty eksperymentów numerycznych przeprowadzonych na sieci komputerowej, pokazujące potencjalne możliwości wykorzystania proponowanej metody dyskretyzacji do obliczeń równoległych.

Zawarta w pracy analiza stabilności schematów (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d) - odpowiednio *Twierdzenia 1, 2, 5, 6*, jest kompletna. Udowodniliśmy w niej, że wymienione wyżej schematy są bezwarunkowo stabilne zarówno w *silnych* jak i *słabych normach*.

Zawarta w pracy analiza zbieżności schematów - *Twierdzenia 3, 4, 7, 8*, podaje min. że przy optymalnym doborze parametrów dyskretyzacji τ oraz h , tzn. przy zachowaniu stałego, ale dowolnego stosunku kroków $\frac{\tau}{h^2}$ (-zobacz [24]) oraz przy ustalonej z góry dekompozycji na ustaloną, ale dowolną liczbę podobszarów, proponowany tutaj sposób dyskretyzacji daje rozwiązanie przybliżone, którego rząd zbieżności jest taki sam, jak dla rozwiązania odpowiadającego mu *schematu zamkniętego Eulera*. Fakt ten został zawarty i udowodniony w *Twierdzeniach 4 i 8*, odpowiednio dla schematów (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d) i został potwierdzony eksperymentami numerycznymi.

Przedstawione w końcowej części pracy wyniki eksperymentów numerycznych przeprowadzonych na *sieci komputerowej*, po wielkości funkcji *Speed Up*, pokazują przydatność rozważanej tu dyskretyzacji do obliczeń równoległych.

Dokonajmy zatem podsumowującego porównania dyskretyzacji proponowanej w tej pracy ze schematem, na którym ta dyskretyzacja bazuje, czyli ze *schematem zamkniętym Eulera*. Schematy (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d) są bezwarunkowo stabilne i przy optymalnie dobranych parametrach zadania, tak samo szybko zbieżne jak *schemat zamknięty Eulera*. Przy ustalonym stosunku parametrów $\frac{\tau}{h^2}$ i ustalonym H schematy rozważane w tej rozprawie mają dokładnie te same rzędy zbieżności co odpowiadające im *schematy zamknięte Eulera*. Dodatkowo dają one jednak możliwość bardzo efektywnej realizacji równoległej. Wyniki te zostały potwierdzone teoretycznie jak i numerycznie. Według naszej wiedzy (- patrz Bibliografia i literatura cytowana w poszczególnych pozycjach), jest to jedna z najprostszych, ale jednocześnie jedna z bardziej efektywnych, spośród metod równoległej dyskretyzacji dla bardzo szerokiej klasy zagadnień parabolicznych. Schematy tutaj prezentowane poprawiają także o *pół* rząd zbieżności względem schematów rozważanych w pracach [2] i [3].

Naszym zdaniem dyskretyzacja rozważana tutaj powinna być przedmiotem dalszych badań. Podczas gdy udowodnione w tej pracy twierdzenia o rzędzie zbieżności w silnych normach wydają się być ostre - potwierdzają to wyniki licznych eksperymentów numerycznych, to twierdzenia o rzędzie zbieżności w normach słabych dokładnie nie pokrywają się z eksperymentami. Dają one, naszym zdaniem, za grube oszacowanie, zwłaszcza, jeżeli chodzi o zachowanie się błędu zbieżności schematu w przypadku wzrastającej liczby podobszarów, na które dzielony jest wyjściowy obszar Ω . Brak jest także wyników teoretycznych opisujących zachowanie się schematów (2.14.a)-(2.14.d) i (3.29.a)-(3.29.d) w słabych normach, w przypadku ustalonego stosunku kroków siatki przestrzenno-czasowej $\frac{\tau}{h}$. Jak pokazują odpowiednie eksperymenty, jest to prawdopodobnie zbieżność odpowiednio rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h^2 + \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{Hh^{\frac{1}{2}}}\right)$ dla MRS i zbieżność rzędu $\mathcal{O}\left(\tau + h + \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{Hh^{\frac{1}{2}}}\right)$ dla kombinacji MES i MRS. Tematem dalszych badań powinno więc być zbadanie zbieżności schematu (3.29.a)-(3.29.d) w słabych normach przy $\tau = Ch^{\frac{3}{2}+\alpha}$ dla $\alpha \in [-\frac{1}{2}, 0)$.

