

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Mariusz Felisiak

Algorytmy numeryczne w spektralnej analizie Coxetera
bigrafów

rozprawa doktorska
napisana na Wydziale Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

wersja uzupełniona

Promotor rozprawy
prof. dr hab. Daniel Simson

Zakład Kombinatoryki i Obliczeń Symbolicznych
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, listopad 2017

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

30 listopada 2017 roku

data

.....

Mariusz Felisiak

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

30 listopada 2017 roku

data

.....

prof. dr hab. Daniel Simson

Abstract

The aim of this thesis is to solve class of the algorithmic and computing problems (formulated in [48]–[50], [69]–[76]) for Coxeter-Gram spectral classification of the connected positive simple signed graphs and connected positive loop-free edge-bipartite graphs Δ (bigraphs, in short) defined in [70].

The first and the second chapter are devoted to short introduction to the Coxeter spectral analysis of the signed graphs and the class of the loop-free non-negative edge-bipartite graphs Δ . Moreover, we present a motivation for the study of Coxeter spectral analysis problems of the finite edge-bipartite graphs.

Recall that, with any loop-free bigraph Δ with $n \geq 1$ vertices numbered by the integers, we associate the (complex) Coxeter spectrum $\mathbf{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$, i.e., the spectrum of the \mathbb{Z} -invertible Coxeter matrix $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, where $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ is the non-symmetric Gram matrix of Δ .

One of the aims of this thesis is to classify positive edge-bipartite graphs, up to the Gram \mathbb{Z} -bilinear congruence defined in [70] as follows

$$“\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B, \text{ for some } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})”.$$

Another issue of this thesis is to construct symbolic and numeric algorithms for computing matrix $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ defining the Gram \mathbb{Z} -bilinear congruence $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, for any pair of edge-bipartite graphs such that $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (or their Coxeter spectra equality holds $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$).

In the third chapter we present technical and algorithmic tools that allows a reduction of the Coxeter-Gram spectral classification problems to the analogue problems for some finite set $\mathbf{Mor}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ of matrix morsifications A (defined in [69]–[71]) of the fixed simply laced Dynkin diagram $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Set \mathbf{Mor}_D is invariant subset of $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ under the action $* : \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $(A, B) \mapsto A * B := B^{tr} \cdot A \cdot B$ limited to isotropy group $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ of the diagram D , that is a finite subgroup of the general linear group $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ (see [70]). Main results of this chapter are our algorithms computing the set \mathbf{Mor}_D , isotropy group $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ and the set of $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbits in \mathbf{Mor}_D , for any simply laced Dynkin diagram D . We also present results of these computer calculations.

One of the main results of this thesis is a complete classification of positive connected edge-bipartite graphs with at most nine vertices, up to the Gram \mathbb{Z} -bilinear congruence $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, presented in the fourth chapter. It follows from our classification theorem that any of those bigraphs are \mathbb{Z} -congruent with one of the 26 classifying bigraphs presented in chapter four.

The fifth chapter contains constructions of several infinite series of matrix morsification $A \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ for the diagram \mathbb{A}_n , with pairwise different Coxeter spectra, for $n \geq 1$.

In the six and the seventh chapter we present an idea of a reduction from studied classification problems to the build class of symbolic toroidal mesh algorithms for computing matrix $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ defining the Gram \mathbb{Z} -bilinear congruence $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. In particular, for a class of the infinite series of matrix morsification for Dynkin diagram $D = \mathbb{A}_n$ we build symbolic algorithms constructing some matrix $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ such that $A' = A * B^{tr}$, for any pair of morsifications $A, A' \in \mathbf{Mor}_D$, that lie in the same $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit.

In the second supplemented version of this thesis we added the eighth chapter in which we estimate the complexity of used algorithms.

The main results of this thesis have been published in the articles [8], [9], [24], [27]–[31].

Keywords: edge-bipartite graph, Coxeter spectral analysis, matrix morsification, Coxeter matrix, Dynkin diagram, combinatorial algorithms, symbolic algorithms, mesh quiver, toroidal mesh algorithm.

AMS subject classification: 05C22, 05C50, 15A63, 65F30, 68R05, 68W30, 90C27.

Streszczenie

Celem rozprawy jest rozwiązanie klasy problemów algorytmiczno-obliczeniowych (sformułowanych w pracach [48]–[50], [69]–[76]) występujących w spektralnej klasyfikacji Coxetera-Grama spójnych dodatnich prostych grafów oznakowanych, a także spójnych dodatnich krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ bez pętli (w skrócie bigrafów) zdefiniowanych w [70].

Rozdziały 1 oraz 2 poświęcone są krótkiemu wprowadzeniu do spektralnej analizy Coxetera grafów oznakowanych oraz klasy nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ bez pętli a także podaniu motywacji do badań nad problemami spektralnej klasyfikacji Coxetera skończonych bigrafów.

Przypomnijmy, że z dowolnym bigrafem Δ bez pętli o skończonym zbiorze ponumerowanych $n \geq 1$ wierzchołków, stowarzysza się jego zespolone spektrum Coxetera $\mathbf{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$, tj. spektrum \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy Coxetera $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama bigrafu Δ .

Jednym z celów rozprawy jest podanie klasyfikacji dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama, zdefiniowanej w pracy [70] następująco:

$$" \Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) ".$$

Innym z celów rozprawy jest zbudowanie algorytmów symbolicznych i numerycznych obliczających macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, dla dowolnej pary bigrafów spełniających relację $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (lub takich, dla których zachodzi równość $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$, ich spektrów Coxetera).

W rozdziale 3 przedstawiamy narzędzia techniczne i algorytmiczne pozwalające zredukować rozważane problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera-Grama do badania analogicznych problemów dla pewnego skończonego zbioru $\mathbf{Mor}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ wszystkich morsyfikacji macierzowych A (zdefiniowanego w pracach [69]–[71]) dla ustalonego jednorodnego diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Zbiór \mathbf{Mor}_D jest niezmienniczym podzbiorem zbioru macierzy $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ względem działania $*$: $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $(A, B) \mapsto A * B := B^{tr} \cdot A \cdot B$ ograniczonego do skończonej podgrupy $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ grupy liniowej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$, zwanej grupą izotropii diagramu D (zobacz [70]). Jednym z ważniejszych wyników tego rozdziału są autorskie algorytmy obliczające zbiór \mathbf{Mor}_D , grupę izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ oraz zbiór $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit w \mathbf{Mor}_D , dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D , a także wyniki tych obliczeń.

Jednym z głównych osiągnięć tej rozprawy jest przedstawiona w rozdziale 4 pełna klasyfikacja spójnych dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ o co najwyżej 9-ciu wierzchołkach, z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Udowodnione twierdzenie klasyfikacyjne orzeka, że każdy taki bigraf jest \mathbb{Z} -kongruentny z jednym z 26 bigrafów klasyfikujących.

Rozdział 5 zawiera konstrukcje nieskończonych serii morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ diagramu Dynkina \mathbb{A}_n , o parami różnych spektrach Coxetera, dla $n \geq 1$.

W rozdziałach 6 oraz 7 przedstawiamy ideę redukcji badanych problemów klasyfikacyjnych do konstrukcji klasy symbolicznych algorytmów toroidalno-oczkowych konstruujących macierze B definiujące silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. W szczególności, dla klasy nieskończonych serii morsyfikacji diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ budujemy algorytmy symboliczne konstruujące, dla dowolnej pary morsyfikacji $A, A' \in \mathbf{Mor}_D$ leżących w tej samej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie, pewną macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $A' = A * B^{tr}$.

W drugiej uzupełnionej wersji rozprawy dodaliśmy rozdział 8, w którym szacujemy złożoność obliczeniową stosowanych algorytmów.

Główne wyniki rozprawy zostały opublikowane w artykułach [8], [9], [24], [27]–[31].

Słowa kluczowe: graf krawędziowo-dwudzielny, spektralna analiza Coxetera, macierz morsyfikacji, macierz Coxetera, diagram Dynkina, algorytmy kombinatoryczne, algorytmy symboliczne, kołczan oczkowy, toroidalny algorytm oczkowy.

Klasyfikacja tematyczna AMS: 05C22, 05C50, 15A63, 65F30, 68R05, 68W30, 90C27.

Spis treści

Wstęp	1
1. Wprowadzenie	4
1.1. Informacje wstępne o spektralnej analizie grafów	4
1.2. Modyfikacje macierzy sąsiedztwa i ich spektra	7
1.3. O genezie spektralnej analizy Coxetera	8
1.4. O spektralnej analizie Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych	9
2. Problemy klasyfikacji prostych grafów oznakowanych oraz grafów krawędziowo-dwudzielnych	11
2.1. Grafy oznakowane i krawędziowo-dwudzielne	13
2.2. O spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów dodatnich	18
2.3. Otwarte problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów dodatnich	25
3. Morsyfikacje macierzowe grafów krawędziowo-dwudzielnych	29
3.1. Morsyfikacje macierzowe diagramów Dynkina i grupy izotropii	30
3.2. Algorytmy kombinatoryczne na obliczanie morsyfikacji macierzowych i grup izotropii	35
3.3. Wnioski, komentarze i problemy otwarte	44
3.4. Tabele z wynikami obliczeń	44
4. Klasyfikacja spektralna Coxetera dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach	50
5. Serie morsyfikacji macierzowych dla diagramów Dynkina \mathbb{A}_n	56
6. Zastosowanie Φ-oczkowych geometrii pierwiastków do konstrukcji kongruencji Grama bigrafów dodatnich	61
6.1. Schemat stosowania geometrii Φ_Δ -oczkowych	61
6.2. Redukcja do geometrii Φ_A -oczkowych względem morsyfikacji	64
6.3. O kołczanach Φ_A -oczkowych. Toroidalny algorytm oczkowy	67
7. Φ-oczkowe kołczany orbit dla morsyfikacji diagramów Dynkina \mathbb{A}_n. Algorytmy symboliczne	74
7.1. Algorytmy dla serii morsyfikacji grafów Dynkina \mathbb{A}_n , gdy liczba $n \geq 4$ jest parzysta	74
7.2. Algorytmy dla serii morsyfikacji grafów Dynkina \mathbb{A}_n , gdy liczba $n \geq 5$ jest nieparzysta	80
8. Przegląd stosowanych algorytmów oraz analiza ich złożoności obliczeniowej	88
8.1. Algorytmy i procedury pomocnicze	89
8.2. Algorytmy i procedury autorskie	89
8.3. Uwagi o modyfikacji głównych algorytmów	95

8.3.1. O algorytmie inflacyjnym	95
8.3.2. Nowa koncepcja uzasadnienia głównej klasyfikacji bigrafów o co najmniej 10-ciu wierzchołkach	96
Dodatek A. Algorytmy	98
Spis cytowanej literatury	102

Wstęp

W całej rozprawie stosujemy następujące oznaczenia. Symbolem \mathbb{N} oznaczamy zbiór liczb naturalnych, symbolem \mathbb{Z} pierścień liczb całkowitych, symbolami $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, odpowiednio ciało liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych. Dla liczby naturalnej $n \geq 1$, symbolami

$$\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_n, \mathbb{Q}^n := \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_n, \mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n, \text{ oraz } \mathbb{C}^n := \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_n,$$

oznaczamy produkty kartezjańskie n egzemplarzy zbiorów \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} oraz \mathbb{C} . Bazą standardową grupy wolnej \mathbb{Z}^n nazywać będziemy wektory e_1, \dots, e_n , gdzie $e_i = [0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{Z}^n$.

Przez $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oznaczać będziemy pierścień $n \times n$ macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ stopnia n o współczynnikach $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ w pierścieniu \mathbb{Z} , przez $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ macierz identycznościową, natomiast przez $\text{Gl}(n, \mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); \det A = \pm 1\} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ grupę wszystkich \mathbb{Z} -odwracalnych $n \times n$ macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j \leq n}$ o współczynnikach $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Macierz transponowaną do A oznaczamy symbolem A^{tr} .

Rozprawa jest poświęcona klasie problemów algorytmiczno-obliczeniowych występujących w klasyfikacji Coxetera-Grama spójnych dodatnich prostych **grafów oznakowanych** $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \sigma)$ o skończonym zbiorze wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz skończonym zbiorze krawędzi Δ_1 , z których każda krawędź $\beta \in \Delta_1$ jest oznakowana symbolem $\sigma(\beta) \in \{-1, +1\}$ z dwuelementowego zbioru $\{-1, +1\}$. Grafy oznakowane (Δ, σ) będziemy traktowali jako grafy krawędziowo-dwudzielne $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ bez pętli (w skrócie, **bigrafy**) (zdefiniowane w pracy [70] oraz rozdziale 2.1).

Jednym z głównych celów rozprawy jest zbudowanie pakietu algorytmów służących do rozwiązywania wybranych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera dodatnich prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \sigma)$ oraz klasy nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ bez pętli. Problemy te zostały sformułowane na seminariach doktoranckich prowadzonych przez promotora w latach 2010-2015, a także w jego publikacjach [69]–[76] oraz w publikacjach [48]–[50] wspólnych z S. Kasjanem. Formułujemy je w dalszej części wstępu, w podrozdziale 2.3 jako problemy A–D oraz w rozdziale 6 jako hipotezę spektralną 6.0.1, problem 6.0.2 oraz problem 6.2.1.

Krótkie wprowadzenie do spektralnej analizy Coxetera grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \sigma)$ oraz klasy nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ bez pętli przedstawiamy w rozdziałach 1 oraz 2, gdzie również podajemy motywacje do badań nad problemami spektralnej klasyfikacji Coxetera skończonych bigrafów, zobacz podrozdział 2.2.

Przypomnijmy, że w analizie spektralnej Coxetera bigrafów stosuje się następujący schemat. Z dowolnym prostym grafem oznakowanym $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \sigma)$ (lub ogólniej: z dowolnym bigrafem Δ bez pętli), o skończonym zbiorze ponumerowanych wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$, stowarzysza się jego **niesymetryczną macierz Grama** $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, **symetryczną macierz Grama** $G_\Delta := \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, \mathbb{Z} -odwracalną macierz Coxetera $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr}$ oraz jej zespolone spektrum $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$, zwane spektrum Coxetera bigrafu Δ (zobacz podrozdział 2.2). Macierz $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ wyznacza bigraf Δ jednoznacznie, z dokładnością do numeracji jego wierzchołków. Jednym z problemów jakimi zajmuje się spektralna analiza Coxetera jest:

PROBLEM 1°. *Kiedy spektrum Coxetera $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ wyznacza spójny bigraf Δ' bez pętli jednoznacznie z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ zdefiniowanej w pracy*

[70] następująco:

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$$

Ponieważ wiadomo, że istnienie silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ implikuje równość spektrów Coxetera $\mathbf{specc}_{\Delta} = \mathbf{specc}_{\Delta'}$ (zobacz lemat 2.3.1), więc problem 1° jest pytaniem o prawdziwość implikacji przeciwnej.

Jednym z głównych osiągnięć tej rozprawy jest dowód tej implikacji (a tym samym rozwiązanie problemu 1°) dla wszystkich dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych Δ o co najwyżej 9-ciu wierzchołkach. W tym wypadku uzyskujemy w twierdzeniu 4.1.2 pełną klasyfikację takich bigrafów z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ podając pełną listę takich dodatnich bigrafów klasyfikujących składającą się z 26 bigrafów opisanych w tabeli 4.1.1.

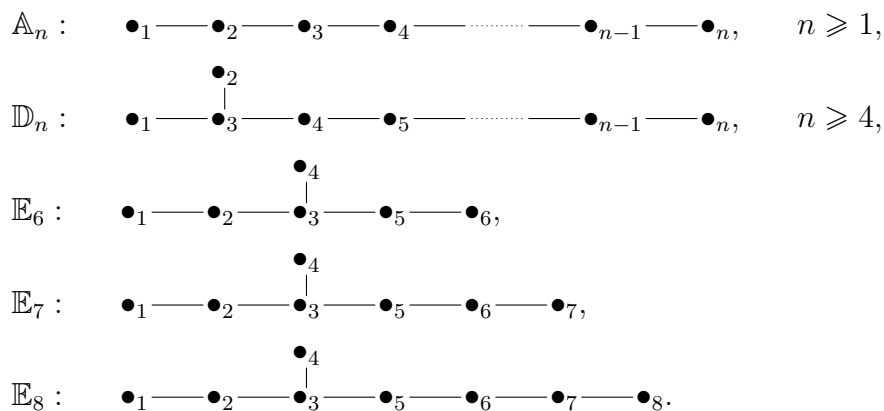
Innym trudnym problemem spektralnej analizy Coxetera jest:

PROBLEM 2°. Zbudować algorytmy konstruujące, dla pary spójnych dodatnich bigrafów Δ, Δ' bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach spełniających relację $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (a w szczególności równość $\mathbf{specc}_{\Delta} = \mathbf{specc}_{\Delta'}$), pewną macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $\check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B$.

Rozwiązanie problemu 2° dla szerokiej klasy bigrafów Δ podajemy w rozdziałach 6 oraz 7, gdzie również opisujemy metodę stosowania tzw. algorytmu toroidalno-oczkowego w wypadku ogólnym.

Jednym z ważniejszych narzędzi redukcyjnych zastosowanych w rozdziałach 3, 6 oraz 7 do rozwiązywania problemów 1° oraz 2° jest zdefiniowana w artykułach [70, 71, 72, 75, 76] redukcja do badania analogicznych problemów dla skończonego zbioru $\mathbf{Mor}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ wszystkich morsyfikacji macierzowych A (w sensie definicji 3.1.1) jednorodnych diagramów Dynkina D przedstawionych w następującej tabeli.

Tabela 1. Jednorodne diagramy Dynkina.



W dużym uproszczeniu, metoda ta polega na stowarzyszeniu $\Delta \mapsto D\Delta$ (zobacz tw. 2.0.6, dodatek A.1), z każdym spójnym dodatnim bigrafem Δ bez pętli o $n \geq 2$ wierzchołkach, diagramu Dynkina $D\Delta$, który jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny z Δ względem słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ zdefiniowanej w pracy [70] następująco:

$$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$$

Dla danego diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ definiuje się zbiór \mathcal{UBigr}_D wszystkich spójnych bigrafów dodatnich Δ bez pętli, które są słabo \mathbb{Z} -kongruentne z D oraz definiuje się funkcję redukującą (zobacz 3.0.3)

$$\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Na podstawie twierdzenia 3.1.9, istnieje silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ w \mathcal{UBigr}_D wtedy i tylko wtedy, gdy macierzowe morsyfikacje $\phi_D(\Delta), \phi_D(\Delta') \in \mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ leżą w jednej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie prawego działania

$$* : \mathbf{Mor}_D \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbf{Mor}_D, \quad (A, B) \mapsto A * B := B^{tr} \cdot A \cdot B,$$

skończonej grupy izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D := \{B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}); G_D * B = G_D\}$ diagramu D na skończonym zbiorze \mathbf{Mor}_D . Zatem funkcja ϕ_D redukuje problemy 1° oraz 2° do analogicznych problemów klasyfikacji i obliczania $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit skończonego zbioru $\mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ macierzy \mathbb{Z} -odwracalnych, dla ustalonego diagramu Dynkina D .

Stosując tę redukcję zredukowaliśmy problem klasyfikacyjny 2° do budowania tzw. algorytmów toroidalno-oczkowych dokładnie opisanych w rozdziałach 6 oraz 7.

W drugiej uzupełnionej wersji rozprawy dodaliśmy rozdział 8, w którym szacujemy złożoność obliczeniową stosowanych algorytmów.

Większość z najważniejszych wyników tej rozprawy została opublikowana:

- w czterech artykułach naukowych [8], [24], [30], [31] w czasopismach specjalistycznych: *Fund. Inform.* 2013, *Discrete Math.* 2013, *J. Comp. Appl. Math.* 2014 oraz *Discrete Appl. Math.* 2015, oraz
- w czterech artykułach pokonferencyjnych [9], [27],[28] oraz [29].

Znaczącą część tych wyników autor przedstawił w referatach na następujących międzynarodowych konferencjach naukowych:

- *Experiences in computing mesh root systems for Dynkin diagrams using Maple and C++*, wygłoszony podczas: *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing - SYNASC11*, 26.09–29.09.2011r. Timisoara, Rumunia,
- *On Coxeter Spectral Study of Edge-Bipartite Graphs, Matrix Morsifications and Mesh Root Systems for Dynkin Diagrams*, wygłoszony podczas: *Cologne - Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization - CTW*, 29.05–31.05.2012r. Monachium, Niemcy,
- *On computing mesh root systems and the isotropy group for simply-laced Dynkin diagrams*, wygłoszony podczas: *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing - SYNASC12*, 26.09–29.09.2012r. Timisoara, Rumunia,
- *On Coxeter type classification of loop-free edge-bipartite graphs and matrix morsifications*, wygłoszony podczas: *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing - SYNASC13*, 23.09–26.09.2013r. Timisoara, Rumunia.

1. Wprowadzenie

Przypomnijmy, że podstawowa część rozprawy poświęcona jest prostym grafom oznakowanym oraz grafom krawędziowo-dwudzielnym $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ o $n \geq 1$ wierzchołkach (zobacz definicje 2.1.1 oraz 2.1.8) z dodatnio określoną symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ zdefiniowaną w definicji 2.1.11, a także ich klasyfikacji spektralnej Coxetera omówionej w podrozdziale 2.2. Badania te zalicza się w literaturze przedmiotu do spektralnej teorii grafów, gdyż badana tu klasa grafów krawędziowo-dwudzielnych jest podklasą multigrafów oznakowanych, zwanych w literaturze angielsko-języcznej *signed graphs*, w skrócie *sigraphs*.

W związku z tym, wprowadzenie do spektralnej klasyfikacji Coxetera prostych grafów oznakowanych oraz grafów krawędziowo-dwudzielnych poprzedzimy przypomnieniem podstawowych definicji, faktów i krótkich informacji o spektralnej analizie grafów i jej zastosowaniach, zobacz [15], [18]–[21], [33], [56], [64]. W rozdziale tym przedstawimy również zarys genezy spektralnej analizy Coxetera oraz jej wykorzystanie w klasyfikacji spektralnej zbiorów częściowo uporządkowanych, zobacz [10]–[12], [22], [36]–[38], [48], [49], [61], [62], [65], [67], [70].

1.1. Informacje wstępne o spektralnej analizie grafów

Przypomnijmy, że jednym z celów spektralnej teorii grafów jest badanie własności wybranych klas grafów przy użyciu własności spektrum ich macierzy sąsiedztwa lub macierzy sąsiedztwa *“wzbogaconych pewnymi parametrami”* zależnymi od badanej klasy grafów (zobacz paragraf 1.2).

Aby ustalić podstawowe oznaczenia używane w całej rozprawie, przypominamy w tym podrozdziale definicję grafu, grafu prostego, macierzy sąsiedztwa grafu, spektrum grafu, izomorfizmu i kospektralności grafów. Stosujemy tu terminologię wprowadzoną w rozdziale 1.1 monografii [20] oraz w rozdziale 1.1 monografii [21].

DEFINICJA 1.1.1. Grafem nazywamy parę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, w której Δ_0 jest niepustym skończonym zbiorem wierzchołków oraz Δ_1 jest skończonym zbiorem krawędzi. Symbolem $\Delta_1(a, a') \subset \Delta_1$ oznaczamy zbiór krawędzi incydentnych z wierzchołkami $a, a' \in \Delta_0$.

Grafem prostym nazywamy graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, który nie posiada pętli i wielokrotnych krawędzi, tzn. $\Delta_1(a, a) = \emptyset$ oraz $|\Delta_1(a, a')| \leq 1$, dla dowolnych wierzchołków $a, a' \in \Delta_0$.

DEFINICJA 1.1.2. Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest grafem prostym, w którym $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz $n \geq 1$, tzn. wierzchołki grafu Δ są ponumerowane liczbami $1, \dots, n$.

(a) **Macierzą sąsiedztwa grafu Δ** nazywamy macierz symetryczną

$$\text{Ad}_\Delta = [d_{ij}^\Delta]_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } d_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1 & ; \text{ istnieje krawędź } a_i \text{---} a_j, \\ 0 & ; \text{ nie istnieje krawędź } a_i \text{---} a_j. \end{cases}$$

- (b) **Spektrum grafu** Δ nazywamy skończony multizbiór $\text{spec}_\Delta \subset \mathbb{R}$, wszystkich (rzeczywistych) n -pierwiastków (licząc z krotnościami) wielomianu charakterystycznego $P_\Delta(t) = \det(tE - \text{Ad}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$ macierzy sąsiedztwa Ad_Δ grafu Δ .

UWAGA 1.1.3. Choć macierz sąsiedztwa Ad_Δ grafu Δ zależy od numeracji wierzchołków a_1, \dots, a_n , to wielomian $P_\Delta(t)$ oraz spektrum spec_Δ grafu Δ nie zależą od wybranej numeracji wierzchołków, a zależą tylko od Δ (zobacz rozdział 1.1 w monografii [20]).

Jednym z celów spektralnej analizy grafów jest badanie własności grafów Δ w terminach własności spektrum ich macierzy sąsiedztwa Ad_Δ oraz badanie klas **grafów kospektralnych**, tzn. w pełni scharakteryzowanych przez ich spektra; co oznacza, że równość ich spektrów implikuje izomorfizm grafów w następującym sensie.

DEFINICJA 1.1.4. Grafy $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ i $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$ nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieją dwie bijekcje $\varphi_0 : \Delta_0 \rightarrow \Delta'_0$, $\varphi_1 : \Delta_1 \rightarrow \Delta'_1$ takie, że ograniczenie funkcji $\beta \mapsto \varphi_1(\beta)$ do zbioru $\Delta_1(a, a')$ definiuje bijekcję $\varphi_1(a, a') : \Delta_1(a, a') \rightarrow \Delta'_1(\varphi_0(a), \varphi_0(a'))$, dla dowolnych wierzchołków $a, a' \in \Delta_0$.

Taką parę bijekcji $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ nazywamy **izomorfizmem grafów** Δ i Δ' .

Szerokie klasy grafów charakteryzowanych przez swoje spektrum można znaleźć w rozdziale 4 monografii [20], który w całości został poświęcony temu zagadnieniu. Następujące twierdzenie orzeka, że jedną z takich klas jest klasa grafów 2-regularnych (zobacz [20, Theorem 4.1.1]). Przypomnijmy, że graf nazywamy **k-regularnym**, jeżeli stopień każdego z jego wierzchołków jest równy $k \in \mathbb{N}$.

TWIERDZENIE 1.1.5. *Każdy graf 2-regularny Δ jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje spektrum spec_Δ z dokładnością do izomorfizmu grafów.*

Prowadzone od lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku badania, pozwoliły na wskazanie szeregu zastosowań analizy spektralnej grafów oraz klasteryzację grafów. Obejmują one m.in. zagadnienia z obszarów bioinformatyki, mechaniki kwantowej, sieci społecznościowych, sieci elektrycznych, telekomunikacji, izomorfizmu grafów, teoretyczne badanie własności grafów, a także praktyczne zastosowania w mechanizmach działania wyszukiwarek internetowych czy równoważeniu obciążenia (ang. *load balancing*). Ważniejsze z nich zostały opisane w monografiach R. A. Brualdiego i D. M. Cvetkovića [15], D. M. Cvetkovića, P. Rowlinsona i S. Simića [20] oraz artykule przeglądowym [19].

Jednymi z najbardziej elementarnych, a jednocześnie jednymi z pierwszych ważnych zastosowań analizy spektralnej w teorii grafów są twierdzenia 1.1.6 oraz 1.1.7 sformułowane na następnej stronie.

Pierwsze z nich opisuje związek pomiędzy dwudzielnością grafu Δ oraz symetrycznością jego spektrum spec_Δ (zobacz [20, Theorem 3.2.3–3.2.4]).

Drugie z nich (udowodnione w pracy [18]) opisuje związek pomiędzy regularnością grafu Δ , stopniami jego wierzchołków oraz jego spektrum spec_Δ .

TWIERDZENIE 1.1.6. *Jeśli $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest spójnym grafem prostym o n -wierzchołkach, to następujące trzy warunki są równoważne:*

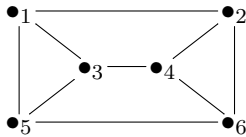
- (a) Δ jest dwudzielny, tzn. istnieje rozłączny podział zbioru wierzchołków $\Delta_0 = \Delta'_0 \dot{\cup} \Delta''_0$ taki, że dla każdej krawędzi $\beta \in \Delta_1(a, a')$, $a \in \Delta'_0, a' \in \Delta''_0$,
- (b) spektrum spec_Δ jest symetryczne względem 0, tzn. $\lambda \in \text{spec}_\Delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-\lambda \in \text{spec}_\Delta$,
- (c) $\lambda_n = -\lambda_1$, gdzie n -wartościami własnymi wielomianu $P_\Delta(t)$ są $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

TWIERDZENIE 1.1.7. (L. Collatz, U. Sinogowitz, 1957) Niech λ_1 będzie indeksem grafu prostego $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ (tj. największą wartością własną macierzy sąsiedztwa Ad_Δ) oraz niech $\bar{d}(\Delta)$ i $\hat{\delta}(\Delta)$ będą odpowiednio średnim i maksymalnym stopniem wierzchołków grafu Δ .

- (a) $\bar{d}(\Delta) \leq \lambda_1 \leq \hat{\delta}(\Delta)$.
- (b) $\bar{d}(\Delta) = \lambda_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest grafem regularnym.
- (c) Jeżeli Δ jest grafem spójnym, to $\lambda_1 = \hat{\delta}(\Delta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest grafem regularnym.

Zastosowanie twierdzeń 1.1.6–1.1.7 do uzyskania informacji o regularności i dwudzielności grafu na podstawie jego spektrum ilustrują następujące dwa przykłady.

PRZYKŁAD 1.1.8. Jeśli Δ :



, to $\text{Ad}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

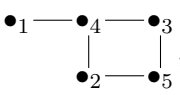
Ponieważ wielomianem charakterystycznym macierzy sąsiedztwa Ad_Δ jest

$$P_\Delta(t) = \det(tE - \text{Ad}_\Delta) = t^6 - 9t^4 - 4t^3 + 12t^2 = t^2(t-3)(t-1)(t+2)^2,$$

więc $\text{spec}_\Delta = \{3, 1, 0, 0, -2, -2\}$.

- Na podstawie twierdzenia 1.1.6, Δ nie jest grafem dwudzielnym, ponieważ jego spektrum nie jest symetryczne względem 0.
- Na podstawie twierdzenia 1.1.7, Δ jest grafem 3-regularnym, gdyż Δ jest spójny oraz $\lambda_1 = \hat{\delta}(\Delta) = 3$.

PRZYKŁAD 1.1.9. Jeśli Δ jest grafem



, to $\text{Ad}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Wielomianem charakterystycznym grafu Δ jest $t^5 - 5t^3 + 2t$.
- $\text{spec}_\Delta = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{17}}, -\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}, \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{17}} \right\}$.
- Na podstawie twierdzenia 1.1.6, Δ jest grafem dwudzielnym, ponieważ jego spektrum jest symetryczne względem 0.
- Na podstawie twierdzenia 1.1.7, Δ nie jest grafem regularnym, gdyż Δ jest spójny oraz

$$2 = \bar{d}(\Delta) < \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{17}} \approx 2.1358 < \hat{\delta}(\Delta) = 3.$$

1.2. Modyfikacje macierzy sąsiedztwa i ich spektra

W spektralnej analizie grafów oprócz badania grafów Δ w terminach własności ich spektrów spec_Δ (tzn. spektrów ich macierzy sąsiedztwa Ad_Δ), bada się również własności grafów Δ w terminach spektrów zmodyfikowanych macierzy sąsiedztwa, w tym m.in. macierzy Laplace'a, bezznakowej macierzy Laplace'a (G. Kirchhoff, 1847) oraz macierzy Seidela (J. H. van Lint, J. J. Seidel, 1966). Wybór zmodyfikowanej macierzy sąsiedztwa, której spektrum jest wykorzystywane w badaniu wybranej klasy grafów, zależy od rozważanego problemu oraz specyficznych własności każdej z tych klas.

Dla przykładu, wartości własne macierzy Seidel'a

$$S_\Delta := J - E - 2 \cdot \text{Ad}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

prostego grafu Δ , w której $J = [1]_{n \times n}$ jest macierzą składającą się z samych jedynek, są wykorzystywane m.in. w badaniu grafów k -silnie regularnych (zobacz artykuł [64]).

Aby przybliżyć czytelnikowi rozprawy charakter uzyskanych na tej drodze wyników (a także ich analogie z wynikami spektralnej analizy Coxetera uzyskanymi przez nas w tej rozprawie), przypomnimy teraz parę wybranych własności i zastosowań kilku zmodyfikowanych macierzy sąsiedztwa grafu oraz ich spektrów. Wyniki te zostały przedstawione w rozdziale 7 monografii [20] oraz artykułach przeglądowych [33] i [56].

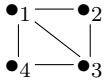
LEMAT 1.2.1. *Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie grafem prostym o zbiorze (ponumerowanych) wierzchołków $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$. Niech Ad_Δ będzie macierzą sąsiedztwa grafu Δ oraz niech $L_\Delta := \text{diag}(d_1, \dots, d_n) - \text{Ad}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ będzie macierzą Laplace'a grafu Δ , gdzie d_i jest stopniem wierzchołka $a_i \in \Delta_0$.*

- (a) *Macierz Laplace'a L_Δ jest dodatnio półokreślona, każda z jej rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ jest nieujemna, oraz*
 - (a1) $\lambda_n = 0$;
 - (a2) *liczba zerowych wartości własnych jest równa liczbie spójnych składowych grafu Δ (M. Fiedler, 1973);*
 - (a3) *jeżeli Δ jest grafem spójnym, to liczba $t(\Delta)$ drzew rozpinających Δ jest równa*

$$t(\Delta) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}{n}.$$

- (b) *Bezznakowa macierz Laplace'a $L_\Delta^+ := \text{diag}(d_1, \dots, d_n) + \text{Ad}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest dodatnio półokreślona, każda z jej rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ jest nieujemna, oraz*
 - (b1) *jeżeli Δ jest grafem spójnym, to $\lambda_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest grafem dwudzielnym;*
 - (b2) *liczba zerowych wartości własnych jest równa liczbie dwudzielnych spójnych składowych grafu Δ .*

Następujący przykład ilustruje podstawowe różnice pomiędzy spektrami macierzy Ad_Δ , L_Δ , L_Δ^+ oraz S_Δ grafu Δ w zależności od ich określoności i symetryczności.

PRZYKŁAD 1.2.2. Jeśli Δ : , to

	Macierz	Wielomian charakterystyczny macierzy	Spektrum macierzy
Macierz sąsiedztwa	$\text{Ad}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$t^4 - 5t^2 - 4t$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}, -1, 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$
Macierz Laplace'a	$L_\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	$t^4 - 10t^3 + 32t^2 - 32t$	0, 2, 4, 4
Bezznakowa macierz Laplace'a	$L_\Delta^+ = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$t^4 - 10t^3 + 32t^2 - 40t + 16$	$3 - \sqrt{5}, 2, 2, 3 + \sqrt{5}$
Macierz Seidel'a	$S_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$t^4 - 6t^2 + 5$	$-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}$

Różne zastosowania oraz różnorodność problemów, w których rozwiązaniu udało się z powodzeniem wykorzystać analizę spektralną grafów, stały się w artykule [70] jedną z inspiracji do zdefiniowania i użycia analizy spektralnej Coxetera w badaniu grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ (w sensie definicji 2.1.8) oraz zbiorów częściowo uporządkowanych $I \equiv (I, \preceq)$. Pobieżne wprowadzenie do tej tematyki przedstawiamy w następnym paragrafie.

1.3. O genezie spektralnej analizy Coxetera

Przedmiotem badań w rozprawie są przede wszystkim spójne grafy oznakowane, tzn. grafy proste $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, których krawędzie są oznakowane jednym ze znaków $+$ lub $-$. Jednym z głównych problemów badanych w tej rozprawie jest klasyfikacja grafów oznakowanych z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -kongruencji $\approx_{\mathbb{Z}}$ zdefiniowanej w rozdziale 2, a także rozwiązanie pewnych problemów z analizy spektralnej grafów, sformułowanych w artykułach [70] oraz [48], [49]. Główne z tych problemów przypominamy w paragrafie 2.2.

W badaniu grafów oznakowanych używamy przede wszystkim metod i technik spektralnej analizy Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych wprowadzonej i rozwijanej w artykułach [70] oraz [48], [49] jako wersja spektralnej analizy grafów (omówionej pobieżnie w podrozdziale 1.2). Głównymi narzędziami tych metod jest stowarzyszenie z każdym grafem oznakowanym Δ o $n \geq 1$ wierzchołkach (ogólniej, z grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ w sensie definicji 2.1.8) jego niesymetrycznej macierzy Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, macierzy Coxetera $\text{Cox}_\Delta := \check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oraz jej zespolonego spektrum $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$, zwanego spektrum Coxetera grafu Δ . Metoda ta polega m.in. na badaniu dwuliniowej \mathbb{Z} -kongruencji $\approx_{\mathbb{Z}}$ grafów oznakowanych w terminach ich spektrum Coxetera $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$. U podstaw spektralnej analizy Coxetera leżą liczne wcześniej rozwijane teorie i zastosowania, w tym m.in.:

- (a) klasyfikacja całkowitych form kwadratowych, w szczególności form słabo dodatnio określonych oraz słabo dodatnio półokreślonych w powiązaniu z diagramami Dynkina i diagramami Euklidesa (prace Barot [4], Barot-de la Peña [5, 6], Drozd [22], Dräxler [23], von Höhne [42], von Höhne-de la Peña [43], Marczak-Polak-Simson [55], Ovsienko [59]),
- (b) badanie struktury i kombinatorycznych własności zbiorów częściowo uporządkowanych (w skrócie: porządków) oraz ich reprezentacji macierzowych (monografie Gabriel-Roiter [32] i Simson [65] oraz prace Drozd [22], Bondarenko-Stepochkina [11, 12], Bondarenko-Futorny-Klimchuk-Sergeichuk-Yusenko [10], Gąsiorek [35], Gąsiorek-Simson-Zajac [37, 38], [67]),
- (c) opis algorytmiczno-graficzny rozwiązań całkowitych szerokiej klasy kwadratowych równań diofantycznych $q(x_1, \dots, x_n) = d$, podany w pracach Simsona [68] oraz [69] (w powiązaniu z X Problemem Hilberta oraz problemami teorii liczb o przedstawialności „liczb przez formy”, zobacz rozdział 2 monografii Borevich-Shafarevich [13]),
- (d) częściowe rozwiązanie problemu istnienia \mathbb{Z} -kongruencji dla macierzy A oraz $A^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ sformułowanego w pracach Horna-Sergeichuka [44], Gerasimovej-Horna-Sergeichuka [39], Simsona [72], oraz badanego w pracach Gąsiorek-Simson [36], Simson-Zajac [79],
- (e) klasyfikacja nieprzywiedlnych Φ -oczkowych zredukowanych systemów pierwiastków (prace Simson [68]–[72], Felisiak-Simson [27]–[30], oraz nowe prace Kasjan-Simson [48]–[50] zawierające gruntowne omówienie problemu),
- (f) klasyfikacja kategorii pochodnych $\mathcal{D}^b(\text{mod } R)$ (z dokładnością do trójkątnej równoważności) dla skończone wymiarowych K -algebr R nad ciałem algebraicznie domkniętym K , a także analiza struktury tubularnej ich kołczanów Auslandera-Reiten w zależności od rozkładów wielomianów Coxetera $\text{cox}_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$ takich algebr R na iloczyn wielomianów cyklotomicznych (prace Lenzing-de la Peña [54], Simson [69], Zhang [82, 83] oraz trzy najnowsze publikacje (z 2014 i 2015 roku): Mróz-de la Peña [58], de la Peña [60] i Simson [74]),
- (g) klasyfikacja zbiorów częściowo uporządkowanych w terminach ich spektrum Coxetera (omówione w następnym podrozdziale).

1.4. O spektralnej analizie Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych

U podstaw spektralnej analizy Coxetera grafów oznakowanych oraz grafów krawędziowo-dwudzielnych sformalizowanej w artykule [69], leżą główne idee spektralnej analizy Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych (I, \preceq) (w skrócie: porządków) sformułowanej w jawnej postaci w pracach Simson [67] oraz Simson-Zajac [79].

Przypomnijmy, że każdemu takiemu skończonemu porządkowi $I \equiv (I, \preceq)$ o $n \geq 1$ elementach a_1, \dots, a_n , przyporządkowuje się macierz incydencji

$$C_I = [c_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } c_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{gdy } a_i \preceq a_j, \\ 0 & ; \text{gdy } a_i \not\preceq a_j. \end{cases}$$

Ponieważ $\det C_I = 1$, więc istnieje macierz

$$\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

zwana macierzą Coxetera porządku I . Wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_I(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) \in \mathbb{Z}[t],$$

macierzy Cox_I nazywa się wielomianem Coxetera porządku I , a zbiór $\mathbf{specc}_I \subseteq \mathbb{C}$ jego wszystkich n zespolonych pierwiastków (licząc z krotnościami) nazywa się spektrum Coxetera porządku I .

Dowodzi się, że $\text{cox}_I(t)$ oraz \mathbf{specc}_I nie zależą od numeracji elementów a_1, \dots, a_n . Ponadto \mathbf{specc}_I jest podzbiorem okręgu jednostkowego

$$\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C},$$

gdy symetryczna macierz Grama $G_I = \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr})$ porządku I jest dodatnio półokreślona.

Jednym z zadań tej teorii jest podanie pełnej klasyfikacji porządków (spełniających pewne warunki nieujemności) względem \mathbb{Z} -kongruencji $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ zdefiniowanej następująco:

$I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierze C_I oraz C_J są \mathbb{Z} -kongruentne,

tzn. istnieje macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ taka, że $C_J = B^{tr} \cdot C_I \cdot B$ oraz $\det B = \pm 1$.

Dla szerokiej klasy spójnych porządków udowodniono następujące równoważności.

- (i) Jeśli symetryczna macierz Grama G_I jest dodatnio określona, to $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{specc}_I = \mathbf{specc}_J$.
- (ii) Jeśli symetryczna macierz Grama G_I jest dodatnio półokreślona, to $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{specc}_I = \mathbf{specc}_J$ oraz $\text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J$,

gdzie Dyn_I jest jednorodnym diagramem Dynkina (zobacz tabela 1) stowarzyszonym z porządkiem I w artykułach [37] oraz [38].

Wyniki tego rodzaju można znaleźć w pracach [10]–[12], [22], [36]–[38], [61], [62], [65], [67] oraz w rozprawie doktorskiej M. Gąsioraka [35].

2. Problemy klasyfikacji prostych grafów oznakowanych oraz grafów krawędziowo-dwudzielnych

Jednym z głównych celów tej rozprawy jest klasyfikacja spójnych prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ (zdefiniowanych w paragrafie 2.1) z dodatnio określoną symetryczną macierzą Grama G_Δ , a także spójnych dodatnich krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ bez pętli (zdefiniowanych w definicji 2.1.8) o $n \geq 1$ wierzchołkach, względem silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\approx_{\mathbb{Z}}$, zdefiniowanej w pracy [70] następująco:

$$(2.0.1) \quad \Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}),$$

gdzie $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama w sensie definicji 2.1.11, natomiast

$$(2.0.2) \quad \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) := \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); \det B = \pm 1\} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

jest grupą wszystkich \mathbb{Z} -odwracalnych macierzy w pełnej algebrze macierzy $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Jednym z ważniejszych osiągnięć tej rozprawy jest podana w rozdziale 4 pełna klasyfikacja, z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\approx_{\mathbb{Z}}$, wszystkich spójnych prostych grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach z dodatnio określoną symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ w sensie definicji 2.1.2. W twierdzeniu 4.1.2 podajemy pełną listę takich prostych grafów oznakowanych składającą się pięciu diagramów Dynkina oraz z listy innych 26-ciu grafów.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy uzyskaną w [70, Theorem 3.1] pełną klasyfikację wszystkich spójnych dodatnich krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ bez pętli względem słabszej \mathbb{Z} -kongruencji $\sim_{\mathbb{Z}}$ (zwanej słabą \mathbb{Z} -kongruencją Grama) zdefiniowanej następująco

$$(2.0.3) \quad \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}),$$

gdzie $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest symetryczną macierzą Grama w sensie definicji 2.1.11.

Można łatwo udowodnić, że silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ implikuje równość $\text{specc}_\Delta = \text{specc}_{\Delta'}$ spektrów Coxetera oraz słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, dla dowolnych dwóch grafów oznakowanych Δ, Δ' .

Jednym z najważniejszych otwartych problemów analizy spektralnej Coxetera jest podanie takich własności prostych grafów oznakowanych Δ oraz Δ' , które zapewniają prawdziwość implikacji przeciwnej, zobacz [70].

Oprócz pełnej klasyfikacji podanej w twierdzeniu 4.1.2, innym istotnym osiągnięciem rozprawy jest następujące rozwiązanie tego problemu dla grafów o co najwyżej 9-ciu wierzchołkach podane w twierdzeniu 4.1.5 oraz w rozdziale 4.

ROZWIĄZANIE 2.0.4. *Jeśli Δ, Δ' są parą spójnych prostych grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach z dodatnio określonymi symetrycznymi macierzami Grama $G_\Delta, G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, to równość spektrów Coxetera $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$ implikuje \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Ponadto w tej sytuacji konstruujemy algorytmy numeryczne i graficzne obliczające \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą tę \mathbb{Z} -równoważność $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (tzn. taką, że $\check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$).*

W dowodzie rozwiązania 2.0.4 oraz w uzyskaniu klasyfikacji podanej w twierdzeniu 4.1.2 istotnie wykorzystujemy następujące prawe działanie

$$(2.0.5) \quad * : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}), \quad (A, B) \mapsto A * B = B^{tr} \cdot A \cdot B,$$

grupy liniowej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ na przestrzeni \mathbb{Q} -liniowej $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ (zobacz rozdział 2.2). Działanie to jest jednym z podstawowych narzędzi technicznych, stosowanych w rozprawie z dużym powodzeniem. U podstaw jego zastosowań leżą następujące dwie proste uwagi wynikające wprost z definicji.

- (a) $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ wtedy i tylko wtedy, gdy symetryczne macierze Grama $G_{\Delta'}, G_\Delta$ leżą w jednej orbicie działania (2.0.5),
- (b) $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ wtedy i tylko wtedy, gdy niesymetryczne macierze Grama $\check{G}_{\Delta'}, \check{G}_\Delta$ leżą w jednej orbicie działania (2.0.5).

Innym istotnym faktem wykorzystywanym w dowodzie rozwiązania 2.0.4 oraz w uzyskaniu klasyfikacji podanej w twierdzeniu 4.1.2 jest następujące twierdzenie klasyfikacyjne wynikające z [70, Theorem 3.1].

TWIERDZENIE 2.0.6. *Jeśli Δ jest spójnym prostym grafem oznakowanym o $n \geq 1$ wierzchołkach z dodatnio określoną symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, to istnieje diagram Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ (zobacz tablica 1) oraz macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ takie, że $G_D = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B = G_\Delta * B$, tzn. B definiuje słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama*

$$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D.$$

Diagram Dynkina D , którego istnienie gwarantuje twierdzenie 2.0.6 nazywamy typem Dynkina spójnego prostego grafu oznakowanego Δ . Zarówno diagram D , jak też macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą \mathbb{Z} -kongruencję $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$, zastosujemy w rozdziale 3 do konstrukcji funkcji

$$\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

(zobacz 3.0.3) redukującej rozwiązanie problemów sformułowanych dla prostych grafów oznakowanych do problemu klasyfikacji orbit działania (2.0.5) ograniczonego do zbioru \mathbf{Mor}_D morfyfikacji macierzowych zdefiniowanych w paragrafie 3.1.

Przedstawmy teraz szkic planu rozdziału 2. W podrozdziale 2.1 przypominamy definicje: grafu oznakowanego i jego spektrum, grafu krawędziowo-dwudzielnego, symetrycznej i niesymetrycznej macierzy Grama, dodatniości grafu oraz pojęcia z nimi związane, zobacz [2], [41], [70] oraz [81].

Podrozdział 2.2 jest poświęcony problemowi klasyfikacji dodatnich, spójnych, krawędziowo-dwudzielnych grafów bez pętli względem słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\approx_{\mathbb{Z}}$, a także przypomnieniu znanych faktów z tej tematyki. Przypominamy m.in.,

definicje macierzy Coxetera, spektrum Coxetera oraz związek pomiędzy spektrum Coxetera oraz spektrum macierzy sąsiedztwa dla specjalnych grafów oznakowanych (zobacz [20], [45], [46], [67]–[70]).

W ostatnim podrozdziale 2.3 przeprowadzamy dyskusję na temat głównych otwartych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów dodatnich.

2.1. Grafy oznakowane i krawędziowo-dwudzielne

Grafy krawędziowo-dwudzielne (ang. *edge-bipartite graphs*, w skrócie: *bigraphs*) zostały zdefiniowane w pracy Simsona [70] jako specjalna klasa (multi)grafów oznakowanych (ang. *signed graphs*, w skrócie: *sigraphs*). Koncepcja i zastosowanie grafów oznakowanych zostały podane w 1953 roku przez Franka Harary w pracy [41]. Bezpośrednim celem ich wprowadzenia było opisanie procesów badanych przez psychologię społeczną. W ostatnich czterdziestu latach badania klasy grafów oznakowanych były prowadzone z powodzeniem m.in. przez Thomasa Zaslavsky (zobacz [81]) oraz Belmannu Acharya (zobacz [2]). W dalszej części pracy będziemy stosowali oznaczenia wprowadzone w artykule [70].

Przypomnijmy teraz definicję grafu oznakowanego, jego macierzy sąsiedztwa, macierzy Grama oraz spektrum, które zostały wprowadzone w pracach [2], [41], [70], [81].

DEFINICJA 2.1.1. Grafem oznakowanym nazywamy trójkę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, gdzie (Δ_0, Δ_1) jest grafem prostym oraz $\text{sgn} : \Delta_1 \rightarrow \{+, -\}$ jest przyporządkowaniem każdej krawędzi β grafu (Δ_0, Δ_1) znaku $\text{sgn}(\beta)$ ze zbioru $\{+, -\}$.

DEFINICJA 2.1.2. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ będzie grafem oznakowanym o $n \geq 1$ wierzchołkach a_1, \dots, a_n .

- (a) **Macierzą sąsiedztwa grafu oznakowanego** $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ nazywamy macierz symetryczną

$$\text{Ad}_\Delta := [d_{ij}^\Delta]_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } d_{ij}^\Delta = \begin{cases} -1 & ; \text{gdy istnieje } a_i \overset{-}{\text{---}} a_j, \\ 1 & ; \text{gdy istnieje } a_i \overset{+}{\text{---}} a_j, \\ 0 & ; \Delta_1(a_i, a_j) = \emptyset. \end{cases}$$

- (b) **Niesymetryczną macierzą Grama** oznakowanego grafu $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ nazywamy macierz górnotrójkątną

$$(2.1.3) \quad \check{G}_\Delta := \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & \dots & d_{1n}^\Delta \\ 0 & 1 & \dots & d_{2n}^\Delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Symetryczną macierzą Grama grafu $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ nazywamy macierz symetryczną

$$(2.1.4) \quad G_\Delta := E + \frac{1}{2} \text{Ad}_\Delta = \frac{1}{2} [\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{\text{tr}}] \in \mathbb{M}_n\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right).$$

(c) **Spektrum grafu** $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ nazywamy skończony zbiór $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$, wszystkich n -pierwiastków (rzeczywistych, licząc z krotnościami) wielomianu charakterystycznego

$$P_\Delta(t) := \det(t \cdot E - \text{Ad}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$$

macierzy sąsiedztwa Ad_Δ .

Jednym z podstawowych zagadnień rozważanych w literaturze naukowej o grafach oznakowanych jest odpowiedź na pytanie: *Czy graf jest zbalansowany?* (tzn. czy każdy jego cykl jest dodatni?). Przypomnijmy, że cykl nazywamy dodatnim, gdy liczba wchodzących w jego skład krawędzi ze znakiem “-” jest parzysta (zobacz [41]).

Zastosowanie grafów oznakowanych w teorii równowagi społecznej ilustruje następujący prosty przykład opisujący stabilną (inaczej zbalansowaną) relację trzech osób.

PRZYKŁAD 2.1.5. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ będzie grafem oznakowanym w którym graf (Δ_0, Δ_1) ma postać $\Delta : \begin{array}{c} \bullet_1 \\ / \quad \backslash \\ \bullet_2 \quad \bullet_3 \end{array}$. Wierzchołki grafu można utożsamić z trzema różnymi osobami, natomiast znaki krawędzi symbolizują łączące ich wzajemne relacje, tzn. znak “+” oznacza sympatię, zaś “-” oznacza wrogość. Istnieją tylko cztery oznakowania sgn , w których graf pozostaje zbalansowany:

$$(a) : \begin{array}{c} + \bullet_1 + \\ / \quad \backslash \\ \bullet_2 \quad \bullet_3 \\ + \end{array}, \quad (b) : \begin{array}{c} - \bullet_1 + \\ / \quad \backslash \\ \bullet_2 \quad \bullet_3 \\ - \end{array}, \quad (c) : \begin{array}{c} + \bullet_1 - \\ / \quad \backslash \\ \bullet_2 \quad \bullet_3 \\ - \end{array}, \quad (d) : \begin{array}{c} - \bullet_1 - \\ / \quad \backslash \\ \bullet_2 \quad \bullet_3 \\ + \end{array}.$$

Przypadek (a) obrazuje relację wzajemnej sympatii trzech osób, natomiast przypadki (b)–(d) odpowiadają maksymie Roberta Ludluma: “*Wróg mojego wroga jest moim przyjacielem*”.

Następujące twierdzenie udowodnione w pracy [2] (B. Acharya, 1980) opisuje związek pomiędzy spektrum spec_Δ grafu oznakowanego Δ oraz jego zbalansowaniem.

TWIERDZENIE 2.1.6. (B. Acharya, 1980) *Graf oznakowany $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ jest zbalansowany wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\check{\Delta}}$, gdzie $\check{\Delta} = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest grafem nieoznakowanym otrzymanym z Δ przez zapomnienie oznakowania.*

Następujący przykład ilustruje wykorzystanie twierdzenia 2.1.6.

PRZYKŁAD 2.1.7. Jeśli $\Delta : \begin{array}{c} \bullet_3 \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \bullet_4 \\ + \quad + \end{array}$, to $\text{Ad}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{Ad}_{\check{\Delta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- $P_\Delta(t) = P_{\check{\Delta}}(t) = t^4 - 5t^2 - 4t = t(t^3 - 5t - 4) = t(t+1)(t^2 - t - 4)$.
- $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\check{\Delta}} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}, -1, 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \right\}$.
- Ponieważ $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\check{\Delta}}$, więc graf oznakowany $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ jest zbalansowany, na podstawie twierdzenia 2.1.6.

Oprócz prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, przedmiotem badań w rozprawie jest również następująca szersza klasa (multi)grafów oznakowanych, zwanych grafami krawędziowo-dwudzielnymi, zdefiniowana i systematycznie badana w artykule [70].

DEFINICJA 2.1.8. Grafem (multigrafem) krawędziowo-dwudzielnym nazywamy czwórkę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$, gdzie Δ_0 jest niepustym zbiorem wierzchołków, Δ_1 jest skończonym zbiorem krawędzi, natomiast Δ_1^-, Δ_1^+ są rozłącznymi podzbiorem zbioru Δ_1 takimi, że $\Delta_1 = \Delta_1^- \cup \Delta_1^+$ oraz

$$\Delta_1(a, a') = \Delta_1^-(a, a') \text{ lub } \Delta_1(a, a') = \Delta_1^+(a, a'),$$

gdzie $\Delta_1(a, a') \subset \Delta_1$ oznacza zbiór krawędzi incydentnych z wierzchołkami $a, a' \in \Delta_0$.

Krawędzie ze zbioru $\Delta_1^-(a, a')$ przedstawiać będziemy jako ciągłe łuki $a \text{---} a'$, natomiast krawędzie ze zbioru $\Delta_1^+(a, a')$ jako łuki przerywane $a \text{- - -} a'$. Pętlą nazywamy krawędź $\beta \in \Delta_1(a, a)$, tj. $\overset{(\beta)}{\curvearrowright} a$ lub $\overset{(\beta)}{\curvearrowleft} a$.

UMOWA 2.1.9. W dalszej części rozprawy graf krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ będziemy nazywali dla uproszczenia **bigrafem** i oznaczali go symbolem $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumienia. Symbolem \mathcal{Bigr}_n będziemy oznaczali zbiór wszystkich grafów krawędziowo-dwudzielnych o $n \geq 1$ wierzchołkach.

Uwagi historyczne. (a) Niezależnie od badań prowadzonych w teorii grafów i poświęconych spektralnej analizie grafów oznakowanych, w teorii reprezentacji algebr oraz w algebraicznej teorii form kwadratowych używano i badano specjalną klasę grafów nazywanych bigrafami całkowitych form kwadratowych $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (tzw. *unit forms*). Są to w istocie grafy oznakowane, choć tak ich nie nazywano w literaturze z teorii reprezentacji.

Występowały one i były z powodzeniem powszechnie stosowane od początku lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku w pracach I. M. Gelfanda, L. A. Nazarovoj, A. V. Roitera, P. Gabriela, C. M. Ringela, J. A. de la Peñi, H. Lenzinga, D. Simsona, A. Skowrońskiego oraz ich uczniów (zobacz [3], [7], [32], [54], [63], [65], [77], [78], [82]).

(b) Definicja 2.1.8 grafu krawędziowo-dwudzielnego używana w rozprawie została wprowadzona w artykule [70] jako formalizacja pojęcia bigrafu całkowitej formy kwadratowej w powiązaniu z badaniami prowadzonymi w teorii reprezentacji algebr oraz ich kategorii pochodnych. Idee te zostały dokładniej omówione w artykułach Simsona [69, 70], a także w [65, 67, 68].

UMOWA 2.1.10. (a) W dalszej części rozprawy będziemy traktowali dowolny skończony (multi)graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ bez pętli jako graf krawędziowo-dwudzielny, definiując zbiory Δ_1^- oraz Δ_1^+ wzorami $\Delta_1^-(a, a') = \Delta_1(a, a')$ oraz $\Delta_1^+(a, a') = \emptyset$, dla dowolnych $a, a' \in \Delta_0$.

(b) Analogicznie, dowolny skończony prosty graf oznakowany $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$ będziemy traktowali jako graf krawędziowo-dwudzielny przyjmując $\Delta_1^-(a, a') = \Delta_1(a, a')$, gdy istnieje (jedyna) krawędź $\beta \in \Delta_1(a, a')$ taka, że $\text{sgn}(\beta) = -$, oraz przyjmując $\Delta_1^+(a, a') = \Delta_1(a, a')$ w przeciwnym wypadku.

W analizie kombinatorycznych i spektralnych własności grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ używa się zarówno ich macierzy sąsiedztwa, jak też zmodyfikowanych macierzy sąsiedztwa (zobacz paragraf 1.2) zdefiniowanych w artykułach [68] oraz [70] jako **nie-symetryczna** i **symetryczna macierz Grama bigrafu** Δ w następującym sensie.

DEFINICJA 2.1.11. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+) \in \mathcal{Bigr}_n$ będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli. Ustalmy numerację $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$ w zbiorze Δ_0 wierzchołków bigrafu Δ .

- (a) **Niesymetryczną macierzą sąsiedztwa** Δ względem numeracji a_1, \dots, a_n nazywamy macierz

$$\check{D}_\Delta := [d_{ij}^\Delta]_{i,j=\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } d_{ij}^\Delta = \begin{cases} -|\Delta_1^-(i,j)| & ; i \leq j \text{ oraz istnieje } a_i \text{---} a_j, \\ |\Delta_1^+(i,j)| & ; i \leq j \text{ oraz istnieje } a_i \text{---} a_j, \\ 0 & ; i > j. \end{cases}$$

Symetryczną macierzą sąsiedztwa Δ nazywamy $\text{Ad}_\Delta := \check{D}_\Delta + \check{D}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Zauważmy, że $d_{11}^\Delta = \dots = d_{nn}^\Delta = 0$, gdyż Δ nie posiada pętli.

- (b) **Niesymetryczną macierzą Grama** Δ nazywamy macierz

$$\check{G}_\Delta := E + \check{D}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & d_{13}^\Delta & \cdots & d_{1n}^\Delta \\ & 1 & d_{23}^\Delta & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & d_{n-1,n}^\Delta \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Symetryczną macierzą Grama nazywamy $G_\Delta := \frac{1}{2}(\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}) = E + \frac{1}{2}\text{Ad}_\Delta$.

DEFINICJA 2.1.12. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli z ustaloną numeracją wierzchołków $\{a_1, \dots, a_n\}$.

- (a) **Formą kwadratową grafu krawędziowo-dwudzielnego** Δ nazywamy wielomian

$$(2.1.13) \quad q_\Delta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij}^\Delta x_i x_j = x \cdot \check{G}_\Delta \cdot x^{tr} = x \cdot G_\Delta \cdot x^{tr}$$

zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n)$.

- (b) **Zbiorem pierwiastków grafu krawędziowo-dwudzielnego** Δ nazywamy zbiór $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wszystkich pierwiastków $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$ formy kwadratowej $q_\Delta(x)$ stowarzyszonej z Δ . Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$(2.1.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_\Delta &:= \mathcal{R}_\Delta(1) := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 1\}, \\ \mathcal{R}_\Delta(d) &:= \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = d\}, \\ \mathcal{R}_\Delta^+(d) &:= \{v \in \mathcal{R}_\Delta(d); v_1, \dots, v_n \geq 0\}, \end{aligned}$$

dla dowolnej liczby $d \in \mathbb{Z}$.

- (c) Graf krawędziowo-dwudzielny Δ nazywamy **dodatnim** (odp. **nieujemnym**), jeśli stowarzyszona z nim forma kwadratowa $q_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (2.1.13) jest dodatnio (odp. nieujemnie) określona, tzn. $q_\Delta(v) > 0$ (odp. $q_\Delta(v) \geq 0$) dla dowolnego niezerowego wektora $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$.
- (d) Symbolem $\mathcal{UBigr}_n \subseteq \mathcal{Bigr}_n$ oznaczamy zbiór wszystkich spójnych, krawędziowo-dwudzielnych grafów bez pętli o $n \geq 1$ wierzchołkach.
- (e) Symbolem $\mathcal{UBigr}_n^+ \subseteq \mathcal{UBigr}_n \subseteq \mathcal{Bigr}_n$ oznaczamy zbiór wszystkich dodatnich, spójnych, krawędziowo-dwudzielnych grafów bez pętli o $n \geq 1$ wierzchołkach.

UWAGA 2.1.15. Definicje macierzy sąsiedztwa, macierzy Grama, formy kwadratowej $q_\Delta(x)$ i zbiory jej pierwiastków zależą od numeracji a_1, \dots, a_n wierzchołków bigrafu Δ , natomiast definicje dodatniości i nieujemności bigrafu Δ nie zależą od numeracji wierzchołków (zobacz lemat 2.2.1).

PRZYKŁAD 2.1.16. (a) Bigraf Δ : $\begin{array}{cc} \bullet_3 & - & \bullet_4 \\ | & & | \\ \bullet_1 & - & \bullet_2 \end{array}$ jest prostym grafem oznakowanym.

- Macierz $\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest niesymetryczną macierzą Grama bigrafu Δ .
- Formą kwadratową bigrafu Δ jest

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1(x_2 + x_3) - x_2x_4 + x_3x_4.$$

Stosując algorytm Lagrange'a (zobacz dodatek A.5) obliczamy postać kanoniczną $q_\Delta(x)$

$$q_\Delta(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{1}{2}x_4^2.$$

Stąd wynika, że $q_\Delta(v) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^4$ oraz dla dowolnego niezerowego wektora $v \in \mathbb{Z}^4$ zachodzi nierówność $q_\Delta(v) > 0$. Zatem Δ jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym.

Stosując algorytm ograniczonego zliczania (zobacz algorytm A.3) obliczamy zbiór \mathcal{R}_Δ pierwiastków bigrafu Δ składający się z 24 wektorów grupy \mathbb{Z}^4 przedstawionych na następującej liście:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Delta := \mathcal{R}_\Delta(1) = & \{(1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 1), \\ & (-1, 1, 1, 0), (0, -1, 0, -1), (0, -1, 0, 0), (0, -1, 1, -1), (0, 0, -1, 0), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, 1), \\ & (0, 0, 0, -1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, -1, -1, 0), (1, -1, 0, -1), \\ & (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, -1, 1), (-1, 0, 1, -1)\}. \end{aligned}$$

- (b) Jeśli $\Delta' : \bullet_1 = = \bullet_2$ to $\check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $q_{\Delta'}(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2$.

Stąd wynika, że $q_{\Delta'}(v) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^2$. Zatem Δ' jest nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym. Ponieważ dla wektora $w = (1, -1) \neq 0$ zachodzi równość $q_{\Delta'}(w) = 0$, więc Δ' nie jest dodatni.

Ponieważ $(x_1 + x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \pm 1 \Leftrightarrow x_2 = \pm 1 - x_1$, więc zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{\Delta'}$ bigrafu Δ' jest nieskończony i składa się z wektorów postaci $\pm e_1 + (-\lambda, \lambda) \in \mathbb{Z}^2$, gdzie $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Ważną rolę w kilku dowodach twierdzeń naszej rozprawy odgrywa następujący lemat o skończoności zbioru pierwiastków.

LEMAT 2.1.17. *Załóżmy, że $n \geq 1$ oraz $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli. Jeśli Δ jest dodatni, to zbiór $\mathcal{R}_\Delta(d) := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = d\}$ jest skończony, dla dowolnej liczby naturalnej $d \geq 1$. Ponadto dla dowolnego wektora $v \in \mathcal{R}_\Delta(d)$ zachodzi nierówność $\|v\| \leq M_q = \sqrt{\frac{d}{\inf_{q_\Delta}(\mathcal{S}^{n-1})}}$, gdzie $\mathcal{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n; \|v\| = 1\}$ jest sferą jednostkową w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n .*

Dowód. W dowodzie wykorzystamy argumenty zastosowane w dowodzie twierdzenia 11.94 w monografii [65] (zobacz [66, Twierdzenie 1.58], [68, Proposition 4.1]). Załóżmy, że $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz $d \geq 1$ jest dodatnią liczbą naturalną. Funkcjonał $q := q_\Delta : \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ traktowany jako funkcja ciągła na sferze jednostkowej \mathcal{S}^{n-1} w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n osiąga swoje kresy. Stąd istnieje $w_0 \in \mathcal{S}^{n-1}$ takie, że

$q(w_0) = \inf q(\mathcal{S}^{n-1})$. Jeśli $0 \neq v \in \mathcal{R}(d)$, to $\frac{v}{\|v\|} \in \mathcal{S}^{n-1}$ należy do sfery jednostkowej \mathcal{S}^{n-1} oraz $q(v) = d$, stąd

$$0 \leq d = q(v) = q\left(\|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\|^2 \cdot q\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \geq \|v\|^2 \cdot q(w_0)$$

i w konsekwencji $\|v\| \leq \sqrt{\frac{d}{q(w_0)}}$, co kończy dowód. \square

Lemat 2.1.17 został wykorzystany w algorytmie ograniczonego zliczania opisanym w dodatku A, który posłużył nam do obliczania zbiorów pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta(d)$ dla dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ .

Przypomnijmy ze wstępu do rozdziału 2.1, że bardzo ważną klasą dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych są **jednorodny diagramy Dynkina** traktowane tu jako proste grafy oznakowane (zobacz uwaga 2.1.10). Z twierdzenia 2.0.6 wynika, że odgrywają one istotną rolę w spektralnej klasyfikacji grafów krawędziowo-dwudzielnych. W rozprawie będziemy wielokrotnie korzystali z następującego powszechnie znanego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.1.18. *Jeśli D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n \geq 1$ wierzchołkach, to D rozważany jako prosty graf oznakowany jest bigrafem dodatnim oraz zbiór $\mathcal{R}_D \subset \mathbb{Z}^n$ jego pierwiastków jest skończony. Liczby $|\mathcal{R}_D|$ oraz $|\mathcal{R}_D^+|$ jego pierwiastków oraz pierwiastków dodatnich są takie jak w następującej tabeli*

D	$\mathbb{A}_n, n \geq 1$	$\mathbb{D}_n, n \geq 4$	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8
$ \mathcal{R}_D $	$n(n+1)$	$2n(n-1)$	72	126	240
$ \mathcal{R}_D^+ = \mathcal{R}_D^- $	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	63	120
\mathbf{c}_D	$n+1$	$2(n-1)$	12	18	30

gdzie $\mathcal{R}_D^+ = \{v \in \mathbb{Z}^n; v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0; q_D(v) = 1\}$, natomiast \mathbf{c}_D jest liczbą Coxetera bigrafu D (zobacz def. 2.2.10). Ponadto $\mathcal{R}_D^- = -\mathcal{R}_D^+ := \{-v; v \in \mathcal{R}_D^+\}$, tj. zbiór \mathcal{R}_D posiada rozkład $\mathcal{R}_D = -\mathcal{R}_D^+ \cup \mathcal{R}_D^+$.

Dowód. Zobacz rozdział 7 w monografii [3], rozdział 2.2 w skrypcie [66] oraz rozdział 12 w monografii [46].

2.2. O spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów dodatnich

Przypomnijmy ze wstępu do rozdziału 2, że jednym z głównych celów tej rozprawy jest klasyfikacja dodatnich spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ (zdefiniowanych w paragrafie 2.1) o $n \geq 1$ wierzchołkach, względem silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\approx_{\mathbb{Z}}$ zdefiniowanej następująco (zobacz 2.0.1)

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}),$$

gdzie $\check{G}_{\Delta} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama bigrafu Δ w sensie definicji 2.1.11. Klasyfikacja ta w szczególności obejmuje klasyfikację dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$.

Jednym z ważniejszych osiągnięć tej rozprawy jest podana w rozdziale 4 pełna klasyfikacja, z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\approx_{\mathbb{Z}}$, wszystkich dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach, w tym również pełna lista takich prostych grafów oznakowanych podana w twierdzeniu 4.1.2 składającą się z 26 grafów.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystujemy twierdzenie 2.0.6 zawierające pełną klasyfikację wszystkich spójnych dodatnich krawędziowo-dwudzielnych grafów Δ bez pętli względem słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\sim_{\mathbb{Z}}$ zdefiniowanej następująco (zobacz 2.0.3)

$$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \iff G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}),$$

gdzie $G_{\Delta} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest symetryczną macierzą Grama w sensie w definicji 2.1.11.

W tym podrozdziale pokażemy jak problem klasyfikacji sformułowany powyżej wiąże się ze spektralną klasyfikacją Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ zdefiniowaną i rozwijaną w artykule [70]. W tym celu przypomnimy znane fakty z tej tematyki oraz główne narzędzia teoretyczne wykorzystywane w tej rozprawie, w tym m.in., macierz Coxetera Cox_{Δ} , transformację Coxetera $\Phi_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, liczbę Coxetera c_{Δ} , wielomian Coxetera $\text{cox}_{\Delta}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oraz spektrum Coxetera $\text{specc}_{\Delta} \subseteq \mathbb{C}$ bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$. Omówimy podstawowe własności i związki tych narzędzi. Ponadto sformułujemy podstawowe otwarte problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera krawędziowo-dwudzielnych grafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli.

W spektralnej analizie Coxetera często wykorzystuje się następujący lemat o niezmienniczości dodatniości i liczby pierwiastków bigrafów bez pętli ze względu na relację słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\sim_{\mathbb{Z}}$.

LEMAT 2.2.1. *Załóżmy, że $n \geq 1$ oraz $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ jest parą krawędziowo-dwudzielnych grafów bez pętli z ustaloną numeracją wierzchołków a_1, \dots, a_n .*

- (a) *Jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$.*
- (b) *Jeśli Δ' otrzymuje się z Δ przez zmianę numeracji wierzchołków a_1, \dots, a_n , to $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Ponadto jeśli Δ, Δ' są jednorodnymi diagramami Dynkina oraz $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to Δ' otrzymuje się z Δ przez zmianę numeracji wierzchołków.*
- (c) *Jeśli \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiuje słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to przemienny jest diagram*

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\Delta'} \hookrightarrow & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{q_{\Delta'}} \mathbb{Z} \\ 1-1 \downarrow \tilde{h}_B & \cong \downarrow \tilde{h}_B & \nearrow q_{\Delta} \\ \mathcal{R}_{\Delta} \hookrightarrow & \mathbb{Z}^n & \end{array}$$

w którym $\tilde{h}_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem $\tilde{h}_B(v) = v \cdot B^{tr}$. Ograniczenie izomorfizmu $\tilde{h}_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ do zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_{\Delta'}$ definiuje bijekcję $\mathcal{R}_{\Delta'} \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}_{\Delta}$ oraz implikuje równość $|\mathcal{R}_{\Delta}| = |\mathcal{R}_{\Delta'}|$. Ponadto bigraf Δ jest dodatni (odpowiednio nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy Δ' jest dodatni (odpowiednio nieujemny).

Dowód. Zastosujemy tu argumenty użyte w dowodach [70, Lemma 2.1, Corollary 2.1]. Załóżmy, że $n \geq 1$ oraz $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ są parą krawędziowo-dwudzielnych grafów bez pętli z ustaloną numeracją wierzchołków a_1, \dots, a_n .

(a) Jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to $\check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B$, dla pewnej macierzy $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$. W konsekwencji otrzymujemy:

$$2G_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta'} + \check{G}_{\Delta'}^{tr} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B + B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta}^{tr} \cdot B = B^{tr} (\check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr}) B = 2G_{\Delta} * B,$$

stąd wynika, że $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, co kończy dowód (a).

(b) Jeśli bigraf Δ' otrzymuje się z bigrafu Δ przez zmianę numeracji wierzchołków a_1, \dots, a_n na $a'_1 = a_{\sigma(1)}, \dots, a'_n = a_{\sigma(n)}$, gdzie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n$ jest permutacją. Macierz

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) \text{ definiuje słabą } \mathbb{Z}\text{-kongruencję Grama } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta', \text{ gdyż przez proste przeli-}$$

czenie otrzymujemy równość $G_{\Delta'} = G_{\Delta} * \hat{\sigma}^{tr}$.

Założmy, że Δ i Δ' są jednorodnymi diagramami Dynkina oraz $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Ze stwierdzenia (c) wynika, że moc zbiorów pierwiastków bigrafów Δ, Δ' jest równa, tj. $|\mathcal{R}_{\Delta}| = |\mathcal{R}_{\Delta'}|$. Stąd na podstawie twierdzenia 2.1.18 bigrafy Δ i Δ' są tym samym jednorodnym diagramem Dynkina. Zatem Δ' otrzymuje się z Δ przez zmianę numeracji wierzchołków, co kończy dowód (b).

(c) Założmy, że \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiuje słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B$. Aby uzasadnić przemienność diagramu (2.2.2), wystarczy pokazać, że $q_{\Delta'} = q_{\Delta} \circ \tilde{h}_B$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{Z}^n$ otrzymujemy równości:

$$q_{\Delta'}(v) = v \cdot G_{\Delta'} \cdot v^{tr} = v \cdot (G_{\Delta} * B) \cdot v^{tr} = v \cdot B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B \cdot v^{tr} = (v \cdot B^{tr}) G_{\Delta} (v \cdot B^{tr})^{tr} = q_{\Delta}(v \cdot B^{tr}) = (q_{\Delta} \circ \tilde{h}_B)(v).$$

Ponieważ $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$, więc istnieje jej macierz odwrotna $B^{-1} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ i można pokazać, że $q_{\Delta} = q_{\Delta'} \circ \tilde{h}_{B^{-1}}$. W konsekwencji dla dowolnego wektora $v' \in \mathbb{Z}^n$ mamy równoważność

$$v' \in \mathcal{R}_{\Delta'} \text{ (odp. } v \in \mathcal{R}_{\Delta}) \Leftrightarrow \tilde{h}_B(v') \in \mathcal{R}_{\Delta} \text{ (odp. } \tilde{h}_{B^{-1}}(v) \in \mathcal{R}'_{\Delta}).$$

Stąd wynika, że ograniczenie izomorfizmu $\tilde{h}_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ do zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_{\Delta'}$ definiuje bijekcję $\mathcal{R}_{\Delta'} \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}_{\Delta}$, co z kolei implikuje równość $|\mathcal{R}_{\Delta}| = |\mathcal{R}_{\Delta'}|$.

Z przemienności diagramu (2.2.2) wynika, że jeśli $q_{\Delta}(w) > 0$, dla dowolnego niezerowego wektora $w \in \mathbb{Z}^n$, to dla dowolnego niezerowego wektora $v \in \mathbb{Z}^n$ mamy $\tilde{v} := \tilde{h}_B(v) \neq 0$ oraz $q_{\Delta'}(v) = q_{\Delta}(\tilde{h}_B(v)) = q_{\Delta}(\tilde{v}) > 0$, tzn. dodatniość bigrafu Δ implikuje dodatniość bigrafu Δ' . Ponieważ dowód implikacji przeciwnej jest analogiczny, więc dowód lematu jest zakończony. \square

UWAGA 2.2.3. Przykład 2.2.13 pokazuje, że implikacja przeciwna do implikacji (a) w lemacie 2.2.1 nie jest prawdziwa, tzn. istnienie słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ na ogół nie implikuje istnienia silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Zauważmy bowiem, że bigrafy Δ oraz Δ' w przykładzie 2.2.13 są słabo \mathbb{Z} -kongruentne, gdyż Δ' otrzymuje się z Δ przez zmianę numeracji wierzchołków (zobacz lemat 2.2.1(b)). Ponieważ wielomiany Coxetera tych bigrafów są różne, więc bigrafy Δ oraz Δ' nie są silnie \mathbb{Z} -kongruentne (na podstawie lematu 2.3.1 w następnym podrozdziale).

Jednym z celów tej pracy doktorskiej jest stworzenie zbioru numerycznych i symbolicznych algorytmów, służących do klasyfikacji grafów krawędziowo-dwudzielnych ze zbioru \mathcal{UBigr}_n^+ ,

z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. W tej klasyfikacji będziemy wykorzystywać następującą funkcję (2.0.5)

$$* : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}), \quad (A, B) \mapsto A * B = B^{tr} \cdot A \cdot B.$$

Następujący lemat orzeka, że funkcja (2.0.5) jest działaniem pełnej grupy liniowej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ na przestrzeni \mathbb{Q} -liniowej $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$.

LEMAT 2.2.4. *Działanie $* : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ zdefiniowane w 2.0.5 jest prawym działaniem pełnej grupy liniowej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ na przestrzeni \mathbb{Q} -liniowej $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, tzn. $*$ jest łączne, $A * E = A$ oraz $(\lambda' A' + \lambda'' A'') * B = \lambda' A' * B + \lambda'' A'' * B$, dla dowolnych $A, A', A'' \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{Q}$ oraz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$.*

Wprost z definicji wynika następujący ważny wniosek często wykorzystywany w tej rozprawie.

WNIOSEK 2.2.5. *Niech $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ będą dowolnymi bigrafami bez pętli.*

- (a) $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich symetryczne macierze Grama $G_{\Delta'}, G_{\Delta}$ leżą w jednej orbicie działania (2.0.5),
- (b) $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich niesymetryczne macierze Grama $\check{G}_{\Delta'}, \check{G}_{\Delta}$ leżą w jednej orbicie działania (2.0.5).

Jednymi z głównych narzędzi technicznych wykorzystywanych w tej rozprawie są macierze Coxetera bigrafu bez pętli zdefiniowane w artykule [69].

Przypomnijmy, że z każdym bigrafem Δ ze zbioru \mathcal{UBigr}_n , $n \geq 1$, z ustaloną numeracją jego wierzchołków a_1, \dots, a_n stowarzysza się:

- (a) **macierz Coxetera-(Gram)**

$$(2.2.6) \quad \text{Cox}_{\Delta} := -\check{G}_{\Delta} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

- (b) **wielomian Coxetera-(Gram)**, tj. wielomian charakterystyczny macierzy Coxetera

$$(2.2.7) \quad \text{cox}_{\Delta}(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_{\Delta}) \in \mathbb{Z}[t],$$

- (c) (zespolone) **spektrum Coxetera**, tj. zbiór n -pierwiastków (licząc z krotnościami) macierzy Coxetera

$$(2.2.8) \quad \text{specc}_{\Delta} \subseteq \mathbb{C},$$

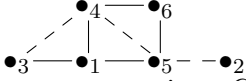
- (d) **transformację Coxetera**, tj. automorfizm grup $\Phi_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ zdefiniowany wzorem

$$(2.2.9) \quad v \mapsto \Phi_{\Delta}(v) := v \cdot \text{Cox}_{\Delta},$$

- (e) **liczbę Coxetera**

$$(2.2.10) \quad \mathbf{c}_{\Delta} := \begin{cases} \min\{c \in \mathbb{N}; \Phi_{\Delta}^c = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}\} & ; \text{ gdy } \Phi_{\Delta}^c = \text{id}_{\mathbb{Z}^n} \text{ dla pewnego } c \geq 1, \\ \infty & ; \text{ gdy } \Phi_{\Delta}^c \neq \text{id}_{\mathbb{Z}^n} \text{ dla dowolnego } c \geq 1. \end{cases}$$

Przykład 2.2.11 ilustruje postać spektrum Coxetera, oraz stanowi wprowadzenie do twierdzenia 2.2.12.

PRZYKŁAD 2.2.11. Graf krawędziowo-dwudzielny Δ :  jest prostym grafem oznakowanym w zbiorze \mathcal{UBigr}_6 . Jego macierze Grama oraz macierz Coxetera mają postaci:

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Wielomianem Coxetera grafu Δ jest $\text{cox}_\Delta(t) = t^6 + t^3 + 1 \in \mathbb{Z}[t]$.
- Formą kwadratową grafu Δ jest

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + \dots + x_6^2 - x_1(x_3 + x_4 + x_5) + x_2x_5 + x_3x_4 + x_4(x_5 - x_6) - x_5x_6.$$

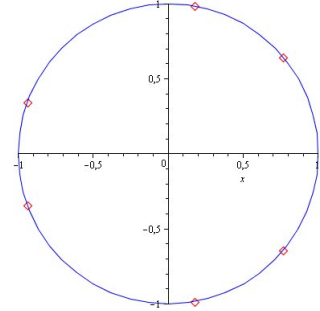
Stosując algorytm Lagrange'a (zobacz dodatek A.5) obliczamy postać kanoniczną $q_\Delta(x)$

$$q_\Delta(x) = \frac{1}{4}(2x_1 - x_3 - x_4 - x_5)^2 + \frac{1}{4}(2x_2 + x_5)^2 + \frac{1}{12}(3x_3 + x_4 - x_5)^2 + \frac{1}{24}(4x_4 + 2x_5 - 3x_6)^2 + \frac{1}{4}(x_5 - x_6)^2 + \frac{3}{8}x_6^2.$$

Stąd wynika, że $q_\Delta(v) \geq 0$, dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ oraz $q_\Delta(v) > 0$, o ile $v \neq 0$. Zatem Δ jest dodatnim prostym grafem oznakowanym.

- Proste obliczenia pokazują, że specc_Δ ma postać

$$\text{specc}_\Delta = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4 + 4i\sqrt{3}}, -\frac{1}{4}\sqrt[3]{-4 + 4i\sqrt{3}} + \frac{1}{4}i\sqrt{3}\sqrt[3]{-4 + 4i\sqrt{3}}, \right. \\ \left. \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4 - 4i\sqrt{3}}, -\frac{1}{4}\sqrt[3]{-4 + 4i\sqrt{3}} - \frac{1}{4}i\sqrt{3}\sqrt[3]{-4 + 4i\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\frac{1}{4}\sqrt[3]{-4 - 4i\sqrt{3}} - \frac{1}{4}i\sqrt{3}\sqrt[3]{-4 - 4i\sqrt{3}}, \right. \\ \left. -\frac{1}{4}\sqrt[3]{-4 - 4i\sqrt{3}} + \frac{1}{4}i\sqrt{3}\sqrt[3]{-4 - 4i\sqrt{3}} \right\},$$



i leży na okręgu jednostkowym $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Zauważmy również, że dowolna liczba zespolona $z \in \text{specc}_\Delta$ jest pierwiastkiem z jedynki stopnia $\mathbf{c}_\Delta = 9$.

Następujące twierdzenie udowodnione w publikacjach [69], [70] orzeka, że fakt ten pozostaje prawdziwy dla dowolnego nieujemnego bigrafu ze zbioru \mathcal{UBigr}_n .

TWIERDZENIE 2.2.12. *Załóżmy, że Δ jest nieujemnym, spójnym, krawędziowo-dwudzielnym grafem należącym do zbioru \mathcal{UBigr}_n o $n \geq 2$ wierzchołkach.*

- Spektrum Coxetera specc_Δ grafu Δ leży na okręgu jednostkowym $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$, oraz wszystkie pierwiastki $z \in \text{specc}_\Delta$ należące do tego spektrum są pierwiastkami z jedynki stopnia $m \geq 2$.*
- Następujące trzy warunki są równoważne.*
 - Bigraf Δ jest dodatni.*
 - $1 \notin \text{specc}_\Delta$.*

(b3) Bigraf Δ jest prostym dodatnim grafem oznakowanym.

Dowód. (a) Zobacz [70, Lemma 2.1(b)]. Dowód wykorzystuje znany wynik L. Kroneckera [51] z 1857 roku orzekający, że dla wielomianu monicznego, tj. wielomianu postaci

$$f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \dots + c_2t^2 + c_1t^1 + c_0 \in \mathbb{Z}[t],$$

jeżeli każdy z jego zespolonych pierwiastków $z \in \mathbb{C}$ leży wewnątrz koła jednostkowego $\overline{\mathcal{S}^1} := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, to wszystkie pierwiastki wielomianu $f(t)$ leżą na okręgu jednostkowym \mathcal{S}^1 oraz każdy z nich jest pierwiastkiem z jedynki stopnia m , dla pewnego $m \geq 2$.

W artykule [5, Proposition 3.1] pokazano, że spektrum Coxetera \mathbf{specc}_Δ leży wewnątrz koła jednostkowego \mathcal{S}^1 , stąd z wyniku Kroneckera \mathbf{specc}_Δ leży na okręgu jednostkowym \mathcal{S}^1 oraz wszystkie pierwiastki $z \in \mathbf{specc}_\Delta$ należące do tego spektrum są pierwiastkami z jedynki stopnia $m \geq 2$.

(b1) \Leftrightarrow (b2) Zgodnie z definicją 2.1.12(c) bigraf Δ jest dodatni wtw. gdy stowarzyszona z nim forma kwadratowa q_Δ jest dodatnio określona. Stąd równoważność (b1) \Leftrightarrow (b2) wynika bezpośrednio z [5, Proposition 3.1].

(b3) \Rightarrow (b1) Oczywiście.

(b1) \Rightarrow (b3) Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym z ustaloną numeracją wierzchołków a_1, \dots, a_n oraz q_Δ jest stowarzyszona z nim formą kwadratową (zobacz 2.1.12(a)).

Udowodnimy, że bigraf Δ nie posiada wielokrotnych krawędzi. Na podstawie [5, Theorem C1] dowolne wierzchołki w bigrafie nieujemnym mogą łączyć co najwyżej dwie krawędzie. Pozostaje pokazać, że bigraf Δ nie zawiera podgrafów postaci

$$\Delta' := \Delta'_{ij} : a_i \overset{\curvearrowright}{\curvearrowleft} a_j, \quad \Delta'' := \Delta''_{ij} : a_i \overset{\frown}{\smile} a_j.$$

Założmy, przez sprzeczność, że Δ zawiera podgraf Δ' . Wtedy forma $q_{\Delta'}(x_i, x_j) = x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j = (x_i - x_j)^2$ nie jest dodatnio określona, ponieważ $q_{\Delta'}(v) = 0$ dla $v = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$. Ponadto $0 < q_\Delta(e_i + e_j) = q_{\Delta'}(v) = 0$. Otrzymujemy więc sprzeczność. Analogicznie rozważamy podgraf Δ'' , co kończy dowód punktu (b). \square

Przypomnijmy, że wielomian charakterystyczny macierzy sąsiedztwa $P_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ oraz rzeczywiste spektrum $\mathbf{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ nie zależą od wyboru numeracji wierzchołków (zobacz [70, Remark 2.1(c)]).

Następujący przykład pokazuje, że wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ oraz spektrum Coxetera $\mathbf{specc}_\Delta \subseteq \mathcal{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ prostego grafu oznakowanego $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, w ogólności zależą od wyboru numeracji jego wierzchołków.

PRZYKŁAD 2.2.13. Jeśli $\Delta : \begin{array}{ccccc} \bullet_1 & \text{---} & \bullet_2 & & \\ & \diagdown & & \diagup & \\ \bullet_4 & \text{---} & \bullet_3 & \text{---} & \bullet_5 \end{array}$, $\Delta' : \begin{array}{ccccc} \bullet_2 & \text{---} & \bullet_1 & & \\ & \diagdown & & \diagup & \\ \bullet_4 & \text{---} & \bullet_3 & \text{---} & \bullet_5 \end{array}$, to

$$\text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

- Formą kwadratową grafu Δ jest

$$\begin{aligned} q_{\Delta}(x) &= x_1^2 + \dots + x_5^2 - x_1(x_2 - x_3 + x_4) - x_2(x_3 + x_5) - x_3(x_4 + x_5) = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4\right)^2 + \\ &+ \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5\right)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 - \frac{1}{2}x_5^2. \end{aligned}$$

- Formą kwadratową grafu Δ' jest

$$\begin{aligned} q_{\Delta'}(x) &= x_1^2 + \dots + x_5^2 - x_1(x_2 + x_3 + x_5) + x_2(x_3 - x_4) - x_3(x_4 + x_5) = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right)^2 + \\ &+ \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5\right)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5)^2 - \frac{1}{2}x_5^2 \end{aligned}$$

(postać kanoniczną form kwadratowych uzyskaliśmy stosując algorytm Lagrange'a, zobacz dodatek A.5). Stąd łatwo wynika, że proste grafy oznakowane Δ oraz Δ' są dodatnie. Oczywiście Δ' otrzymuje się z Δ przez przenumerywanie wierzchołków.

- Wielomianem Coxetera grafu Δ jest $\text{cox}_{\Delta}(t) = t^5 - 2t^4 - t^3 - t^2 - 2t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$.
- Wielomianem Coxetera grafu Δ' jest $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^5 - 3t^3 - 3t^2 + 1 \in \mathbb{Z}[t]$.

Ponieważ wielomiany $\text{cox}_{\Delta}(t)$, $\text{cox}_{\Delta'}(t)$ są różne, więc $\text{specc}_{\Delta} \neq \text{specc}_{\Delta'}$.

Na zakończenie tego podrozdziału przypomnijmy postaci wielomianów Coxetera $\text{cox}_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ jednorodnych diagramów Dynkina D (traktowanych jako proste grafy oznakowane) oraz wielomianów charakterystycznych $P_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ich macierzy sąsiedztwa Ad_D . Wyniki te będą wykorzystywane w dalszej części rozprawy.

LEMAT 2.2.14. *Niech D będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina. Wielomian Coxetera $\text{cox}_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oraz liczba Coxetera \mathbf{c}_D bigrafu D nie zależą od numeracji jego wierzchołków oraz $\text{cox}_D(t) = F_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$, gdzie*

$$F_D(t) := \begin{cases} t^n + t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1, & \mathbf{c}_D = n + 1, & \text{dla } D = \mathbb{A}_n, n \geq 1, \\ t^n + t^{n-1} + t + 1, & \mathbf{c}_D = 2(n - 1), & \text{dla } D = \mathbb{D}_n, n \geq 4, \\ t^6 + t^5 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_D = 12, & \text{dla } D = \mathbb{E}_6, \\ t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_D = 18, & \text{dla } D = \mathbb{E}_7, \\ t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1, & \mathbf{c}_D = 30, & \text{dla } D = \mathbb{E}_8. \end{cases}$$

Dowód. Niezależność od numeracji wierzchołków udowodniono w rozdziale 7 monografii [3] oraz w pracy [7] używając techniki odbić.

Postaci wielomianów $\text{cox}_D(t)$ otrzymuje się w wyniku przeprowadzenia obliczeń dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina (zobacz [70, Proposition 2.3(a)], [66, Twierdzenie 1.9.23] oraz artykuł [54]).