Przedmiotem dalszych badań może być także uogólnienie sposobu dekompozycji wyjściowego obszaru Ω , który będzie oparty o ogólniej zdefiniowaną grubą siatkę.

Tematem dalszych eksperymentów numerycznych powinna być implementacja schematu (3.29.a)-(3.29.d) przy dekompozycji Ω w kratę. Celem tego powinno być zbadanie możliwości, jakie daje ten schemat w ujęciu obliczeń równoległych, czyli przede wszystkim pomiar funkcji *Speed Up*, przy realizacji (3.29.a)-(3.29.d) na profesjonalnym klastrze obliczeniowym.

Warto także zbadać zachowanie się schematu w przypadku, kiedy $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ dla $n > 2$ oraz rozważyć wykorzystanie podejścia proponowanego w tej pracy do dyskretyzacji zagadnień początkowo brzegowych dla równań hiperbolicznych.

A Lematy dodatkowe

W załączniku tym przedstawione zostały pomocnicze lematy i twierdzenia wykorzystane do poszczególnych dowodów zawartych w tej pracy.

Lemat 7 w innym sformułowaniu, odnaleźć można min. w [18]. Ze względu na fakt, że w rozprawie używaliśmy go w poniższym sformułowaniu podajemy go wraz z dowodem.

Lemat 7 (Lemat Gronwalla). *Założmy, że $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ oraz dla $\gamma_i \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ zachodzi*

$$\gamma_n \leq \delta_1 + \delta_2 \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i.$$

Wtedy dla $n \geq 1$ mamy

$$\gamma_n \leq (\delta_1 + \delta_2 \gamma_0)(1 + \delta_2)^{n-1}.$$

Dowód. Niech

$$w_n = \ln \left(\delta_1 + \delta_2 \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right),$$

wtedy na podstawie przyjętego założenia o γ_n , mamy

$$w_n - w_{n-1} = \ln \left(1 + \delta_2 \frac{\gamma_{n-1}}{\delta_1 + \delta_2 \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i} \right) \leq \ln(1 + \delta_2).$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\begin{aligned} w_{n-1} - w_{n-2} &\leq \ln(1 + \delta_2), \\ w_{n-2} - w_{n-3} &\leq \ln(1 + \delta_2), \\ &\dots\dots\dots \\ w_2 - w_1 &\leq \ln(1 + \delta_2). \end{aligned}$$

Doaddając stronami powyższe nierówności otrzymujemy

$$w_n \leq w_1 + (n - 1) \ln(1 + \delta_2),$$

co korzystając z definicji w_n , przepisujemy do postaci

$$\ln \left(\delta_1 + \delta_2 \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right) \leq \ln(\delta_1 + \delta_2 \gamma_0) + \ln(1 + \delta_2)^{n-1}.$$

Ponieważ $\gamma_n = \ln \left(\delta_1 + \delta_2 \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \right)$.

□

Lemat 8 ([3]). Niech $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ oraz v będzie dowolną funkcją siatkową określoną w punktach Ω^h . Dla dowolnego $\epsilon > 0$, istnieje stała dodatnia \mathcal{M} niezależna od h , taka że

$$\left| (u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, v)_{L_h^2(\Omega^h)} \right| \leq \frac{\mathcal{M}}{\epsilon} h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|v\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2.$$

gdzie $(\cdot, \cdot)_{L_h^2(\Omega^h)}$ został zdefiniowany w (3.6).