LEMAT 2.2.15. *Niech D będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina. Wielomian charakterystyczny $P_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ macierzy sąsiedztwa grafu D , jest równy:*

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{A}_{n+1}}(t) &= \begin{cases} t, & \text{dla } n = 0, \\ t^2 - 1, & \text{dla } n = 1, \\ t \cdot P_{\mathbb{A}_n}(t) - P_{\mathbb{A}_{n-1}}(t), & \text{dla } n \geq 2; \end{cases} \\
P_{\mathbb{D}_{n+1}}(t) &= \begin{cases} t^4 - 3t^2 = t \cdot (P_{\mathbb{A}_3}(t) - P_{\mathbb{A}_1}(t)), & \text{dla } n = 3, \\ t^5 - 4t^3 + 2t = t \cdot (P_{\mathbb{A}_4}(t) - P_{\mathbb{A}_2}(t)), & \text{dla } n = 4, \\ t \cdot P_{\mathbb{D}_n}(t) - P_{\mathbb{D}_{n-1}}(t) = t \cdot (P_{\mathbb{A}_n}(t) - P_{\mathbb{A}_{n-2}}(t)), & \text{dla } n \geq 5; \end{cases} \\
P_{\mathbb{E}_6}(t) &= t^6 - 5t^4 + 5t^2 - 1 = t \cdot P_{\mathbb{D}_5}(t) - P_{\mathbb{D}_4}(t) - 1; \\
P_{\mathbb{E}_7}(t) &= t^7 - 6t^5 + 9t^3 - 3t = t \cdot P_{\mathbb{E}_6}(t) - P_{\mathbb{D}_5}(t); \\
P_{\mathbb{E}_8}(t) &= t^8 - 7t^6 + 14t^4 - 8t^2 + 1 = t \cdot P_{\mathbb{E}_7}(t) - P_{\mathbb{D}_6}(t) + 1.
\end{aligned}$$

Dowód. Dla $D \in \{\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ dowód sprowadza się do bezpośrednich wyliczeń z użyciem systemu algebry komputerowej. Dla diagramów $\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4$, dowód opiera się na obliczeniu wyznacznika macierzy sąsiedztwa z zastosowaniem rozwinięcia Laplace'a. Jeśli $D = \mathbb{A}_{n+1}$ to stosując rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza macierzy

$$A_{n+1} := (t \cdot E - \text{Ad}_{\mathbb{A}_{n+1}}) = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & t & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}) \text{ otrzymujemy:}$$

$$P_{\mathbb{A}_{n+1}}(t) = \det A_{n+1} = (-1)^2 \cdot t \cdot \det A_n + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} A_{n-1} = t \cdot P_{\mathbb{A}_n}(t) - P_{\mathbb{A}_{n-1}}(t),$$

analogicznie postępujemy dla $D = \mathbb{D}_m, m \geq 4$.

Przypomnijmy z [31],[54], że wielomiany Czebyszewa $U_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ drugiego rodzaju zdefiniuje się rekurencyjnie wzorami:

$$U_0(t) = 1, U_1(t) = 2t, \quad U_{n+1}(t) = 2t \cdot U_n(t) - U_{n-1}(t), \text{ dla } n \geq 1.$$

Stąd wielomian charakterystyczny $P_D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ dla jednorodnych diagramów Dynkina możemy przedstawić jako $P_{\mathbb{A}_n}(t) = U_n(\frac{t}{2})$ dla $n \geq 1$, oraz $P_{\mathbb{D}_n} = t \cdot (U_n(\frac{t}{2}) - U_{n-2}(\frac{t}{2}))$ dla $n \geq 4$. \square

2.3. Otwarte problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów dodatnich

W spektralnej klasyfikacji Coxetera ważną rolę odgrywa następujący lemat orzekający, że silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ nie zmienia wielomianu Coxetera, jego spektrum oraz liczby Coxetera.

LEMAT 2.3.1. *Niech $n \geq 2$ oraz niech $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ będą dowolną parą bigrafów. Jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to macierze Coxetera $\text{Cox}_{\Delta}, \text{Cox}_{\Delta'}$ są sprzężone oraz*

$$\text{cox}_{\Delta}(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t), \quad \text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'}, \quad \mathbf{c}_{\Delta} = \mathbf{c}_{\Delta'}.$$

Dowód. Niech $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ będą dowolną parą bigrafów o $n \geq 2$ wierzchołkach. Jeśli $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to istnieje \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta} * B = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B$. Zatem

$$\begin{aligned} \text{Cox}_{\Delta'} &= -\check{G}_{\Delta'} \cdot \check{G}_{\Delta'}^{-tr} = -(B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B) \cdot (B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B)^{-tr} = -B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B \cdot B^{-1} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr} \cdot B^{-tr} = \\ &= -B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr} \cdot B^{-tr} = B^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot B^{-tr}, \\ \text{cox}_{\Delta'}(t) &= \det(t \cdot E - \text{Cox}_{\Delta'}) = \det(t \cdot E - B^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot B^{-tr}) = \\ &= \det(B^{tr}(B^{-tr} \cdot (t \cdot E) \cdot B^{tr} - \text{Cox}_{\Delta})B^{-tr}) = \\ &= \det(B^{tr} \cdot B^{-tr}) \cdot \det(B^{-tr} \cdot (t \cdot E) \cdot B^{tr} - \text{Cox}_{\Delta}) = \det((t \cdot E) \cdot B^{-tr} \cdot B^{tr} - \text{Cox}_{\Delta}) = \\ &= \det((t \cdot E) - \text{Cox}_{\Delta}) = \text{cox}_{\Delta}(t). \end{aligned}$$

Ponadto zauważmy, że $\text{Cox}_{\Delta'}^j = B^{tr} \text{Cox}_{\Delta}^j B^{-tr}$ oraz $\text{Cox}_{\Delta}^j = B^{-tr} \text{Cox}_{\Delta'}^j B^{tr}$, dla dowolnego $1 \leq j \in \mathbb{Z}$ (dowód indukcyjny ze względu na j),

$$\left. \begin{aligned} \text{Cox}_{\Delta'}^{\mathbf{c}_{\Delta}} &= B^{tr} \text{Cox}_{\Delta}^{\mathbf{c}_{\Delta}} B^{-tr} = B^{tr} \cdot E \cdot B^{-tr} = E \Rightarrow \mathbf{c}_{\Delta'} \leq \mathbf{c}_{\Delta} \\ \text{Cox}_{\Delta}^{\mathbf{c}_{\Delta'}} &= B^{-tr} \text{Cox}_{\Delta'}^{\mathbf{c}_{\Delta'}} B^{tr} = B^{-tr} \cdot E \cdot B^{tr} = E \Rightarrow \mathbf{c}_{\Delta} \leq \mathbf{c}_{\Delta'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{c}_{\Delta'} = \mathbf{c}_{\Delta},$$

co kończy dowód. \square

Jednym z głównych problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów jest pełna klasyfikacja grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$, $n \geq 2$, z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\approx_{\mathbb{Z}}$; w szczególności pozytywna odpowiedź na pytanie:

Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna do implikacji w lemacie 2.2.1(a), dla spójnych prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1, \text{sgn}') \in \mathcal{UBigr}_n$.

W związku z tym pytaniem w artykułach [70] oraz [71] sformułowano i z powodzeniem badano następujące problemy uważane za podstawowe problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera bigrafów dodatnich.

PROBLEM A. *Udowodnić, że równość spektrów Coxetera $\text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'}$ implikuje istnienie silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, dla dowolnej pary dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1, \text{sgn}') \in \mathcal{UBigr}_n^+$ oraz $n \geq 2$.*

PROBLEM B. *Dla ustalonego $n \geq 3$, skonstruować algorytm wyznaczający macierz \mathbb{Z} -odwracalną $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (o ile ona istnieje), dla dowolnej pary $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1, \text{sgn}') \in \mathcal{UBigr}_n^+$ dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych.*

Innymi słowy, szukana macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ winna spełniać równości

$$\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta} * B = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B.$$

Poniżej podajemy w twierdzeniu 2.3.4 pozytywne rozwiązanie problemu A dla dodatnich drzew oznakowanych (tj. prostych oznakowanych grafów spójnych i acyklicznych). Rozwiązanie to opiera się przede wszystkim na następującym twierdzeniu orzekającym, że spektrum macierzy sąsiedztwa dla takiego drzewa jednoznacznie wyznacza spektrum Coxetera tego drzewa. Idea dowodu tego twierdzenia inspirowana jest znanym wynikiem Norberta A'Campo z 1973 roku (zobacz [1]).

TWIERDZENIE 2.3.2. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną, $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ bigrafem oraz niech $\bar{\Delta}$ będzie grafem otrzymanym z bigrafu Δ przez zamianę wszystkich krawędzi przerywanych $a - - a'$ na krawędzie ciągłe $a \text{---} a'$. Jeśli $\bar{\Delta}$ jest drzewem, to

$$(2.3.3) \quad \text{cox}_{\Delta}(t^2) = t^n \cdot P_{\Delta} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad \text{oraz} \quad \det 2G_{\Delta} = P_{\Delta}(2) = \text{cox}_{\Delta}(1).$$

Dowód. Zobacz [31, Theorem 2.7(b)] oraz [70, Proposition 2.4]. □

Na podstawie lematu 2.2.1(a), kongruencja $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ implikuje kongruencję $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Choć na ogół implikacja przeciwna nie jest prawdziwa (zobacz uwaga 2.2.3 oraz przykład 2.2.13), to następujące twierdzenie pokazuje m.in., że jest ona prawdziwa dla dodatnich drzew oznakowanych.

TWIERDZENIE 2.3.4. Jeśli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną oraz $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn})$, $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1, \text{sgn}') \in \mathcal{UBigr}_n^+$ są dodatnimi spójnymi drzewami oznakowanymi, to następujące cztery warunki są równoważne:

- (a) $\text{spec}_{\Delta} = \text{spec}_{\Delta'}$,
- (b) $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$,
- (c) $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$,
- (d) $\text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'}$.

Dowód. Równoważność (a) \Leftrightarrow (d) wynika z twierdzenia 2.3.2 orzekającego, że spektrum macierzy sąsiedztwa dodatnich drzew oznakowanych jednoznacznie wyznacza spektrum Coxetera takich drzew.

Implikacja (c) \Rightarrow (d) wynika z lematu 2.3.1 orzekającego, że silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ nie zmienia wielomianu Coxetera, jego spektrum oraz liczby Coxetera.

Ponieważ implikacja (c) \Rightarrow (b) jest konsekwencją lematu 2.2.1(a), więc wystarczy udowodnić implikacje (d) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c).

Jeśli do każdego z bigrafów Δ oraz Δ' zastosujemy [70, Proposition 2.2], to otrzymamy dwa spójne drzewa D oraz D' o n wierzchołkach (bez przerywanych krawędzi) takie, że $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$ oraz $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}} D'$. Ponieważ grafy Δ oraz Δ' są dodatnie, to na podstawie lematu 2.2.1(c) drzewa D oraz D' również są dodatnie, a na podstawie [70, Proposition 2.4(a)], każdy z grafów D oraz D' jest diagramem Dynkina o n wierzchołkach.

(d) \Rightarrow (b) Załóżmy, że $\text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'}$. Ponieważ $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$ oraz $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}} D'$, więc $\text{specc}_D = \text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'} = \text{specc}_{D'}$, na podstawie lematu 2.3.1. Innymi słowy, otrzymaliśmy równość $\text{cox}_D(t) = \text{cox}_{D'}(t)$. Ponieważ D oraz D' są grafami Dynkina o n wierzchołkach, więc korzystając z postaci wielomianów Coxetera diagramów Dynkina (zobacz 2.2.14) wnioskujemy, że równość $\text{cox}_D(t) = \text{cox}_{D'}(t)$ implikuje istnienie izomorfizmu grafów $D \cong D'$. Stąd wynika, że D' otrzymuje się z D przez zmianę numeracji wierzchołków, co implikuje istnienie słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $D \sim_{\mathbb{Z}} D'$ (na podstawie lematu 2.2.1(b)). Wykorzystując wnioski otrzymane przed dowodem implikacji (d) \Rightarrow (b) otrzymujemy \mathbb{Z} -kongruencje Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D \sim_{\mathbb{Z}} D' \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, z których wynikają słabe \mathbb{Z} -kongruencje Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D \sim_{\mathbb{Z}} D' \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (na podstawie lematu 2.2.1(a)), co kończy dowód implikacji (d) \Rightarrow (b).

(b) \Rightarrow (c) Załóżmy, że istnieje słaba \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Ponieważ $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$ oraz $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}} D'$, gdzie D oraz D' są grafami Dynkina, więc $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$ oraz $\Delta' \sim_{\mathbb{Z}} D'$ (na podstawie lematu 2.2.1(a)) i otrzymujemy słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $D \sim_{\mathbb{Z}} \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \sim_{\mathbb{Z}} D'$. Na podstawie lematu 2.2.1(c) zachodzi równość $|\mathcal{R}_D| = |\mathcal{R}_{D'}|$, z której wynika istnienie izomorfizmu grafów $D \cong D'$, tzn. D' otrzymuje się z D przez zmianę numeracji wierzchołków (zobacz lemat 2.2.1(b)). Proste rozważania kombinatoryczne pokazują, że graf Dynkina D' można otrzymać z grafu Dynkina D przez ciąg operacji odbiciowych typu $\Delta \mapsto \mathbf{s}_a \Delta$ zachowujących silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama, tzn. $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \mathbf{s}_a \Delta$ (zobacz [70, Lemma 2.2]). Zatem istnieje silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $D \approx_{\mathbb{Z}} D'$, która po uwzględnieniu dwóch \mathbb{Z} -kongruencji $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$ oraz $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}} D'$ otrzymanych przed dowodem implikacji (d) \Rightarrow (b) daje silne \mathbb{Z} -kongruencje Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D \approx_{\mathbb{Z}} D' \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, co kończy dowód implikacji (b) \Rightarrow (c) oraz dowód twierdzenia. \square

W rozwiązywaniu problemu A pojawił się następujący problem pochodny.

PROBLEM C. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$, obliczyć skończony zbiór

$$(2.3.5) \quad \mathcal{CGpol}_n^+ := \{F \in \mathbb{Z}[t]; \exists \Delta \in \mathcal{UBigr}_n^+ \text{ cox}_{\Delta}(t) = F(t)\} \subset \mathbb{Z}[t]$$

wielomianów Coxetera(-Gramy) $\text{cox}_{\Delta}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ wszystkich dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \text{sgn}) \in \mathcal{UBigr}_n^+$.

Kolejnym problemem pochodnym wynikającym z metody redukcji problemów A oraz B do problemu orbit na zbiorze morsyfikacji macierzowych diagramów Dynkina (omawianym w następnym rozdziale) jest następujący problem sformułowany i rozwiązywany w artykule Simsona [72], a także w pracach Gąsiorek-Simson [36], Simson-Zajac [79]. Inspiracją do jego badania są wyniki prac Horna-Sergeichuka [44], Gerasimovej-Horna-Sergeichuka [39] oraz Simsona [71, 72].

PROBLEM D. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o wyznaczniku $\det A = 1$, znaleźć macierz $C \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ identyczną z C^{-1} i definiującą kongruencję macierzy A z jej transpozycją A^{tr} , tzn. znaleźć taką macierz $C \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ dla której zachodzą równości:

$$A^{\text{tr}} = A * C = C^{\text{tr}} \cdot A \cdot C \quad \text{oraz} \quad C^2 = E.$$

3. Morsyfikacje macierzowe grafów krawędziowo-dwudzielnych

Jednym z celów tego rozdziału jest opisanie narzędzi technicznych i algorytmicznych pozwalających zredukować klasyfikację dodatnich prostych grafów oznakowanych Δ , względem silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, do analogicznego problemu klasyfikacji i obliczania $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit pewnego skończonego zbioru $\mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ macierzy \mathbb{Z} -odwracalnych, zdefiniowanego w następnym paragrafie, dla ustalonego diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Zbiór $\mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niezmienniczy względem działania $*$: $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $(A, B) \mapsto A * B := B^{tr} \cdot A \cdot B$ (zobacz twierdzenie 3.1.6) ograniczonego do skończonej podgrupy $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ (3.0.4) grupy liniowej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$.

Na podstawie twierdzenia 2.0.6, dla dowolnego $n \geq 2$ oraz dowolnego dodatniego spójnego prostego grafu oznakowanego $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \mathrm{sgn}) \in \mathcal{UBigr}_n$ istnieje jednorodny diagram Dynkina $D \in \mathcal{UBigr}_n$ taki, że $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$. Stąd wynika, że zbiór \mathcal{UBigr}_n^+ jest rozłączną sumą co najwyżej pięciu podzbiorów postaci

$$(3.0.1) \quad \mathcal{UBigr}_D := \{\Delta \in \mathcal{UBigr}_n^+; \Delta \text{ jest spójny oraz } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} D\}.$$

Jednym z takich narzędzi redukcyjnych jest para funkcji

$$(3.0.2) \quad \mathcal{UBigr}_D \xrightarrow{\phi_D} \mathbf{Mor}_{D,1} \xrightarrow{\Theta_D} \mathcal{Cox}_D^{tr}$$

zdefiniowanych w artykule [72, Section 3], dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D o n wierzchołkach, gdzie $\mathbf{Mor}_{D,1} \subseteq \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest zbiorem wszystkich całkowitych morsyfikacji macierzowych $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ o wyznaczniku 1 w sensie definicji 3.1.1, tzn. takich macierzy $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$, że $\det A = 1$ oraz $A + A^{tr} = 2G_D$. Zbiór $\mathcal{Cox}_D^{tr} \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest zdefiniowany w definicji 3.2.5.

Funkcja ϕ_D przyporządkowuje dowolnemu bigrafowi $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$ morsyfikację

$$(3.0.3) \quad \phi_D(\Delta) := \check{G}_\Delta * C_\Delta \in \mathbf{Mor}_{D,1},$$

gdzie $C_\Delta \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest ustaloną macierzą definiującą \mathbb{Z} -kongruencję $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$.

W podrozdziale 3.1 dowodzi się, że $\mathbf{Mor}_{D,1} \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest podzbiorem niezmienniczym względem działania $*$: $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (2.0.5) skończonej podgrupy

$$(3.0.4) \quad \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D := \{B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z}); G_D * B = G_D\}$$

grupy $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$, zwanej **grupą izotropii diagramu D** , zobacz [70, 71, 72].

W podrozdziale 3.1 udowodnimy, że jeśli $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_D$ to $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ wtedy i tylko wtedy, gdy morsyfikacje $\phi_D(\Delta), \phi_D(\Delta') \in \mathbf{Mor}_{D,1}$ leżą w jednej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie zbioru $\mathbf{Mor}_{D,1}$. Stąd

wynika, że funkcja ϕ_D redukuje problem A oraz część problemu B do analogicznych problemów dla $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit w zbiorze morsyfikacji $\mathbf{Mor}_{D,1}$.

Funkcja Θ_D pozwala udowodnić, że zbiór $\mathbf{Mor}_{D,1}$ jest skończony oraz zredukować obliczenia w zbiorze $\mathbf{Mor}_{D,1}$ do prostszych obliczeń w zbiorze Cox_D^{tr} , zobacz podrozdział 3.2. Te redukcje wykorzystuje się istotnie w podrozdziale 3.2 do budowania algorytmów numerycznych realizujących obliczenia wynikające z zastosowanej tu metody rozwiązania problemów A oraz B sformułowanych w podrozdziale 2.3.

Efektywność funkcji redukcji ϕ_D oraz Θ_D pokazuje, że grupa $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, morsyfikacje macierzowe diagramów Dynkina D oraz działanie $*$: $\mathbf{Mor}_{D,1} \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbf{Mor}_{D,1}$ są bardzo operatywnymi narzędziami w rozwiązywaniu problemów A–D (zobacz [69]–[72]) sformułowanych we wstępie tej rozprawy i przypomnianych w podrozdziale 2.3.

Przedstawmy teraz plan rozdziału 3. W podrozdziale 3.1 przypominamy definicje i podstawowe fakty o grupach izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ oraz o macierzowych morsyfikacjach bigrafów, które zostały wprowadzone w pracy [69]. Ponadto przypomnimy wprowadzoną w pracy [71] redukcję problemu C tj. problemu obliczenia zbioru $\mathcal{CGpol}_n^+ \subseteq \mathbb{Z}[t]$, do obliczenia $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit na zbiorze macierzowych morsyfikacji \mathbf{Mor}_D , gdzie D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina.

W podrozdziale 3.2 przedstawiamy autorskie algorytmy, służące do obliczania zbioru \mathbf{Mor}_D morsyfikacji, grupy izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ oraz $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbit w \mathbf{Mor}_D , dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D (zobacz [8], [9], [24]–[31]).

W podrozdziale 3.4 przedstawiamy tabele z wynikami obliczeń komputerowych zawierające listę wielomianów Coxetera $\mathrm{cox}_A(t)$, liczb Coxetera \mathbf{c}_A oraz wyznaczników $\det A$ dla wszystkich macierzowych morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_D$, dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D o $2 \leq n \leq 9$ wierzchołkach. Wyniki zostały uzyskane z zastosowaniem algorytmów omówionych w podrozdziale 3.2.

W ostatnim podrozdziale 3.3 prezentujemy wnioski, komentarze i otwarte problemy będące podsumowaniem rozdziału 3.

3.1. Morsyfikacje macierzowe diagramów Dynkina i grupy izotropii

Rozpocznijmy od przypomnienia definicji morsyfikacji jednorodnego diagramu Dynkina D . W wersji macierzowej została ona wprowadzona przez D. Simsona w artykułach [70, 71], natomiast w wersji funkcjonalowej w pracy [69].

DEFINICJA 3.1.1. Niech D będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n \geq 1$ wierzchołkach, rozważanym jako prosty graf oznakowany (lub bigraf) w zbiorze \mathcal{UBigr}_n . Niech $G_D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ będzie symetryczną macierzą Grama bigrafu D w sensie definicji 2.1.11.

(a) **Całkowitą** (odp. wymierną) **morsyfikacją macierzową diagramu D** nazywamy dowolną nieosobliwą macierz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (odp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$) spełniającą następujące dwa warunki:

- wszystkie współczynniki **macierzy Coxetera** $\mathrm{Cox}_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ macierzy A zdefiniowanej wzorem $\mathrm{Cox}_A := -A \cdot A^{-tr}$ są całkowite, gdzie $A^{-tr} = (A^{-1})^{tr} = (A^{-tr})^{-1}$,

- $A + A^{tr} = 2G_\Delta$.
- (b) **Transformacją Coxetera morsyfikacji** A nazywamy automorfizm grup $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ zdefiniowany wzorem $\Phi_A(x) := x \cdot \text{Cox}_A$.
- (c) **Wielomianem Coxetera morsyfikacji** A nazywamy wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_A(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_A) \in \mathbb{Z}[t],$$

macierzy Coxetera $\text{Cox}_A \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$.

- (d) **Liczbą Coxetera morsyfikacji** A nazywamy

$$\mathbf{c}_A := \begin{cases} \min\{c \in \mathbb{N}; \Phi_A^c = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}\} & ; \text{gdy } \Phi_A^c = \text{id}_{\mathbb{Z}^n} \text{ dla pewnego } c \geq 1, \\ \infty & ; \text{gdy } \Phi_A^c \neq \text{id}_{\mathbb{Z}^n} \text{ dla dowolnego } c \geq 1. \end{cases}$$

PRZYKŁAD 3.1.2. (a) Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ jest morsyfikacją całkowitą diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_2$ o wyznaczniku $\det A = 3$, o macierzy Coxetera $\text{Cox}_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz wielomianie Coxetera $\text{cox}_D(t) = t^2 - t + 1$.

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ jest morsyfikacją wymierną diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_2$ o wyznaczniku $\det A = \frac{3}{4}$, o macierzy Coxetera $\text{Cox}_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz wielomianie Coxetera $\text{cox}_D(t) = t^2 + t + 1$.

(b) Niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ dowolnego diagramu D jest jego morsyfikacją całkowitą, natomiast symetryczna macierz Grama $G_D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest jego morsyfikacją wymierną.

OZNACZENIA 3.1.3. (a) Symbolami $\mathbf{Mor}_D \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich całkowitych i wszystkich wymiernych morsyfikacji macierzowych diagramu D .

(b) Symbolem $\widetilde{\mathbf{Mor}}_D := \widehat{\mathbf{Mor}}_D \setminus \mathbf{Mor}_D$ oznaczamy zbiór wszystkich morsyfikacji wymiernych, które nie są całkowite.

(c) Dla danego wielomianu $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$, rozważamy zbiór

$$(3.1.4) \quad \widehat{\mathbf{Mor}}_D^F := \{A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D; \text{cox}_A(t) = F(t)\} \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_D$$

macierzowych morsyfikacji A typu Coxetera $F(t)$, tzn. takich, że $\text{cox}_A(t) = F(t)$. Podzbiory morsyfikacji o typie Coxetera $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oznaczać będziemy symbolami

$$\mathbf{Mor}_D^F := \{A \in \mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); \text{cox}_A(t) = F(t)\} \subseteq \mathbf{Mor}_D,$$

$$\widetilde{\mathbf{Mor}}_D^F := \{A \in \widetilde{\mathbf{Mor}}_D; \text{cox}_A(t) = F(t)\} \subseteq \widetilde{\mathbf{Mor}}_D.$$

PRZYKŁAD 3.1.5. Pokażemy, że pierwsza z macierzy

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z}), \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Q}),$$

jest całkowitą morsyfikacją diagramu Dynkina \mathbb{A}_7 , natomiast druga z nich jest wymierną morsyfikacją diagramu Dynkina \mathbb{E}_7 . W tym celu obliczamy:

- $\det A_1 = 4$ oraz $\det A_2 = \frac{1}{9}$,
- macierze Coxetera

$$\text{Cox}_{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{A_2} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z}),$$

- liczby Coxetera $\mathbf{c}_{A_1} = 14$ oraz $\mathbf{c}_{A_2} = 6$.

Ponieważ $A_1 + A_1^{tr} = 2G_{\mathbb{A}_7}$ oraz $A_2 + A_2^{tr} = 2G_{\mathbb{E}_7}$, więc $A_1 \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_7} \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{A}_7}$ oraz $A_2 \in \widetilde{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{E}_7} \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{E}_7}$. Wielomianami Coxetera morsyfikacji A_1 oraz A_2 są

$$\begin{aligned} \text{cox}_{A_1}(t) &= t^7 + 1 \in \mathbb{Z}[t], \\ \text{cox}_{A_2}(t) &= t^7 + 2t^6 + 3t^5 + 3t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1 \in \mathbb{Z}[t]. \end{aligned}$$

Redukcja badanych przez nas problemów A-D sformułowanych w podrozdziale 2.3 przy użyciu funkcji $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_{D,1}$ (3.0.3) do analogicznych problemów w zbiorze \mathbf{Mor}_D morsyfikacji macierzowych diagramu Dynkina D wykorzystuje następujące twierdzenie udowodnione w [71, 72] orzekające m.in., że $\mathbf{Mor}_{D,1}$ jest podzbiorem niezmienniczym przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ względem działania (3.1.7) grupy izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ zdefiniowanej w 3.0.4.

TWIERDZENIE 3.1.6. *Załóżmy, że D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina o $n \geq 1$ wierzchołkach oraz niech \mathbf{Mor}_D oraz $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ będą odpowiednio zbiorami jego morsyfikacji całkowitych i wymiernych. Niech $G_D \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ będzie symetryczną macierzą Grama diagramu D oraz niech*

$$* : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}), \quad (A, B) \mapsto A * B := B^{tr} \cdot A \cdot B,$$

będzie działaniem (2.0.5).

- Podzbiór $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D := \{B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}); G_D * B = G_D\}$ (3.0.4) grupy liniowej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest jej podgrupą, zwaną grupą izotropii diagramu D .
- Zbiory $\mathbf{Mor}_D \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ są podzbiarami $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -niezmienniczymi względem działania $* : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, tzn. $*$ indukuje prawe działania:

$$(3.1.7) \quad \begin{aligned} * : \widehat{\mathbf{Mor}}_D \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D &\rightarrow \widehat{\mathbf{Mor}}_D, \\ * : \mathbf{Mor}_D \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D &\rightarrow \mathbf{Mor}_D. \end{aligned}$$

- Dla dowolnych macierzy $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ oraz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ zachodzą równości: $\text{Cox}_{A*B} = B^{tr} \cdot \text{Cox}_A \cdot B^{-tr}$, $\det A * B = \det A$, $\text{cox}_{A*B}(t) = \text{cox}_A(t)$ oraz $\mathbf{c}_{A*B} = \mathbf{c}_A$.

Dowód. (a) Na podstawie lematu 2.2.4, $* : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest prawym działaniem grupy $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ na \mathbb{Q} -przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$. Stąd łatwo wynika stwierdzenie (a).

(b) Jeśli $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ oraz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, to $A + A^{tr} = 2G_D$. Ponieważ $*$ jest prawym działaniem grupy $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ na $\mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, więc $(A + A^{tr}) * B = A * B + (A * B)^{tr} = A + A^{tr} = 2G_D$.

Stąd wynika, że $A * B$ jest morsyfikacją, ponieważ pozostałe własności wymagane w definicji morsyfikacji wynikają z (c).

(c) Dla dowolnych macierzy $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ oraz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ otrzymujemy równości:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cox}_{A*B} &= -(A * B)(A * B)^{-tr} = -(B^{tr} \cdot A \cdot B)(B^{tr} \cdot A \cdot B)^{-tr} = \\ &= -B^{tr} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-tr} \cdot B^{-tr} = -B^{tr} \cdot A \cdot A^{-tr} \cdot B^{-tr} = B^{tr} \mathrm{Cox}_A B^{-tr}, \end{aligned}$$

$$\det(A * B) = \det(B^{tr} \cdot A \cdot B) = \det B^{tr} \cdot \det A \cdot \det B = \det A \cdot (\det B)^2 \stackrel{\det B = \pm 1}{=} \det A,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{cox}_{A*B}(t) &= \det(t \cdot E - \mathrm{Cox}_{A*B}) = \det(B^{tr} B^{-tr} \cdot (t \cdot E) \cdot B^{tr} B^{-tr} - B^{tr} \mathrm{Cox}_A B^{-tr}) = \\ &= \det(B^{tr} (B^{-tr} \cdot (t \cdot E) \cdot B^{tr} - \mathrm{Cox}_A) B^{-tr}) = \\ &= \det(B^{tr} B^{-tr}) \cdot \det(B^{-tr} \cdot (t \cdot E) \cdot B^{tr} - \mathrm{Cox}_A) = \det((t \cdot E) \cdot B^{-tr} B^{tr} - \mathrm{Cox}_A) = \\ &= \det(t \cdot E - \mathrm{Cox}_A) = \mathrm{cox}_A(t). \end{aligned}$$

Aby udowodnić równość $\mathbf{c}_{A*B} = \mathbf{c}_A$ zauważmy, że $\mathrm{Cox}_{A*B}^j = B^{tr} \mathrm{Cox}_A^j B^{-tr}$ oraz $\mathrm{Cox}_A^j = B^{-tr} \mathrm{Cox}_{A*B}^j B^{tr}$, dla dowolnego $1 \leq j \in \mathbb{Z}$ (dowód indukcyjny ze względu na j). Stąd wynikają implikacje

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{Cox}_{A*B}^{\mathbf{c}_A} &= B^{tr} \mathrm{Cox}_A^{\mathbf{c}_A} B^{-tr} = B^{tr} \cdot E \cdot B^{-tr} = E \Rightarrow \mathbf{c}_{A*B} \leq \mathbf{c}_A \\ \mathrm{Cox}_A^{\mathbf{c}_{A*B}} &= B^{-tr} \mathrm{Cox}_{A*B}^{\mathbf{c}_{A*B}} B^{tr} = B^{-tr} \cdot E \cdot B^{tr} = E \Rightarrow \mathbf{c}_A \leq \mathbf{c}_{A*B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{c}_{A*B} = \mathbf{c}_A,$$

co kończy dowód stwierdzenia (c) oraz dowód całego twierdzenia. \square

WNIOSEK 3.1.8. Dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D oraz dowolnego wielomianu $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ podzbiór $\widehat{\mathbf{Mor}}_D^F \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ (3.1.4) jest $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -niezmienniczy względem działania $*$: $\widehat{\mathbf{Mor}}_D \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ (3.1.7).

Dowód. Niech $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D^F$ oraz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$. Zatem $\mathrm{cox}_A(t) = F(t)$ i na podstawie poprzedniego twierdzenia, $A * B \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ oraz $\mathrm{cox}_{A*B}(t) = \mathrm{cox}_A(t) = F(t)$. W konsekwencji otrzymujemy $A * B \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D^F$, co kończy dowód. \square

Kluczowe dla zastosowania funkcji $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_{D,1}$ (3.0.3) do redukcji problemu A i obliczenia zbioru $\mathcal{CGpol}_n^+ \subseteq \mathbb{Z}[t]$ wielomianów Coxetera dodatnich, spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n^+$, jest następujące twierdzenie 3.1.9 wykorzystujące technikę przedstawioną i zastosowaną w pracach [70], [71] oraz [72].

TWIERDZENIE 3.1.9. Dla dowolnego diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o $n \geq 1$ wierzchołkach, funkcja

$$(3.1.10) \quad \phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_D, \quad \Delta \mapsto \check{G}_\Delta * C_\Delta$$

zdefiniowana wzorem (3.0.3) posiada następujące własności.

(a) Dla dowolnego bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$, macierz $A_\Delta := \phi_D(\Delta) = \check{G}_\Delta * C_\Delta$ jest morsyfikacją całkowitą diagramu D o wyznaczniku $\det A_\Delta = 1$. Ponadto zachodzą równości $\mathrm{cox}_{A_\Delta}(t) = \mathrm{cox}_\Delta(t)$ oraz $\mathbf{c}_{A_\Delta} = \mathbf{c}_\Delta$.

(b) Jeśli Δ oraz Δ' są bigrafami w zbiorze \mathcal{UBigr}_D oraz $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \subseteq \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest grupą izotropii diagramu D , to następujące warunki są równoważne:

$$(b1) \quad \Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta',$$

- (b2) istnieje macierz $\bar{B} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ taka, że $A_{\Delta'} = A_{\Delta} * \bar{B}$,
- (b3) morsyfikacje $A_{\Delta} = \phi_D(\Delta)$ oraz $A_{\Delta'} = \phi_D(\Delta')$ leżą w jednej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie działania $*$: $\mathbf{Mor}_D \times \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \rightarrow \mathbf{Mor}_D$ (3.1.7) grupy izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ na \mathbf{Mor}_D .
- (c) Jeśli $A_{\Delta} := \check{G}_{\Delta} * C_{\Delta}$ jest morsyfikacją zdefiniowaną w (a) oraz $\tilde{h}_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n zdefiniowanym wzorem $\tilde{h}_{\Delta}(v) := v \cdot C_{\Delta}^{tr}$, dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$, to przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_{A_{\Delta}}} & \mathbb{Z}^n \\ \tilde{h}_{\Delta} \downarrow \simeq & & \tilde{h}_{\Delta} \downarrow \simeq \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_{\Delta}} & \mathbb{Z}^n \end{array}$$

gdzie Φ_{Δ} oraz $\Phi_{A_{\Delta}}$ są transformacjami Coxetera odpowiednio bigrafu Δ oraz morsyfikacji $A_{\Delta} \in \mathbf{Mor}_D$.

Dowód. Przypomnijmy z definicji (3.0.3), że dla dowolnego $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$ ustala się pewną macierz $C_{\Delta} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą \mathbb{Z} -równoważność $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$, tzn. spełniającą równość $G_{\Delta} * C_{\Delta} = G_D$. Macierz $\phi_D(\Delta)$ definiujemy wzorem $\phi_D(\Delta) := \check{G}_{\Delta} * C_{\Delta}$.

(a) Ponieważ $\det \check{G}_{\Delta} = 1$ oraz $\check{G}_{\Delta} \in \mathbf{Mor}_{\Delta}$, więc $\det A_{\Delta} = 1$, $\text{cox}_{A_{\Delta}}(t) = \text{cox}_{\Delta}(t)$, $\mathbf{c}_{A_{\Delta}} = \mathbf{c}_{\Delta}$ oraz $\text{Cox}_{A_{\Delta}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, na podstawie twierdzenia 3.1.6(c).

Po uwzględnieniu równości $\check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr} = 2G_{\Delta}$ otrzymujemy

$$A_{\Delta} + A_{\Delta}^{tr} = (\check{G}_{\Delta} * C_{\Delta}) + (\check{G}_{\Delta}^{tr} * C_{\Delta}) = (\check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr}) * C_{\Delta} = 2G_{\Delta} * C_{\Delta} = 2G_D.$$

Udowodniliśmy więc, że $\phi_D(\Delta) \in \mathbf{Mor}_D$, co kończy dowód (a).

(b) Ponieważ równoważność (b3) \Leftrightarrow (b2) jest oczywista, więc wystarczy udowodnić równoważność (b1) \Leftrightarrow (b2).

Aby udowodnić implikację (b1) \Rightarrow (b2) załóżmy, że macierz B definiuje \mathbb{Z} -kongruencję $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. $\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta} * B$. Udowodnimy, że macierz $\bar{B} := C_{\Delta}^{-1} \cdot B \cdot C_{\Delta'}$ definiuje \mathbb{Z} -kongruencję macierzy A_{Δ} oraz $A_{\Delta'}$. Istotnie, uwzględniając równość $\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta} * B$ otrzymujemy ciąg równości:

$$A_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta'} * C_{\Delta'} = (\check{G}_{\Delta} * B) * C_{\Delta'} = ((A_{\Delta} * C_{\Delta}^{-1}) * B) * C_{\Delta'} = A_{\Delta} * (C_{\Delta}^{-1} \cdot B \cdot C_{\Delta'}) = A_{\Delta} * \bar{B}.$$

Udowodnimy teraz, że $\bar{B} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$. Ponieważ $A_{\Delta'} = A_{\Delta} * \bar{B}$, więc $A_{\Delta'}^{tr} = A_{\Delta}^{tr} * \bar{B}$ i otrzymujemy równość: $2G_D = A_{\Delta'} + A_{\Delta'}^{tr} = (A_{\Delta} + A_{\Delta}^{tr}) * \bar{B} = 2G_D * \bar{B}$. Stąd wynika równość $G_D * \bar{B} = G_D$, która implikuje $\bar{B} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$.

(b2) \Rightarrow (b1) Załóżmy istnienie macierzy $\bar{B} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ takiej, że $A_{\Delta'} = A_{\Delta} * \bar{B} = \check{G}_{\Delta} * (C_{\Delta} \cdot \bar{B})$. Stąd otrzymujemy równość $A_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta'} * C_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta} * (C_{\Delta} \cdot \bar{B})$. Przemnożenie stronami względem działania $*$ przez macierz $C_{\Delta'}^{-1}$ daje równość

$$\check{G}_{\Delta'} = (\check{G}_{\Delta'} * C_{\Delta'}) * C_{\Delta'}^{-1} = \check{G}_{\Delta} * (C_{\Delta} \cdot \bar{B} \cdot C_{\Delta'}^{-1}) = \check{G}_{\Delta} * (C_{\Delta} \cdot C_{\Delta'}^{-1} \cdot B \cdot C_{\Delta'} \cdot C_{\Delta'}^{-1}) = \check{G}_{\Delta} * B,$$

co kończy dowód stwierdzenia (b).

(c) Przypomnijmy, że $G_D = G_{\Delta} * C_{\Delta}$. Ponieważ $C_{\Delta} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$, więc istnieje macierz $C_{\Delta}^{-1} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$. Zatem homomorfizm $\tilde{h}_{C_{\Delta}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n , gdyż $\tilde{h}_{C_{\Delta}} \circ \tilde{h}_{C_{\Delta}^{-1}} = \tilde{h}_{C_{\Delta} \cdot C_{\Delta}^{-1}} = \tilde{h}_E = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$ oraz $\tilde{h}_{C_{\Delta}^{-1} \cdot C_{\Delta}} = \tilde{h}_E = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$.

Zauważmy teraz, że

$$\begin{array}{ccc}
 v & \xrightarrow{\quad} & v \cdot \text{Cox}_{A_\Delta} & = v \cdot \text{Cox}_{\check{G}_\Delta * C_\Delta} \stackrel{\text{tw. 3.1.6(c)}}{=} v \cdot C_\Delta^{\text{tr}} \cdot \text{Cox}_\Delta \cdot C_\Delta^{-\text{tr}} \\
 \downarrow & & \downarrow & \\
 v \cdot C_\Delta^{\text{tr}} & \xrightarrow{\quad} & v \cdot C_\Delta^{\text{tr}} \cdot \text{Cox}_\Delta & = v \cdot C_\Delta^{\text{tr}} \cdot \text{Cox}_\Delta \cdot C_\Delta^{-\text{tr}} \cdot C_\Delta^{\text{tr}} = \tilde{h}_{C_\Delta}(v \cdot \text{Cox}_{A_\Delta}),
 \end{array}$$

dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 3.1.9 pokazuje m.in., że funkcja $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_{D,1}$ (3.0.3) redukuje rozwiązanie problemu A i problemu obliczenia zbioru $\mathcal{CGpol}_n^+ \subseteq \mathbb{Z}[t]$ do analogicznych problemów dla morsyfikacji diagramu Dynkina D , ponieważ ϕ_D nie zmienia wielomianów Coxetera oraz liczb Coxetera. W szczególności twierdzenie 3.1.9, częściowo redukuje problem C obliczenia zbioru \mathcal{CGpol}_n^+ dla dodatnich, spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych \mathcal{UBigr}_n^+ , do problemu obliczenia zbioru

$$\mathcal{CPol}_D := \{\text{cox}_A(t) \in \mathbb{Z}[t]; A \in \mathbf{Mor}_D\},$$

wszystkich wielomianów Coxetera $\text{cox}_A(t) \in \mathbb{Z}[t]$ macierzowych morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_{D,1}$ o wyznaczniku $\det A = 1$.

W dalszej części rozprawy symbolem $\widehat{\mathcal{CPol}}_D$ oznaczać będziemy zbiór wielomianów Coxetera $\text{cox}_A(t) \in \mathbb{Z}[t]$ morsyfikacji wymiernych $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$.

Aby redukcja przez funkcję $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_{D,1}$ była w pełni efektywna należy jeszcze udowodnić, że zbiór morsyfikacji wymiernych $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ jest skończony oraz grupa izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ jest skończona, dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina

$$D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$$

o $n \geq 1$ wierzchołkach. Fakty te zostaną udowodnione w następnym rozdziale, gdzie udowodnimy również twierdzenia pozwalające konstruować efektywne algorytmy numeryczne i symboliczne na obliczenie skończonego zbioru $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ oraz skończonej grupy izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D .

3.2. Algorytmy kombinatoryczne na obliczanie morsyfikacji macierzowych i grup izotropii

W rozdziale tym przedstawimy wykorzystywane w tej rozprawie algorytmy służących do obliczenia zbioru morsyfikacji $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ (3.1.3) oraz grupy izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ (3.0.4), dla każdego z diagramów Dynkina $D = (D_0, D_1) \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$.

Rozpocznijmy od przedstawienia pierwszych eksperymentalnych algorytmów zachłannych, a skończymy na algorytmie, który pozwala na efektywne uzyskanie wyników dla liczby wierzchołków $n := |D_0| \leq 9$.

ALGORYTM 3.2.1. (ZACHŁANNE POSZUKIWANIE MACIERZY MORSYFIKACJI)

Dane wejściowe. Dwie liczby całkowite $n \geq 2$, $h \geq 1$ oraz niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_D = [d_{ij}^D] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (2.1.11), gdzie D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1.

Wynik. Zbiór $\mathbf{Mor}_{D,h}$ wszystkich morsyfikacji całkowitoliczbowych $A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mor}_D$ o współczynnikach ze zbioru $\{-h, \dots, 0, \dots, h\}$, wraz z ich wielomianami Coxetera $\text{cox}_A(t)$, liczbami Coxetera \mathbf{c}_A oraz wyznacznikami $\det A$.

KROK 1°: Skonstruować generyczną macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, o niewiadomych a_{ij} , gdzie $a_{11} = \dots = a_{nn} = 1$ oraz $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} - 1 & ; d_{ij}^D = -1, \\ -a_{ji} & ; d_{ij}^D = 0, \end{cases}$ dla $n \geq j > i \geq 1$.

KROK 2°: Zastąpić niewiadomą a_{21} kolejno przez elementy ze zbioru $\{-h, \dots, -1\}$. Zastąpić każdą z niewiadomych a_{ij} , gdzie $d_{ji}^D = -1$ i $n \geq i > j \geq 1$, kolejno przez elementy ze zbioru $\{-h, \dots, 0, \dots, h-1\}$, oraz zastąpić pozostałe niewiadome a_{ij} , dla $n \geq i > j \geq 1$ kolejno przez elementy ze zbioru $\{-h, \dots, 0, \dots, h\}$.

KROK 3°: Jeżeli $\text{Cox}_A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, to dodajemy macierz A do zbioru $\mathbf{Mor}_{D,h}$, wyliczamy jej liczbę Coxetera \mathbf{c}_A , wyznacznik $\det A$ oraz wielomian Coxetera $\text{cox}_A(t)$, następnie wracamy do kroku 2° z nowym podstawieniem.

Pierwszy algorytm symboliczny został stworzony i zaimplementowany z wykorzystaniem generycznej formy macierzy morsyfikacji $A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mor}_D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, której postać jest specyficzna dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina (szczegółowy opis algorytmu znajduje się w pracach [24] i [27]). Relacje pomiędzy wartościami współczynników macierzy morsyfikacji wynikają bezpośrednio z zawartej w definicji (3.1.1) równości $A + A^{tr} = 2G_D$.