Lemat 9 ([9]). Dla dowolnej funkcji siatkowej v , określonej w punktach $x \in \bar{\Omega}^h$ oraz dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$\left(\max_{x \in \Omega_h} |v(x)| \right)^2 \leq \epsilon \|\bar{\partial}_x v\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{L} \right) \|v\|_{L_h^2(\Omega^h)}^2,$$

gdzie $\Omega = (0, L)$.

Lemat 10 ([4]). Dla dowolnej funkcji $v \in V^h(\Omega)$ oraz dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \epsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{H} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

gdzie $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ wielokąt o średnicy H , $\Gamma = \partial\Omega$.

Lemat 11. Niech $(\cdot, \cdot)_X$ iloczyn skalarny indukujący normę $\|\cdot\|_X$ przestrzeni unitarnej X . Dla dowolnych $u, v \in X$ i dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$(u, v)_X \leq \epsilon \|u\|_X^2 + \frac{1}{\epsilon} \|v\|_X^2.$$

Dowód. Jest to wniosek z kolejno zastosowanych nierówności Schwarz'a i ϵ -nierówności. \square

Lemat 12 ([13]). Dla każdego $v \in V^h(\Omega)$, istnieją stałe dodatnie $c_1, c_2 = \mathcal{O}(1)$, takie że

$$c_1 \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L_h^2(\Omega^h)} \leq c_2 \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dowód. Jest to wniosek wynikający z rozpisania funkcji $v \in V^h(\Omega)$ w bazie i Lematu 11. \square

Lemat 13. Niech V^0, \dots, V^N będzie ustalonym ciągiem funkcji z przestrzeni $V^h(\Omega)$ oraz niech $N\tau = T$ i $\partial_t V^{n-1} = \frac{V^n - V^{n-1}}{\tau}$ dla $n = 1, \dots, N$. Wtedy zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \|V^N\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|V^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \leq \\ &\leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|V^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max_{n=0, \dots, N-1} \|\partial_t V^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

gdzie H jest średnicą Ω .

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \|V^N\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\| V^0 + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \partial_t V^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left\{ \|V^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \left\| \sum_{n=0}^{N-1} \partial_t V^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \leq \\ &\leq \mathcal{C}(T) \left\{ \|V^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Powyżej skorzystaliśmy z *nierówności Buniakowskiego-Cauchy'ego*. Na mocy tej nierówności mamy bowiem

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} \partial_t V^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left(\left\| \sum_{n=0}^{N-1} \partial_t V^n \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N-1} 1^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ &\leq N \sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{T}{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Drugą nierówność tezy *Lematu* otrzymujemy na mocy faktu

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\max_{n=0, \dots, N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{N} N \max_{n=0, \dots, N-1} \|\partial_t V^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Korzystając w (A.1) z nierówności (A.2) na mocy faktu $N\tau = T$. \square

Twierdzenie 9 ([12]). *Niech funkcja $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, a funkcja $W \in V^h(\Omega)$ będzie jej liniową interpolacją w punktach nodalnych triangulacji \mathcal{T}^h . Przy tych założeniach zachodzą następujące oszacowania*

$$\|u - W\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^2 |u|_{H^2(\Omega)},$$

oraz

$$|u - W|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 h |u|_{H^2(\Omega)},$$

gdzie stałe C_1, C_2 są niezależną od funkcji u .

Lemat 14 ([12]). Niech funkcja $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, a funkcja $W \in V^h(\Omega)$ będzie jej liniową interpolacją w punktach nodalnych triangulacji \mathcal{T}^h . Niech funkcja $U \in V^h(\Omega)$ taka, że

$$(U, \varphi)_{L^2(\Omega)} = (u, \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$

Wtedy zachodzą oszacowania

$$\begin{aligned} \|U - W\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 h^2 |u|_{H^2(\Omega)}, \\ |U - W|_{H^1(\Omega)} &\leq C_2 h |u|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

gdzie C_1, C_2 są stałymi niezależnymi od parametru triangulacji h .