Przykładowo, jeśli $D = \mathbb{A}_n$, to $A + A^{tr} = 2G_D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$, to macierz morsyfikacji

A ma postać

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{a}_{2,1}-1 & -\tilde{a}_{3,1} & \cdots & -\tilde{a}_{n,1} \\ \tilde{a}_{2,1} & 1 & -\tilde{a}_{3,2}-1 & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{3,1} & \tilde{a}_{3,2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\tilde{a}_{n,n-1}-1 \\ \tilde{a}_{n,1} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

$$(3.2.2) \quad \text{gdzie} \begin{cases} a_{ij} & = 1 & ; \text{dla } i = j, \\ a_{ij} + a_{ji} = \tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij} - 1 & = -1 & ; \text{dla } i + 1 = j, \\ a_{ij} + a_{ji} = \tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij} & = 0 & ; \text{w p.p.} \end{cases}$$

Dodatkowym ograniczeniem działania algorytmu jest poszukiwanie jedynie morsyfikacji całkowitoliczbowych (tzn. morsyfikacji ze zbioru $\mathbf{Mor}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$), oraz **wysokość macierzy** określona jako

$$(3.2.3) \quad \mathbf{ht}(A) = \max\{|a_{ij}|; i, j \in \{1, \dots, n\}\} \in \mathbb{Z}.$$

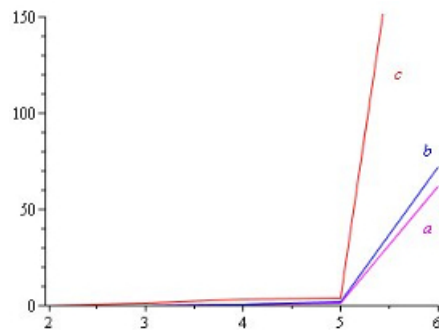
Algorytm opiera się na zachłannym sprawdzeniu wszystkich możliwych macierzy, przy zakładanej wysokości, z wykorzystaniem zbioru relacji (np. (3.2.2)) pomiędzy jej współczynnikami. Testy prototypowej implementacji, wykonane w `Maple 13` wykazały ograniczenie (efektywnie)

możliwych do uzyskania wyników na poziomie $n = 6$ i $ht = 1$, dla których czas obliczeń wyniósł 5 godzin 43 minuty (procesor AMD Sempron 2800+, 1.6 GHz). W celu zmniejszenia czasu obliczeń zdecydowaliśmy się na stworzenie implementacji algorytmu w języku C++ z użyciem hybrydowych obliczeń symboliczno-numerycznych.

Zmiana sposobu obliczeń pozwoliła na uzyskanie około 100-krotnego przyspieszenia. Następnie porównaliśmy efektywność trzech metod odwracania macierzy:

- (a) opartej na rozkładzie LU macierzy (Alan Turing, 1948),
- (b) korzystającej z rozkładu QR macierzy (John G. F. Francis, 1959, Vera Kublanovskaya, 1961), oraz
- (c) polegającej na rozwiązaniu układu równań $A \cdot A^{-1} = E$, przy użyciu eliminacji Gaussa.

Wykres 3.2.4. Porównanie czasu obliczeń w zależności od wykorzystanego algorytmu odwracania macierzy



Wybór najefektywniejszej metody odwracania macierzy pozwolił na dodatkowe 5-krotne przyspieszenie obliczeń oraz uzyskanie wyników dla $n = 7$, $ht = 2$.

Złożoność algorytmu 3.2.1 jest zdominowana przez moc przeszukiwanego zbioru macierzy. Dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina $D = (D_0, D_1)$ o $n \geq 2$ wierzchołkach i wysokości $h \geq 1$, moc przeszukiwanego zbioru macierzy wynosi

$$h \cdot (2h)^{|D_1|} \cdot (2h + 1)^{\frac{n(n-1)}{2} - |D_1|} = h \cdot (2h)^{n-1} \cdot (2h + 1)^{\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)} = 2^{n-1} \cdot h^n \cdot (2h + 1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.$$

Dla ilustracji prezentujemy moc przeszukiwanego zbioru dla $n = 6$ i $ht = 1, \dots, 5$.

n	h	moc przeszukiwanego zbioru
6	1	1 889 568
6	2	20 000 000 000
6	3	6 589 582 608 672
6	4	457 019 805 007 872
6	5	12 968 712 300 500 000

Przedstawiona w dalszej części rozdziału redukcja przez funkcję Θ_D (3.2.6), rozwiązuje problem zależności złożoności algorytmu 3.2.1 od ustalonego ograniczenia wysokości ht .

Druga wersja algorytmu poszukiwania macierzy morsyfikacji. Przetawimy teraz drugą bardziej efektywną wersję algorytmu 3.2.1 pozwalającą na obliczenie zbioru $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina D . Główną ideą konstrukcji tego algorytmu jest zredukowanie obliczenia zbioru $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ do obliczenia następującego podzbioru macierzy \mathbb{Z} -odwracalnych

$$(3.2.5) \quad \mathcal{Cox}_D := \left\{ C \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z}); \begin{array}{l} \det(E - C) \neq 0, \\ G_D = G_D \cdot (E - C)^{-tr} + (E - C)^{-1} \cdot G_D \end{array} \right\},$$

zdefiniowanego w artykule [71], dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina D . Okazuje się, że zbiór \mathcal{Cox}_D można łatwiej obliczyć niż zbiór $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$. Związek pomiędzy zbiorami $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ oraz \mathcal{Cox}_D opisany jest przez parę funkcji

$$(3.2.6) \quad \widehat{\mathbf{Mor}}_D \begin{array}{c} \xrightarrow{\Theta_D} \\ \xleftarrow{\xi_D} \end{array} \mathcal{Cox}_D^{tr},$$

zdefiniowanych w artykule [71, Proposition 2.9, Remark 5.2–5.3] przez przyporządkowania

$$(3.2.7) \quad \begin{array}{l} A \longmapsto \Theta_D(A) = \mathrm{Cox}_A^{tr} = -A^{-1} \cdot A^{tr} \in \mathcal{Cox}_D^{tr}, \\ C^{tr} \longmapsto \xi_D(C^{tr}) = 2G_D(E - C^{tr})^{-1} \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D, \end{array}$$

dla dowolnych macierzy $C \in \mathcal{Cox}_D$ oraz $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$.

Zapowiadany algorytm wykorzystuje następujące dwa twierdzenia udowodnione w pracy [71].

TWIERDZENIE 3.2.8. *Dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D funkcje ξ_D oraz Θ_D są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami.*

Szkic dowodu. Zauważmy, że $\det(E - \mathrm{Cox}_A) = \mathrm{cox}_A(1) \neq 0$, dla dowolnej macierzy $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$. Ponadto zachodzą równości

$$\begin{aligned} \Theta_D(A)^{tr} &= \mathrm{Cox}_A = -A \cdot A^{-tr} / \cdot A^{tr}, \\ \mathrm{Cox}_A \cdot A^{tr} &= -A / ()^{tr}, \\ A \cdot \mathrm{Cox}_A^{tr} &= -A^{tr}, \end{aligned}$$

które implikują równości

$$\begin{aligned} A + A^{tr} &= 2G_D, \\ A - A \cdot \mathrm{Cox}_A^{tr} &= 2G_D, \\ A(E - \mathrm{Cox}_A^{tr}) &= 2G_D / \cdot (E - \mathrm{Cox}_A^{tr})^{-1}, \\ A &= 2G_D \cdot (E - \mathrm{Cox}_A^{tr})^{-1} = \xi_D(\mathrm{Cox}_A^{tr}) = \xi_D(\Theta_D(A)). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że funkcja ξ_D jest surjektywna oraz macierz $\Theta_D(A)$ należy do zbioru \mathcal{Cox}_D^{tr} , gdyż

$$\begin{aligned} G_D &= \frac{1}{2} (A + A^{tr}) = \frac{1}{2} (\xi_D(\mathrm{Cox}_A^{tr}) + \xi_D(\mathrm{Cox}_A^{tr})^{tr}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 (G_D \cdot (E - \mathrm{Cox}_A^{tr})^{-1} + (E - \mathrm{Cox}_A^{tr})^{-tr} \cdot G_D) = \\ &= G_D \cdot (E - \mathrm{Cox}_A)^{-tr} + (E - \mathrm{Cox}_A)^{-1} \cdot G_D. \end{aligned}$$

Łatwo pokazać, że $\xi_D(C^{tr})$ jest morsyfikacją wymierną diagramu D oraz $\Theta_D(\xi_D(C^{tr})) = C^{tr}$, dla dowolnej macierzy $C \in Cox_D$. \square

Bezpośrednią inspiracją dla stworzenia algorytmu 3.2.11 były specyficzne postaci macierzy C w zbiorze Cox_D przedstawione w części (c) następującego twierdzenia udowodnionego w pracy [71].

TWIERDZENIE 3.2.9. *Niech $D = (D_0, D_1)$ będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o $n = |D_0|$ wierzchołkach.*

- (a) Cox_D^{tr} jest podzbiorem grupy izotropii $Gl(n, \mathbb{Z})_D$. Zbiory $Cox_D^{tr} \subseteq Gl(n, \mathbb{Z})_D$ są skończone.
- (b) Jeśli $C = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą o wierszach $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$ oraz $C^{tr} \in Gl(n, \mathbb{Z})_D$, to każdy z wektorów $\omega_1, \dots, \omega_n$ należy do skończonego zbioru $\mathcal{R}_D := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_D(v) = 1\}$ pierwiastków diagramu D , gdzie $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonalem kwadratowym diagramu D (zobacz twierdzenie 2.1.18).
- (c) Macierz $C = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą Coxetera Cox_A pewnej macierzy $A \in \widehat{Mor}_D$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki:
 - (c1) C jest \mathbb{Z} -odwracalna oraz 1 nie jest jej wartością własną,
 - (c2) wiersze $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$ macierzy C należą do skończonego zbioru $\mathcal{R}_D \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków diagramu Dynkina D ,
 - (c3) zachodzi równość $G_D = G_D \cdot (E - C)^{-tr} + (E - C)^{-1} \cdot G_D$.

Dowód. (a) Aby pokazać, że $Cox_D^{tr} \subseteq Gl(n, \mathbb{Z})_D$, weźmy macierz $Cox_A^{tr} = (-A \cdot A^{-tr})^{tr} = -A^{-1} \cdot A^{tr} \in M_n(\mathbb{Z})$ dla pewnej morsyfikacji $A \in \widehat{Mor}_D$. Macierz Cox_A^{tr} należy do grupy izotropii $Gl(n, \mathbb{Z})_D$, gdyż

$$\begin{aligned} 2G_D * Cox_A^{tr} &= Cox_A \cdot (2G_D) \cdot Cox_A^{tr} = A \cdot A^{-tr} (A + A^{tr}) A^{-1} \cdot A^{tr} = \\ &= A \cdot A^{-tr} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{tr} + A \cdot A^{-tr} \cdot A^{tr} \cdot A^{-1} \cdot A^{tr} = A + A^{tr} = 2G_D. \end{aligned}$$

Skończoność grupy $Gl(n, \mathbb{Z})_D$ i zbioru Cox_D^{tr} wynika z (b), gdyż zbiór \mathcal{R}_D pierwiastków diagramu D jest skończony, na podstawie twierdzenia 2.1.18.

- (b) Załóżmy, że $C = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$ oraz macierz C^{tr} należy do grupy izotropii $Gl(n, \mathbb{Z})_D$.

Jeśli $v \in \mathcal{R}_D$, to wektor $v \cdot C$ należy do \mathcal{R}_D , gdyż

$$q_D(v \cdot C) = (v \cdot C) \cdot G_D \cdot (v \cdot C)^{tr} = v \cdot (C \cdot G_D \cdot C^{tr}) \cdot v^{tr} = v \cdot (G_D * C^{tr}) \cdot v^{tr} = v \cdot G_D \cdot v^{tr} = q_D(v) = 1.$$

Zauważmy, że wektor $e_j \cdot C$ jest j -tym wierszem ω_j macierzy C . Ponieważ $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{R}_D$, więc każdy z wierszy $e_1 \cdot C = \omega_1, \dots, e_n \cdot C = \omega_n$ macierzy C należy do zbioru \mathcal{R}_D pierwiastków diagramu D , co kończy dowód (b).

(c) Załóżmy, że $C \in M_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą Coxetera Cox_A pewnej macierzy $A \in \widehat{Mor}_D$. Zatem $\det C = (-1)^n$. Ponadto na podstawie (a)–(b) oraz twierdzeń 3.2.8 i 3.2.16, macierz C spełnia warunki (c1)–(c3).

Aby udowodnić implikację przeciwną założymy, że $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą spełniającą warunki (c1)–(c3). Stąd wynika, że macierz C należy do zbioru \mathcal{Cox}_D , gdyż spełnia warunki definicji 3.2.5.

Na podstawie twierdzenia 3.2.8, funkcje $\widehat{\mathbf{Mor}}_D \xrightleftharpoons[\xi_D]{\Theta_D} \mathcal{Cox}_D^{tr}$ (3.2.7) są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami. Ponieważ $C \in \mathcal{Cox}_D$, więc $C^{tr} = \Theta_D(\xi_D(C^{tr})) = \Theta_D(A) = \mathcal{Cox}_A^{tr}$, gdzie $A = \xi_D(C^{tr}) \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$. Zatem $C = \mathcal{Cox}_A$, co kończy dowód. \square

Twierdzenie 3.2.9 prowadzi do następującego wniosku, który jest kluczowym z punktu widzenia efektywności zapowiadanego algorytmu.

WNIOSEK 3.2.10. *Zbiory $\widehat{\mathbf{Mor}}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{Cox}_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{CPol}_D \subseteq \widehat{\mathcal{CPol}}_D$, $\mathcal{CGpol}_n^+ \subseteq \mathbb{Z}[t]$ są skończone, dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina $D = (D_0, D_1)$, gdzie $|D_0| = n$.*

Stosując poprzednie dwa twierdzenia jesteśmy w stanie przedstawić następującą nową wersję algorytmu 3.2.1.

ALGORYTM 3.2.11. (REDUKCJA POSZUKIWANIA MACIERZY MORSYFIKACJI)

Dane wejściowe. Liczba całkowita $n \geq 2$ oraz niesymetryczna macierz Grama $G_D = [d_{ij}^D] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (2.1.11), gdzie D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1.

Wynik. Zbiór $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ wszystkich wymiernych morsyfikacji $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ diagramu D , wraz z ich wielomianami Coxetera $\text{cox}_A(t)$, liczbami Coxetera \mathbf{c}_A oraz wyznacznikami $\det A$.

KROK 1°: Wyznaczyć symetryczną macierz Grama G_D oraz zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_D := \mathcal{R}_D(1) = \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_D \cdot v^{tr} = 1\}$.

KROK 2°: Dla $i = 1, \dots, n$ wyznaczyć podzbiory

$${}_i\mathcal{R}_D^+ := \{(r_1, \dots, r_n) = r \in \mathcal{R}_D^+ \subset \mathcal{R}_D; r_i > 0, r_{i+1} = \dots = r_n = 0\}.$$

KROK 3°: Skonstruować generyczną macierz $C = \begin{bmatrix} c^{(1)} \\ \vdots \\ c^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

KROK 4°: Dla $i = 1, \dots, n$, zastąpić pusty wiersz $c^{(i)}$, kolejno przez elementy ze zbioru $\mathcal{R}_D \setminus \{c^{(1)}, \dots, c^{(i-1)}, -c^{(1)}, \dots, -c^{(i-1)}, e_i\}$. Jeżeli po uzupełnieniu $c^{(i)}$, nie jest spełniony warunek ${}_i\mathcal{R}_D^+ \cdot C \subseteq \mathcal{R}_D$, wówczas dokonaj kolejnego z możliwych podstawień $c^{(i)}$, w przeciwnym wypadku idź do kroku 5°.

KROK 5°: Jeżeli $\det(E - C) \neq 0$ oraz $G_D = G_D \cdot (E - C)^{-1} + (E - C)^{-tr} \cdot G_D$, wówczas dodajemy macierz $A = \xi_D(C) = 2G_D \cdot (E - C)^{-1}$ do zbioru $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, wyliczamy jej liczbę Coxetera \mathbf{c}_A , wyznacznik $\det A$ oraz wielomian Coxetera $\text{cox}_A(t)$, następnie wracamy do kroku 4° z nowym podstawieniem.

Złożoność algorytmu 3.2.11 jest zdominowana przez moc przeszukiwanego zbioru macierzy. Dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina $D = (D_0, D_1)$ o $n \geq 2$ wierzchołkach, moc przeszukiwanego zbioru macierzy wynosi

$$(3.2.12) \quad (|\mathcal{R}_D| - 1) \cdot (|\mathcal{R}_D| - 3) \cdot \dots \cdot (|\mathcal{R}_D| - (2n - 1)) < |\mathcal{R}_D|^n$$

Dla ilustracji prezentujemy moc przeszukiwanego zbioru dla $n = 6$.

D	$ \mathcal{R}_D $	moc przeszukiwanego zbioru
\mathbb{A}_6	42	2 118 331 215
\mathbb{D}_6	60	24 498 059 355
\mathbb{E}_6	72	81 990 962 235

Inną bardzo ważną konsekwencją strukturalnego twierdzenia 3.2.9, jest następujący autorski algorytm pozwalający obliczyć skończoną grupę izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D .

ALGORYTM 3.2.13. (GRUPA IZOTROPII)

Dane wejściowe. Liczba całkowita $n \geq 2$ oraz niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_D = [d_{ij}^D] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (2.1.11), gdzie D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1.

Wynik. Grupa izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

KROK 1°: Wyznaczyć symetryczną macierz Grama $G_D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ oraz zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_D := \mathcal{R}_D(1) = \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_D \cdot v^{tr} = 1\}$.

KROK 2°: Dla $i = 1, \dots, n$ wyznaczyć podzbiory

$${}_i\mathcal{R}_D^+ := \{(r_1, \dots, r_n) = r \in \mathcal{R}_D^+ \subset \mathcal{R}_D; r_i > 0, r_{i+1} = \dots = r_n = 0\}.$$

KROK 3°: Skonstruować generyczną macierz $B = [\kappa^{(1)} \dots \kappa^{(n)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o kolumnach $\kappa^{(1)}, \dots, \kappa^{(n)}$.

KROK 4°: Dla $i = 1, \dots, n$, zastąpić pustą kolumnę $\kappa^{(i)}$, kolejno przez elementy ze zbioru $\mathcal{R}_D \setminus \{\kappa^{(1)}, \dots, \kappa^{(i-1)}, -\kappa^{(1)}, \dots, -\kappa^{(i-1)}\}$. Jeżeli po uzupełnieniu $\kappa^{(i)}$, nie jest spełniony warunek ${}_i\mathcal{R}_D^+ \cdot B^{tr} \subseteq \mathcal{R}_D$, wówczas dokonaj kolejnego z możliwych podstawień $\kappa^{(i)}$, w przeciwnym wypadku idź do kroku 5°.

KROK 5°: Jeżeli $G_D = B^{tr} \cdot G_D \cdot B$, wówczas dodajemy macierz B do zbioru $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, następnie wracamy do kroku 4° z nowym podstawieniem.

Stosując algorytm 3.2.11, będący konsekwencją twierdzenia 3.2.9 oraz wniosku 3.2.10, obliczyliśmy zbiór morsyfikacji $\overline{\mathrm{Mor}}_D$ dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina $D = (D_0, D_1)$ o $n = |D_0| \leq 9$ wierzchołkach. Wyniki obliczeń zostały umieszczone w tabelach 3.4.1, 3.4.2 oraz 3.4.3.

UWAGA 3.2.14. Uzyskane wyniki otrzymaliśmy przeprowadzając obliczenia na serwerze wyposażonym w 4, 4-rdzeniowe procesory Intel Xeon E7520, 1.87GHz (technologia HT, ang. *Hyper-Threading Technology*), łącznie 32 wątki, gdzie równoległe obliczenia prowadzone były na 12 wątkach.

UWAGA 3.2.15. W implementacji algorytmów w języku C++ wykorzystaliśmy następujące biblioteki:

- Boost v. 1.46.1, <http://www.boost.org/>,
- Eigen v. 3.2.3, <http://eigen.tuxfamily.org/>,
- wxWidgets v. 2.8.12, <http://www.wxwindows.org/>, oraz
- GiNaC v. 1.6.3, <http://www.ginac.de/>.

Analiza uzyskanych wyników obliczeń pozwoliła na sformułowanie twierdzenia 3.2.16(b). Część (a)–(a') twierdzenia 3.2.16 jest uzupełnioną wersją Theorem 3.13 z współautorskiej pracy [31].

TWIERDZENIE 3.2.16. *Niech $D = (D_0, D_1)$ będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n = |D_0| \geq 2$ wierzchołkach.*

- (a) *Jeżeli A jest wymierną morsyfikacją diagramu D , to $(\det A) \cdot \text{cox}_A(1) = \det 2G_D$.*
- (a') *Jeżeli A jest całkowitą morsyfikacją diagramu D , to jej wyznacznik $\det A$ jest dodatnią liczbą całkowitą, która dzieli wyznacznik $\det 2G_D$ macierzy $2G_D$, tzn. $\det A$ dzieli liczbę $n + 1, 4, 3, 2, 1$, gdy D jest odpowiednio diagramem $\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$.*
- (b) *Jeżeli $2 \leq n \leq 9$, to skończone zbiory wielomianów Coxetera $\text{cox}_A(t)$, wyznaczników $\det A$ oraz liczb Coxetera \mathbf{c}_A morsyfikacji wymiernych $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$, a także ich liczby, są opisane w tabelach 3.4.1, 3.4.2 oraz 3.4.3. Liczby wszystkich morsyfikacji dla poszczególnych diagramów Dynkina o $n \leq 9$ wierzchołkach są takie jak w następującej tabeli:*

	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \widehat{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{A}_n} $	5	15	69	345	2 295	16 065	139 545	1 255 905
$ \widehat{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{D}_n} $	–	–	385	945	10 395	135 135	2 027 025	34 459 425
$ \widehat{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{E}_n} $	–	–	–	–	29 645	765 765	215 656 441	–

natomiast maksymalna wysokość morsyfikacji jest równa odpowiednio

D	$\mathbb{A}_n, n \geq 1$	\mathbb{D}_4	$\mathbb{D}_n, n \geq 5$	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8
$\max\{\text{ht}(A); A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D\}$	2	3	2	4	4	6

Dowód. (a) Na podstawie twierdzenia 3.2.8, funkcje Θ_D oraz ξ_D są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami. Stąd wynika równość $\xi_D(\Theta_D(A)) = A$, dla dowolnej morsyfikacji $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$, co daje równość $A = 2G_D(E - \text{Cox}_A^{\text{tr}})^{-1}$. Stąd łatwo wynikają równości wyznaczników:

$$\det A = \det(2G_D(E - \text{Cox}_A^{\text{tr}})^{-1}) = \det(2G_D) \cdot \det(E - \text{Cox}_A^{\text{tr}})^{-1}$$

i w rezultacie otrzymujemy

$$(\det A) \cdot \det(E - \text{Cox}_A^{\text{tr}}) = \det(2G_D) \text{ oraz } \det(E - \text{Cox}_A^{\text{tr}}) = \det(E - \text{Cox}_A) = \text{cox}_A(1) \in \mathbb{Z},$$

co kończy dowód równości $(\det A) \cdot \text{cox}_A(1) = \det 2G_D$ w stwierdzeniu (a).

(a') Załóżmy, że $A \in \mathbf{Mor}_D \subseteq \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ jest morsyfikacją całkowitą. Wtedy $\text{cox}_A(1)$ jest liczbą całkowitą oraz $\det A$ jest liczbą całkowitą dodatnią, gdyż funkcjonal kwadratowy $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ diagramu D jest dodatnio określony, zatem dla $q := q_D$, można przeprowadzić dowód indukcyjnie ze względu na liczbę wierzchołków, wykorzystując argumenty zastosowanie w [71, Proposition 2.6].

Ponieważ $\check{G}_D \in \mathbf{Mor}_D$, $\det \check{G}_D = 1$ oraz $\text{cox}_D(t) = \text{cox}_{\check{G}_D}(t)$, więc $\det(2G_D) = \det \check{G}_D \cdot \text{cox}_{\check{G}_D}(1) = \text{cox}_D(1)$ oraz $\det(2G_D) = \text{cox}_D(1)$. Stosując lemat 2.2.14 otrzymujemy równości:

$$(\det A) \cdot \text{cox}_A(1) = \det(2G_D) = \text{cox}_D(1) = \begin{cases} n+1, & \text{dla } D = \mathbb{A}_n, n \geq 1, \\ 4, & \text{dla } D = \mathbb{D}_n, n \geq 4, \\ 3, & \text{dla } D = \mathbb{E}_6, \\ 2, & \text{dla } D = \mathbb{E}_7, \\ 1, & \text{dla } D = \mathbb{E}_8, \end{cases}$$

co kończy dowód stwierdzenia (a').

(b) Stosując algorytm 3.2.11 obliczyliśmy zbiory $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, $\widehat{\mathbf{Cox}}_D$, $\widehat{\mathbf{CPol}}_D$, dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina D , gdzie $2 \leq n = |D_0| \leq 9$. Szczegółowe informacje o technice i czasie obliczeń komputerowych zbiorów $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, $\widehat{\mathbf{Cox}}_D$, $\widehat{\mathbf{CPol}}_D$ podane są w uwagach 3.2.14, 3.2.15 o stosowaniu algorytmów 3.2.1, 3.2.11 i 3.2.13 oraz w tabelach 3.4.1, 3.4.2 oraz 3.4.3. Końcowe wyniki obliczeń komputerowych oraz ich konsekwencje zostały zawarte w twierdzeniu 3.2.16(b) oraz we wniosku 3.2.17.

WNIOSEK 3.2.17. *Jeśli D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina o $n \leq 9$ wierzchołkach oraz $A = [a_{ij}]$ jest dowolną morsyfikacją wymierną w zbiorze $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, to*

- (i) $a_{ij} \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, dla $D = \mathbb{A}_n$, $2 \leq n \leq 9$ oraz $D = \mathbb{D}_m$, $5 \leq m \leq 9$,
- (ii) $a_{ij} \in \left\{-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, dla $D = \mathbb{D}_4$,
- (iii) $a_{ij} \in \left\{-4, -3, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\right\}$, dla $D = \mathbb{E}_6$ oraz $D = \mathbb{E}_7$,
- (iv) $a_{ij} \in \left\{-6, -5, -4, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, -1, -\frac{5}{6}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4, 5, 6\right\}$, dla $D = \mathbb{E}_8$.

Następujący wniosek z przeprowadzonych obliczeń algorytmicznych jest jednym z ważniejszych elementów w dowodzie twierdzenia 4.1.2 o spektralnej klasyfikacji Coxetera spójnych dodatnich prostych grafów oznakowanych o co najwyżej dziewięciu wierzchołkach. Potwierdza on hipotezę sformułowaną w [71, Section 4] o $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -cykliczności zbioru \mathbf{Mor}_D^F (3.1.3), przedstawioną we wniosku jako równość (3.2.19).

WNIOSEK 3.2.18. *Niech D będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina \mathbb{A}_n oraz \mathbb{D}_n o $n \leq 9$ wierzchołkach oraz niech $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ będzie grupą izotropii diagramu D .*

Dla dowolnego wielomianu $F(t) \in \widehat{\mathbf{CPol}}_D$, skończony podzbiór $\mathbf{Mor}_D^F \subseteq \mathbf{Mor}_D$ składający się ze wszystkich morsyfikacji \mathbf{Mor}_D typu Coxetera $F(t) = \text{cox}_A(t)$ jest równy $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie jednej z morsyfikacji $M_F \in \mathbf{Mor}_D^F$. Innymi słowy, istnieje morsyfikacja $M_F \in \mathbf{Mor}_D^F$ taka, że

$$(3.2.19) \quad \mathbf{Mor}_D^F = M_F * \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D.$$

Idea dowodu. Wniosek udowodnimy korzystając z następującego algorytmu dla jednorodnych diagramów Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n\}$ oraz stosując obliczenia komputerowe.

KROK 1°: Obliczyć zbiór morsyfikacji \mathbf{Mor}_D (algorytm 3.2.11).

KROK 2°: Obliczyć grupę izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ (algorytm 3.2.13).

KROK 3°: Podzielić zbiór morsyfikacji \mathbf{Mor}_D na podzbiory $\mathbf{Mor}_D^F \subseteq \mathbf{Mor}_D$ składające się ze wszystkich morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_D$ typu Coxetera $F(t) = \text{cox}_A(t)$.

KROK 4°: Ustalić pewną macierz $M_F := A \in \mathbf{Mor}_D^F$ oraz obliczyć $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbitę morsyfikacji $M_F * \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, dla każdego podzbioru \mathbf{Mor}_D^F .

KROK 5°: Sprawdzić, że $|M_F * \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D| = |\mathbf{Mor}_D^F|$.

3.3. Wnioski, komentarze i problemy otwarte

(3.3.1) Z uzyskanych wyników obliczeń w tym rozdziale oraz z twierdzenia 3.2.16 (a)-(a') wynika, że jeżeli $A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mor}_D$ jest całkowitą morsyfikacją diagramu $D = \mathbb{D}_n$ o $n \geq 2$ wierzchołkach, to jej wyznacznik $\det A$ jest dodatnią liczbą całkowitą nie większą od 4, gdy $n \leq 9$, natomiast liczby $|a_{ij}|$ są mniejsze lub równe 3.

Wydaje się, że zachodzą nierówności $\det A \leq 2$ oraz $|a_{ij}| \leq 2$, dla dowolnej całkowitej morsyfikacji $A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mor}_D$ diagramu $D = \mathbb{D}_n$ o $n > 9$ wierzchołkach. Niestety, tych wyników nie potrafimy udowodnić, dla $n > 9$; potrafimy jedynie otrzymane wyniki zweryfikować za pomocą przedstawionych w tym rozdziale algorytmów oraz żmudnych obliczeń komputerowych.

(3.3.2) Sformułowaną w [71, Section 4] hipotezę o $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -cykliczności zbioru \mathbf{Mor}_D^F (zobacz równość (3.2.19)) dla dowolnego diagramu Dynkina D o $n \leq 9$ wierzchołkach potwierdza wniosek 3.2.18 uzyskany na drodze żmudnych obliczeń komputerowych. Hipoteza ta w wersji sformułowanej we wniosku 3.2.18 została potwierdzona w artykułach [34, Corollary 7.8] oraz [38, Corollary 2.4], dla $n \leq 10$, również na drodze obliczeń komputerowych. Choć wydaje się ona prawdziwa, dla dowolnego $n \geq 11$, to jednak nie potrafimy jej udowodnić teoretycznie nawet dla $n \leq 9$.

(3.3.3) W najnowszych artykułach [48, 49, 50] podano alternatywne metody obliczania grup izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ dowolnego diagramu Dynkina D nie wyłączając oznakowanych Cox-regularnych grafów Dynkina $\mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{F}_4$ oraz z \mathcal{G}_2 z pętłami przerywanymi (tzn. oznakowanymi znakiem +).

(3.3.4) Z własności funkcji redukującej $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_{D,1}$ (3.0.3) opisanych w twierdzeniu 3.2.9 wynika, że każdy z wielomianów Coxetera $\mathrm{cox}_\Delta(t)$ pewnego bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$ jest wielomianem Coxetera $\mathrm{cox}_A(t)$ pewnej morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_{D,1}$ o wyznaczniku $\det A = 1$.

Wyniki obliczeń zawarte w tabelach 3.4.1, 3.4.2 oraz 3.4.3 wraz z twierdzeniem 4.1.2 o klasyfikacji Coxetera prostych grafów oznakowanych w \mathcal{UBigr}_n^+ pokazują, że dla $n := |D_0| \leq 9$, dowolny wielomian Coxetera $\mathrm{cox}_A(t)$ pewnej morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_{D,1}$ jest postaci $\mathrm{cox}_A(t) = \mathrm{cox}_\Delta(t)$, gdzie $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$. Niestety, nie jesteśmy w stanie udowodnić, że fakt ten pozostaje prawdziwy dla dowolnego diagramu Dynkina D o $n \geq 10$ wierzchołkach.

3.4. Tabele z wynikami obliczeń

Tabela 3.4.1. Wielomiany Coxetera $\text{cox}_A(t)$ macierzowych morsyfikacji $A \in \text{Mor}_D$, dla jednorodnego diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$, $2 \leq n \leq 9$.

D	$\text{cox}_A(t)$	$\det A$	\mathbf{c}_A	$\#\widehat{\text{Mor}}_D^F$	$\#\widetilde{\text{Mor}}_D^F$	$\#\widehat{\text{Mor}}_D$
						$\#\widetilde{\text{Mor}}_D$
\mathbb{A}_2	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^2$	$\frac{3}{4}$	2	1	1	5
	$F_D^{(1)}(t) = t^2 + t + 1$	1	3	2	0	1
	$F_D^{(2)}(t) = t^2 - t + 1$	3	6	2	0	< 1 sek.
\mathbb{A}_3	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^3$	$\frac{1}{2}$	2	1	1	15
	$F_D^{(1)}(t) = t^3 + t^2 + t + 1$	1	4	6	0	1
	$F_D^{(2)}(t) = t^3 + 1$	2	6	8	0	< 1 sek.
\mathbb{A}_4	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^4$	$\frac{5}{16}$	2	1	1	69
	$F_D^{(1)}(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1	5	24	0	21
	$F_D^{(2)}(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	5	10	24	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^4 + t^3 + t + 1$	$\frac{5}{4}$	6	20	20	< 1 sek.
\mathbb{A}_5	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^5$	$\frac{3}{16}$	2	1	1	345
	$F_D^{(1)}(t) = t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1	6	120	0	41
	$F_D^{(2)}(t) = t^5 + 1$	3	10	144	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^5 - t^4 + t^3 + t^2 - t + 1$	3	6	40	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^5 + 2t^4 + t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{3}{4}$	6	40	40	1 sek.
\mathbb{A}_6	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^6$	$\frac{7}{64}$	2	1	1	2295
	$F_D^{(1)}(t) = t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1	7	720	0	855
	$F_D^{(2)}(t) = t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	7	14	720	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^6 + t^5 + t + 1$	$\frac{7}{4}$	10	504	504	
	$F_D^{(4)}(t) = t^6 + 2t^3 + 1$	$\frac{7}{4}$	6	280	280	
	$F_D^{(5)}(t) = t^6 + 3t^5 + 3t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{7}{16}$	6	70	70	14 sek.
\mathbb{A}_7	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^7$	$\frac{1}{16}$	2	1	1	16065
	$F_D^{(1)}(t) = t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1	8	5040	0	2577
	$F_D^{(2)}(t) = t^7 + 1$	4	14	5760	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1$	4	30	2688	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^7 + t^6 + 2t^4 + 2t^3 + t + 1$	1	6	1120	1120	
	$F_D^{(5)}(t) = t^7 + 2t^6 + t^5 + t^2 + 2t + 1$	1	10	1344	1344	3 min.
	$F_D^{(6)}(t) = t^7 + 4t^6 + 6t^5 + 5t^4 + 5t^3 + 6t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{4}$	6	112	112	25 sek.
\mathbb{A}_8	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^8$	$\frac{9}{256}$	2	1	1	139545
	$F_D^{(1)}(t) = t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1	9	40320	0	58905
	$F_D^{(2)}(t) = t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	9	18	40320	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^8 + t^5 + t^3 + 1$	$\frac{9}{4}$	30	24192	24192	
	$F_D^{(4)}(t) = t^8 + t^7 + t + 1$	$\frac{9}{4}$	14	25920	25920	
	$F_D^{(5)}(t) = t^8 - t^7 + t^6 + 2t^5 - 2t^4 + 2t^3 + t^2 - t + 1$	$\frac{9}{4}$	6	2240	2240	
	$F_D^{(6)}(t) = t^8 + 2t^7 + t^6 + 2t^5 + 4t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{9}{16}$	6	3360	3360	
	$F_D^{(7)}(t) = t^8 + 3t^7 + 3t^6 + t^5 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{9}{16}$	10	3024	3024	47 min.
	$F_D^{(8)}(t) = t^8 + 5t^7 + 10t^6 + 11t^5 + 10t^4 + 11t^3 + 10t^2 + 5t + 1$	$\frac{9}{64}$	6	168	168	17 sek.
\mathbb{A}_9	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^9$	$\frac{5}{256}$	2	1	1	1255905
	$F_D^{(1)}(t) = t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1	10	362880	0	244449
	$F_D^{(2)}(t) = t^9 + 1$	5	18	403200	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^9 - t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	5	10	72576	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^9 - t^8 + t^7 + t^2 - t + 1$	5	42	172800	0	
	$F_D^{(5)}(t) = t^9 + t^8 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t + 1$	$\frac{5}{4}$	30	120960	120960	
	$F_D^{(6)}(t) = t^9 + 2t^8 + t^7 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{5}{4}$	14	86400	86400	
	$F_D^{(7)}(t) = t^9 + 3t^6 + 3t^3 + 1$	$\frac{5}{4}$	6	22400	22400	
	$F_D^{(8)}(t) = t^9 + 3t^8 + 3t^7 + 3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{5}{16}$	6	8400	8400	33 godz.
	$F_D^{(9)}(t) = t^9 + 4t^8 + 6t^7 + 4t^6 + t^5 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$	$\frac{5}{16}$	10	6048	6048	47 min.
	$F_D^{(10)}(t) = t^9 + 6t^8 + 15t^7 + 21t^6 + 21t^5 + 21t^4 + 21t^3 + 15t^2 + 6t + 1$	$\frac{5}{64}$	6	240	240	44 sek.

Tabela 3.4.2. Wielomiany Coxetera $\text{cox}_A(t)$ macierzowych morsyfikacji $A \in \text{Mor}_D$, dla jednorodnego diagramu Dynkina $D = \mathbb{D}_n$, $4 \leq n \leq 9$.

D	$\text{cox}_A(t)$	$\det A$	c_A	$\# \widehat{\text{Mor}}_D^F$	$\# \widetilde{\text{Mor}}_D^F$	$\# \widehat{\text{Mor}}_D$
						$\# \widetilde{\text{Mor}}_D$
\mathbb{D}_4	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^4$	$\frac{1}{4}$	2	1	1	385
	$F_D^{(1)}(t) = t^4 + t^3 + t + 1$	1	6	64	32	85
	$F_D^{(2)}(t) = t^4 + 2t^2 + 1$	1	4	12	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^4 + 1$	2	8	144	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^4 - t^2 + 1$	4	12	96	0	
	$F_D^{(5)}(t) = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	4	6	16	0	
	$F_D^{(6)}(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$	$\frac{4}{9}$	3	16	16	
	$F_D^{(7)}(t) = t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{2}$	4	36	36	< 1 sek.
\mathbb{D}_5	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^5$	$\frac{1}{8}$	2	1	1	945
	$F_D^{(1)}(t) = t^5 + t^4 + t + 1$	1	8	240	0	161
	$F_D^{(2)}(t) = t^5 + t^3 + t^2 + 1$	1	12	160	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^5 + 1$	2	10	384	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^5 + t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	4	60	60	
	$F_D^{(5)}(t) = t^5 + 2t^4 + t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{2}$	6	80	80	
	$F_D^{(6)}(t) = t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{4}$	4	20	20	6 sek.
\mathbb{D}_6	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^6$	$\frac{1}{16}$	2	1	1	10395
	$F_D^{(1)}(t) = t^6 + t^5 + t + 1$	1	10	2304	0	2171
	$F_D^{(2)}(t) = t^6 + t^4 + t^2 + 1$	1	8	1440	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^6 + 2t^3 + 1$	1	6	640	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^6 + 1$	2	12	3840	0	
	$F_D^{(5)}(t) = t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1$	$\frac{1}{2}$	4	120	120	
	$F_D^{(6)}(t) = t^6 + t^5 + t^4 + 2t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	12	960	960	
	$F_D^{(7)}(t) = t^6 + 2t^5 + t^4 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{2}$	8	720	720	
	$F_D^{(8)}(t) = t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	4	180	180	
	$F_D^{(9)}(t) = t^6 + 3t^5 + 3t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{4}$	6	160	160	1 min.
	$F_D^{(10)}(t) = t^6 + 4t^5 + 7t^4 + 8t^3 + 7t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{8}$	4	30	30	26 sek.
\mathbb{D}_7	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^7$	$\frac{1}{32}$	2	1	1	135135
	$F_D^{(1)}(t) = t^7 + t^6 + t + 1$	1	12	26880	0	32607
	$F_D^{(2)}(t) = t^7 + t^5 + t^2 + 1$	1	20	16128	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^7 + t^4 + t^3 + 1$	1	24	13440	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^7 + 1$	2	14	46080	0	
	$F_D^{(5)}(t) = t^7 + 2t^5 + t^4 + t^3 + 2t^2 + 1$	$\frac{1}{2}$	12	3360	3360	
	$F_D^{(6)}(t) = t^7 + t^6 + 2t^4 + 2t^3 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	6	4480	4480	
	$F_D^{(7)}(t) = t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	8	10080	10080	
	$F_D^{(8)}(t) = t^7 + t^6 + 3t^5 + 3t^4 + 3t^3 + 3t^2 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	4	840	840	
	$F_D^{(9)}(t) = t^7 + 2t^6 + t^5 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{2}$	10	8064	8064	
	$F_D^{(10)}(t) = t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	12	3360	3360	
	$F_D^{(11)}(t) = t^7 + 3t^6 + 3t^5 + t^4 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{4}$	8	1680	1680	
	$F_D^{(12)}(t) = t^7 + 3t^6 + 5t^5 + 7t^4 + 7t^3 + 5t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{8}$	4	420	420	
	$F_D^{(13)}(t) = t^7 + 4t^6 + 6t^5 + 5t^4 + 5t^3 + 6t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{8}$	6	280	280	25 min.
	$F_D^{(14)}(t) = t^7 + 5t^6 + 11t^5 + 15t^4 + 15t^3 + 11t^2 + 5t + 1$	$\frac{1}{16}$	4	42	42	42 sek.

D	cox _A (t)	det A	c _A	# $\widehat{\text{Mor}}_D^F$	# $\widetilde{\text{Mor}}_D^F$	# $\widehat{\text{Mor}}_D$	# $\widetilde{\text{Mor}}_D$	czas obliczeń
						# $\widehat{\text{Mor}}_D$	# $\widetilde{\text{Mor}}_D$	
D ₈	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^8$	$\frac{1}{64}$	2	1	1	2027025		
	$F_D^{(1)}(t) = t^8 + t^7 + t + 1$	1	14	368640	0	545553		
	$F_D^{(2)}(t) = t^8 + t^6 + t^2 + 1$	1	12	215040	0			
	$F_D^{(3)}(t) = t^8 + t^5 + t^3 + 1$	1	30	172032	0			
	$F_D^{(4)}(t) = t^8 + 2t^4 + 1$	1	8	80640	0			
	$F_D^{(5)}(t) = t^8 + 1$	2	16	645120	0			
	$F_D^{(6)}(t) = t^8 + t^6 + 2t^5 + 2t^3 + t^2 + 1$	$\frac{1}{2}$	12	35840	35840			
	$F_D^{(7)}(t) = t^8 + t^7 + t^5 + 2t^4 + t^3 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	24	107520	107520			
	$F_D^{(8)}(t) = t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	20	129024	129024			
	$F_D^{(9)}(t) = t^8 + t^7 + 2t^6 + 3t^5 + 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	12	26880	26880			
	$F_D^{(10)}(t) = t^8 + 2t^6 + 2t^4 + 2t^2 + 1$	$\frac{1}{2}$	8	40320	40320			
	$F_D^{(11)}(t) = t^8 + 2t^7 + t^6 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{2}$	12	107520	107520			
	$F_D^{(12)}(t) = t^8 + 2t^7 + t^6 + 2t^5 + 4t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	6	17920	17920			
	$F_D^{(13)}(t) = t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	8	40320	40320			
	$F_D^{(14)}(t) = t^8 + 2t^7 + 4t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 6t^3 + 4t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{8}$	4	3360	3360			
	$F_D^{(15)}(t) = t^8 + 3t^7 + 3t^6 + t^5 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{4}$	10	21504	21504			
	$F_D^{(16)}(t) = t^8 + 3t^7 + 4t^6 + 5t^5 + 6t^4 + 5t^3 + 4t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{8}$	12	8960	8960			
	$F_D^{(17)}(t) = t^8 + 4t^6 + 6t^4 + 4t^2 + 1$	$\frac{1}{4}$	4	1680	1680			
	$F_D^{(18)}(t) = t^8 + 4t^7 + 6t^6 + 4t^5 + 2t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{8}$	8	3360	3360			
	$F_D^{(19)}(t) = t^8 + 4t^7 + 8t^6 + 12t^5 + 14t^4 + 12t^3 + 8t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{16}$	4	840	840	11 godz.		
	$F_D^{(20)}(t) = t^8 + 5t^7 + 10t^6 + 11t^5 + 10t^4 + 11t^3 + 10t^2 + 5t + 1$	$\frac{1}{16}$	6	448	448	6 min.		
$F_D^{(21)}(t) = t^8 + 6t^7 + 16t^6 + 26t^5 + 30t^4 + 26t^3 + 16t^2 + 6t + 1$	$\frac{1}{32}$	4	56	56	16 sek.			
D ₉	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^9$	$\frac{1}{128}$	2	1	1	34459425		
	$F_D^{(1)}(t) = t^9 + t^8 + t + 1$	1	16	5806080	0	10110753		
	$F_D^{(2)}(t) = t^9 + t^7 + t^2 + 1$	1	28	3317760	0			
	$F_D^{(3)}(t) = t^9 + t^6 + t^3 + 1$	1	12	2580480	0			
	$F_D^{(4)}(t) = t^9 + t^5 + t^4 + 1$	1	40	2322432	0			
	$F_D^{(5)}(t) = t^9 + 1$	2	18	10321920	0			
	$F_D^{(6)}(t) = t^9 + 3t^6 + 3t^3 + 1$	$\frac{1}{2}$	6	143360	143360			
	$F_D^{(7)}(t) = t^9 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1$	$\frac{1}{2}$	24	967680	967680			
	$F_D^{(8)}(t) = t^9 + 2t^7 + t^5 + t^4 + 2t^2 + 1$	$\frac{1}{2}$	20	580608	580608			
	$F_D^{(9)}(t) = t^9 + 3t^7 + t^6 + 3t^5 + 3t^4 + t^3 + 3t^2 + 1$	$\frac{1}{4}$	12	80640	80640			
	$F_D^{(10)}(t) = t^9 + t^8 + 2t^5 + 2t^4 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	8	725760	725760			
	$F_D^{(11)}(t) = t^9 + t^8 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	30	1548288	1548288			
	$F_D^{(12)}(t) = t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{2}$	12	1935360	1935360			
	$F_D^{(13)}(t) = t^9 + t^8 + t^7 + 3t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 3t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	12	322560	322560			
	$F_D^{(14)}(t) = t^9 + t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	8	362880	362880			
	$F_D^{(15)}(t) = t^9 + t^8 + 4t^7 + 4t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 4t^3 + 4t^2 + t + 1$	$\frac{1}{8}$	4	15120	15120			
	$F_D^{(16)}(t) = t^9 + 2t^8 + t^7 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{2}$	14	1658880	1658880			
	$F_D^{(17)}(t) = t^9 + 2t^8 + t^7 + t^6 + 3t^5 + 3t^4 + t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	24	483840	483840			
	$F_D^{(18)}(t) = t^9 + 2t^8 + 2t^7 + 2t^6 + t^5 + t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	20	580608	580608			
	$F_D^{(19)}(t) = t^9 + 2t^8 + 3t^7 + 5t^6 + 5t^5 + 5t^4 + 5t^3 + 3t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{8}$	12	120960	120960			
	$F_D^{(20)}(t) = t^9 + 3t^8 + 3t^7 + t^6 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{4}$	12	322560	322560			
	$F_D^{(21)}(t) = t^9 + 3t^8 + 3t^7 + 3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{8}$	6	53760	53760			
	$F_D^{(22)}(t) = t^9 + 3t^8 + 4t^7 + 4t^6 + 4t^5 + 4t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{8}$	8	120960	120960			
	$F_D^{(23)}(t) = t^9 + 3t^8 + 6t^7 + 10t^6 + 12t^5 + 12t^4 + 10t^3 + 6t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{16}$	4	10080	10080			
	$F_D^{(24)}(t) = t^9 + 4t^8 + 6t^7 + 4t^6 + t^5 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{8}$	10	48384	48384			
	$F_D^{(25)}(t) = t^9 + 4t^8 + 7t^7 + 9t^6 + 11t^5 + 11t^4 + 9t^3 + 7t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{16}$	12	20160	20160			
	$F_D^{(26)}(t) = t^9 + 5t^8 + 10t^7 + 10t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1$	$\frac{1}{16}$	8	6048	6048	35 dni		
	$F_D^{(27)}(t) = t^9 + 5t^8 + 12t^7 + 20t^6 + 26t^5 + 26t^4 + 20t^3 + 12t^2 + 5t + 1$	$\frac{1}{32}$	4	1512	1512	16 godz.		
	$F_D^{(28)}(t) = t^9 + 6t^8 + 15t^7 + 21t^6 + 21t^5 + 21t^4 + 21t^3 + 15t^2 + 6t + 1$	$\frac{1}{32}$	6	672	672	28 min.		
$F_D^{(29)}(t) = t^9 + 7t^8 + 22t^7 + 42t^6 + 56t^5 + 56t^4 + 42t^3 + 22t^2 + 7t + 1$	$\frac{1}{64}$	4	72	72	38 sek.			

Tabela 3.4.3. Wielomiany Coxetera $\text{cox}_A(t)$ macierzowych morsyfikacji $A \in \text{Mor}_D$, dla jednorodnego diagramu Dynkina $D = \mathbb{E}_n$, $6 \leq n \leq 8$.

D	$\text{cox}_A(t)$	$\det A$	c_A	$\# \widehat{\text{Mor}}_D^F$	$\# \widetilde{\text{Mor}}_D^F$	$\# \widehat{\text{Mor}}_D$
						$\# \widetilde{\text{Mor}}_D$
\mathbb{E}_6	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^6$	$\frac{3}{64}$	2	1	1	29645
	$F_D^{(1)}(t) = t^6 + t^5 - t^3 + t + 1$	1	12	4320	0	8685
	$F_D^{(2)}(t) = t^6 + t^3 + 1$	1	9	5760	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^6 - t^5 + 2t^4 - t^3 + 2t^2 - t + 1$	1	6	720	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^6 - t^3 + 1$	3	18	5760	0	
	$F_D^{(5)}(t) = t^6 - t^5 + t^3 - t + 1$	3	12	4320	0	
	$F_D^{(6)}(t) = t^6 - 3t^5 + 6t^4 - 7t^3 + 6t^2 - 3t + 1$	3	6	80	0	
	$F_D^{(7)}(t) = t^6 + 2t^3 + 1$	$\frac{3}{4}$	6	480	480	
	$F_D^{(8)}(t) = t^6 + t^5 + t + 1$	$\frac{3}{4}$	10	5184	5184	
	$F_D^{(9)}(t) = t^6 + t^5 + 2t^4 + t^3 + 2t^2 + t + 1$	$\frac{1}{3}$	6	720	720	
	$F_D^{(10)}(t) = t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	6	1440	1440	
	$F_D^{(11)}(t) = t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$	$\frac{3}{16}$	4	540	540	
	$F_D^{(12)}(t) = t^6 + 3t^5 + 3t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{3}{16}$	6	240	240	32 min.
	$F_D^{(13)}(t) = t^6 + 3t^5 + 6t^4 + 7t^3 + 6t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{9}$	3	80	80	44 sek.
\mathbb{E}_7	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^7$	$\frac{1}{64}$	2	1	1	765765
	$F_D^{(1)}(t) = t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1$	1	18	161280	0	177157
	$F_D^{(2)}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1$	1	30	96768	0	
	$F_D^{(3)}(t) = t^7 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 + 1$	1	12	120960	0	
	$F_D^{(4)}(t) = t^7 - 2t^6 + 3t^5 - t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	1	6	2240	0	
	$F_D^{(5)}(t) = t^7 + 1$	1	14	207360	0	
	$F_D^{(6)}(t) = t^7 + t^6 + 2t^4 + 2t^3 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	6	13440	13440	
	$F_D^{(7)}(t) = t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	8	90720	90720	
	$F_D^{(8)}(t) = t^7 + 2t^6 + t^5 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	10	48384	48384	
	$F_D^{(9)}(t) = t^7 + 2t^6 + 3t^5 + 3t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{9}$	6	20160	20160	42 godz.
	$F_D^{(10)}(t) = t^7 + 3t^6 + 5t^5 + 7t^4 + 7t^3 + 5t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{16}$	4	3780	3780	52 min.
	$F_D^{(11)}(t) = t^7 + 4t^6 + 6t^5 + 5t^4 + 5t^3 + 6t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{16}$	6	672	672	53 sek.
\mathbb{E}_8	$F_D^{(0)}(t) = (t+1)^8$	$\frac{1}{256}$	2			215656441
	$F_D^{(1)}(t) = t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$	1	30			86434425
	$F_D^{(2)}(t) = t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1$	1	15			
	$F_D^{(3)}(t) = t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	1	18			
	$F_D^{(4)}(t) = t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1$	1	20			
	$F_D^{(5)}(t) = t^8 - t^4 + 1$	1	24			
	$F_D^{(6)}(t) = t^8 - 2t^6 + 3t^4 - 2t^2 + 1$	1	12			
	$F_D^{(7)}(t) = t^8 - 2t^7 + 2t^6 - t^4 + 2t^2 - 2t + 1$	1	12			
	$F_D^{(8)}(t) = t^8 - 2t^7 + 3t^6 - 4t^5 + 5t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	1	10			
	$F_D^{(9)}(t) = t^8 - 4t^7 + 10t^6 - 16t^5 + 19t^4 - 16t^3 + 10t^2 - 4t + 1$	1	6			
	$F_D^{(10)}(t) = t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	$\frac{1}{9}$	9			
	$F_D^{(11)}(t) = t^8 - t^7 + t^6 + 2t^5 - 2t^4 + 2t^3 + t^2 - t + 1$	$\frac{1}{4}$	6			
	$F_D^{(12)}(t) = t^8 + t^7 - t^6 + 2t^4 - t^2 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	12			
	$F_D^{(13)}(t) = t^8 + t^7 + 2t^6 + 3t^5 + 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + t + 1$	$\frac{1}{16}$	12			
	$F_D^{(14)}(t) = t^8 + t^7 + t + 1$	$\frac{1}{4}$	14			
	$F_D^{(15)}(t) = t^8 + t^6 + t^2 + 1$	$\frac{1}{4}$	12			
	$F_D^{(16)}(t) = t^8 + t^5 + t^3 + 1$	$\frac{1}{4}$	30			
	$F_D^{(17)}(t) = t^8 + 2t^7 + 2t^6 + 2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{16}$	8			
	$F_D^{(18)}(t) = t^8 + 2t^6 + 3t^4 + 2t^2 + 1$	$\frac{1}{9}$	6			
	$F_D^{(19)}(t) = t^8 + 2t^4 + 1$	$\frac{1}{4}$	8			
	$F_D^{(20)}(t) = t^8 + 2t^7 + t^6 - t^5 - 2t^4 - t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{4}$	18			

D	$\text{cox}_A(t)$	$\det A$	\mathbf{c}_A	$\# \widehat{\text{Mor}}_D^F$	$\# \widetilde{\text{Mor}}_D^F$	$\# \widehat{\text{Mor}}_D$
						$\# \widetilde{\text{Mor}}_D$
\mathbb{E}_8	$F_D^{(21)}(t) = t^8 + 2t^7 + t^6 + 2t^5 + 4t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{16}$	6			
	$F_D^{(22)}(t) = t^8 + 2t^7 + 2t^6 - t^4 + 2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{9}$	12			
	$F_D^{(23)}(t) = t^8 + 2t^7 + 3t^6 + 4t^5 + 5t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{25}$	5			
	$F_D^{(24)}(t) = t^8 + 3t^7 + 3t^6 + t^5 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{16}$	10			
	$F_D^{(25)}(t) = t^8 + 3t^7 + 5t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 6t^3 + 5t^2 + 3t + 1$	$\frac{1}{36}$	6			
	$F_D^{(26)}(t) = t^8 + 4t^6 + 6t^4 + 4t^2 + 1$	$\frac{1}{16}$	4			
	$F_D^{(27)}(t) = t^8 + 4t^7 + 8t^6 + 12t^5 + 14t^4 + 12t^3 + 8t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{64}$	4			
	$F_D^{(28)}(t) = t^8 + 4t^7 + 10t^6 + 16t^5 + 19t^4 + 16t^3 + 10t^2 + 4t + 1$	$\frac{1}{81}$	3			
	$F_D^{(29)}(t) = t^8 + 5t^7 + 10t^6 + 11t^5 + 10t^4 + 11t^3 + 10t^2 + 5t + 1$	$\frac{1}{64}$	6			

4. Klasyfikacja spektralna Coxetera dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach

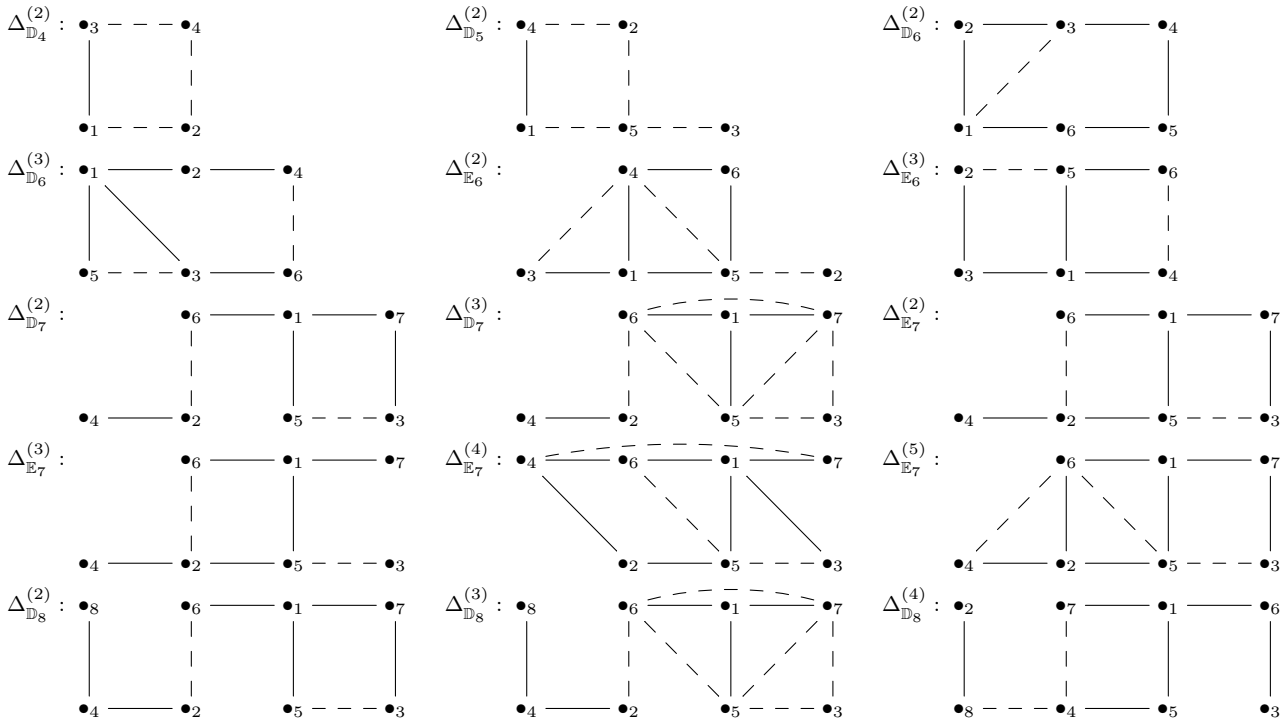
Jednym z celów tego rozdziału jest podanie pełnej klasyfikacji spójnych dodatnich grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$. Klasyfikacja ta zawarta jest w twierdzeniu 4.1.2 orzekającym m.in. że dowolny spójny dodatni graf oznakowany Δ o $2 \leq n \leq 9$ wierzchołkach jest dwuliniowo \mathbb{Z} -kongruentny z jednym z jednorodnych diagramów Dynkina

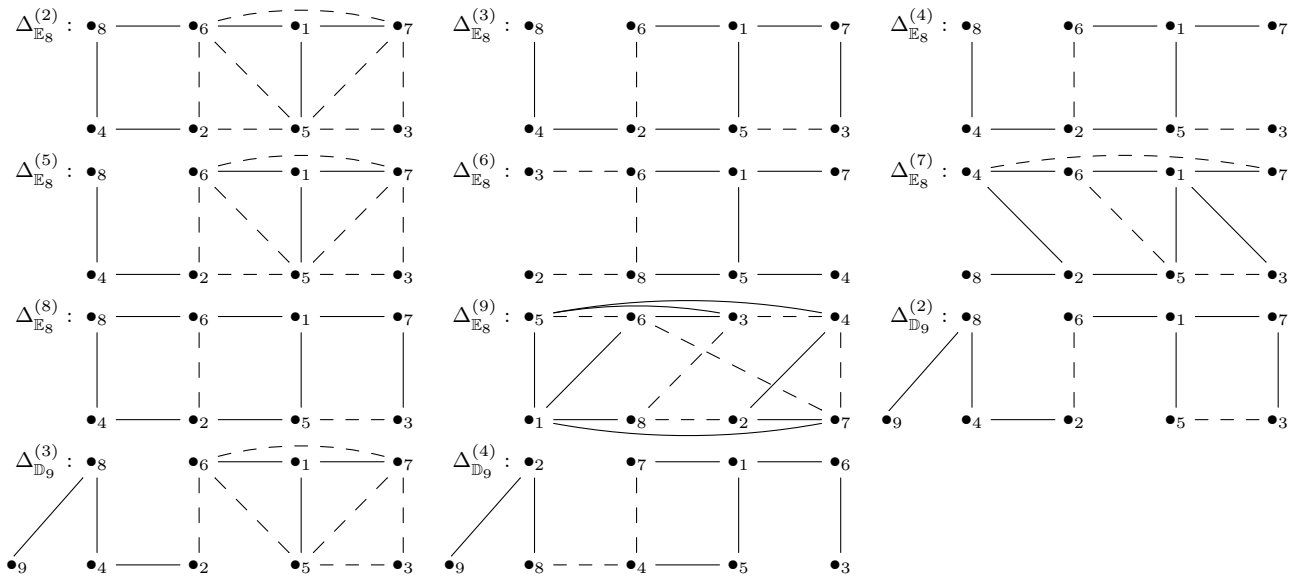
$$\Delta_{\mathbb{A}_n}^{(1)} := \mathbb{A}_n, n \geq 1, \Delta_{\mathbb{D}_n}^{(1)} := \mathbb{D}_n, n \geq 4, \Delta_{\mathbb{E}_6}^{(1)} := \mathbb{E}_6, \Delta_{\mathbb{E}_7}^{(1)} := \mathbb{E}_7, \Delta_{\mathbb{E}_8}^{(1)} := \mathbb{E}_8,$$

lub z jednym z 26-ciu grafów oznakowanych postaci $\Delta_D^{(2)}, \dots, \Delta_D^{(m_D)}$ przedstawionych w tabeli 4.1.1, gdzie

$$m_D = \begin{cases} 1, & \text{gdy } D \in \{\mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_9\}, \\ 2, & \text{gdy } D \in \{\mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5\}, \\ 3, & \text{gdy } D \in \{\mathbb{D}_6, \mathbb{D}_7\}, \\ 4, & \text{gdy } D \in \{\mathbb{D}_8, \mathbb{D}_9\}, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad m_D = \begin{cases} 3, & \text{gdy } D = \mathbb{E}_6, \\ 5, & \text{gdy } D = \mathbb{E}_7, \\ 9, & \text{gdy } D = \mathbb{E}_8. \end{cases}$$

Tabela 4.1.1. Proste, dodatnie grafy oznakowane $\Delta_D^{(j)} \in \mathcal{UBigr}_D^+$ o $n \leq 9$ wierzchołkach, gdzie $\text{cox}_{\Delta_D^{(j)}}(t) = F_D^{(j)}(t)$, zobacz tabela 4.1.3.





TWIERDZENIE 4.1.2. Załóżmy, że D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n = |D_0| \geq 2$ wierzchołkach. Oznaczmy symbolem

$$\mathcal{UBigr}_D^+ := \{\Delta \in \mathcal{UBigr}_n^+; \Delta \text{ jest spójny oraz } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} D\}$$

zbiór wszystkich dodatnich spójnych prostych grafów oznakowanych słabo \mathbb{Z} -kongruentnych z D o $n \leq 9$ wierzchołkach.

- Zbiór $\mathcal{CGpol}_\Delta^+ \subseteq \mathbb{Z}[t]$ wszystkich wielomianów Coxetera(-Gram) $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ składa się z wielomianów postaci $F_D^{(j)}(t)$ opisanych w tabeli 4.1.3.
- Każdy z prostych grafów oznakowanych $\Delta_D^{(j)}$ opisanych w tabeli 4.1.1 jest spójny, dodatni i należy do \mathcal{UBigr}_D^+ , gdzie D jest jego typem Dynkina, co oznacza istnienie słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta_D^{(j)} \sim_{\mathbb{Z}} D$. Ponadto $\text{cox}_{\Delta_D^{(j)}}(t)$ jest wielomianem $F_D^{(j)}(t)$ zdefiniowanym w tabeli 4.1.3.
- Jeżeli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ oraz $\text{cox}_\Delta(t) = F_D^{(1)}(t)$, to $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} D$.
- Jeżeli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ jest grafem oznakowanym takim, że $\text{cox}_\Delta(t) = F_D^{(j)}(t)$ oraz $j \geq 2$, to istnieje silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta_D^{(j)}$, gdzie $\Delta_D^{(j)}$ jest odpowiednim grafem oznakowanym opisany w tabeli 4.1.1.
- Jeżeli $2 \leq n \leq 9$ oraz $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n^+$, to Δ jest silnie \mathbb{Z} -kongruentny z jednym z grafów Dynkina lub z jednym z grafów $\Delta_D^{(j)}$ przedstawionych w tabeli 4.1.1.

Dowód. (a) Z wniosku 3.3.4 wiemy, że każdy z wielomianów Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ pewnego bigrafu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ jest wielomianem Coxetera $\text{cox}_A(t)$ morsyfikacji $A := A_\Delta \in \mathbf{Mor}_{D,1}$ o wyznaczniku $\det A = 1$.

Opis zbioru $\mathcal{CGpol}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}[t]$ wszystkich wielomianów Coxetera(-Gram) $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ otrzymamy w wyniku obliczeń komputerowych z wykorzystaniem następują-

cego algorytmu dla każdego z diagramów Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o $2 \leq n \leq 9$ wierzchołkach¹.

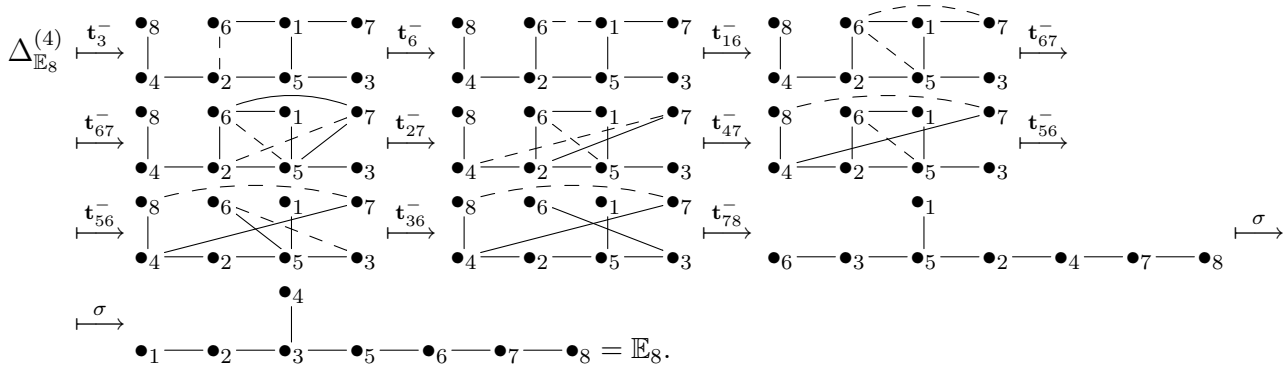
KROK 1°: Obliczyć zbiór macierzy morsyfikacji $\widehat{\mathbf{Mor}}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, wraz z ich wielomianami Coxetera oraz wyznacznikami (algorytm 3.2.11).

KROK 2°: Ze zbioru $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ wyodrębnić podzbiór $\mathbf{Mor}_{D,1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ wszystkich całkowitych morsyfikacji macierzowych o wyznaczniku 1 wraz z ich wielomianami Coxetera.

Obliczone w kroku 2° wielomiany Coxetera stanowią zbiór $\mathcal{CGpol}_\Delta^+ \subseteq \mathbb{Z}[t]$.

(b) Z postaci graficznej wynika, że każdy z grafów oznakowanych $\Delta_D^{(j)}$ jest spójny i prosty. Stosując algorytm inflacyjny $\Delta \mapsto D\Delta$ (zobacz dodatek A.1) kolejno do grafów $\Delta = \Delta_D^{(j)}$ z tabeli 4.1.1 znajdziemy macierz $B_D^{(j)} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta_D^{(j)} \sim_{\mathbb{Z}} D$. Ponieważ diagram Dynkina D jest bigrafem dodatnim (zobacz twierdzenie 2.1.18), więc na podstawie lematu 2.2.1(c), bigraf $\Delta_D^{(j)}$ jest również dodatni, co kończy dowód stwierdzenia (b). Pełna lista macierzy $B_D^{(j)} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiujących $\Delta_D^{(j)} \sim_{\mathbb{Z}} D$ znajduje się na stronie internetowej [26]².

W naszym dowodzie ograniczymy się do przedstawienia efektu działania poszczególnych kroków algorytmu inflacyjnego $\Delta \mapsto D\Delta$ jedynie dla $D = \mathbb{E}_8$ oraz $j = 4$, tzn. do bigrafu $\Delta = \Delta_{\mathbb{E}_8}^{(4)}$. W tym wypadku otrzymamy redukcję inflacyjną $\Delta_{\mathbb{E}_8}^{(4)} \mapsto D\Delta = \mathbb{E}_8$ w następujących krokach:



Stąd macierz $B := B_{\mathbb{E}_8}^{(4)} = E_3^- \cdot E_6^- \cdot E_{16}^- \cdot E_{67}^- \cdot E_{27}^- \cdot E_{47}^- \cdot E_{56}^- \cdot E_{36}^- \cdot E_{78}^- \cdot \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in$

$\text{Gl}(8, \mathbb{Z})$ definiuje słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta_{\mathbb{E}_8}^{(4)} \sim_{\mathbb{Z}}^B \mathbb{E}_8$, gdzie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_8$ jest permutacją.

Aby udowodnić stwierdzenia (c) oraz (d) ustalmy diagram Dynkina D oraz liczbę $1 \leq j \leq m_D$. Przyjmijmy $\Delta_D^{(1)} = D$ oraz $F_D^{(1)}(t) = \text{cox}_D(t)$. Załóżmy, że $2 \leq n \leq 9$ oraz $\Delta \in$

¹Zbiory macierzy morsyfikacji $\widehat{\mathbf{Mor}}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathbf{Mor}_D \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ dla diagramów Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7\}$ o $2 \leq n \leq 9$ znajdują się na stronie internetowej [25]. Zbiory $\widehat{\mathbf{Mor}}_{\mathbb{E}_8}$, $\mathbf{Mor}_{\mathbb{E}_8}$ zostały obliczone przez Marcina Gąsioraka (zobacz [34]).

²Inne przykłady podane są w dodatku A.1 oraz we współautorskich artykułach [8], [31].

\mathcal{UBigr}_n^+ jest dodatnimi spójnym prostym grafem oznakowanym takim, że $\text{cox}_\Delta(t) = F_D^{(j)}(t)$, tzn. $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^{F_D^{(j)}}$. Ponieważ bigraf $\Delta^{(j)}$ też należy do zbioru $\mathcal{UBigr}_D^{F_D^{(j)}}$ (na podstawie (b)), więc na podstawie twierdzenia 3.1.9 funkcja $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D^{F_D^{(j)}} \rightarrow \mathbf{Mor}_D^{F_D^{(j)}}$ (3.1.10) przeprowadza bigraf Δ na morsyfikację $A_\Delta = \phi_D(\Delta)$ oraz bigraf $\Delta' = \Delta_D^{(j)}$ na morsyfikację $A_{\Delta'} = \phi_D(\Delta')$. Z założenia $n \leq 9$ oraz z wniosków 3.2.6 (dla diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$) i 3.3.2 (dla diagramów Dynkina $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$) wynika, że morsyfikacje $A_\Delta, A_{\Delta'} \in \mathbf{Mor}_D^{F_D^{(j)}}$ leżą w tej samej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie działania $*$ na zbiorze $\mathbf{Mor}_D^{F_D^{(j)}}$. Stosując twierdzenie 3.1.9 do bigrafów Δ oraz $\Delta' = \Delta_D^{(j)}$ i wielomianu $F(t) = F_D^{(j)}$ stwierdzamy istnienie silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' = \Delta_D^{(j)}$, co kończy dowód stwierdzeń (c) oraz (d).

(e) Załóżmy, że $2 \leq n \leq 9$ oraz $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n^+$ jest spójny. Zgodnie z twierdzeniem 2.0.6 istnieje jednorodny diagram Dynkina D o n wierzchołkach (jednoznacznie wyznaczony przez Δ) oraz słaba \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$. Stąd wynika, że bigraf Δ należy do zbioru \mathcal{UBigr}_D^+ , a jego wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t)$ należy do zbioru \mathcal{CPol}_D^+ . Zatem istnieje indeks $j \leq m_D$ taki, że $\text{cox}_\Delta(t) = F_D^{(j)}$. Na podstawie (d), istnieje silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta_D^{(j)}$, co kończy dowód stwierdzenia (e), a tym samym kończy dowód twierdzenia. \square

Tabela 4.1.3. Wielomiany Coxetera $\text{cox}_\Delta(t) = F_D^{(j)}(t)$ oraz liczby Coxetera $\mathbf{c}_\Delta = \mathbf{c}_D^{(j)}$ dodatnich, spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ słabo \mathbb{Z} -kongruentnych z diagramem Dynkina D , gdzie $2 \leq n = |D_0| \leq 9$.

D	$\mathcal{CGpol}_D^+ = \{F_D^{(j)}\}_{j \leq m_D}$	$\mathcal{CN}_D^+ = \{\mathbf{c}_D^{(j)}\}_{j \leq m_D}$
\mathbb{A}_n	$F_D^{(1)}(t) = t^n + t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = n + 1$
\mathbb{D}_4	$F_D^{(1)}(t) = t^4 + t^3 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^4 + 2t^2 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 6$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 4$
\mathbb{D}_5	$F_D^{(1)}(t) = t^5 + t^4 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^5 + t^3 + t^2 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 8$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 12$
\mathbb{D}_6	$F_D^{(1)}(t) = t^6 + t^5 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^6 + t^4 + t^2 + 1$ $F_D^{(3)}(t) = t^6 + 2t^3 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 10$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 8$ $\mathbf{c}_D^{(3)} = 6$
\mathbb{D}_7	$F_D^{(1)}(t) = t^7 + t^6 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^7 + t^5 + t^2 + 1$ $F_D^{(3)}(t) = t^7 + t^4 + t^3 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 12$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 20$ $\mathbf{c}_D^{(3)} = 24$
\mathbb{D}_8	$F_D^{(1)}(t) = t^8 + t^7 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^8 + t^6 + t^2 + 1$ $F_D^{(3)}(t) = t^8 + t^5 + t^3 + 1$ $F_D^{(4)}(t) = t^8 + 2t^4 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 14$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 12$ $\mathbf{c}_D^{(3)} = 30$ $\mathbf{c}_D^{(4)} = 8$
\mathbb{D}_9	$F_D^{(1)}(t) = t^9 + t^8 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^9 + t^7 + t^2 + 1$ $F_D^{(3)}(t) = t^9 + t^6 + t^3 + 1$ $F_D^{(4)}(t) = t^9 + t^5 + t^4 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 16$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 28$ $\mathbf{c}_D^{(3)} = 12$ $\mathbf{c}_D^{(4)} = 40$
\mathbb{E}_6	$F_D^{(1)}(t) = t^6 + t^5 - t^3 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^6 + t^3 + 1$ $F_D^{(3)}(t) = t^6 - t^5 + 2t^4 - t^3 + 2t^2 - t + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 12$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 9$ $\mathbf{c}_D^{(3)} = 6$
\mathbb{E}_7	$F_D^{(1)}(t) = t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1$ $F_D^{(2)}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1$ $F_D^{(3)}(t) = t^7 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 + 1$ $F_D^{(4)}(t) = t^7 - 2t^6 + 3t^5 - t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ $F_D^{(5)}(t) = t^7 + 1$	$\mathbf{c}_D^{(1)} = 18$ $\mathbf{c}_D^{(2)} = 30$ $\mathbf{c}_D^{(3)} = 12$ $\mathbf{c}_D^{(4)} = 6$ $\mathbf{c}_D^{(5)} = 14$

D	$\mathcal{CGpol}_D^+ = \{F_D^{(j)}\}_{j \leq m_D}$	$\mathcal{CN}_D^+ = \{c_D^{(j)}\}_{j \leq m_D}$
\mathbb{E}_8	$F_D^{(1)}(t) = t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$	$c_D^{(1)} = 30$
	$F_D^{(2)}(t) = t^8 - t^7 + t^5 - t^4 + t^3 - t + 1$	$c_D^{(2)} = 15$
	$F_D^{(3)}(t) = t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	$c_D^{(3)} = 18$
	$F_D^{(4)}(t) = t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1$	$c_D^{(4)} = 20$
	$F_D^{(5)}(t) = t^8 - t^4 + 1$	$c_D^{(5)} = 24$
	$F_D^{(6)}(t) = t^8 - 2t^6 + 3t^4 - 2t^2 + 1$	$c_D^{(6)} = 12$
	$F_D^{(7)}(t) = t^8 - 2t^7 + 2t^6 - t^4 + 2t^2 - 2t + 1$	$c_D^{(7)} = 12$
	$F_D^{(8)}(t) = t^8 - 2t^7 + 3t^6 - 4t^5 + 5t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	$c_D^{(8)} = 10$
	$F_D^{(9)}(t) = t^8 - 4t^7 + 10t^6 - 16t^5 + 19t^4 - 16t^3 + 10t^2 - 4t + 1$	$c_D^{(9)} = 6$

gdzie $\mathcal{CN}_D^+ = \{c_D^{(j)}\}_{j \leq m_D}$ jest zbiorem wszystkich liczb Coxetera c_Δ dodatnich, spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D^+$ słabo \mathbb{Z} -kongruentnych z diagramem Dynkina D .

Analiza wyników obliczeń przedstawionych w tabeli 4.1.3 daje następujący ważny wniosek.

WNIOSEK 4.1.4. *Jeśli $2 \leq n \leq 9$ oraz D, D' jest parą jednorodnych grafów Dynkina, to $D = D'$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekrój $\mathcal{CGpol}_D^+ \cap \mathcal{CGpol}_{D'}^+$ jest niepusty.* \square

Wyniki obliczeń przedstawione w tabeli 4.1.3 pozwalają na udowodnienie twierdzenia będącego rozwiązaniem problemu A dla klasy \mathcal{UBigr}_n^+ wszystkich dodatnich, spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych o $n \leq 9$ wierzchołkach (algorytmiczna konstrukcja macierzy dającej \mathbb{Z} -równoważność grafów krawędziowo-dwudzielnych o równym spektrum została przedstawiona w rozdziale 6.3).

TWIERDZENIE 4.1.5. *Jeśli $2 \leq n \leq 9$ oraz $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n^+$ jest parą dodatnich, spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych, to następujące dwa warunki są równoważne:*

- (a) $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$,
- (b) $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. istnieje macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_\Delta * B = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$.

Dowód. Załóżmy, że $2 \leq n \leq 9$ oraz $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n^+$ są dodatnimi, spójnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi. Zgodnie z twierdzeniem 2.0.6 istnieją jednorodne diagramy Dynkina D oraz D' o n wierzchołkach (jednoznacznie wyznaczone przez Δ oraz Δ') oraz macierze $C_\Delta \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, $C_{\Delta'} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{D'}$ definiujące słabe \mathbb{Z} -kongruencje Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^{C_\Delta} D$ oraz $\Delta' \sim_{\mathbb{Z}}^{C_{\Delta'}} D'$, odpowiednio. Stąd wynika, że bigraf Δ należy do zbioru \mathcal{UBigr}_D^+ oraz bigraf Δ' należy do zbioru $\mathcal{UBigr}_{D'}^+$, a ich wielomiany Coxetera $F(t) := \mathrm{cox}_\Delta(t)$, $F'(t) := \mathrm{cox}_{\Delta'}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ należą odpowiednio do zbioru \mathcal{CGpol}_D^+ oraz $\mathcal{CGpol}_{D'}^+$.

(a) \Rightarrow (b) Załóżmy, że $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$, tzn. wielomiany $F(t) := \mathrm{cox}_\Delta(t)$ oraz $F'(t) := \mathrm{cox}_{\Delta'}(t)$ są równe. Stąd wynika, że wielomian $F(t) = F'(t)$ należy do przekroju $\mathcal{CGpol}_D^+ \cap \mathcal{CGpol}_{D'}^+$; a na podstawie wniosku 4.1.4 otrzymujemy równość $D = D'$. Zatem $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_D^+$ i na podstawie twierdzenia 3.1.9 funkcja $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D^F \rightarrow \mathbf{Mor}_D^F$ (3.1.10) przeprowadza bigraf Δ na morsyfikację $A_\Delta = \phi_D(\Delta) = \check{G}_\Delta * C_\Delta$ oraz bigraf Δ' na morsyfikację $A_{\Delta'} = \phi_D(\Delta') = \check{G}_\Delta * C_{\Delta'}$. Ponieważ $n \leq 9$, więc na podstawie wniosków 3.2.6 (dla diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$) i 3.3.2 (dla diagramów Dynkina $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$) morsyfikacje $A_\Delta, A_{\Delta'} \in \mathbf{Mor}_D^F$ leżą w tej samej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie działania $*$ na zbiorze \mathbf{Mor}_D^F . Stąd wynika istnienie macierzy $\bar{B} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ takiej, że $A_{\Delta'} = A_\Delta * \bar{B}$. Z tej równości łatwo wynika równość $\check{G}_{\Delta'} = \check{G}_\Delta * B$, gdzie $B := C_\Delta \cdot \bar{B} \cdot C_{\Delta'}^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$, zobacz twierdzenie 3.1.9. Udowodniliśmy więc, że macierz B definiuje silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$, co kończy dowód implikacji (a) \Rightarrow (b).

Ponieważ implikacja (b) \Rightarrow (a) wynika z lematu 2.3.1 (zobacz również [70, Lemma 2.1(e)] oraz [72, Proposition 4.9]), więc dowód został zakończony. \square

5. Serie morsyfikacji macierzowych dla diagramów Dynkina \mathbb{A}_n

Wyniki obliczeń zamieszczone w tabelach 3.4.1–3.4.3 pokazują, że zbiór \mathbf{Mor}_D całkowitych morsyfikacji diagramu Dynkina D jest duży i jego moc rośnie wykładniczo (3.2.12) wraz ze wzrostem liczby wierzchołków diagramu D . Do tej pory nie udało nam się obliczyć ani zbiorów $\mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ oraz $\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_n}$, ani wielomianów Coxetera $\text{cox}_A(t)$ morsyfikacji A należących do tych zbiorów, dla $n \geq 10$.

Jednym z celów tego rozdziału jest konstrukcja interesujących serii morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ o parami różnych wielomianach Coxetera $\text{cox}_A(t)$, dla diagramu $D = \mathbb{A}_n$.

Po przeanalizowaniu uzyskanych eksperymentalnie 1 107 294 całkowitych morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ diagramu Dynkina \mathbb{A}_n , dla $2 \leq n \leq 9$ wierzchołków, udało nam się skonstruować nieskończone serie morsyfikacji diagramu $D = \mathbb{A}_n$, dla $n \geq 1$. Typy Coxetera $\text{cox}_A(t)$ takich morsyfikacji wraz z odpowiadającymi im morsyfikacjami, wyznacznikami oraz liczbami Coxetera zostały przedstawione w twierdzeniach 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 (udowodnionych w pracy autora [24]) oraz 5.1.4.

TWIERDZENIE 5.1.1. *Jeśli $n \geq 1$ oraz $D = \mathbb{A}_n$, to macierz*

$$A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } \text{Cox}_{A_n^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ -1 & \cdots & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

jest całkowitą morsyfikacją diagramu Dynkina \mathbb{A}_n , tj. $A_n^{(1)} \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$, dla której $\det A_n^{(1)} = 1$, liczbą Coxetera jest $\mathbf{c}_{A_n^{(1)}} = n + 1$ oraz wielomianem Coxetera jest

$$\text{cox}_{A_n^{(1)}}(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(1)}(t) = t^n + t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t].$$

Dowód. Szczegółowy dowód znajduje się w artykule autora [24] jako dowód theorem 3.1. \square

TWIERDZENIE 5.1.2. *Jeśli $n = 2m \geq 2$ jest liczbą parzystą oraz $D = \mathbb{A}_n$, to macierz $A_n^{(2)} = [a_{ij}^{(2)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ postaci*

$$A_n^{(2)} = [a_{ij}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 2 \cdot (-1)^{i+j+1} & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & 1 & \ddots \\ 2 \cdot (-1)^{i+j} & & & \ddots & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & \ddots \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & \ddots \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 2 & \ddots \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 & \ddots \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & \ddots \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

gdzie $a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 2 \cdot (-1)^{i+j+1} & ; j > i + 1, \\ 1 & ; j = i \text{ lub } j = i + 1, \\ 2 \cdot (-1)^{i+j} & ; j < i, \end{cases}$ jest całkowitą morsyfikacją diagramu Dynkina \mathbb{A}_n , dla której $\det A_n^{(2)} = n + 1$, macierzą Coxetera jest

$$\text{Cox}_{A_n^{(2)}} = -\text{Cox}_{A_n^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

liczbą Coxetera jest $\mathbf{c}_{A_n^{(2)}} = 2 \cdot \mathbf{c}_{A_n^{(1)}} = 2(n + 1)$ oraz wielomianem Coxetera jest

$$\text{cox}_{A_n^{(2)}}(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n - t^{n-1} + t^{n-2} - t^{n-3} + \dots + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 \in \mathbb{Z}[t].$$

Dowód. Zobacz dowód theorem 3.2 w artykule autora [24]. \square

TWIERDZENIE 5.1.3. Jeśli $n = 2m + 1 \geq 3$ jest liczbą nieparzystą oraz $D = \mathbb{A}_n$, to macierz $A_n^{(2)} = [a_{ij}^{(2)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ postaci

$$A_n^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & & & & & & -1 & 1 \\ & 0 & 1 & -1 & & 0 & & & -1 & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & & & & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \\ & & & & & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & & & & & & -1 & 1 & 0 \\ -1 & & & & & & & & -1 & 1 & \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{M}_{2m+1}(\mathbb{Z}),$$

jest całkowitą morsyfikacją diagramu Dynkina \mathbb{A}_n , dla której $\det A_n^{(2)} = \frac{n+1}{2} = m + 1$, macierzą Coxetera jest macierz

$$\text{Cox}_{A_n^{(2)}} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2m+1}(\mathbb{Z}),$$

liczbą Coxetera jest $\mathbf{c}_{A_n^{(2)}} = 2n$ oraz wielomianem Coxetera jest

$$\text{cox}_{A_n^{(2)}}(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n + 1 \in \mathbb{Z}[t].$$

Dowód. Zobacz dowód theorem 3.10 w artykule autora [24]. □

TWIERDZENIE 5.1.4. *Jeśli $n \geq 5$ jest liczbą nieparzystą oraz $D = \mathbb{A}_n$, to macierz ${}_k A_n^{(3)} = [{}_k a_{ij}^{(3)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ postaci*

$${}_k A_n^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc} & & & & -1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & (-1)^i & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & -1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & 1 & & (-1)^{j+1} & \cdots & 1 \\ \hline 1 & -1 & \cdots & (-1)^{j+1} & 1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^i & & & & A_k^{(2)tr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & \end{array} \right], \text{ gdzie } A_r^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \cdot (-1)^{i+j+1} \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 & \ddots \\ 2 \cdot (-1)^{i+j} & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{Z}),$$

jest całkowitą morsyfikacją diagramu Dynkina \mathbb{A}_n , dla każdego parzystego $k = 2, 4, \dots, l \in \mathbb{N}$, gdzie

$$\mathbb{Z} \ni l = \begin{cases} \frac{n-1}{2} = 2m & ; n = 4m + 1, \\ \frac{n-1}{2} - 1 = 2(m-1) & ; n = 4m - 1, \end{cases}$$

dla której $\det_k A_n^{(3)} = \frac{n+1}{2}$, macierz Coxetera jest równa

$$(5.1.5) \quad \text{Cox}_k A_n^{(3)} = \left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \text{Cox}_{A_k}^{-1(2)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right], \text{ gdzie } \text{Cox}_{A_r}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{Z}),$$

liczbą Coxetera jest $\mathbf{c}_k A_n^{(3)} = \begin{cases} 2 \cdot (n-k) & ; (k+1)|(n-k), \\ 2 \cdot (n-k) \cdot (k+1) & ; \text{w p.p.}, \end{cases}$, natomiast

$$\text{cox}_k A_n^{(3)}(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2+\frac{k}{2})}(t) = t^n - t^{n-1} + \dots - t^{n-k+1} + t^{n-k} + t^k - t^{k-1} + \dots - t^3 + t^2 - t + 1 \in \mathbb{Z}[t],$$

jest wielomianem Coxetera morsyfikacji ${}_k A_n^{(3)}$.

Dowód. Najpierw dowodzimy, że $\text{Cox}_k A_n^{(3)}$ ma postać 5.1.5 (dowód sprowadza się do sprawdzenia równości $\text{Cox}_k A_n^{(3)} \cdot {}_k A_n^{(3)tr} = -{}_k A_n^{(3)}$).

Dalszą część dowodu rozpoczniemy od uzasadnienia równości:

$$\text{cox}_k A_n^{(3)}(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2+\frac{k}{2})}(t) = t^n - t^{n-1} + \dots - t^{n-k+1} + t^{n-k} + t^k - t^{k-1} + \dots - t^3 + t^2 - t + 1 \in \mathbb{Z}[t].$$

Symbolem $\rho_{i,j}(\lambda)$ oznaczamy elementarną operację dodania do i -tego wiersza, wiersza j -tego, pomnożonego przez $\lambda \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy $\rho_{i,j} := \rho_{i,j}(1)$. Bezpośrednio z definicji wielomianu Coxetera otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \text{cox}_{kA_n^{(3)}}(t) &= \det(tE - \text{Cox}_{kA_n^{(3)}}) = \det \left(tE - \begin{array}{c|ccc|ccc} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & -1 & \cdots & -1 & \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & & & \text{Cox}_{A_k^{-1}}^{-1} \end{array} \right) = \\ &= \det \begin{array}{c|ccc|ccc} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & 1 & \cdots & 1 & \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & & & \end{array} \xrightarrow{\rho_{n-k,n-k-1}} \det \begin{array}{c|ccc|ccc} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & t \\ \hline & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & tE - \text{Cox}_{A_k^{-1}}^{-1} \end{array}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy następujące własności wielomianu Coxetera i macierzy Coxetera, udowodnione w pracy [69, Lemma 2.8(c)]:

- (i) $\text{Cox}_{A^{tr}} = \text{Cox}_A^{-1}$, $\text{Cox}_{A^{-1}} = \text{Cox}_A^{tr}$,
- (ii) $\text{cox}_A(t) = \text{cox}_{A^{tr}}(t) = \text{cox}_{A^{-1}}(t) = t^n \cdot \text{cox}_A(\frac{1}{t})$.

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem kolumny $n - k$, oraz własności (i)–(ii) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{cox}_{kA_n^{(3)}}(t) &= (-1)^{2(n-k)} \cdot (t+1) \cdot \det(tE - \text{Cox}_{A_{n-k-1}^{(2)}}) \cdot \det(tE - \text{Cox}_{A_k^{-1}}^{-1}) = \\ &= (t+1) \cdot \text{cox}_{A_{n-k-1}^{(2)}}(t) \cdot \text{cox}_{A_k^{(2)tr}}(t) = (t+1) \cdot \text{cox}_{A_{n-k-1}^{(2)}}(t) \cdot \text{cox}_{A_k^{(2)}}(t) = \\ &= (t+1) \cdot (t^{n-k-1} - t^{n-k-2} + t^{n-k-3} - \dots + t^2 - t + 1) \cdot (t^k - t^{k-1} + t^{k-2} - \dots + t^2 - t + 1) = \\ &= (t^{n-k} - t^{n-k-1} + t^{n-k-2} - \dots + t^3 - t^2 + t + t^{n-k-1} - t^{n-k-2} + t^{n-k-3} - \dots + t^2 - t + 1) \cdot \\ &\quad \cdot (t^k - t^{k-1} + t^{k-2} - \dots + t^2 - t + 1) = \\ &= (t^{n-k} + 1) \cdot (t^k - t^{k-1} + t^{k-2} - \dots + t^2 - t + 1) = \\ &= t^n - t^{n-1} + \dots - t^{n-k+1} + t^{n-k} + t^k - t^{k-1} + \dots - t^3 + t^2 - t + 1 = F_{\mathbb{A}_n}^{(2+\frac{k}{2})}(t) \in \mathbb{Z}[t]. \end{aligned}$$

Następnie pokażemy, że $\mathbf{c}_{kA_n^{(3)}} = \begin{cases} 2 \cdot (n-k) & ; (k+1)|(n-k), \\ 2 \cdot (n-k) \cdot (k+1) & ; \text{w p.p.}, \end{cases}$. Z twierdzenia 5.1.2 wynika $\mathbf{c}_{A_{n-k-1}^{(2)}} = 2(n-k)$ oraz $\mathbf{c}_{A_k^{(2)tr}} = 2(k+1)$. Stąd $\mathbf{c}_{kA_n^{(3)}} = 2 \cdot \text{NWW}(n-k, k+1)$, gdzie $\text{NWW}(i, j)$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność liczb $i, j \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k+1 \leq n-k$, gdyż $k+1 \leq n-k \Leftrightarrow 2k \leq n-1 \Leftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2}$. Zatem $\mathbf{c}_{kA_n^{(3)}} = \begin{cases} 2 \cdot (n-k) & ; (k+1)|(n-k), \\ 2 \cdot (n-k) \cdot (k+1) & ; \text{w p.p.} \end{cases}$.