Lemat 15 ([4]). Niech Ω będzie wielokątem o średnicy $\mathcal{O}(H)$, $\partial\Omega$ jego brzegiem, a $\Omega_\delta \subset \Omega$ paskiem szerokości δ wzdłuż brzegu $\partial\Omega$. Dla $u \in H^1(\Omega)$ zachodzi następujące oszacowanie

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq C \delta^2 \left\{ \left(1 + \frac{H}{\delta}\right) |u|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{H\delta} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\},$$

gdzie C jest stałą dodatnią niezależną od h oraz H .

Literatura

- [1] X.-C. Cai *Additive Schwarz Algorithms for Parabolic Convection-Diffusion Equations* Numer. Math., 60(1991), pp. 41-61.
- [2] M. Dryja *Substructuring Methods For Parabolic Problems*. Proceedings of Fourth International Symposium on Domain Decomposition Method for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia, pp. 264-271, 1991
- [3] M. Dryja, X. Tu *A Domain Decomposition Discretization of Parabolic Problems*. Ukáže się w tym roku w Numer. Math.
- [4] M. Dryja, O.B. Widlund *Domain Decomposition Algorithms with Small Overlap* Siam. J. Sci. Comput. Vol. 15, No. 3, pp. 604-620, 1994
- [5] J.L. Lions, Y. Maday, G. Turinici *Résolution d'EDP par un schéma en temps «pararéel»*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, pp. 661-668, 2001
- [6] M.F. Wheeler *A Priori L_2 error Estimates for Galerkin Approximations to Partial Differential Equations*. SIAM J.NUMER. ANAL. Vol. 10, No. 4, 1973
- [7] M.F. Wheeler *L_2 Estimates of Optimal Order for Galerkin Methods for One-Dimensional Second Order Parabolic and Hyperbolic Equations*. SIAM J.NUMER. ANAL. Vol. 10, No. 5, 1973
- [8] Y. Zhuang, X.H. Sun *Stabilized Explicit-Implicit Domain Decomposition Methods for The Numerical Solution of Parabolic Equations*. SIAM J. SCI. COMPUT Vol. 24, No. 1, pp. 335-358, 2003
- [9] W.B. Andriejew, A.A. Samarski *Raznostnyje metody dlja ellipticeskich uravnenij*, Moskwa, 1976
- [10] R.Barrett, M.Berry, T.F.Chan, J.Demmel, J.M.Donato, J.Dongarra, V.Eijkhout, R.Pozo, C.Romine, H. Van der Vorst *Templates for the Solutions of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. <http://www.netlib.org/templates/Templates.html>
- [11] P.E. Bjorstad, W.D. Gropp, B.F. Smith *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996
- [12] S.C. Brenner, L.R. Scott *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002

- [13] P. Ciarlet *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*. North-Holland Publishing Company Amsterdam-New York-Oxford, 1st edition, 1978
- [14] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest *Wprowadzenie do algorytmów*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2001
- [15] J.J. Dongarra, I.S. Duff, D. Sorensen, H.A. van der Vorst *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers* Siam, Philadelphia, PA, 1991
- [16] M.Dryja, J.M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych II*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1982
- [17] L.C. Evans *Równania różniczkowe cząstkowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002
- [18] G. Fairweather *Finite Element Galerkin Methods for differential Equations*. Marcel Dekker, INC., New York and Basel, 1978
- [19] J.L. Lions, E.Magenes *Nonhomogeneous boundary value problems and applications I,II,III* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972
- [20] A. Quarteroni, A. Valli *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994
- [21] A. Quarteroni, A. Valli *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* Clarendon Press, Oxford, 1999
- [22] R.D. Richtmyer, K.W. Morton *Differential Methods for Initial-Value Problems* John Wiley & Sons Inc., New York, 1967
- [23] A.A. Samarski *The Theory of Difference Schemes*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001
- [24] V. Thomeé *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997
- [25] A.Toselli, O.Widlund *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory* Springer-Verlag, 2004
- [26] *Proceedings of International Conferences on Domain Decomposition Method for Science and Engineering* dostępne na stronie internetowej <http://www.ddm.org>