Ponieważ zastosowanie twierdzenia 3.2.16(a) daje równości

$$\det {}_k A_n^{(3)} = \frac{\det 2G_D}{\text{cox}_{{}_k A_n^{(3)}}(1)} = \frac{n+1}{2},$$

więc dowód twierdzenia został zakończony. \square

WNIOSEK 5.1.6. Jeśli $D = \mathbb{A}_n$, to dla $n = 5, 7, 9, 11, 13$, wielomiany Coxetera, liczby Coxetera, oraz wyznaczniki dla serii morsyfikacji opisaney w twierdzeniu 5.1.4, zostały przedstawione w poniżej tabeli.

D	k	$\text{cox}_{{}_k A_n^{(3)}}(t)$	$\det {}_k A_n^{(3)}$	$\mathbf{c}_{{}_k A_n^{(3)}}$
\mathbb{A}_5	2	$\text{cox}_{{}_2 A_5^{(3)}}(t) = t^5 - t^4 + t^3 + t^2 - t + 1$	3	6
\mathbb{A}_7	2	$\text{cox}_{{}_2 A_7^{(3)}}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1$	4	30
\mathbb{A}_9	2	$\text{cox}_{{}_2 A_9^{(3)}}(t) = t^9 - t^8 + t^7 + t^2 - t + 1$	5	42
	4	$\text{cox}_{{}_4 A_9^{(3)}}(t) = t^9 - t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	5	10
\mathbb{A}_{11}	2	$\text{cox}_{{}_2 A_{11}^{(3)}}(t) = t^{11} - t^{10} + t^9 + t^2 - t + 1$	6	18
	4	$\text{cox}_{{}_4 A_{11}^{(3)}}(t) = t^{11} - t^{10} + t^9 - t^8 + t^7 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	6	70
\mathbb{A}_{13}	2	$\text{cox}_{{}_2 A_{13}^{(3)}}(t) = t^{13} - t^{12} + t^{11} + t^2 - t + 1$	7	66
	4	$\text{cox}_{{}_4 A_{13}^{(3)}}(t) = t^{13} - t^{12} + t^{11} - t^{10} + t^9 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	7	90
	6	$\text{cox}_{{}_6 A_{13}^{(3)}}(t) = t^{13} - t^{12} + t^{11} - t^{10} + t^9 - t^8 + t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$	7	14

PRZYKŁAD 5.1.7. Jeśli $D = \mathbb{A}_9$, to $l = \frac{n-1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \in \mathbb{Z}$. Stąd wynika, że $k = 2$ lub $k = 4$ oraz

(a) dla $k = 2$, macierz $A := {}_2 A_9^{(3)} \in \mathbb{M}_9(\mathbb{Z})$, jej macierz Coxetera oraz jej wielomian Coxetera mają postaci:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \text{Cox}_A = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right],$$

$$\det A = 5, \mathbf{c}_A = 2 \cdot (n-k) \cdot (k+1) = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42, \quad \text{cox}_A(t) = t^9 - t^8 + t^7 + t^2 - t + 1.$$

(b) Dla $k = 4$, macierze $A := {}_4 A_9^{(3)} \in \mathbb{M}_9(\mathbb{Z})$, Cox_A oraz wielomian $\text{cox}_A(t)$ mają postaci

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \text{Cox}_A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right],$$

$$\det A = 5, \mathbf{c}_A = 2 \cdot (n-k) = 2 \cdot 5 = 10, \quad \text{cox}_A(t) = t^9 - t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1.$$

6. Zastosowanie Φ -oczkowych geometrii pierwiastków do konstrukcji kongruencji Grama bigrafów dodatnich

Przypomnijmy, że jednym z celów spektralnej klasyfikacji Coxetera sformułowanych w paragrafie 2.3 jest próba pozytywnego rozwiązania problemów A oraz B dla bigrafów dodatnich. Podobnie jak w artykułach [8, 9], [27]–[31], [36]–[38], [48]–[50] oraz [70]–[72], pierwszy z nich sformułujemy w formie następującej hipotezy spektralnej.

HIPOTEZA SPEKTRALNA 6.0.1. *Jeśli $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ są spójnymi dodatnimi grafami krawędziowo-dwudzielnymi, to równość ich spektrów Coxetera $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$ implikuje istnienie silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$.*

Drugi z tych problemów modyfikujemy następująco.

PROBLEM 6.0.2. *Dla danego jednorodnego diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o $n \geq 1$ wierzchołkach, zbudować algorytm konstruujący, dla dowolnej pary spójnych bigrafów $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_D$ spełniających relację $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ (a w szczególności równość $\mathbf{specc}_\Delta = \mathbf{specc}_{\Delta'}$), pewną macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $\check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$.*

Dyskusję o prawdziwości tych hipotez można znaleźć w publikacjach [8, 9], [27]–[31], [36], [48]–[50], [75, 76].

Na podstawie twierdzenia 4.1.5, hipoteza spektralna 6.0.1 jest prawdziwa dla bigrafów dodatnich o co najwyżej 9-ciu wierzchołkach. Ponieważ metoda dowodu tego twierdzenia w wypadku ogólnym prowadzi do czasochłonnych obliczeń algorytmicznych, więc podjęliśmy próby udowodnienia hipotezy 6.0.1 oraz problemu 6.0.2 na innej drodze zaproponowanej w pracach [69] oraz [70]–[72]. Wykorzystując wyniki tych prac, przedstawiamy w tym rozdziale ideę alternatywnego rozwiązania problemu 6.0.2, tzn. konstrukcji (dla danego diagramu Dynkina D o $n \geq 1$ wierzchołkach), algorytmów symbolicznych obliczających pewną macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ spójnych dodatnich bigrafów $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_D$, słabo \mathbb{Z} -kongruentnych z D , o ile taka kongruencja istnieje.

6.1. Schemat stosowania geometrii Φ_Δ -oczkowych

W konstrukcji takich algorytmów symbolicznych zastosujemy „metodę oczkową” używaną w pracach [70, 71, 72], której idea została szczegółowo opisana w artykule [76, Section 3], zobacz również paragraf 6.3. W dużym uproszczeniu, polega ona na stowarzyszeniu

$$\Delta \mapsto \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$$

z dodatnim spójnym bigrafem $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ pewnego skończonego zorientowanego grafu (tzn. kołczanu) Φ_Δ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ (zwanego **geometrią Φ_Δ -oczkową bigrafu Δ**) realizowanego graficznie w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n (lub nawet w \mathbb{R}^2), gdzie $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest transformacją Coxetera bigrafu Δ . Zbiorem jego wierzchołków jest zbiór wektorów

$$(6.1.1) \quad \widehat{\mathcal{R}}_\Delta := \mathcal{R}_\Delta \cup \mathcal{R}_\Delta^\lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$$

gdzie $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 1\}$ jest zbiorem pierwiastków bigrafu Δ , natomiast $\mathcal{R}_\Delta^\lambda$ jest albo zbiorem pustym, albo jest sumą mnogościową skończonej liczby Φ_Δ -orbit $\mathcal{O}(v) := \{\Phi_\Delta^m(v)\}_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ q_Δ -pierwiastków z liczb $d \geq 2$, tzn. wektorów $v \in \mathbb{Z}^n$ należących do zbioru

$$(6.1.2) \quad \mathcal{R}_\Delta(d) := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = d\} \subseteq \mathbb{Z}^n,$$

zobacz twierdzenia 6.1.4 oraz 6.1.5. Zwykle Φ_Δ -orbitę $\mathcal{O}(v)$ wektora v przedstawiamy w postaci nieskończonego grafu w \mathbb{R}^2

$$\mathcal{O}(v): \dots \text{---} \Phi_\Delta^3(v) \text{---} \Phi_\Delta^2(v) \text{---} \Phi_\Delta(v) \text{---} v \text{---} \Phi_\Delta^{-1}(v) \text{---} \Phi_\Delta^{-2}(v) \text{---} \Phi_\Delta^{-3}(v) \text{---} \dots$$

Na podstawie lematu 6.3.2, $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta$ jest Φ_Δ -**niezmienniczym podzbiorem** grupy \mathbb{Z}^n , tzn. jeśli $v \in \widehat{\mathcal{R}}_\Delta$, to $\Phi_\Delta(v) \in \widehat{\mathcal{R}}_\Delta$.

Zakłada się, że na zbiorze Φ_Δ -orbit $\mathcal{O}(v) \subseteq \widehat{\mathcal{R}}_\Delta$ wierzchołków $v \in \widehat{\mathcal{R}}_\Delta$ istnieje struktura grafu zorientowanego (tzn. kołczanu) $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ oraz tzw. geometryczna struktura Φ_Δ -oczkowa (zobacz paragraf 6.3) taka, że graf zorientowany $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest Φ_Δ -oczkowym kołczanem Φ_Δ -orbit pierwiastków w sensie pracy [69], zobacz również paragraf 6.3. Ponadto zakłada się, że $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ jest minimalnym kołczanem Φ_Δ -oczkowym zawierającym wszystkie Φ_Δ -orbit $\mathcal{O}(v) \subseteq \mathcal{R}_\Delta$ pierwiastków $v \in \mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta(1)$ pierwiastków z liczby $d = 1$.

Na podstawie wyników prac [69, 70, 72], dowolna macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiująca silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ wyznacza izomorfizm grup $\tilde{h}_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $v \mapsto \tilde{h}_B(v) := v \cdot B^{tr}$, którego ograniczenie do zbioru $\widehat{\mathcal{R}}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$ definiuje izomorfizm

$$(6.1.3) \quad \tilde{h}_B : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'}) \simeq \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$$

kołczanów Φ -oczkowych.

Okazuje się, że dla bigrafów dodatnich $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ spełniających pewne warunki, z dowolnego izomorfizmu $f : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'}) \rightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ kołczanów Φ -oczkowych można zbudować macierz $B_f \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ taką, że $\tilde{h}_{B_f} = f$, zobacz [76, Section 3].

Choć konstrukcja $f \mapsto B_f$ wydaje się żmudna i dość skomplikowana technicznie, to można ją z powodzeniem zastosować do budowania zapowiadanych wcześniej algorytmów symbolicznych (zwanymi przez nas algorytmami kombinatoryczno-graficznymi) obliczających macierze $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiujące silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ w rozważanej tu sytuacji.

Przed przedstawieniem zastosowań konstrukcji $f \mapsto B_f$ przypomnijmy udowodnione w pracach [48, 75, 76] następujące dwa twierdzenia o geometriach Φ_Δ -oczkowych.

TWIERDZENIE 6.1.4. *Załóżmy, że D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n \geq 1$ wierzchołkach. Niech $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$ będzie spójnym dodatnim bigrafem słabo \mathbb{Z} -kongruentnym z D . Przyjmijmy $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta$.*

- (a) Skończony zbiór $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta$ pierwiastków bigrafu Δ jest zredukowanym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki (zobacz [46, str. 52]), tzn. spełnia następujące cztery warunki:
- (a1) $0 \notin \mathcal{R}_\Delta$ oraz \mathcal{R}_Δ zawiera pewną bazę przestrzeni \mathbb{R}^n ,
 - (a2) dla każdego $v \in \mathcal{R}_\Delta$, wektor $-v$ należy również do \mathcal{R}_Δ . Ponadto istnieje funkcjonal \mathbb{R} -liniowy $v^\vee : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że $v^\vee(v) = 2$ oraz $s_v(\mathcal{R}_\Delta) = \mathcal{R}_\Delta$, gdzie $s_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem zdefiniowanym wzorem $s_v(w) = w - v^\vee(w) \cdot v$, dla każdego $w \in \mathbb{R}^n$,
 - (a3) dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathcal{R}_\Delta$, istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{Z}$ taka, że $s_v(w) - w = \lambda \cdot v$.
 - (a4) jeżeli $w \in \mathcal{R}_\Delta$ oraz $\lambda w \in \mathcal{R}_\Delta$, to $\lambda = \pm 1$.

Typem Dynkina tego systemu pierwiastków \mathcal{R}_Δ jest diagram Dynkina D .

- (b) Istnieje geometria Φ_Δ -oczkowa $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ (tzn. $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta$) bigrafu Δ izomorficzna z geometrią Φ_D -oczkową $\Gamma(\mathcal{R}_D, \Phi_D)$ bigrafu D opisaną w [69, Section 5]. \square

TWIERDZENIE 6.1.5. Załóżmy, że D jest jednym z następujących grafów Dynkina \mathcal{B}_m , \mathcal{C}_m , \mathcal{F}_4 , \mathcal{G}_2 :

$$\mathcal{B}_m : \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_1 \end{array} \text{---} a_2 \text{---} a_3 \text{---} \dots \text{---} a_{m-1} \text{---} a_m \quad (m \text{ wierzchołków, } m \geq 2),$$

$$\mathcal{C}_m : \begin{array}{c} \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ a_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_2 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_3 \end{array} \text{---} \dots \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_{m-1} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_m \end{array} \quad (m \text{ wierzchołków, } m \geq 3),$$

$$\mathcal{F}_4 : a_1 \text{---} a_2 \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_3 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_4 \end{array}$$

$$\mathcal{G}_2 : \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ a_1 \end{array} \text{---} a_2.$$

Niech $\widehat{\mathcal{R}}_D$ będzie zbiorem \mathcal{R}_D^\bullet zdefiniowanym w artykule [48] następująco:

$$\mathcal{R}_D^\bullet := \begin{cases} \mathcal{R}_D \cup \mathcal{O}(e_1) & ; \text{dla } D = \mathcal{B}_m, \\ \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D(2) & ; \text{dla } D = \mathcal{C}_m, \\ \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D(2) & ; \text{dla } D = \mathcal{F}_4, \\ \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D(3) & ; \text{dla } D = \mathcal{G}_2, \end{cases}$$

gdzie

- $\mathcal{R}_D(2) := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_D(v) = 2\}$,
- $\mathcal{R}_D(3) := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_D(v) = 3\}$,
- $\mathcal{O}(e_1) := \Phi_D \cdot \mathcal{O}(v) \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest Φ_D -orbitą wektora bazowego $e_1 \in \mathbb{Z}^n$.

- (a) Skończony zbiór $\widehat{\mathcal{R}}_D = \mathcal{R}_D^\bullet$ jest zredukowanym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki typu Dynkina D .

- (a) Istnieje geometria Φ_D -oczkowa $\Gamma(\mathcal{R}_D^\bullet, \Phi_D)$ (tzn. $\widehat{\mathcal{R}}_D = \mathcal{R}_D^\bullet$), bigrafu D opisana w artykule [48, Section 3].

Przypomnijmy z pracy [48], że zredukowany $\Phi_{\mathcal{F}_4}$ -oczkowy system pierwiastków grafu $D = \mathcal{F}_4$ ma postać

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 1111 & \dots & 0110 & \dots & 1211 & \dots & 1110 & \dots & 0100 & \dots & 1000 & \dots & 1111 & \dots & 0110 & \dots & 1211 & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ \dots & 1221 & \dots & 1321 & \dots & 2321 & \dots & 1210 & \dots & 1100 & \dots & 0111 & \dots & 1221 & \dots & 1321 & \dots & 2321 & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ \dots & 0221 & \dots & 2432 & \dots & 2431 & \dots & 2421 & \dots & 2210 & \dots & 0011 & \dots & 0221 & \dots & 2432 & \dots & 2431 & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ \dots & 0211 & \dots & 2221 & \dots & 0210 & \dots & 2211 & \dots & 0001 & \dots & 0010 & \dots & 0211 & \dots & 2221 & \dots & 0210 & \dots \end{array}$$

Przypomnijmy również, że jeśli D jest jednym z grafów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ o $n+1 \geq 1$ wierzchołkach, to

- zbiór $\widehat{\mathcal{R}}_D := \mathcal{R}_D + \text{Ker } q_D \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ jest uogólnionym systemem pierwiastków grafu D w sensie Kaca [47];
- zbiór wszystkich Φ_D -orbit zbioru $\widehat{\mathcal{R}}_D := \mathcal{R}_D + \text{Ker } q_D \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ posiada strukturę $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_D)$ Φ_D -oczkowej geometrii pierwiastków skonstruowaną w [69, Section 5]. \square

Uzasadnienie tych stwierdzeń można znaleźć w pracach [75, 76].

6.2. Redukcja do geometrii Φ_A -oczkowych względem morsyfikacji

Jednym z celów tego rozdziału jest konstrukcja kołczanu Φ_Δ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ tak, by przyporządkowanie $\Delta \mapsto \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ posiadało własności opisane powyżej.

Ponieważ nie znamy takiej konstrukcji dla wszystkich diagramów Dynkina D , więc ograniczymy się tu jedynie do przedstawienia konstrukcji dla diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ oraz szerokiej klasy spójnych bigrafów dodatnich $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$, przy czym problem 6.0.2 zastąpimy następującym równoważnym problemem dla morsyfikacji grafu Dynkina D .

PROBLEM 6.2.1. Załóżmy, że D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n \geq 1$ wierzchołkach. Zbudować algorytm konstruujący, dla dowolnej pary morsyfikacji $A, A' \in \mathbf{Mor}_D$ grafu D leżących w tej samej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie (w szczególności spełniających równość $\mathbf{spec}c_A = \mathbf{spec}c_{A'}$), pewną macierz $\bar{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ taką, że $\det \bar{B} = \pm 1$ oraz $A' = A * \bar{B} := \bar{B}^{tr} \cdot A \cdot \bar{B}$.

Aby uzasadnić równoważność problemów 6.0.2 oraz 6.2.1, wykorzystamy zdefiniowaną w (3.0.3) redukcję $\phi_D : \mathcal{UBigr}_D \rightarrow \mathbf{Mor}_D$, gdzie D jest jednym diagramów Dynkina.

Przypomnijmy, że ϕ_D przyporządkowuje dowolnemu bigrafowi $\Delta \in \mathcal{UBigr}_D$ morsyfikację $A_\Delta := \phi_D(\Delta) = \check{G}_\Delta * C_\Delta$. Na podstawie [75, Proposition 3.6], istnieją przemienne diagramy

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}_D(d) \hookrightarrow \mathbb{Z}^n & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\Phi_D} & & \xrightarrow{\Phi_D} \\ \searrow^{q_D} & & \swarrow_{q_D} \\ & \mathbb{Z} & \\ \swarrow_{q_\Delta} & & \searrow^{q_\Delta} \\ \mathcal{R}_\Delta(d) \hookrightarrow \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & \mathbb{Z}^n \end{array} & \begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{R}}_D & \xrightarrow{\Phi_{A_\Delta}} & \widehat{\mathcal{R}}_D \\ \downarrow h_\Delta \downarrow 1-1 & & \downarrow h_\Delta \downarrow 1-1 \\ \widehat{\mathcal{R}}_\Delta & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & \widehat{\mathcal{R}}_\Delta \end{array}
 \end{array}$$

gdzie $d \in \mathbb{N}$ jest dowolną liczbą naturalną, $h_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest automorfizmem grup zdefiniowanym wzorem $h_\Delta(v) := v \cdot C_\Delta^{tr}$, dla $v \in \mathbb{Z}^n$, h_Δ^\vee jest ograniczeniem automorfizmu h_Δ do $\mathcal{R}_D(d)$, $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest transformacją Coxetera bigrafu Δ , natomiast $\Phi_{A_\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $v \mapsto \Phi_{A_\Delta}(v) := v \cdot \text{Cox}_{A_\Delta}$, jest transformacją Coxetera morsyfikacji $A_\Delta \in \mathbf{Mor}_D$.

Zbiór $\widehat{\mathcal{R}}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta \cup \mathcal{R}_\Delta^\checkmark$ w drugim diagramie jest ustalonym zbiorem postaci (6.1.1), natomiast $\widehat{\mathcal{R}}_D := h_\Delta^{-1}(\mathcal{R}_\Delta)$ ma postać $\widehat{\mathcal{R}}_D = \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D^\checkmark$, gdzie $\mathcal{R}_D^\checkmark = h_\Delta^{-1}(\mathcal{R}_\Delta^\checkmark)$.

Stąd wynika, że izomorfizm $h_\Delta^{-1} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ przeprowadza daną geometrię Φ_Δ -oczkową $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ bigrafu Δ na geometrię Φ_{A_Δ} -oczkową $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_{A_\Delta})$ diagramu Dynkina D względem transformacji Coxetera $\Phi_{A_\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ morsyfikacji $A_\Delta \in \mathbf{Mor}_D$. Innymi słowy, izomorfizm $h_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ definiuje izomorfizm geometrii Φ -oczkowych

$$h_\Delta : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_{A_\Delta}) \simeq \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$$

Jeżeli macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiuje silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$, to macierz $\overline{B} := C_\Delta^{-1} \cdot B \cdot C_{\Delta'} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ daje równość $A_{\Delta'} = A_\Delta * \overline{B}$ (i odwrotnie), zobacz (3.1.9) oraz [75, Theorem 1.12]. Ponieważ macierz B definiuje izomorfizm grup $\tilde{h}_B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, którego ograniczenie do zbioru $\widehat{\mathcal{R}}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$ definiuje izomorfizm (6.1.3)

$$\tilde{h}_B : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'}) \simeq \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$$

kończanów Φ -oczkowych, więc macierz \overline{B} definiuje izomorfizm grup $\tilde{h}_{\overline{B}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, którego ograniczenie do zbioru $\widehat{\mathcal{R}}'_D = \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D^\succ \subseteq \mathbb{Z}^n$ definiuje izomorfizm

$$(6.2.2) \quad \tilde{h}_{\overline{B}} : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A_{\Delta'}}) \simeq \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_{A_\Delta})$$

kończanów Φ -oczkowych, gdzie $\mathcal{R}_D^\succ = \tilde{h}_{\overline{B}}^{-1}(\mathcal{R}_D^\succ)$. Uzasadniliśmy więc stwierdzenie, że problem 6.0.2 redukuje się do problemu 6.2.1.

Analogicznie jak dla bigrafów dodatnich, w konstrukcji algorytmu postulowanego w problemie 6.2.1 obliczającego pewną macierz $\overline{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ taką, że $\det \overline{B} = \pm 1$ oraz $A' = A * \overline{B} := \overline{B}^{tr} \cdot A \cdot \overline{B}$, dla dowolnej pary morsyfikacji $A, A' \in \mathbf{Mor}_D$ grafu D leżących w tej samej $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie (w szczególności spełniających równość $\mathbf{specc}_A = \mathbf{specc}_{A'}$), będziemy konstruować izomorfizm $f : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'}) \rightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ kończanów Φ -oczkowych, gdzie $\widehat{\mathcal{R}}'_D = \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D^\succ$. Następnie z izomorfizmu f będziemy rekonstruować macierz $B_f \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ taką, że $\tilde{h}_{B_f} = f$ oraz $A' = A * B_f$ (tak jak w [76, Section 3]).

UWAGA 6.2.3. Podsumowując przeprowadzoną dyskusję dochodzimy do wniosku, że problem 6.0.2 redukuje się do problemu 6.2.1, którego rozwiązanie wykorzystuje stowarzyszenie

$$(6.2.4) \quad A \mapsto \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$$

z dowolną morsyfikacją $A \in \mathbf{Mor}_D$ (ustalonego diagramu Dynkina D o $n \geq 1$ wierzchołkach) pewnego skończonego zorientowanego grafu Φ_A -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ (zwanego geometrią Φ_A -oczkową grafu Dynkina D) realizowanego graficznie w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n (lub nawet w \mathbb{R}^2), gdzie $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest transformacją Coxetera morsyfikacji A . Zbiorem jego wierzchołków jest zbiór wektorów

$$(6.2.5) \quad \widehat{\mathcal{R}}_D := \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D^\succ \subseteq \mathbb{Z}^n$$

gdzie $\mathcal{R}_D := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_D(v) = 1\}$ jest zbiorem pierwiastków grafu Dynkina D , natomiast \mathcal{R}_D^\succ jest albo zbiorem pustym, albo jest sumą mnogościową skończonej liczby Φ_A -orbit $\mathcal{O}_A(v) := \{\Phi_A^m(v), m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ q_D -pierwiastków z liczb $d \geq 2$, tzn. wektorów $v \in \mathbb{Z}^n$ należących do zbioru (6.1.2), gdzie $\Delta = D$.

Krótkie podsumowanie i przykłady

Pozostałą część tego rozdziału poświęcimy konstruowaniu geometrii Φ_A -oczkowych $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ dla morsyfikacji A grafu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$.

UWAGA 6.2.6. (a) W dalszej części tego rozdziału pokażemy, że na ogół można skonstruować wiele geometrii Φ_A -oczkowych $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ dla ustalonej morsyfikacji A danego grafu

Dynkina D , tzn. zbiór $\widehat{\mathcal{R}}_D$ wierzchołków tej geometrii nie jest wyznaczony jednoznacznie i można go wybrać na wiele sposobów.

(c) Choć rzadko zdarza się, że skonstruowana geometria Φ_A -oczkowa $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ przy użyciu morsyfikacji A danego grafu Dynkina D jest zredukowanym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki, to następujące trzy przykłady pokazują, że istnieją geometrie o tej własności.

PRZYKŁAD 6.2.7. (a) Niech $n = 2$ oraz $D = \mathbb{A}_2$. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ jest morsyfikacją grafu Dynkina \mathbb{A}_2 o wyznaczniku $\det A = 3$, o macierzy Coxetera $\text{Cox}_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, o wielomianie Coxetera $\text{cox}_A(t) = t^2 - t + 1$ oraz o liczbie Coxetera $\mathbf{c}_A = 6$. Przyjmijmy $\widehat{\mathcal{R}}_D = \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D(3)$, tzn. zbiór $\mathcal{R}_D^\succ = \mathcal{R}_D(3)$ w definicji (6.2.5) jest zbiorem sześciu q_D -pierwiastków z liczby $d = 3$.

Następująca geometria Φ_A -oczkowa $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & 10 & \dots & 0\hat{1} & \dots & \hat{1}\hat{1} & \dots & \hat{1}0 & \dots & 01 & \dots & 11 & \dots & 10 & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & \\ \dots & 21 & \dots & 1\hat{1} & \dots & \hat{1}\hat{2} & \dots & \hat{2}\hat{1} & \dots & \hat{1}\hat{1} & \dots & 12 & \dots & 21 & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \left| \begin{array}{l} d = 1 \\ d = 3 \end{array} \right.$$

składa się z dwóch sześcioelementowych Φ_A -orbit oraz Φ_A -oczek szerokości jeden oraz szerokości trzy. Jest ona izomorficzna z $\Phi_{\mathcal{G}_2}$ -oczkowym systemem pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}^\bullet, \Phi_{\mathcal{G}_2})$ typu Dynkina \mathcal{G}_2 opisanym w artykule [48] oraz w twierdzeniu 6.1.5.

(b) Niech $D = \mathbb{A}_3$, Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ jest morsyfikacją grafu Dynkina

$D = \mathbb{A}_3$ o wyznaczniku $\det A = 2$, o macierzy Coxetera $\text{Cox}_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, o wielomianie

Coxetera $\text{cox}_A(t) = t^3 + 1$ oraz o liczbie Coxetera $\mathbf{c}_A = 6$. Przyjmijmy $\widehat{\mathcal{R}}_D = \mathcal{R}_D \cup \mathcal{O}_A(e_1 + e_3)$, tzn. zbiór \mathcal{R}_D^\succ w definicji (6.2.5) jest jedną Φ_A -orbitą $\mathcal{O}_A(e_1 + e_3)$ wektora $e_1 + e_3 \in \mathcal{R}_{\mathbb{A}_3}(2)$ składającą się z sześciu q_D -pierwiastków z liczby $d = 2$ grafu Dynkina \mathbb{A}_3 . Następująca geometria Φ_A -oczkowa $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & 010 & \dots & 001 & \dots & 110 & \dots & 0\hat{1}0 & \dots & 00\hat{1} & \dots & \hat{1}\hat{1}0 & \dots & 010 & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ \dots & 011 & \dots & 111 & \dots & 100 & \dots & 0\hat{1}\hat{1} & \dots & \hat{1}\hat{1}\hat{1} & \dots & \hat{1}00 & \dots & 011 & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & \\ \dots & \hat{1}01 & \dots & 121 & \dots & 101 & \dots & 10\hat{1} & \dots & \hat{1}\hat{2}\hat{1} & \dots & \hat{1}0\hat{1} & \dots & \hat{1}01 & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \left| \begin{array}{l} d = 1 \\ d = 1 \\ d = 2 \end{array} \right.$$

składa się z trzech sześcioelementowych Φ_A -orbit oraz Φ_A -oczek szerokości jeden oraz szerokości dwa.

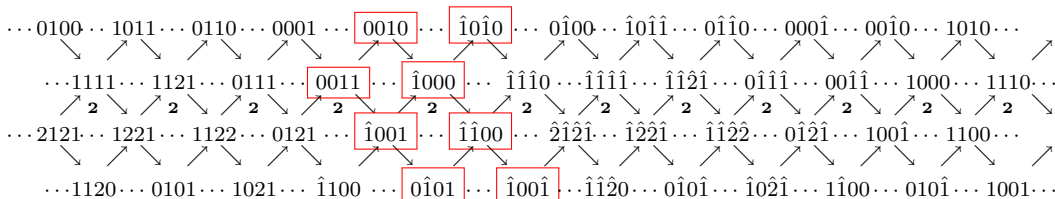
Zauważmy, że geometria $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ jest izomorficzna z $\Phi_{\mathcal{B}_3}$ -oczkowym systemem pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{B}_3}^\bullet, \Phi_{\mathcal{B}_3})$ typu Dynkina \mathcal{B}_3 opisanym w artykule [48] oraz w twierdzeniu 6.1.5.

(c) Niech $D = \mathbb{D}_4$, macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ jest morsyfikacją grafu Dynkina

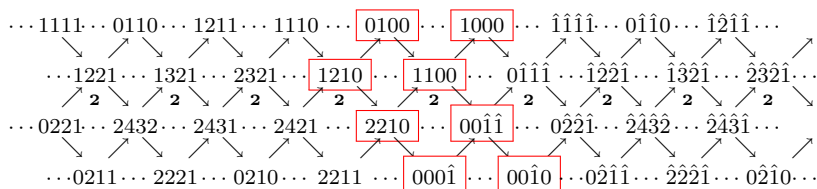
\mathbb{D}_4 o wyznaczniku $\det A = 2$, o macierzy Coxetera $\text{Cox}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, o wielomianie

Coxetera $\text{cox}_A(t) = t^4 - t^2 + 1$ oraz o liczbie Coxetera $\mathbf{c}_A = 12$. Przyjmijmy $\widehat{\mathcal{R}}_D = \mathcal{R}_D \cup \mathcal{R}_D(2)$, tzn. zbiór \mathcal{R}_D^\succ w definicji (6.2.5) jest zbiorem $\mathcal{R}_D(2)$ q_D -pierwiastków z liczby $d = 2$, mocy 24

grafu Dynkina \mathbb{D}_4 . Łatwo sprawdzić, że każdy ze zbiorów \mathcal{R}_D oraz $\mathcal{R}_D(2)$ jest sumą dwóch Φ_A -orbit, z których każda ma długość 12. Przez proste manipulacje można z tych czterech Φ_A -orbit zbudować następującą geometrię Φ_A -oczkową $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ diagramu Dynkina \mathbb{D}_4 ¹



Oczywiście jest ona izomorficzna z $\Phi_{\mathcal{F}_4}$ -oczkowym systemem pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{F}_4}^\bullet, \Phi_{\mathcal{F}_4})$ typu Dynkina \mathcal{F}_4 opisanym w [48] oraz w twierdzeniu 6.1.5, tj.



6.3. O kołczanach Φ_A -oczkowych. Toroidalny algorytm oczkowy

W tym podrozdziale przypominamy podstawowe definicje i fakty o kołczanach Φ -oczkowych wykorzystywane w badaniu problemu 6.2.1 i konstruowaniu geometrii Φ_A -oczkowych $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ danego diagramu Dynkina D względem jego morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_D$, tak jak to sformułowano w uwagach 6.2.3, 6.2.6.

Rozpocznijmy od przypomnienia za [68]–[71], definicji niezbędnych w konstrukcji (6.2.4), w tym definicje Φ_A -orbit, Φ_A -oczka, Φ_A -oczkowej geometrii pierwiastków oraz toroidalnego algorytmu Φ_A -oczkowego, który jest jednym z najważniejszych narzędzi w konstruowaniu geometrii Φ_A -oczkowych $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$. Buduje on taką geometrię z jednego Φ_A -oczka danego na wejściu.

W następnym podrozdziale pokażemy jak z wykorzystaniem toroidalnego algorytmu oczkowego oraz macierzy morsyfikacji A skonstruować Φ_A -oczkową geometrię pierwiastków, koncentrując się na przykładowych ustawieniach Φ_A -orbit pierwiastków jednorodnych diagramów Dynkina typu \mathbb{A}_n , $n > 1$. Przedstawimy również algorytmiczny opis konstrukcji Φ_A -oczkowych geometrii pierwiastków dla szerokiej klasy macierzowych morsyfikacji diagramów Dynkina \mathbb{A}_n , $n > 1$.

Przypomnijmy z prac [68]–[71], niezbędne definicje i fakty wykorzystywane w dalszej części tego rozdziału.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o $n \geq 1$ wierzchołkach, $A \in \mathbf{Mor}_D$ jest ustaloną morsyfikacją macierzową diagramu D oraz $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest jej transformacją Coxetera.

DEFINICJA 6.3.1. (a) Niepusty podzbiór $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^n$ nazywamy Φ_A -**niezmienniczym podzbiorem** grupy \mathbb{Z}^n , jeżeli $\Phi_A(v) \in \mathcal{R}$, dla dowolnego $v \in \mathcal{R}$.

¹to jest $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{F}_4}^\bullet, \Phi_{\mathcal{F}_4})$

(b) Φ_A -orbitą wektora $v \in \mathbb{Z}^n$, nazywamy podzbiór $\mathcal{O}_A(v) = \{\Phi_A^m(v)\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^n$, który realizujemy geometrycznie w postaci nieskończonego grafu w \mathbb{R}^2

$$\mathcal{O}_A(v): \dots - \Phi_A^3(v) - \Phi_A^2(v) - \Phi_A(v) - v - \Phi_A^{-1}(v) - \Phi_A^{-2}(v) - \Phi_A^{-3}(v) - \dots$$

LEMAT 6.3.2. Niech D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina oraz niech $A \in \mathbf{Mor}_D$ będzie morsyfikacją grafu D .

(a) Dla dowolnej liczby $d \in \mathbb{N}$, zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_D(d) \subset \mathbb{Z}^n$ (6.1.2) diagramu Dynkina D z liczby d jest Φ_A -niezmiennicznym podzbiorem grupy \mathbb{Z}^n , gdzie $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest transformacją Coxetera morsyfikacji A .

(b) Zbiór $\mathcal{R}_D(d) \subset \mathbb{Z}^n$ jest rozłączną sumą skończonej liczby Φ_A -orbit $\mathcal{O}_A(v)$.

(c) Liczba Coxetera \mathbf{c}_A morsyfikacji $A \in \mathbf{Mor}_D$ jest skończona.

(d) Długość $|\mathcal{O}_A(v)|$ Φ_A -orbity dowolnego wektora $v \in \mathbb{Z}^n$ dzieli liczbą Coxetera \mathbf{c}_A .

Dowód. (a) Jeśli $q_D : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonalem kwadratowym diagramu Dynkina D oraz $v \in \mathbb{Z}^n$ jest dowolnym wektorem, to zachodzą równości:

$$\begin{aligned} q_D(\Phi_A(v)) &= q_D(v \cdot \text{Cox}_A) = v \cdot \text{Cox}_A \cdot G_\Delta \cdot (v \cdot \text{Cox}_A)^{tr} = v \cdot \text{Cox}_A \cdot G_\Delta \cdot (\text{Cox}_A^{tr} \cdot v^{tr}) \\ &= v \cdot A \cdot A^{-tr} \left(\frac{1}{2} (A + A^{tr}) \right) A^{-1} \cdot A^{tr} \cdot v^{tr} = \\ (6.3.3) \quad &= v \cdot \frac{1}{2} \left(A \cdot A^{-tr} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{tr} + A \cdot A^{-tr} \cdot A^{tr} \cdot A^{-1} \cdot A^{tr} \right) v^{tr} = \\ &= v \cdot \left(\frac{1}{2} (A + A^{tr}) \right) v^{tr} = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = q_D(v) = 1. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $q_D(\Phi_A(v)) = q_D(v) = d$, o ile $v \in \mathcal{R}_D(d)$, co kończy dowód (a).

(b) Na podstawie lematu 2.1.17, dla dowolnej liczby $d \in \mathbb{N}$, zbiór $\mathcal{R}_D(d)$ jest skończony. Zatem (b) jest konsekwencją (a).

Stwierdzenia (c) oraz (d) wynikają z [69, Proposition 4.3], co kończy dowód lematu. \square

DEFINICJA 6.3.4. Załóżmy, że $A \in \mathbf{Mor}_D$ jest morsyfikacją diagramu Dynkina D , $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest jej transformacją Coxetera oraz ℓ_1, \dots, ℓ_s , $s \geq 1$ są dodatnimi liczbami naturalnymi. Wektory $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}, w \in \mathbb{Z}^n$ tworzą Φ_A -oczeko o początku u i końcu w z wagami ℓ_1, \dots, ℓ_s , jeżeli spełnione są następujące warunki:

(a) $u = \Phi_A(w)$ oraz $u + w = \ell_1 \cdot v^{(1)} + \dots + \ell_s \cdot v^{(s)}$,

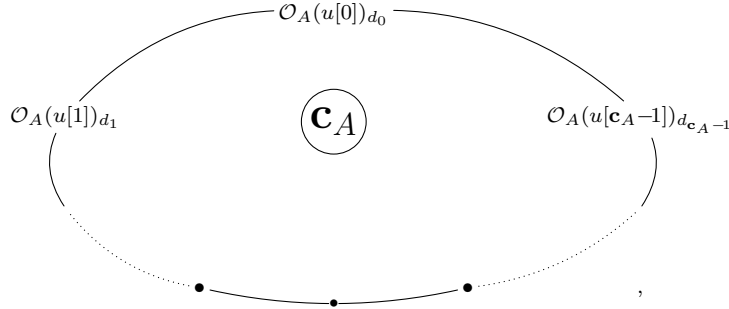
(b) wektory $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ są parami różne oraz żaden z nich nie należy do Φ_A -orbity $\mathcal{O}_A(u)$.

Jeżeli ponadto żaden z wektorów $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ nie jest zerowy, to mówimy, że Φ_A -oczeko jest szerokości $\ell_1 + \dots + \ell_s \geq 1$.

Φ_A -oczeko zdefiniowane przez wektory $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}, w \in \mathbb{Z}^n$ będziemy realizowali w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^2 w postaci triangulowanego kołczanu (grafu skierowanego)

$$(6.3.5) \quad \begin{array}{ccc} & v^{(1)} & \\ & \nearrow \ell_1 & \searrow \\ u & & w \\ & \nearrow \ell_2 & \searrow \\ & v^{(2)} & \\ & \vdots & \\ & v^{(s)} & \\ & \searrow \ell_s & \end{array}$$

UWAGA 6.3.10. Ponieważ Φ_A -orbita $\mathcal{O}_A(u[\mathbf{c}_A])_{d_{\mathbf{c}_A}}$ oraz $\mathcal{O}_A(u[0])_{d_0}$ są równe, więc skonstruowany kołczan Φ_A -oczkowy leży na torusie. Przekrój poprzeczny tego kołczanu Φ_A -oczkowego przedstawiamy schematycznie następująco:



gdzie \mathbf{c}_A jest liczbą orbit, w tym wypadku równą liczbie Coxetera morsyfikacji A .

Zamieszczone poniżej przykłady 6.3.11–6.3.12, mają na celu ułatwienie zrozumienia definicji oraz wskazanie różnorodności możliwych do uzyskania geometrii Φ_A -oczkowych.

Dla ułatwienia zapisu wprowadźmy następujące oznaczenia. Symbolem $\mathcal{O}_{k,d} \subseteq \mathcal{R}(d)$ oznaczamy k -tą (zgodnie z uzyskaną eksperymentalnie numeracją) Φ_A -orbitę pierwiastków z $d \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy $\hat{\lambda} := -\lambda$, dla $\lambda \in \mathbb{Z}$.

PRZYKŁAD 6.3.11. Dla diagramu Dynkina \mathbb{D}_5 (o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1), wybierzmy jedną z macierzy morsyfikacji

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_5}.$$

Wielomianem Coxetera morsyfikacji A jest wielomian $\text{cox}_A(t) = t^5 + 1 = F_{\mathbb{D}_5}^{(3)}(t) = F_{\mathbb{A}_5}^{(2)}(t)$, $\det A = 2$, liczba Coxetera jest równa 10, oraz $|\mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}| = 40$ (twierdzenie 2.1.18).

Rozważmy rozkład zbioru $\mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}$ pierwiastków diagramu \mathbb{D}_5 na sumę mnogościową jego czterech Φ_A -orbit po 10 pierwiastków

$$\mathcal{O}_{1,1} : \dots 10000 \dots 01111 \dots 0000\hat{1} \dots 000\hat{1}0 \dots 00\hat{1}00 \dots \hat{1}0000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 00001 \dots 00010 \dots 00100 \dots$$

$$\mathcal{O}_{2,1} : \dots 10100 \dots 11111 \dots 01110 \dots 000\hat{1}\hat{1} \dots 00\hat{1}\hat{1}0 \dots \hat{1}0\hat{1}00 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 00011 \dots 00110 \dots$$

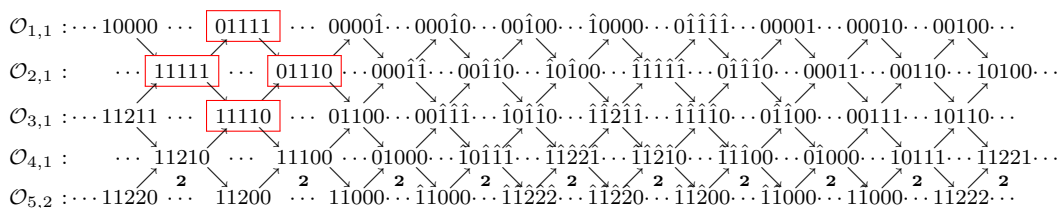
$$\mathcal{O}_{3,1} : \dots 01100 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \hat{1}0\hat{1}\hat{1}0 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 0\hat{1}\hat{1}00 \dots 00111 \dots 10110 \dots 11211 \dots 11110 \dots$$

$$\mathcal{O}_{4,1} : \dots 01000 \dots \hat{1}0\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \dots \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}0 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots 0\hat{1}000 \dots 10111 \dots 11221 \dots 11210 \dots 11100 \dots$$

Uzupełniając orbity $\mathcal{O}_{1,1}$ – $\mathcal{O}_{4,1}$ o jedną Φ_A -orbitę $\mathcal{O}_{5,2} = \mathcal{O}_A(e_1 + e_2) \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(2)$ wektora $e_1 + e_2 \in \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(2)$ z liczby $d = 2$ i stosując toroidalny algorytm Φ_A -oczkowy do oczka szerokości dwa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{1,1} : & & 01111 \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathcal{O}_{2,1} : & 11111 & \dots & 01110 \\ & \searrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_{3,1} : & & 11110 \end{array}$$

uzyskamy następujący kołczan Φ_A -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{D}_5}, \Phi_A)$



którego schemat orbit ma kształt

$\mathcal{O}_{1,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{2,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{3,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{4,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{5,2} \text{ --- } \mathcal{O}_{4,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{3,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{2,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{1,1}$,
natomiast po utożsamieniu orbit $\mathcal{O}_{1,1}, \mathcal{O}_{2,1}, \mathcal{O}_{3,1}, \mathcal{O}_{4,1}$ ma kształt

$$\mathcal{O}_{1,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{2,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{3,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{4,1} \text{ --- } \mathcal{O}_{5,2}.$$

Otrzymany kołczan Φ_A -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{D}_5}, \Phi_A)$ jest izomorficzny z nieprzywiedlnym Φ_D -oczkowym systemem pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{B}_5}^\bullet, \Phi_{\mathcal{B}_5})$ bigrafu \mathcal{B}_5 opisanego w pracy [48] oraz w twierdzeniu 6.1.5.

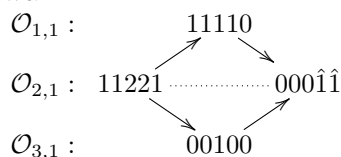
PRZYKŁAD 6.3.12. Dla diagramu Dynkina \mathbb{D}_5 jw., wybierzmy inną macierz morsyfikacji

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_5}.$$

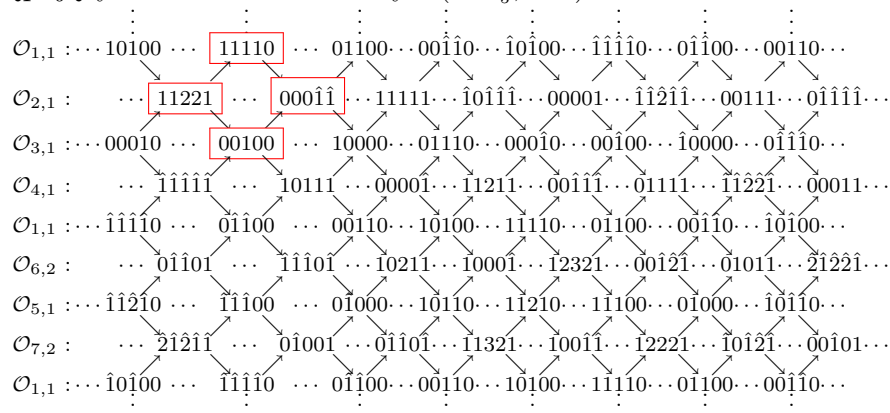
Wielomian Coxetera macierzy A' jest równy $\text{cox}_{A'}(t) = t^5 + t^4 + t + 1 = F_{\mathbb{D}_5}^{(1)}(t)$, $\det A' = 1$, liczba Coxetera jest równa 8, oraz $|\mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}| = 40$ (twierdzenie 2.1.18). Rozważmy rozkład zbioru $\mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}$ pierwiastków diagramu \mathbb{D}_5 na sumę mnogościową jego pięciu $\Phi_{A'}$ -orbit po 8 pierwiastków

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1} &: \dots 10100 \dots 11110 \dots 01100 \dots 00\hat{1}\hat{1}0 \dots \hat{1}0\hat{1}00 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 0\hat{1}\hat{1}00 \dots 00110 \dots \\ \mathcal{O}_{2,1} &: \dots 00001 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \dots 00111 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 11221 \dots 000\hat{1}\hat{1} \dots 11111 \dots \hat{1}0\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{3,1} &: \dots 10000 \dots 01110 \dots 000\hat{1}0 \dots 00\hat{1}00 \dots \hat{1}0000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 00010 \dots 00100 \dots \\ \mathcal{O}_{4,1} &: \dots 10111 \dots 0000\hat{1} \dots 11211 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 01111 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \dots 00011 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{5,1} &: \dots 01000 \dots \hat{1}0\hat{1}\hat{1}0 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}0 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots 0\hat{1}000 \dots 10110 \dots 11210 \dots 11100 \dots \end{aligned}$$

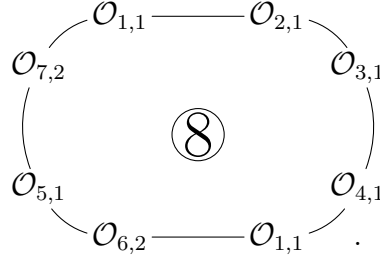
Uzupełniając $\mathcal{O}_{1,1} \text{--} \mathcal{O}_{5,1}$ o dwie $\Phi_{A'}$ -orbity $\mathcal{O}_{6,2} = \mathcal{O}_{A'}(e_1 - e_5)$, $\mathcal{O}_{7,2} = \mathcal{O}_{A'}(e_5 - e_2) \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(2)$ pierwiastków $e_1 - e_5 \in \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(2)$ oraz $e_5 - e_2 \in \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(2)$ z liczby $d = 2$ i stosując toroidalny algorytm $\Phi_{A'}$ -oczkowy do oczka szerokości dwa



uzyskamy następujący kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_{\mathbb{D}_5}, \Phi_{A'})$



którego schemat orbit ma kształt



Zauważmy, że otrzymany kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{D}_5}, \Phi_{A'})$ nie jest nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki, gdyż istnieje wektor $w = (1, 1, 3, 2, 1) \in \widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{D}_5}$ taki, że wektor $-w$ nie należy do zbioru $\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{D}_5}$ (zobacz twierdzenie 6.1.4(a2)).

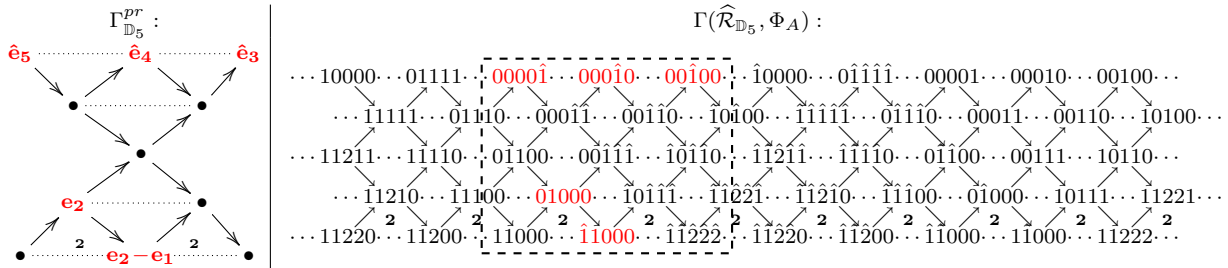
Kluczowe do rozwiązania problemu 6.2.1 dla diagramu Dynkina D oraz pary morsyfikacji $A', A'' \in \mathbf{Mor}_D$ takich, że $\mathbf{specc}_{A'} = \mathbf{specc}_{A''}$ (tj. do skonstruowania algorytmu wyznaczającego macierz $\overline{B} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$, dla której $A'' = A' * \overline{B}$), jest wybór podstawowej konfiguracji Coxetera w $\Phi_{A'}$ -oczkowym kołczanie $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_{A'})$, dla każdego wielomianu Coxetera $\mathrm{cox}_{A'}(t)$ morsyfikacji A' diagramu D .

Przypomnijmy z prac [69], [71], [72] definicję podstawowej konfiguracji Coxetera kołczanu $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ oraz najważniejsze fakty, które będą używane w zastosowaniach techniki geometrii oczkowych omówionej w paragrafie 6.3.

DEFINICJA 6.3.13. Niech $A \in \mathbf{Mor}_D$ będzie macierzą morsyfikacją jednorodnego diagramu Dynkina D . **Podstawową konfiguracją Coxetera** Φ_A -oczkowego kołczanu $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ (6.2.4) nazywamy spójny pełny podkołczan $\Gamma_D^{pr} := \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D^{pr}, \Phi_A) \subseteq \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ spełniający następujące dwa warunki:

- (a) Φ_A -oczkowa struktura kołczanu $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez Γ_D^{pr} oraz $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \Phi_A^m(\Gamma_D^{pr})$.
- (b) zbiór $\widehat{\mathcal{R}}_D^{pr}$ zawiera \mathbb{Z} -bazę grupy \mathbb{Z}^n .

Przykładowo, dla Φ_A -oczkowego kołczanu z przykładu 6.3.11, jedną z podstawowych konfiguracji Coxetera pierwiastków jest podkołczan $\Gamma_{\mathbb{D}_5}^{pr}$:



gdzie $\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{D}_5} = \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5} \cup \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}^>$ oraz $\mathcal{R}_{\mathbb{D}_5} = \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(1)$, natomiast $\mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}^> = \mathcal{O}_A(e_1 + e_2) \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{D}_5}(2)$ jest Φ_A -orbitą pierwiastka $e_1 + e_2$ z liczby $d = 2$.

LEMAT 6.3.14. Niech D będzie jednym z jednorodnych diagramów Dynkina o $n \geq 1$ wierzchołkach, $\mathcal{R}_D := \mathcal{R}_D(1) \subset \mathbb{Z}^n$ oraz $A, A' \in \mathbf{Mor}_D$ będzie parą morsyfikacji o transformacjach Coxetera, odpowiednio $\Phi_A, \Phi_{A'}$.

(a) Jeżeli $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ oraz $A' = A * B^{tr} = B \cdot A \cdot B^{tr}$, to następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_{A'}} & \mathbb{Z}^n \\ \downarrow h_B \simeq & & \downarrow h_B \simeq \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\Phi_A} & \mathbb{Z}^n, \end{array}$$

gdzie h_B jest izomorfizmem grupy \mathbb{Z}^n zdefiniowanym wzorem $h_B(v) = v \cdot B$, dla $v \in \mathbb{Z}^n$.

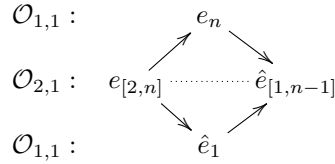
(b) Jeżeli $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ jest $\Phi_{A'}$ -oczkową geometrią pierwiastków grafu Dynkina D z podstawową konfiguracją Coxetera $\Gamma_D'^{pr}$, to

- h_B przeprowadza $\Phi_{A'}$ -oczkowy kołczan $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ na Φ_A -oczkową geometrię pierwiastków $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ z podstawową konfiguracją Coxetera $\Gamma_D'^{pr}$,
- h_B definiuje izomorfizmy kołczanów $h_B : \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'}) \rightarrow \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$, $h_B : \Gamma_D'^{pr} \rightarrow \Gamma_D^{pr}$,
- macierz B ma postać

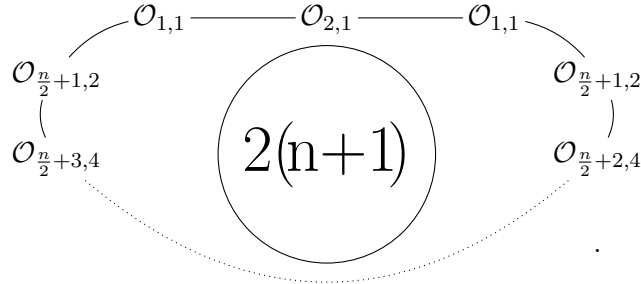
$$B = \begin{bmatrix} h_B(e_1) \\ \vdots \\ h_B(e_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Dowód. Zobacz [71], lemat 4.3. □

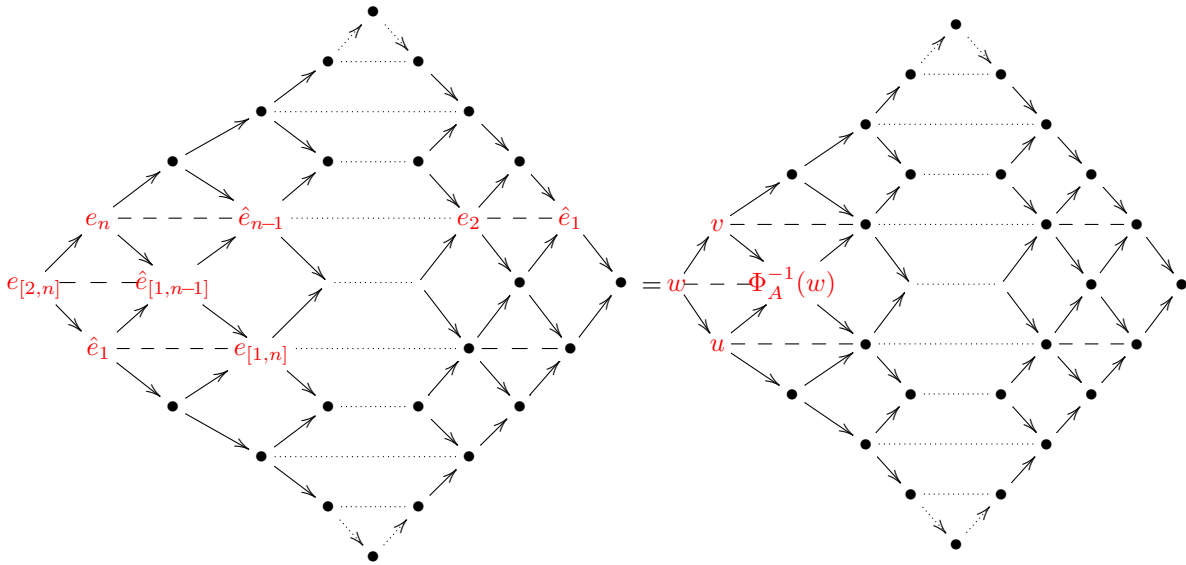
Stosując toroidalny algorytm Φ_A -oczkowy do Φ_A -oczka szerokości dwa



dla morsyfikacji $A := A_n^{(2)}$ diagramu $D = \mathbb{A}_n$, konstruujemy kołczan Φ_A -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ postaci (6.2.4) (zawierający zbiór \mathcal{R}_D) składający się z $\mathbf{c}_A = 2n + 1$ orbit leżących na torusie, którego schemat orbit ma kształt



Podstawową konfiguracją pierwiastków zbudowanego kołczanu Φ_A -oczkowego jest jego następująco podkołczan Φ_A -oczkowy



Przypomnijmy, że $A := A_n^{(2)}$. Załóżmy teraz, że $A' \in \mathbf{Mor}_D$ jest inną morsyfikacją grafu $D = \mathbb{A}_n$ leżącą w tej samej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie co morsyfikacja $A = A_n^{(2)}$ (w szczególności spełniająca równość $\mathbf{specc}_A = \mathbf{specc}_{A'}$). Jeśli $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest macierzą taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $A' = A * B^{tr} := B \cdot A \cdot B^{tr}$, to na podstawie lematu 6.3.14 macierz ta ma postać

$$B = \begin{bmatrix} -\Phi_A^{-(n-1)}(v) \\ \Phi_A^{-(n-2)}(v) \\ \vdots \\ -\Phi_A^{-3}(v) \\ \Phi_A^{-2}(v) \\ -\Phi_A^{-1}(v) \\ v \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że dla morsyfikacji $A := A_n^{(2)}$ oraz A' konstrukcja algorytmu obliczającego macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $A' = A * B^{tr}$ wymaga algorytmu konstruującego kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4) o podstawowej konfiguracji pierwiastków izomorficznej z tą przedstawioną powyżej.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że szukane algorytmy (algorytm budowania kołczanu $\Phi_{A'}$ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$, dla dowolnej morsyfikacji A' o typie $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = \text{cox}_A(t)$, oraz algorytm obliczający macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $A' = A * B^{tr}$) można zbudować następująco.

ALGORYTM 7.1.1. Dane wejściowe. Liczba parzysta $n \in \mathbb{N}$ większa od 3, graf Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1, morsyfikacja $A := A_n^{(2)}$, wielomian $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n - t^{n-1} + t^{n-2} - t^{n-3} + \dots + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ oraz morsyfikacja $A' \in \mathbf{Mor}_D^F$ taka, że $F(t) = \text{cox}_{A'}(t)$.

Wynik. Kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4).

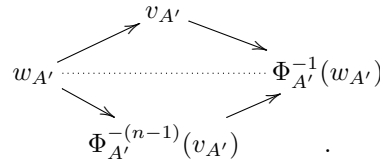
KROK 1°: Oblicz macierz Coxetera $\text{Cox}_{A'}$, transformację Coxetera $\Phi_{A'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ oraz zbiór pierwiastków \mathcal{R}_D .

KROK 2°: Podziel zbiór \mathcal{R}_D na $\frac{n}{2}$ $\Phi_{A'}$ -orbity o długości $\mathbf{c}_{A'} = 2(n+1)$ każda.

KROK 3°: Znajdź parę pierwiastków $v_{A'}, w_{A'} \in \mathcal{R}_D$ takich, że $v_{A'} \in \mathcal{O}_{i,1}, w_{A'} \in \mathcal{O}_{j,1}, i \neq j$ oraz

$$v_{A'} + \Phi_{A'}^{-(n-1)}(v_{A'}) = w_{A'} + \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'})$$

tj. wektory $v_{A'}, \Phi_{A'}^{-(n-1)}(v_{A'}), w_{A'}, \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'})$ tworzą $\Phi_{A'}$ -oczko postaci



KROK 4°: Skonstruuj kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$, przy pomocy toroidalnego algorytmu $\Phi_{A'}$ -oczkowego (6.3.8) rozpoczynając od $\Phi_{A'}$ -oczka z kroku 3°.

ALGORYTM 7.1.2. Dane wejściowe. Liczba parzysta $n \in \mathbb{N}$ większa od 3, graf Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1, wielomian $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n - t^{n-1} + t^{n-2} - t^{n-3} + \dots + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ oraz dwie morsyfikacje $A', A'' \in \mathbf{Mor}_D^F$ takie, że $F(t) = \text{cox}_{A'}(t) = \text{cox}_{A''}(t)$.

Wynik. Macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$.

KROK 1°: Korzystając z kroku 3° algorytmu 7.1.1 dla macierzy A' wyznacz wektor $v' = v_{A'}$.

KROK 2°: Korzystając z kroku 3° algorytmu 7.1.1 dla macierzy A'' wyznacz wektor $v'' = v_{A''}$.

KROK 3°: Oblicz macierz $B' := \begin{bmatrix} -\Phi_{A'}^{-(n-1)}(v') \\ \Phi_{A'}^{-(n-2)}(v') \\ \vdots \\ -\Phi_{A'}^{-3}(v') \\ \Phi_{A'}^{-2}(v') \\ -\Phi_{A'}^{-1}(v') \\ v' \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$.

KROK 4°: Oblicz macierz $B'' := \begin{bmatrix} -\Phi_{A''}^{-(n-1)}(v'') \\ \Phi_{A''}^{-(n-2)}(v'') \\ \vdots \\ -\Phi_{A''}^{-3}(v'') \\ \Phi_{A''}^{-2}(v'') \\ -\Phi_{A''}^{-1}(v'') \\ v'' \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$.

KROK 5°: Macierz $B := (B'^{-1} \cdot B'') \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$.

Przykłady 7.1.3 oraz 7.1.4 ilustrują wykorzystanie algorytmu 7.1.1 do skonstruowania kołczanów Φ_A -oczkowych $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ dla morsyfikacji A o typie $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = \text{cox}_A(t)$.

PRZYKŁAD 7.1.3. Niech $n = 6$, $D = \mathbb{A}_6$, $F(t) = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t) = t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$, oraz niech

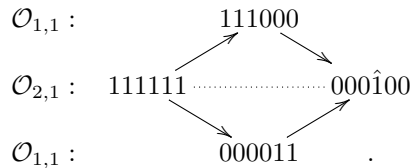
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Mor}_{\mathbb{A}_6}^F.$$

Oczywiście $A' \in \text{Mor}_D$ jest morsyfikacją grafu $D = \mathbb{A}_6$, $\det A' = 7$ oraz $\mathbf{c}_{A'} = 14$.

Aby skonstruować kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4) rozważmy trzy $\Phi_{A'}$ -orbity po 14 pierwiastków każda

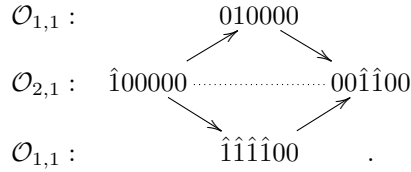
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1} &: \dots 111000 \dots 011000 \dots 011110 \dots 001110 \dots 001111 \dots 000011 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots \\ &\dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}000 \dots 0\hat{1}\hat{1}000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0000\hat{1}\hat{1} \dots 111100 \dots \\ \mathcal{O}_{2,1} &: \dots 100000 \dots 000\hat{1}\hat{1}0 \dots 010000 \dots 00000\hat{1} \dots 001100 \dots 111111 \dots 000\hat{1}00 \dots \\ &\dots \hat{1}00000 \dots 000110 \dots 0\hat{1}0000 \dots 000001 \dots 00\hat{1}\hat{1}00 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 000100 \dots \\ \mathcal{O}_{3,1} &: \dots 110000 \dots 000\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 011100 \dots 111110 \dots 001000 \dots 011111 \dots 000010 \dots \\ &\dots \hat{1}\hat{1}0000 \dots 000111 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 00\hat{1}000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0000\hat{1}0 \dots \end{aligned}$$

Postępując zgodnie z algorytmem 7.1.1, rozpoczynamy budowanie kołczanu $\Phi_{A'}$ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ od następującego $\Phi_{A'}$ -oczką szerokości dwa



Stosując toroidalny algorytm oczkowy do tego $\Phi_{A'}$ -oczką uzyskamy następujący kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy

Postępując zgodnie z algorytmem 7.1.1, rozpoczynamy budowanie kołczanu $\Phi_{A''}$ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}''_D, \Phi_{A''})$ od następującego $\Phi_{A''}$ -oczka szerokości dwa

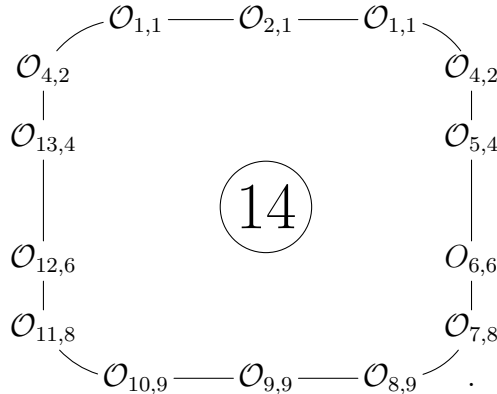


Stosując toroidalny algorytm oczkowy do tego $\Phi_{A''}$ -oczka uzyskamy następujący kołczan $\Phi_{A''}$ -oczkowy

```

 $\mathcal{O}_{1,1}$ : 010000 · 001111 · 000001 · 000110 · 111000 · 111100 · 011100 · 010000 · 001111 · 000001 · 000110 · 111000 · 111100 · 011100 ·
 $\mathcal{O}_{2,1}$ : 100000 · 001100 · 011111 · 001110 · 000111 · 111110 · 000100 · 100000 · 001100 · 011111 · 001100 · 000111 · 111110 · 000100 ·
 $\mathcal{O}_{1,1}$ : 111100 · 011100 · 010000 · 001111 · 000001 · 000110 · 111000 · 111100 · 011100 · 010000 · 001111 · 000001 · 000110 · 111000 ·
 $\mathcal{O}_{4,2}$ : 122100 · 121100 · 010011 · 010001 · 001001 · 111001 · 111010 · 122100 · 121100 · 010011 · 010001 · 001001 · 111001 · 111010 ·
 $\mathcal{O}_{5,4}$ : 132100 · 120011 · 010012 · 010111 · 112001 · 222101 · 122110 · 132100 · 120011 · 010012 · 010111 · 112001 · 222101 · 122110 ·
 $\mathcal{O}_{6,6}$ : 132110 · 131011 · 120012 · 010102 · 101111 · 223101 · 233201 · 132110 · 131011 · 120012 · 010102 · 101111 · 223101 · 233201 ·
 $\mathcal{O}_{7,8}$ : 131021 · 131012 · 120102 · 101102 · 212011 · 234201 · 233201 · 131021 · 131012 · 120102 · 101102 · 212011 · 234201 · 233201 ·
 $\mathcal{O}_{8,9}$ : 242110 · 131022 · 131102 · 011102 · 212002 · 223111 · 244201 · 242110 · 131022 · 131102 · 011102 · 212002 · 223111 · 244201 ·
 $\mathcal{O}_{9,9}$ : 242111 · 131112 · 020102 · 102002 · 223102 · 233111 · 243110 · 242111 · 131112 · 020102 · 102002 · 223102 · 233111 · 243110 ·
 $\mathcal{O}_{10,9}$ : 243111 · 242201 · 020112 · 111002 · 113102 · 233102 · 232020 · 243111 · 242201 · 020112 · 111002 · 113102 · 233102 · 232020 ·
 $\mathcal{O}_{11,8}$ : 243201 · 131201 · 111012 · 102102 · 123102 · 232011 · 232021 · 243201 · 131201 · 111012 · 102102 · 123102 · 232011 · 232021 ·
 $\mathcal{O}_{12,6}$ : 232111 · 132201 · 020101 · 102112 · 112102 · 122011 · 232010 · 232111 · 132201 · 020101 · 102112 · 112102 · 122011 · 232010 ·
 $\mathcal{O}_{13,4}$ : 121111 · 021101 · 011001 · 112112 · 111011 · 122010 · 232100 · 121111 · 021101 · 011001 · 112112 · 111011 · 122010 · 232100 ·
 $\mathcal{O}_{4,2}$ : 121100 · 010011 · 010001 · 001001 · 111001 · 111010 · 122100 · 121100 · 010011 · 010001 · 001001 · 111001 · 111010 · 122100 ·
 $\mathcal{O}_{1,1}$ : 010000 · 001111 · 000001 · 000110 · 111000 · 111100 · 011100 · 010000 · 001111 · 000001 · 000110 · 111000 · 111100 · 011100 ·
    
```

którego schemat orbit ma kształt



Stosując algorytmu 7.1.1 wyznaczyliśmy wektor $v'' = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^6$. Zatem macierz

$$B = \begin{bmatrix} -\Phi_{A''}^{-5}(v'') \\ \Phi_{A''}^{-4}(v'') \\ -\Phi_{A''}^{-3}(v'') \\ \Phi_{A''}^{-2}(v'') \\ -\Phi_{A''}^{-1}(v'') \\ v'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})_D,$$

zgodnie z algorytmem 7.1.2.

PRZYKŁAD 7.1.5. Niech $n = 6$, $D = \mathbb{A}_6$, $F(t) = F_{\mathbb{A}_6}^{(2)}(t) = t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ oraz niech $A = A_6^{(2)}$, A' , $A'' \in \text{Mor}_{\mathbb{A}_6}^F \subseteq \text{M}_6(\mathbb{Z})$ będą morsyfikacjami grafu \mathbb{A}_6 postaci odpowiednio

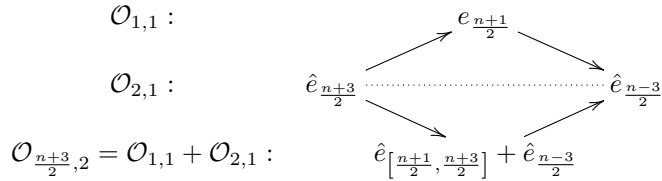
jest całkowitą morsyfikacją diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$, dla której $\det A_n^{(2)} = \frac{n+1}{2}$, liczbą Coxetera jest $\mathbf{c}_{A_n^{(2)}} = 2n$ oraz wielomianem Coxetera jest

$$\text{cox}_{A_n^{(2)}}(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n + 1.$$

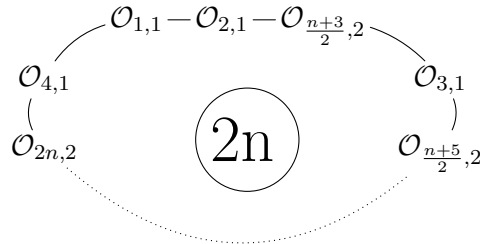
Zbiór $\mathcal{R}_{\mathbb{A}_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków grafu \mathbb{A}_n mocy $n(n+1)$ jest rozłączną sumą $\frac{n+1}{2}$ Φ_A -orbit, z których każda zawiera dokładnie $\mathbf{c}_A = 2n$ pierwiastków. Zauważmy, że wśród orbit pierwiastków \mathcal{R}_D znajdują się dwie orbity $\mathcal{O}_{1,1}, \mathcal{O}_{2,1}$ postaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1} : & \cdots e_{\frac{n+1}{2}} \cdots e_{\frac{n-1}{2}} \cdots e_{[\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}]} \cdots e_{[\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}]} \cdots e_{[\frac{n+1}{2}, \frac{n+5}{2}]} \cdots e_{[\frac{n-5}{2}, \frac{n-1}{2}]} \cdots \cdots e_{[\frac{n+1}{2}, n]} \cdots \\ & \cdots \hat{e}_{\frac{n+1}{2}} \cdots \hat{e}_{\frac{n-1}{2}} \cdots \hat{e}_{[\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}]} \cdots \hat{e}_{[\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}]} \cdots \hat{e}_{[\frac{n+1}{2}, \frac{n+5}{2}]} \cdots \hat{e}_{[\frac{n-5}{2}, \frac{n-1}{2}]} \cdots \cdots \hat{e}_{[\frac{n+1}{2}, n]} \cdots \\ \mathcal{O}_{2,1} : & \cdots e_{\frac{n+3}{2}} \cdots e_{\frac{n-3}{2}} \cdots e_{\frac{n+5}{2}} \cdots e_{\frac{n-5}{2}} \cdots \cdots e_1 \cdots e_n \cdots \hat{e}_{[1, \frac{n+1}{2}]} \cdots \hat{e}_{[\frac{n-1}{2}, n]} \cdots \\ & \cdots \hat{e}_{\frac{n+3}{2}} \cdots \hat{e}_{\frac{n-3}{2}} \cdots \hat{e}_{\frac{n+5}{2}} \cdots \hat{e}_{\frac{n-5}{2}} \cdots \cdots \hat{e}_1 \cdots \hat{e}_n \cdots e_{[1, \frac{n+1}{2}]} \cdots e_{[\frac{n-1}{2}, n]} \cdots \end{aligned}$$

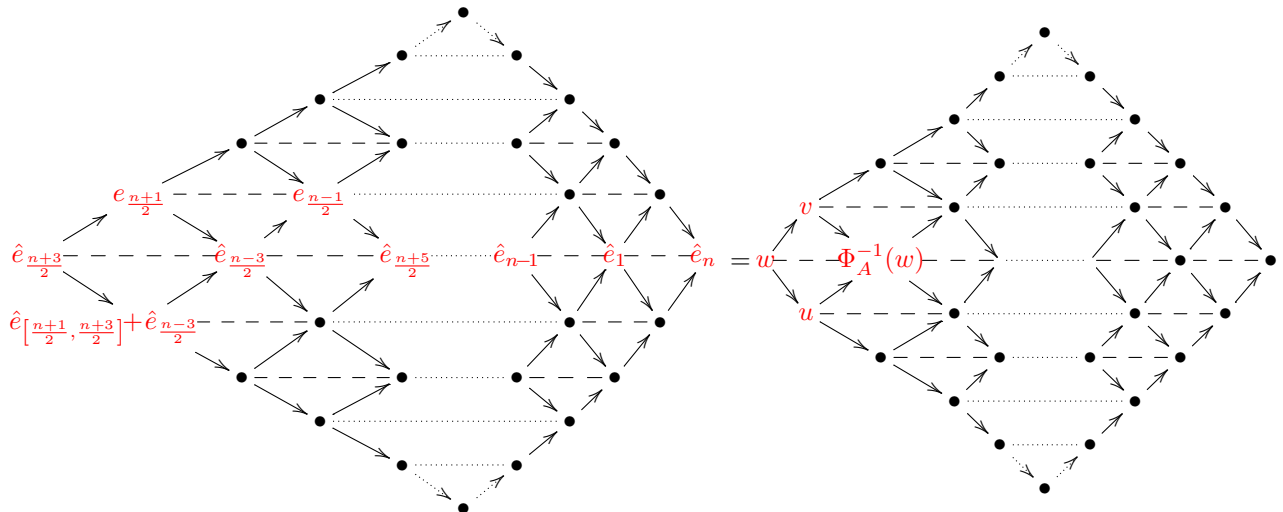
Stosując toroidalny algorytm Φ_A -oczkowy do Φ_A -oczka szerokości dwa



dla morsyfikacji $A := A_n^{(2)}$ diagramu $D = \mathbb{A}_n$, konstruujemy kołczan Φ_A -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ postaci (6.2.4) (zawierający zbiór \mathcal{R}_D) składający się z $\mathbf{c}_A = 2n$ orbit leżących na torusie, którego schemat orbit ma kształt



(dla $n = 5$ orbita $\mathcal{O}_{4,1} = \mathcal{O}_{2,1}$). Podstawową konfiguracją pierwiastków zbudowanego kołczanu Φ_A -oczkowego jest jego następujący podkołczan Φ_A -oczkowy



Przypomnijmy, że $A := A_n^{(2)}$. Załóżmy teraz, że $A' \in \mathbf{Mor}_D$ jest inną morsyfikacją grafu $D = \mathbb{A}_n$ leżącą w tej samej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -orbicie co morsyfikacja $A = A_n^{(2)}$ (w szczególności spełniająca równość $\mathbf{specc}_A = \mathbf{specc}_{A'}$). Jeśli $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ jest macierzą taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $A' = A * B^{tr} := B \cdot A \cdot B^{tr}$, to na podstawie lematu 6.3.14 macierz ta ma postać

$$B = \begin{bmatrix} -\Phi_A^{-\frac{n-1}{2}}(w) \\ \vdots \\ -\Phi_{A_1}^{-3}(w) \\ -\Phi_{A_1}^{-1}(w) \\ \Phi_{A_1}^{-1}(w) \\ v \\ -w \\ -\Phi_{A_1}^{-2}(w) \\ -\Phi_{A_1}^{-4}(w) \\ \vdots \\ -\Phi_A^{-\frac{n+1}{2}}(w) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \frac{n-1}{2} \\ \frac{n+1}{2} \\ \frac{n+3}{2} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Stąd wynika, że dla morsyfikacji $A := A_n^{(2)}$ oraz A' konstrukcja algorytmu obliczającego macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $\det B = \pm 1$ oraz $A' = A * B^{tr}$ wymaga algorytmu konstruującego kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4) o podstawowej konfiguracji pierwiastków izomorficznej z tą przedstawioną powyżej.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że szukane algorytmy (algorytm budowania kołczanu $\Phi_{A'}$ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$, dla dowolnej morsyfikacji A' o typie $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = \mathrm{cox}_A(t)$, oraz algorytm obliczający macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $A' = A * B^{tr}$) można zbudować następująco.

ALGORYTM 7.2.1. Dane wejściowe. Liczba nieparzysta $n \in \mathbb{N}$ większa od 4, graf Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1, morsyfikacja $A := A_n^{(2)}$, wielomian $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n + 1$ oraz morsyfikacja $A' \in \mathbf{Mor}_D^F$ taka, że $F(t) = \mathrm{cox}_{A'}(t)$.

Wynik. Kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4).

KROK 1°: Oblicz macierz Coxetera $\mathrm{Cox}_{A'}$, transformację Coxetera $\Phi_{A'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ oraz zbiór pierwiastków \mathcal{R}_D .

KROK 2°: Podziel zbiór \mathcal{R}_D na $\frac{n+1}{2}$ $\Phi_{A'}$ -orbity o długości $\mathbf{c}_{A'} = 2n$ każda.

KROK 3°: Znajdź parę pierwiastków $v_{A'}, w_{A'} \in \mathcal{R}_D$ takich, że $v_{A'} \in \mathcal{O}_{i,1}, w_{A'} \in \mathcal{O}_{j,1}, i \neq j$ oraz

$$\begin{aligned} v_{A'} + \Phi_{A'}^{-(n+2)}(v_{A'}) + \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'}) &= w_{A'} + \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'}) \\ v_{A'} + \Phi_{A'}^{-(n+2)}(v_{A'}) &= w_{A'} \end{aligned}$$

tj. wektory $v_{A'}, \Phi_{A'}^{-(n+2)}(v_{A'}) + \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'}), w_{A'}, \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'})$ tworzą $\Phi_{A'}$ -oczko postaci

$$\begin{array}{ccc} & v_{A'} & \\ & \nearrow & \searrow \\ w_{A'} & \cdots & \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Phi_{A'}^{-(n+2)}(v_{A'}) + \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'}) & \end{array} .$$

KROK 4°: Skonstruuj kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$, przy pomocy toroidalnego algorytmu $\Phi_{A'}$ -oczkowego (6.3.8) rozpoczynając od $\Phi_{A'}$ -oczka z kroku 3°.

ALGORYTM 7.2.2. Dane wejściowe. Liczba nieparzysta $n \in \mathbb{N}$ większa od 4, graf Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1, wielomian $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n + 1$ oraz dwie morsyfikacje $A', A'' \in \mathbf{Mor}_D^F$ takie, że $F(t) = \text{cox}_{A'}(t) = \text{cox}_{A''}(t)$.

Wynik. Macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$.

KROK 1°: Korzystając z kroku 3° algorytmu 7.2.1 dla macierzy A' wyznacz wektory $v' = v_{A'}, w' = w_{A'}$.

KROK 2°: Korzystając z kroku 3° algorytmu 7.2.1 dla macierzy A'' wyznacz wektory $v'' = v_{A''}, w'' = w_{A''}$.

KROK 3°: Oblicz macierz $B' :=$

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{A'}^{-\frac{n-1}{2}}(w') \\ \vdots \\ -\Phi_{A'}^{-3}(w') \\ -\Phi_{A'}^{-1}(w') \\ \Phi_{A'}^{-1}(v') \\ -w' \\ -\Phi_{A'}^{-2}(w') \\ -\Phi_{A'}^{-4}(w') \\ \vdots \\ -\Phi_{A'}^{-\frac{n+1}{2}}(w') \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$$

KROK 4°: Oblicz macierz $B'' :=$

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{A''}^{-\frac{n-1}{2}}(w'') \\ \vdots \\ -\Phi_{A''}^{-3}(w'') \\ -\Phi_{A''}^{-1}(w'') \\ \Phi_{A''}^{-1}(v'') \\ -w'' \\ -\Phi_{A''}^{-2}(w'') \\ -\Phi_{A''}^{-4}(w'') \\ \vdots \\ -\Phi_{A''}^{-\frac{n+1}{2}}(w'') \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$$

KROK 5°: Macierz $B := (B'^{-1} \cdot B'') \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$.

Przykłady 7.2.3 oraz 7.2.4 ilustrują wykorzystanie algorytmu 7.2.1 do skonstruowania kołczanów Φ_A -oczkowych $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_A)$ dla morsyfikacji A o typie $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = \text{cox}_A(t)$.

PRZYKŁAD 7.2.3. Niech $n = 7$, $D = \mathbb{A}_7$, $F(t) = F_{\mathbb{A}_7}^{(2)}(t) = t^7 + 1$, oraz niech

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_7}^F.$$

Oczywiście $A' \in \mathbf{Mor}_D$ jest morsyfikacją grafu $D = \mathbb{A}_7$, $\det A' = 4$ oraz $\mathbf{c}_{A'} = 14$.

Aby skonstruować kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4) rozważmy cztery $\Phi_{A'}$ -orbity po 14 pierwiastków każda

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1} &: \dots 100000 \dots 011000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 011111 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 011100 \dots 0\hat{1}0000 \dots \\ & \dots \hat{1}00000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}000 \dots 0111110 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0111100 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}00 \dots 010000 \dots \\ \mathcal{O}_{2,1} &: \dots 0010000 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 0001111 \dots 0000010 \dots 0000\hat{1}\hat{1} \dots 0011100 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}00 \dots \\ & \dots 00\hat{1}0000 \dots 1111110 \dots 000\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 00000\hat{1}0 \dots 0000111 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}0 \dots 1111000 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{3,1} &: \dots 1100000 \dots 1110000 \dots 000\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 0000001 \dots 0000011 \dots 0000\hat{1}00 \dots 0011000 \dots \\ &\dots \hat{1}\hat{1}00000 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}0000 \dots 0001110 \dots 000000\hat{1} \dots 00000\hat{1}\hat{1} \dots 0000100 \dots 00\hat{1}\hat{1}000 \dots \\ \mathcal{O}_{4,1} &: \dots 0001000 \dots 0011110 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0001100 \dots 0000110 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 1111100 \dots \\ &\dots 000\hat{1}000 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \dots 1111111 \dots 000\hat{1}\hat{1}00 \dots 0000\hat{1}\hat{1}0 \dots 0011111 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots \end{aligned}$$

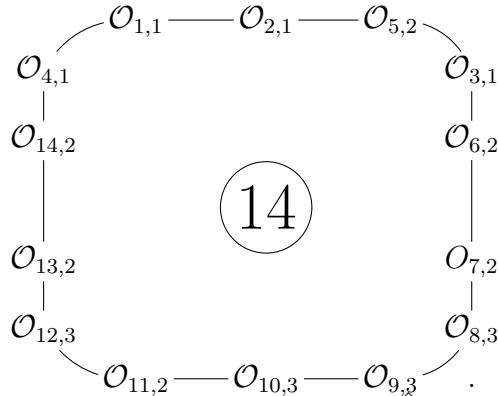
Postępując zgodnie z algorytmem 7.2.1, rozpoczynamy budowanie kołczanu $\Phi_{A'}$ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_{A'})$ od następującego $\Phi_{A'}$ -oczka szerokości dwa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{1,1} : & & 0\hat{1}00000 \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathcal{O}_{2,1} : & 0010000 & \dots \dots \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \\ & \searrow & \nearrow \\ \mathcal{O}_{5,2} = \mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_{2,1} : & & \hat{1}00\hat{1}\hat{1}\hat{1}0 \end{array} .$$

Stosując toroidalny algorytm oczkowy do tego $\Phi_{A'}$ -oczka uzyskamy następujący kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy

- $\mathcal{O}_{1,1}$: 0**0**10000 ··· 0000000 ··· 0000000 ··· 0111110 ··· 0000000 ··· 0111100 ··· 0000000 ··· 0000000 ··· 0110000 ··· 0000000 ··· 0111110 ··· 0111111 ··· 0000000 ··· 0111000 ···
- $\mathcal{O}_{2,1}$: 0010000 ··· 0**0**00000 ··· 0001111 ··· 0000010 ··· 0000011 ··· 0011100 ··· 0000000 ··· 0111110 ··· 0000000 ··· 0111110 ··· 0000010 ··· 0000011 ··· 0011000 ···
- $\mathcal{O}_{5,2}$: 0**0**01110 ··· 0110001 ··· 0111121 ··· 0111211 ··· 0122100 ··· 0110000 ··· 0001110 ··· 0100001 ··· 0111110 ··· 0111121 ··· 0111211 ··· 0122100 ··· 0110000 ··· 0100000 ···
- $\mathcal{O}_{3,1}$: 0001110 ··· 0000001 ··· 0000011 ··· 0000100 ··· 0011000 ··· 0100000 ··· 0110000 ··· 0001110 ··· 0000001 ··· 0000011 ··· 0000100 ··· 0011000 ··· 0100000 ··· 0110000 ···
- $\mathcal{O}_{6,2}$: 1000001 ··· 0110011 ··· 0111210 ··· 0122111 ··· 0211100 ··· 0010000 ··· 0101110 ··· 0000001 ··· 0110011 ··· 0111210 ··· 0122111 ··· 0211100 ··· 0010000 ··· 0101110 ···
- $\mathcal{O}_{7,2}$: 1100001 ··· 0110011 ··· 0001210 ··· 0011001 ··· 0100011 ··· 0110100 ··· 0012110 ··· 0100001 ··· 0110011 ··· 0001210 ··· 0011001 ··· 0100011 ··· 0110100 ··· 0012110 ···
- $\mathcal{O}_{8,3}$: 1210011 ··· 0012100 ··· 0121001 ··· 0211101 ··· 0010111 ··· 0101010 ··· 0110011 ··· 0210011 ··· 0012100 ··· 0211101 ··· 0010111 ··· 0101010 ··· 0110011 ···
- $\mathcal{O}_{9,3}$: 1101011 ··· 0101210 ··· 0121001 ··· 0101101 ··· 0110101 ··· 0012121 ··· 0100101 ··· 0101011 ··· 0101210 ··· 0121001 ··· 0101101 ··· 0110101 ··· 0012121 ··· 0100101 ···
- $\mathcal{O}_{10,3}$: 1012210 ··· 0221001 ··· 0101101 ··· 0000101 ··· 0101011 ··· 0111010 ··· 0210111 ··· 0101210 ··· 0221001 ··· 0101101 ··· 0000101 ··· 0101011 ··· 0111010 ··· 0210111 ···
- $\mathcal{O}_{11,2}$: 1101110 ··· 0110001 ··· 0001101 ··· 0000101 ··· 0011011 ··· 0100100 ··· 0101000 ··· 0101110 ··· 0110001 ··· 0001101 ··· 0000101 ··· 0011011 ··· 0100100 ··· 0101000 ···
- $\mathcal{O}_{12,3}$: 1221101 ··· 0112101 ··· 0100101 ··· 0111011 ··· 0101010 ··· 0210110 ··· 0102221 ··· 0221101 ··· 0112101 ··· 0100101 ··· 0111011 ··· 0101010 ··· 0210110 ··· 0102221 ···
- $\mathcal{O}_{13,2}$: 1110010 ··· 0001001 ··· 0011101 ··· 0111011 ··· 0010100 ··· 0100110 ··· 0101111 ··· 0110010 ··· 0001001 ··· 0011101 ··· 0111011 ··· 0010100 ··· 0100110 ··· 0101111 ···
- $\mathcal{O}_{14,2}$: 0112110 ··· 0100001 ··· 0000111 ··· 0110100 ··· 0100110 ··· 0111111 ··· 0221100 ··· 0112110 ··· 0100001 ··· 0000111 ··· 0110100 ··· 0100110 ··· 0111111 ··· 0221100 ···
- $\mathcal{O}_{4,1}$: 0001000 ··· 0001110 ··· 0111111 ··· 0001000 ··· 0000110 ··· 0011111 ··· 0111100 ··· 0001000 ··· 0001110 ··· 0111111 ··· 0001000 ··· 0000110 ··· 0011111 ··· 0111100 ···
- $\mathcal{O}_{1,1}$: 0100000 ··· 0000000 ··· 0111110 ··· 0001111 ··· 0111100 ··· 0111000 ··· 0100000 ··· 0000000 ··· 0100000 ··· 0111110 ··· 0111111 ··· 0001110 ··· 0111000 ··· 0100000 ···

którego schemat orbit ma kształt



Stosując algorytmu 7.2.1 wyznaczyliśmy wektory $v' = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $w' = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^7$. Zatem macierz

$$B = \begin{bmatrix} -\Phi_{A'}^{-3}(w') \\ -\Phi_{A'}^{-1}(w') \\ \Phi_{A'}^{-1}(v') \\ v' \\ -w' \\ -\Phi_{A'}^{-2}(w') \\ -\Phi_{A'}^{-4}(w') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})_D,$$

zgodnie z algorytmem 7.2.2.

PRZYKŁAD 7.2.4. Niech $n = 7$, $D = \mathbb{A}_7$, $F(t) = F_{\mathbb{A}_7}^{(2)}(t) = t^7 + 1$, oraz niech

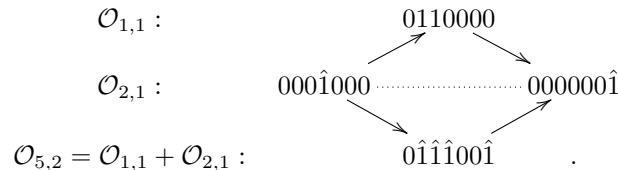
$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_7}^F.$$

Oczywiście $A'' \in \mathbf{Mor}_D$ jest morsyfikacją grafu $D = \mathbb{A}_7$, $\det A'' = 4$ oraz $\mathbf{c}_{A''} = 14$.

Aby skonstruować kołczan $\Phi_{A''}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}''_D, \Phi_{A''})$ postaci (6.2.4) rozważmy cztery $\Phi_{A''}$ -orbitę po 14 pierwiastków każda

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1} &: \dots 1000000 \dots 0110000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0111000 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 0111100 \dots 0\hat{1}00000 \dots \\ &\dots \hat{1}000000 \dots 0\hat{1}\hat{1}0000 \dots 0111111 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}000 \dots 0111110 \dots 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots 0100000 \dots \\ \mathcal{O}_{2,1} &: \dots 0010000 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0001000 \dots 0000001 \dots 0000100 \dots 0011110 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots \\ &\dots 00\hat{1}0000 \dots 1111111 \dots 000\hat{1}000 \dots 000000\hat{1} \dots 0000\hat{1}00 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 1111100 \dots \\ \mathcal{O}_{3,1} &: \dots 1100000 \dots 1110000 \dots 000\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0000\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots 0000\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 00000\hat{1}\hat{0} \dots 0011100 \dots \\ &\dots \hat{1}\hat{1}00000 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}0000 \dots 0001111 \dots 0000111 \dots 0000110 \dots 0000010 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}00 \dots \\ \mathcal{O}_{4,1} &: \dots 1111000 \dots 000\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 00000\hat{1}\hat{1} \dots 0011000 \dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots 0001100 \dots 0011111 \dots \\ &\dots \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}000 \dots 0001110 \dots 0000011 \dots 00\hat{1}\hat{1}000 \dots 1111110 \dots 000\hat{1}\hat{1}00 \dots 00\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \end{aligned}$$

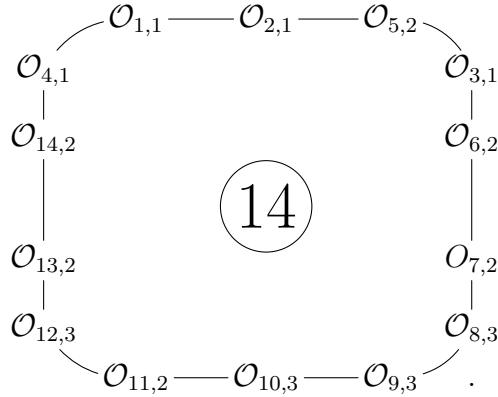
Postępując zgodnie z algorytmem 7.2.1, rozpoczynamy budowanie kołczanu $\Phi_{A''}$ -oczkowego $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}''_D, \Phi_{A''})$ od następującego $\Phi_{A''}$ -ocзка szerokości dwa



Stosując toroidalny algorytm oczkowy do tego $\Phi_{A''}$ -ocзка uzyskamy następujący kołczan $\Phi_{A''}$ -oczkowy

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1} : & \quad 0110000 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0111000 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0111100 \cdot 0\hat{1}00000 \cdot \hat{1}000000 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0111111 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0111110 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0100000 \cdot \hat{1}000000 \dots \\ \mathcal{O}_{2,1} : & \quad 000\hat{1}000 \cdot 00000\hat{1} \cdot 0000100 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 1111100 \cdot 0\hat{1}00000 \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0001000 \cdot 000000\hat{1} \cdot 0000100 \cdot 0011110 \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0010000 \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{5,2} : & \quad 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1} \cdot 0111010 \cdot 0\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0110010 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{3,1} : & \quad 0000110 \cdot 0000010 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot 000\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0000\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0000\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0000010 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot 0001111 \cdot 0000111 \dots \\ \mathcal{O}_{6,2} : & \quad 0111121 \cdot 0\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot 0110110 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots \\ \mathcal{O}_{7,2} : & \quad 0001121 \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot 000\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \dots \\ \mathcal{O}_{8,3} : & \quad 0\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{9,3} : & \quad \hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{10,3} : & \quad 0101221 \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{11,2} : & \quad 0001221 \cdot 0000121 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot 000\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1} \cdot 0000\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{12,3} : & \quad 0100121 \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{3}\hat{2}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{3}\hat{2}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{13,2} : & \quad 0011221 \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1} \cdot 000\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{14,2} : & \quad \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{2}\hat{2}\hat{1}\hat{1} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \dots \\ \mathcal{O}_{4,1} : & \quad \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot 0001110 \cdot 0000011 \cdot 0001000 \cdot 1111110 \cdot 0001100 \cdot 0011111 \cdot 1111000 \cdot 0001110 \cdot 0000011 \cdot 0011000 \cdot \hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0001100 \cdot 0011111 \dots \\ \mathcal{O}_{1,1} : & \quad 0110000 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1} \cdot 0111000 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0111100 \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0111111 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0111110 \cdot 0\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{1}\hat{0} \cdot 0\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \cdot \hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{0} \dots \end{aligned}$$

którego schemat orbit ma kształt



Stosując algorytmu 7.2.1 wyznaczyliśmy wektory $v'' = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $w'' = (0, 0, 0, \hat{1}, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^7$. Zatem macierz

$$B = \begin{bmatrix} -\Phi_{A''}^{-3}(w'') \\ -\Phi_{A''}^{-1}(w'') \\ \Phi_{A''}^{-1}(v'') \\ v'' \\ -w'' \\ -\Phi_{A''}^{-2}(w'') \\ -\Phi_{A''}^{-4}(w'') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})_D,$$

zgodnie z algorytmem 7.2.2.

PRZYKŁAD 7.2.5. Niech $n = 7$, $D = \mathbb{A}_7$, $F(t) = F_{\mathbb{A}_7}^{(2)}(t) = t^7 + 1$ oraz niech $A = A_7^{(2)}$, $A', A'' \in \text{Mor}_{\mathbb{A}_7}^F \subseteq \text{M}_7(\mathbb{Z})$ będą morsyfikacjami grafu \mathbb{A}_7 postaci odpowiednio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A'' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z algorytmów 7.2.1 oraz 7.2.2 wyznaczamy wektory $v' = (0, \hat{1}, 0, 0, 0, 0, 0)$, $w' = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $v'' = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $w'' = (0, 0, 0, \hat{1}, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^7$, oraz macierze

$$B' = \begin{bmatrix} -\Phi_{A'}^{-3}(w') \\ -\Phi_{A'}^{-1}(w') \\ \Phi_{A'}^{-1}(v') \\ v' \\ -w' \\ -\Phi_{A'}^{-2}(w') \\ -\Phi_{A'}^{-4}(w') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})_D,$$

$$B'' = \begin{bmatrix} -\Phi_{A''}^{-3}(w'') \\ -\Phi_{A''}^{-1}(w'') \\ \Phi_{A''}^{-1}(v'') \\ v'' \\ -w'' \\ -\Phi_{A''}^{-2}(w'') \\ -\Phi_{A''}^{-4}(w'') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})_D.$$

Zauważmy, że macierze B' oraz B'' zostały obliczone zgodnie z algorytmem 7.2.2 tak, by

$$A = A_7^{(2)} = B' \cdot A' \cdot (B')^{tr},$$

$$A = A_7^{(2)} = B'' \cdot A'' \cdot (B'')^{tr},$$

Stąd wynika, że dla macierzy

$$B = (B')^{-1} \cdot B'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})_D$$

spełniona jest równość $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$. Stąd wynika, że morsyfikacje $A', A'', A_7^{(2)} \in \mathbf{Mor}_D$ leżą w jednej $\text{Gl}(7, \mathbb{Z})_D$ -orbicie.

8. Przegląd stosowanych algorytmów oraz analiza ich złożoności obliczeniowej

Oprócz wyników teoretyczno-klasyfikacyjnych uzyskanych w rozprawie, drugim z głównych osiągnięć tej rozprawy jest stworzenie biblioteki algorytmów symbolicznych, numerycznych i kombinatorycznych stanowiących podstawowe narzędzia techniczne używane w analizie spektralnej Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli.

Ponieważ ta dziedzina matematyki dyskretnej znajduje się w fazie początkowego rozwoju, więc nie ma jeszcze gotowych bibliotek (w dostępnych obecnie systemach algebry komputerowej) pozwalających realizować zadania obliczeniowe i eksperymentalne wynikające z realizowanych badań teoretycznych tej teorii. Stworzenie biblioteki gotowych narzędzi obliczeniowych pozwoli na usprawnienie przyszłych badań oraz na poszerzenie ich zakresu. Przygotowanie implementacji algorytmów powinno również wywołać dyskusję nad ich złożonością obliczeniową, a także docelowo skutkować ich optymalizacją.

Pierwsza część algorytmów używanych w rozprawie i przedstawionych w tym rozdziale jest modyfikacją stosowanych wcześniej algorytmów przez innych badaczy zajmujących się tą problematyką oraz algorytmiczną teorią grafów.

Druga część z nich zawiera algorytmy autorskie (3.2.11, 3.2.13, 7.1.1, 7.1.2, 7.2.1, 7.2.2) powstałe na użytek tej rozprawy. Zostały one przedstawione w odpowiednich rozdziałach rozprawy i poprzedzone teoretyczną analizą rozwiązywanych problemów wraz z optymalizacją procesu obliczeń uzyskaną przez sformułowanie i dowody odpowiednich twierdzeń (3.1.9, 3.2.8–3.2.10, 3.2.18).

Biblioteka ta jest napisana i stosowana w języku C++, natomiast rozwiązanie prototypowe zostało przygotowane częściowo w programie Maple. Stosuje się w niej zarówno obliczenia symboliczne, jak też numeryczne. Optymalizację procesu obliczeń uzyskujemy w następujący sposób:

- zastępując obliczenia symboliczne poprzez obliczenia numeryczne (w obszarach nie wpływających na poprawność wyników),
- wybierając metody eksperymentalnie najefektywniejsze dla danych wejściowych, np. wybór sposobu odwracania macierzy (3.2.4),
- stosując zaawansowane wyniki teoretyczne pozwalające na przeszukiwanie zbiorów mniej licznych (zobacz twierdzenie 3.2.8),
- zrównoleglając obliczenia.

W podrozdziale 8.2 przedstawiamy dyskusję na temat pesymistycznej złożoności obliczeniowej autorskich algorytmów 3.2.11, 3.2.13, 7.1.1, 7.1.2, 7.2.1 i 7.2.2. Pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmów 7.1.1, 7.1.2, 7.2.1 i 7.2.2 jest wielomianowa, natomiast algorytmy 3.2.11 i 3.2.13 posiadają wykładniczą złożoność obliczeniową. Po niezbyt głębokiej analizie złożoności

tych algorytmów skłaniamy się do przypuszczenia, że są to problemy NP-trudne (ang. *non-deterministic polynomial time hardness*); niestety nie potrafimy tego faktu udowodnić. Problem ten będzie przedmiotem naszych dalszych badań.

8.1. Algorytmy i procedury pomocnicze

(8.1.1) Algorytm inflacyjny (dodatek A.1) - algorytm opisuje przyporządkowanie dowolnemu spójnemu, dodatniemu grafowi krawędziowo-dwudzielnemu Δ bez pętli jednego z jednorodnych diagramów Dynkina $D\Delta$ (zobacz tabela 1). Ponadto algorytm oblicza \mathbb{Z} -odwracalną macierz definiującą słabą \mathbb{Z} -równoważność Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D\Delta$. Zastosowanie go pozwala na redukcję badania pewnych własności spójnych, dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych do badania pewnych własności dla jednorodnych diagramów Dynkina (zobacz dowód twierdzenia 4.1.2).

(8.1.2) Algorytm Sylwestera (dodatek A.2) - algorytm pozwala na zbadanie dodatniej określoności bigrafu Δ w terminach jego symetrycznej macierzy Grama.

(8.1.3) Algorytm ograniczonego zliczania (dodatek A.3) - skonstruowany w [69, Algorithm 4.2] algorytm oblicza zbiór \mathcal{R}_{Δ} pierwiastków dowolnego dodatniego grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ .

(8.1.4) Algorytm sprawdzający spójność bigrafów (dodatek A.4) - algorytm oparty został na klasycznym algorytmie przeszukiwania grafu w głąb tj. *DFS* (ang. *Depth-first search*), pozwala na określenie spójności bigrafu Δ w terminach jego niesymetrycznej macierzy Grama.

(8.1.5) Algorytm Lagrange'a (dodatek A.5) - algorytm sprowadza formę kwadratową $q(x)$ do postaci kanonicznej Lagrange'a co pozwala na sprawdzenie określoności formy i wyznaczenie zbioru jej pierwiastków.

8.2. Algorytmy i procedury autorskie

Jednymi z głównych osiągnięć tej rozprawy są następujące algorytmy autorskie:

(8.2.1) obliczające zbiór morsyfikacji \mathbf{Mor}_D (3.2.11),

(8.2.2) obliczające grupę izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D (3.2.13), a także

(8.2.3) algorytmy symboliczne konstruujące, dla dowolnej pary morsyfikacji $A, A' \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ leżących w tej samej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{A}_n}$ -orbicie, pewną macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taką, że $A' = A * B^{tr}$ (7.1.1, 7.1.2, 7.2.1, 7.2.2).

Przypomnijmy z rozdziałów 3 i 4, że:

- algorytm 8.2.1 stosuje się do obliczenia zbiorów $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, \mathcal{Cox}_D , $\widehat{\mathcal{CPol}}_D$, dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina D (efektywnie uzyskano wyniki dla $n = |D_0| \leq 9$ wierzchołków). Algorytm jest również stosowany w dowodzie wniosku 3.2.18 o $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -cykliczności zbioru \mathbf{Mor}_D^F oraz w dowodzie twierdzenia 4.1.2 podającego pełną klasyfikację spójnych dodatnich grafów oznakowanych o $n \leq 9$ wierzchołkach z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$;

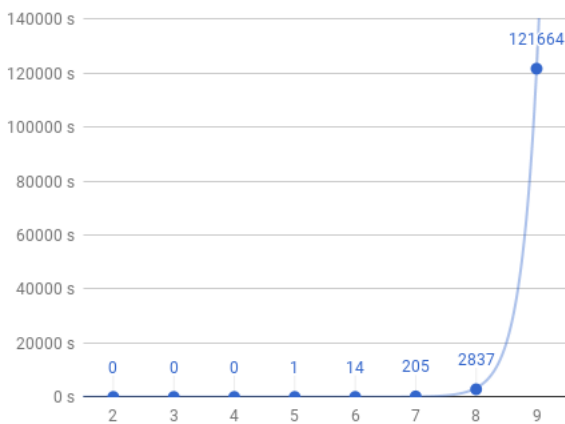
- algorytm 8.2.2 stosuje się do obliczenia skończonej grupy izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ dla dowolnego jednorodnego diagramu Dynkina D oraz w dowodzie wniosku 3.2.18 o $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$ -cykliczności zbioru \mathbf{Mor}_D^F ;
- algorytmy 8.2.3 stosuje się do skonstruowania dla dowolnej pary morsyfikacji $A, A' \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{A}_n}$ leżących w tej samej $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{A}_n}$ -orbicie, pewnej macierzy $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ takiej, że $A' = A * B^{tr} := B \cdot A \cdot B^{tr}$. Algorytmy wykorzystują toroidalny algorytm oczkowy opisany w paragrafie 6.3.

W rozprawie przedstawiona jest metoda budowania algorytmów znajdujących macierz $B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$, a także algorytmy dla wybranych serii macierzowych morsyfikacji diagramu Dynkina \mathbb{A}_n (7.1.1, 7.1.2, 7.2.1, 7.2.2). Algorytmy są zaimplementowane w języku C++. Język C++ został wybrany ponieważ jest to kompilowalny i obiektowy język wysokiego poziomu dla którego istnieją niezwykle wydajne zbiory narzędzi (np. biblioteka `Eigen`¹) realizujące bazowe obliczenia algebry komputerowej.

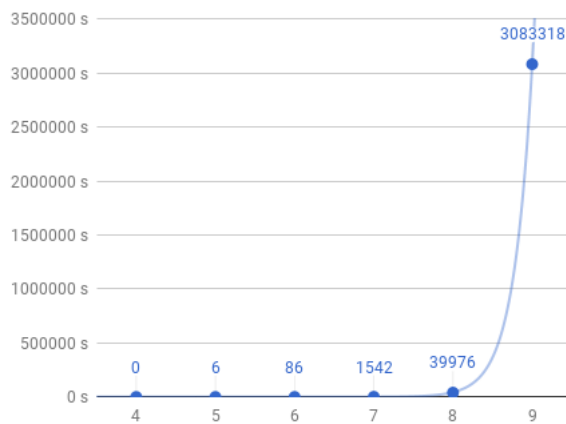
Uzyskane wyniki otrzymaliśmy przeprowadzając obliczenia na serwerze wyposażonym w 4, 4-rdzeniowe procesory Intel XeonE7520, 1.87GHz (technologia HT, ang. *Hyper-Threading Technology*), łącznie 32 wątki, gdzie równoległe obliczenia prowadzone były na 12 wątkach. Liczba 12 wątków na których prowadzone były równoległe obliczenia wynika wyłączenie z przydzielonej do tego celu mocy obliczeniowej serwera. Metoda zrównoleglania obliczeń pozwala na przeprowadzenie równoległych obliczeń na znacznie większej liczbie wątków. Przykładowo, dla algorytmu 8.2.1, każdy wątek przeprowadza obliczenia z ustalonym pierwszym wierszem macierzy, stąd równoległe obliczenia mogą być przeprowadzone na $|\mathcal{R}_D| - 1$ wątkach (np. dla diagramu Dynkina \mathbb{A}_{10} , $|\mathcal{R}_D| - 1 = 10 \cdot 11 - 1 = 109$).

Autorskie algorytmy 8.2.1 i 8.2.2 mają wykładniczą pesymistyczną złożoność obliczeniową, co potwierdzają wyniki eksperymentalne.

Wykres 8.2.4. Czas działania algorytmu 8.2.1 dla jednorodnego diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$, $2 \leq n \leq 9$.



Wykres 8.2.5. Czas działania algorytmu 8.2.1 dla jednorodnego diagramu Dynkina $D = \mathbb{D}_n$, $4 \leq n \leq 9$.



¹<http://eigen.tuxfamily.org/>

W dalszej części tego rozdziału przypominamy kolejno algorytmy 3.2.11, 3.2.13, 7.1.1 i 7.1.2 oraz przedstawimy oszacowanie ich pesymistycznej złożoności obliczeniowej. Analiza dla algorytmów 7.2.1 i 7.2.2 pokrywa się z oszacowaniem złożoności obliczeniowej dla algorytmów 7.1.1 i 7.1.2.

ALGORYTM 3.2.11 (ALGORYTM OBLICZAJĄCY ZBIÓR MORSYFIKACJI \mathbf{Mor}_D).

Dane wejściowe. Liczba całkowita $n \geq 2$ oraz niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_D = [d_{ij}^D] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (2.1.11), gdzie D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1.

Wynik. Zbiór $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$ wszystkich wymiernych morsyfikacji $A \in \widehat{\mathbf{Mor}}_D$ diagramu D , wraz z ich wielomianami Coxetera $\text{cox}_A(t)$, liczbami Coxetera \mathbf{c}_A oraz wyznacznikami $\det A$.

KROK 1°: Wyznacz symetryczną macierz Grama G_D oraz zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_D := \mathcal{R}_D(1) = \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_D \cdot v^{tr} = 1\}$.

KROK 2°: Dla $i = 1, \dots, n$ wyznacz podzbiory

$${}^i\mathcal{R}_D^+ := \{(r_1, \dots, r_n) = r \in \mathcal{R}_D^+ \subset \mathcal{R}_D; r_i > 0, r_{i+1} = \dots = r_n = 0\}.$$

KROK 3°: Skonstruuj generyczną macierz $C = \begin{bmatrix} c^{(1)} \\ \vdots \\ c^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

KROK 4°: Dla $i = 1, \dots, n$, zastąp pusty wiersz $c^{(i)}$, kolejno przez elementy ze zbioru $\mathcal{R}_D \setminus \{c^{(1)}, \dots, c^{(i-1)}, -c^{(1)}, \dots, -c^{(i-1)}, e_i\}$. Jeżeli po uzupełnieniu $c^{(i)}$, nie jest spełniony warunek ${}^i\mathcal{R}_D^+ \cdot C \subseteq \mathcal{R}_D$, wówczas dokonaj kolejnego z możliwych podstawień $c^{(i)}$, w przeciwnym wypadku idź do kroku 5°.

KROK 5°: Jeżeli $\det(E - C) \neq 0$ oraz $G_D = G_D \cdot (E - C)^{-1} + (E - C)^{-tr} \cdot G_D$, wówczas dodaj macierz $A = \xi_D(C) = 2G_D \cdot (E - C)^{-1}$ do zbioru $\widehat{\mathbf{Mor}}_D$, wylicz jej liczbę Coxetera \mathbf{c}_A , wyznacznik $\det A$ oraz wielomian Coxetera $\text{cox}_A(t)$, następnie wróć do kroku 4° z nowym podstawieniem.

O pesymistycznej złożoności obliczeniowej algorytmu 3.2.11.

Złożoność czasowa algorytmu 3.2.11 jest zdominowana przez moc przeszukiwanego zbioru macierzy tj. realizację kroków 4°–5°. Naiwne wyznaczenie w kroku 1° skończonego zbioru \mathcal{R}_D pierwiastków diagramu D również posiada dużą złożoność obliczeniową. Zbiór \mathcal{R}_D zawiera jednak elementy znanej postaci (zobacz twierdzenie 2.1.18), stąd można go wyznaczyć w czasie $\mathcal{O}(n^2)$ wykorzystując wzory na pierwiastki. Dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina $D = (D_0, D_1)$ o $n \geq 2$ wierzchołkach, moc przeszukiwanego zbioru macierzy wynosi

$$(|\mathcal{R}_D| - 1) \cdot (|\mathcal{R}_D| - 3) \cdot \dots \cdot (|\mathcal{R}_D| - (2n - 1)) = \prod_{i=1}^n (|\mathcal{R}_D| - (2i - 1)) < |\mathcal{R}_D|^n.$$

Na podstawie twierdzenia 2.1.18 moc przeszukiwanego zbioru dla poszczególnych jednorodnych diagramów Dynkina D jest następująca:

D	$ \mathcal{R}_D $	moc przeszukiwanego zbioru
\mathbb{A}_n	$n(n+1)$	$\prod_{i=1}^n [n(n+1) - (2i-1)] < n^n(n+1)^n$
\mathbb{D}_n	$2n(n-1)$	$\prod_{i=1}^n [2n(n-1) - (2i-1)] < (2n)^n(n-1)^n$
\mathbb{E}_6	72	81 990 962 235
\mathbb{E}_7	126	336 596 504 619 375
\mathbb{E}_8	240	8 379 649 774 868 612 625

Dla każdej macierzy C z przeszukiwanego zbioru wykonujemy operacje:

- obliczenie wyznacznika $\det(E - C)$ w czasie $\mathcal{O}(n^3)$,
- sprawdzenie czy uzyskany wyznacznik jest różny od zera w czasie $\mathcal{O}(1)$,
- obliczenie macierzy $G'_D = G_D \cdot (E - C)^{-1} + (E - C)^{-tr} \cdot G_D$ w czasie $\mathcal{O}(n^3)$,
- sprawdzenie czy $G_D = G'_D$ w czasie $\mathcal{O}(n^2)$.

Jeżeli macierz spełnia wymagane kryteria, wówczas wykonujemy dodatkowe operacje:

- obliczenie macierzy morsyfikacji $A = \xi_D(C) = 2G_D \cdot (E - C)^{-1}$ w czasie $\mathcal{O}(n^3)$,
- wyliczenie liczby Coxetera c_A w czasie $\mathcal{O}(|\mathcal{R}_D| \cdot n^3)$,
- wyliczenie wyznacznika $\det A$ w czasie $\mathcal{O}(n^3)$,
- wyliczenie wielomianu Coxetera $\text{cox}_A(t)$ w czasie $\mathcal{O}(n^3)$.

Wniosek końcowy. (a) Krok 5° można wykonać w czasie co najwyżej wielomianowym $\mathcal{O}(|\mathcal{R}_D| \cdot n^3)$.

(b) Przeprowadzona analiza pokazuje, że cały algorytm 3.2.11 ma pesymistyczną wykładniczą złożoność obliczeniową

$$\mathcal{O}(|\mathcal{R}_D|^{n+1} \cdot n^3).$$

ALGORYTM 3.2.13 (ALGORYTM OBLICZAJĄCY GRUPĘ IZOTROPII $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$).

Dane wejściowe. Liczba całkowita $n \geq 2$ oraz niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_D = [d_{ij}^D] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (2.1.11), gdzie D jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $\{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1.

Wynik. Grupa izotropii $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

KROK 1°: Wyznacz symetryczną macierz Grama $G_D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ oraz zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_D := \mathcal{R}_D(1) = \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot G_D \cdot v^{tr} = 1\}$.

KROK 2°: Dla $i = 1, \dots, n$ wyznacz podzbiory

$${}_i\mathcal{R}_D^+ := \{(r_1, \dots, r_n) = r \in \mathcal{R}_D^+ \subset \mathcal{R}_D; r_i > 0, r_{i+1} = \dots = r_n = 0\}.$$

KROK 3°: Skonstruuj generyczną macierz $B = [\kappa^{(1)} \dots \kappa^{(n)}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ o kolumnach $\kappa^{(1)}, \dots, \kappa^{(n)}$.

KROK 4°: Dla $i = 1, \dots, n$, zastąp pustą kolumnę $\kappa^{(i)}$, kolejno przez elementy ze zbioru $\mathcal{R}_D \setminus \{\kappa^{(1)}, \dots, \kappa^{(i-1)}, -\kappa^{(1)}, \dots, -\kappa^{(i-1)}\}$. Jeżeli po uzupełnieniu $\kappa^{(i)}$, nie jest spełniony warunek ${}_i\mathcal{R}_D^+ \cdot B^{tr} \subseteq \mathcal{R}_D$, wówczas dokonaj kolejnego z możliwych podstawień $\kappa^{(i)}$, w przeciwnym wypadku idź do kroku 5°.

KROK 5°: Jeżeli $G_D = B^{tr} \cdot G_D \cdot B$, wówczas dodaj macierz B do zbioru $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})_D$, następnie wróć do kroku 4° z nowym podstawieniem.

O pesymistycznej złożoności obliczeniowej algorytmu 3.2.13.

Analogicznie do algorytmu 3.2.11 złożoność czasowa algorytmu 3.2.13 jest zdominowana przez moc przeszukiwanego zbioru macierzy tj. realizację kroków 4°–5°. Dla każdego z jednorodnych diagramów Dynkina $D = (D_0, D_1)$ o $n \geq 2$ wierzchołkach, moc przeszukiwanego zbioru macierzy wynosi

$$|\mathcal{R}_D| \cdot (|\mathcal{R}_D| - 2) \cdot \dots \cdot (|\mathcal{R}_D| - 2(n - 1)) = \prod_{i=1}^n (|\mathcal{R}_D| - 2(i - 1)) < |\mathcal{R}_D|^n.$$

Dla każdej macierzy B z przeszukiwanego zbioru wykonujemy operacje:

- obliczenie macierzy $G'_D = B^{tr} \cdot G_D \cdot B$ w czasie $\mathcal{O}(n^3)$,
- sprawdzenie czy $G_D = G'_D$ w czasie $\mathcal{O}(n^2)$.

Wniosek końcowy. (a) Krok 5° można wykonać w czasie co najwyżej wielomianowym $\mathcal{O}(n^3)$.

(b) Przeprowadzona analiza pokazuje, że cały algorytm 3.2.13 ma pesymistyczną wykładniczą złożoność obliczeniową

$$\mathcal{O}(|\mathcal{R}_D|^n \cdot n^3).$$

ALGORYTM 7.1.1. Dane wejściowe. Liczba parzysta $n \in \mathbb{N}$ większa od 3, graf Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1, morsyfikacja $A := A_n^{(2)}$, wielomian $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n - t^{n-1} + t^{n-2} - t^{n-3} + \dots + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ oraz morsyfikacja $A' \in \mathbf{Mor}_D^F$ taka, że $F(t) = \text{cox}_{A'}(t)$.

Wynik. Kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$ postaci (6.2.4).

KROK 1°: Oblicz macierz Coxetera $\text{Cox}_{A'}$, transformację Coxetera $\Phi_{A'} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ oraz zbiór pierwiastków \mathcal{R}_D .

KROK 2°: Podziel zbiór \mathcal{R}_D na $\frac{n}{2}$ $\Phi_{A'}$ -orbity o długości $\mathbf{c}_{A'} = 2(n + 1)$ każda.

KROK 3°: Znajdź parę pierwiastków $v_{A'}, w_{A'} \in \mathcal{R}_D$ takich, że $v_{A'} \in \mathcal{O}_{i,1}, w_{A'} \in \mathcal{O}_{j,1}, i \neq j$ oraz

$$v_{A'} + \Phi_{A'}^{-(n-1)}(v_{A'}) = w_{A'} + \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'})$$

tj. wektory $v_{A'}, \Phi_{A'}^{-(n-1)}(v_{A'}), w_{A'}, \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'})$ tworzą $\Phi_{A'}$ -oczko postaci

$$\begin{array}{ccc} & v_{A'} & \\ & \nearrow & \searrow \\ w_{A'} & \cdots & \Phi_{A'}^{-1}(w_{A'}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Phi_{A'}^{-(n-1)}(v_{A'}) & \end{array} .$$

KROK 4°: Skonstruuj kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}'_D, \Phi_{A'})$, przy pomocy toroidalnego algorytmu $\Phi_{A'}$ -oczkowego (6.3.8) rozpoczynając od $\Phi_{A'}$ -oczka z kroku 3°.

O pesymistycznej złożoności obliczeniowej algorytmu 7.1.1.

W kroku 1° obliczamy macierz Coxetera $\text{Cox}_{A'}$, transformację Coxetera $\Phi_{A'}$ oraz wyznaczamy zbiór pierwiastków \mathcal{R}_D w łącznym czasie $\mathcal{O}(n^3)$. Zbiór $\mathcal{R}_D \subseteq \mathbb{Z}^n$ dla jednorodnego diagramu Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ jest znany i składa się z $n(n + 1)$ wektorów tj. z wektorów bazy standardowej $e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n$ grupy wolnej \mathbb{Z}^n oraz z wektorów postaci $e_{ij} = [0, \dots, 0, \underset{i}{1}, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0], -e_{ij} \in \mathbb{Z}^n$, dla $1 \leq i < j \leq n$.

W kroku 2° dzielimy zbiór \mathcal{R}_D składający się $n(n+1)$ elementów na $\frac{n}{2}$ $\Phi_{A'}$ -orbity o długości $\mathbf{c}_{A'} = 2(n+1)$ każda. Na wykonanie tego kroku potrzeba $\frac{n}{2} \cdot (2(n+1) - 1)$ operacji mnożenia elementów ze zbioru \mathcal{R}_D przez macierz Coxetera $\text{Cox}_{A'}$. Mnożenie działa w czasie $\mathcal{O}(n^2)$, zatem krok 2° można wykonać w czasie $\mathcal{O}(n^4)$.

Krok 3° polega na znalezieniu pary pierwiastków należących do różnych $\Phi_{A'}$ -orbit, które spełniają zadaną równość. Ponieważ liczba $\Phi_{A'}$ -orbit wynosi $\frac{n}{2}$, gdzie $n \geq 4$ jest liczbą parzystą, więc sprawdzimy maksymalnie $\binom{\frac{n}{2}}{2}$ dwuelementowych podzbiorów zbioru $\Phi_{A'}$ -orbit, gdzie

$$\binom{\frac{n}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{2! \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right)!} = \frac{\left(\frac{n}{2} - 2\right)! \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n}{2}}{2 \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right)!} = \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{\frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{\frac{n(n-2)}{4}}{2} = \frac{1}{8}(n^2 - 2n) \in \mathbb{Z},$$

gdyż $n \geq 4$. Ponadto zauważmy, że dla każdej pary orbit wykonujemy sprawdzenie równości maksymalnie $\frac{n}{2}$ razy, gdyż z własności kołczanu $\Phi_{A'}$ -oczkowego wynika, że równość będzie zachodziła również dla kolejnych $\Phi_{A'}$ -oczek. Sprawdzenie równości wykonujemy w pesymistycznym czasie $\mathcal{O}(n^3)$, gdyż n -razy mnożymy wektor przez macierz. Zatem krok 3° ma wielomianową złożoność obliczeniową równą $\mathcal{O}(n^6)$. Dodatkowe zapamiętanie macierzy $\text{Cox}_{A'}^{-1}$ i $\text{Cox}_{A'}^{-(n-1)}$ pozwala na obniżenie złożoności obliczeniowej kroku do $\mathcal{O}(n^5)$.

W kroku 4° konstruujemy kołczan $\Phi_{A'}$ -oczkowy $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_D, \Phi_{A'})$, przy pomocy toroidalnego algorytmu $\Phi_{A'}$ -oczkowego (6.3.8) rozpoczynając od $\Phi_{A'}$ -oczek z kroku 3°. Otrzymany kołczan składa się z $\mathbf{c}_{A'} = 2(n+1)$ orbit długości $\mathbf{c}_{A'}$. Do obliczenia jednej orbity potrzeba $\mathbf{c}_{A'}$ operacji mnożenia wektora przez macierz Coxetera $\text{Cox}_{A'}$, zatem cały kołczan składający się z $\mathbf{c}_{A'}$ orbit można skonstruować w czasie $\mathcal{O}(\mathbf{c}_{A'}^2 \cdot n^2) = \mathcal{O}((2(n+1))^2 \cdot n^2) = \mathcal{O}(n^4)$.

Wniosek końcowy. Przeprowadzona analiza pokazuje, że cały algorytm 7.1.1 ma pesymistyczną wielomianową złożoność obliczeniową

$$\mathcal{O}(n^5).$$

ALGORYTM 7.1.2. Dane wejściowe. Liczba parzysta $n \in \mathbb{N}$ większa od 3, graf Dynkina $D = \mathbb{A}_n$ o numeracji wierzchołków zgodnej z tabelą 1, wielomian $F(t) = F_{\mathbb{A}_n}^{(2)}(t) = t^n - t^{n-1} + t^{n-2} - t^{n-3} + \dots + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ oraz dwie morsyfikacje $A', A'' \in \mathbf{Mor}_D^F$ takie, że $F(t) = \text{cox}_{A'}(t) = \text{cox}_{A''}(t)$.

Wynik. Macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$.

KROK 1°: Korzystając z kroku 3° algorytmu 7.1.1 dla macierzy A' wyznacz wektor $v' = v_{A'}$.

KROK 2°: Korzystając z kroku 3° algorytmu 7.1.1 dla macierzy A'' wyznacz wektor $v'' = v_{A''}$.

KROK 3°: Oblicz macierz $B' := \begin{bmatrix} -\Phi_{A'}^{-(n-1)}(v') \\ \Phi_{A'}^{-(n-2)}(v') \\ \vdots \\ -\Phi_{A'}^{-3}(v') \\ \Phi_{A'}^{-2}(v') \\ -\Phi_{A'}^{-1}(v') \\ v' \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$

$$\text{KROK 4}^\circ: \text{Oblicz macierz } B'' := \begin{bmatrix} -\Phi_{A''}^{-(n-1)}(v'') \\ \Phi_{A''}^{-(n-2)}(v'') \\ \vdots \\ -\Phi_{A''}^{-3}(v'') \\ \Phi_{A''}^{-2}(v'') \\ -\Phi_{A''}^{-1}(v'') \\ v'' \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z}).$$

KROK 5^o: Macierz $B := (B'^{-1} \cdot B'') \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ taka, że $A' = B \cdot A'' \cdot B^{tr}$.

O pesymistycznej złożoności obliczeniowej algorytmu 7.1.2.

Do wyznaczenie wektorów v' i v'' wystarczy przeprowadzenie kroków 1^o-3^o algorytmu 7.1.1, dlatego złożoność obliczeniowa kroków 1^o-2^o jest wielomianowa i wynosi $\mathcal{O}(n^5)$. Kroki 3^o-4^o wykonujemy w czasie $\mathcal{O}(n^3)$, ponieważ przeprowadzamy $2n$ mnożeń wektora przez macierz (przy założeniu, że wykonana zostanie prekalkulacja macierzy $\text{Cox}_{A'}^{-1}, \dots, \text{Cox}_{A'}^{-(n-1)}$). Obliczenie macierzy $B := (B'^{-1} \cdot B'') \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ wykonujemy w czasie $\mathcal{O}(n^3)$.

Wniosek końcowy. Przeprowadzona analiza pokazuje, że cały algorytm 7.1.2 ma pesymistyczną wielomianową złożoność obliczeniową

$$\mathcal{O}(n^5).$$

8.3. Uwagi o modyfikacji głównych algorytmów

W tym paragrafie przedstawimy nowe wyniki oraz pomysły o zwiększeniu efektywności dwóch głównych stosowanych w tej rozprawie algorytmów. W okresie około dwóch lat od zredagowania oryginalnej wersji tej rozprawy pojawiły się nowe publikacje innych autorów umożliwiające istotne zmniejszenie czasu obliczeń stosowanych tu algorytmów oraz istotne uzupełnienie podanej w rozdziale 4 klasyfikacji bigrafów dodatnich. Dotyczy to przede wszystkim algorytmu inflacyjnego opisanego w dodatku A.1 oraz algorytmu obliczającego macierzowe morsyfikacje diagramów Dynkina (w szczególności diagramu \mathbb{D}_n , dla $n \geq 9$), a w rezultacie usunięcia pewnych trudności powstałych przy klasyfikacji bigrafów dodatnich typu Dynkina \mathbb{D}_n , dla $n \geq 11$.

8.3.1. O algorytmie inflacyjnym

Przypomnijmy, że algorytm inflacyjny wykorzystuje operatory inflacji typu $\mathbf{t}_a^- \Delta$ oraz $\mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ i w naszej rozprawie jest używany do obliczenia typu Dynkina $D\Delta$ spójnych bigrafów dodatnich \mathcal{UBigr}_n , a także do obliczania macierzy \mathbb{Z} -odwracalnych $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiujących słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$, tzn. spełniających równość $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B$.

Algorytm ten w oryginalnej wersji przedstawionej w publikacji promotora [70] ma co najwyżej wykładniczą złożoność obliczeniową (patrz [52]), choć można uzyskać złożoność wielomianową przez pewną jego modyfikację uzyskaną w publikacjach [50], [75, 76] oraz w następujących trzech najnowszych artykułach:

[MSZ] B. Makuracki, D. Simson and B. Zyglarski, Inflation algorithm for Cox-regular positive edge-bipartite graphs with loops, *Fund. Inform.* 153 (2017), 367–398,

[MS] B. Makuracki and D. Simson, A Gram classification of principal Cox-regular edge-bipartite graphs via inflation algorithm, *Discrete Appl. Math.* 238 (2018) pp. 12, doi: 10.1016/j.dam.2017.10.033,

[M] A. Mróz, Congruences of edge-bipartite graphs with applications to Grothendieck group recognition I. Inflation algorithm revisited, *Fund. Inform.* 146 (2016), 121–144.

W tych pracach algorytm ten stosuje się do opisywania typu Coxetera-Dynkina dodatnio określonych oraz dodatnio półokreślonych \mathbb{Z} -symetryzowalnych macierzy Cartana stosowanych od ponad pół wieku w teorii Liego (w ostatnim czasie nazywanych również macierzami quasi-Cartana).

Analogiczny problem algorytmiczny dla spójnych dodatnio określonych macierzy quasi-Cartana rozważany jest w następujących dwóch najnowszych publikacjach:

[AbRi] M. Abarca and D. Rivera, Theoretical and algorithmic characterizations of positive definite symmetric quasi-Cartan matrices, *Fund. Inform.* 149 (2016), 241–261,

[PAR] C. Perez, M. Abarca and D. Rivera, Cubic algorithm to compute the Dynkin type of positive definite quasi-Cartan matrices, *Fund. Inform.* 2017, praca przyjęta do druku.

W tych artykułach modyfikuje się nieco algorytm inflacyjny (dostosowując go do badania macierzy quasi-Cartana), tak, że przy pewnych nieistotnych ograniczeniach na dane wejściowe można uzyskać nawet złożoność liniową względem liczby inflacji. Podobne oszacowanie uzyskano w pracy [M] (zobacz [M, Theorem 4.4.(c)]).

8.3.2. Nowa koncepcja uzasadnienia głównej klasyfikacji bigrafów o co najmniej 10-ciu wierzchołkach

Przypomnijmy, że jednym z osiągnięć tej rozprawy jest podana w twierdzeniu 4.1.2 klasyfikacja spójnych bigrafów dodatnich, z dokładnością do silnej \mathbb{Z} -kongruencji Grama. Jednym z ważnych etapów tej klasyfikacji jest obliczenie zbioru orbit działania grupy izotropii diagramu Dynkina D na zbiorze \mathbf{Mor}_D jego morsyfikacji macierzowych. Pełny dowód uzyskanej klasyfikacji podany został dla bigrafów o co najwyżej 9-ciu wierzchołkach. Główne problemy zaczynają się dla bigrafów o 10-ciu wierzchołkach. Ponieważ każdy taki dodatni i spójny bigraf ma typ Dynkina \mathbb{A}_n lub \mathbb{D}_n , a wypadek typu \mathbb{A}_n rozważamy oddzielnie (można tu stosować algorytmy oczkowe i ich konsekwencje zamieszczone w artykule promotora [68]), więc możemy ograniczyć się do bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$, o $n \geq 10$ wierzchołkach, typu Dynkina $D = \mathbb{D}_n$.

Dla takich bigrafów Δ funkcję redukcji $\phi_{\mathbb{D}_n}$ (patrz 3.0.3) można ograniczyć do redukcji

$$\phi_{\mathbb{D}_n} : \mathcal{UBigr}_{\mathbb{D}_n} \rightarrow \mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_n,1},$$

gdzie $\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_n,1}$ jest podzbiorem zbioru morsyfikacji $\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_n}$ składającym się z morsyfikacji A o wyznaczniku $\det A = 1$.

Niestety, nawet ograniczenie algorytmu 3.2.11 do tego zbioru prowadzi do czasochłonnych obliczeń. Obliczenia te można znacznie uprościć i skrócić stosując nowe wyniki teoretyczne zawarte w następującej nowej pracy promotora

[S] D. Simson, A Coxeter spectral classification of positive Cox-regular edge-bipartite graphs via morsification orbits, Preprint 2017, 28 stron.

W pracy tej rozważa się bigraf $\mathbb{S}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ bez krawędzi, tzn. \mathbb{S}_n jest antyłańcuchem o n wierzchołkach. Łatwo widać, że grupa izotropii $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n}$ jest pełną grupą ortogonalną o współczynnikach całkowitych, a każdy z wierszy macierzy $C \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n}$ jest postaci $\pm e_i$. Zatem $|\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n}| = n! \cdot 2^n$. Stosując wyniki pracy [S] można wskazać macierz nieosobliwą $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ taką, że funkcja

$$\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_{n,1}} \rightarrow \mathbf{Mor}_{\mathbb{S}_n, 2^{n-2}} := \{A \in \mathbf{Mor}_{\mathbb{S}_n}; \det A = 2^{n-2}\}, \quad A \mapsto A * H,$$

definiuje bijekcję pomiędzy zbiorem $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{D}_n}$ -orbit zbioru $\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_{n,1}}$ oraz zbiorem $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n}$ -orbit zbioru $\mathbf{Mor}_{\mathbb{S}_n, 2^{n-2}}$. Zatem funkcja (3.2.7) definiuje bijekcję

$$\mathbf{Mor}_{\mathbb{S}_n, 2^{n-2}} \rightarrow \mathcal{Cox}_{\mathbb{S}_n}^4 := \{C \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n}; \det(E - C) = 4\} \subseteq \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n},$$

oraz bijekcję pomiędzy zbiorem $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n}$ -orbit w zbiorze $\mathbf{Mor}_{\mathbb{S}_n, 2^{n-2}}$ oraz zbiorem klas sprzężoności w zbiorze $\mathcal{Cox}_{\mathbb{S}_n}^4$.

WNIOSEK 8.3.1. *Opisane powyżej funkcje redukują obliczenie zbioru $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{D}_n}$ -orbit w zbiorze $\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_{n,1}}$ (oraz ich wielomianów Coxetera) do obliczenia zbioru klas sprzężoności w podzbiorze $\mathcal{Cox}_{\mathbb{S}_n}^4$ grupy $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n} = O(n, \mathbb{Z})$ (oraz ich wielomianów charakterystycznych).*

Redukcja ta prowadzi do poważnego uproszczenia obliczeń, gdyż każdy z wierszy macierzy C zbioru $\mathcal{Cox}_{\mathbb{S}_n}^4 \subseteq \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{S}_n} = O(n, \mathbb{Z})$ ma postać $\pm e_i$. Przypomnijmy, że w algorytmie 3.2.11 wierszami odpowiednich macierzy C były pierwiastki diagramu \mathbb{D}_n a jego pesymistyczna złożoność obliczeniowa wynosi $\mathcal{O}((2n)^{n+1}(n-1)^{n+1} \cdot n^3)$. Zatem redukcja pozwala na obniżenie złożoności obliczeniowej do $\mathcal{O}((2n)^{n+1} \cdot n^3)$.

Stosując redukcję opisaną we wniosku 8.3.1 zbudowaliśmy algorytm analogiczny do algorytmu 3.2.11, który (przy zrównolegleniu obliczeń) pozwala obliczyć zbiór $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})_{\mathbb{D}_n}$ -orbit w zbiorze $\mathbf{Mor}_{\mathbb{D}_{n,1}}$ (oraz ich wielomiany Coxetera) dla $n \leq 14$, a tym samym rozszerzyć zakres twierdzenia 4.1.2 o klasyfikacji spójnych bigrafów dodatnich do bigrafów o $n \leq 14$ wierzchołkach.

Dla przykładu na załączonej płycie² podajemy implementację dla $n = 9$ z czasem obliczeń 8 godzin, który jest o wiele krótszy od czasu 35 dni w tabeli 3.4.2.

Stosując redukcję opisaną we wniosku 8.3.1 potrafimy, dla ustalonego $n \geq 5$, zbudować następujące bigrafy

$$(8.3.2) \quad \mathcal{D}_{n,s} : \begin{array}{ccccccc} & & & \bullet_s & \cdots & \bullet_{s+2} & \cdots & \bullet_{s+3} & \cdots & \bullet_n \\ & & & | & & | & & & & \\ \bullet_1 & \cdots & \bullet_2 & \cdots & \bullet_{s-1} & \cdots & \bullet_{s+1} & \cdots & & \end{array}$$

typu Dynkina \mathbb{D}_n , gdzie $2 \leq s \leq \frac{n}{2}$, dla których

$$\mathrm{cox}_{\mathcal{D}_{n,s}}(t) = t^n + t^{n-s} + t^s + 1 = (t^{n-s} + 1)(t^s + 1).$$

Wydaje się wiele prawdopodobne, że dla $n \geq 5$ każdy spójny bigraf dodatni Δ typu Dynkina \mathbb{D}_n jest silnie \mathbb{Z} -kongruentny z jednym z bigrafów postaci $\mathcal{D}_{n,s}$, gdzie $2 \leq s \leq \frac{n}{2}$. Argumenty przedstawione powyżej we wniosku 8.3.1 pokazują prawdziwość tego faktu, dla $n \leq 14$. Problem ten dla $n \geq 15$ będzie przedmiotem wspólnych badań autora i promotora.

²programy/macierze_morsyfikacji_Dn_z_Sn

Dodatek A. Algorytmy

W tym rozdziale przedstawiamy znane z literatury przedmiotu algorytmy symboliczne algorytmy liniowej oraz wykorzystywane w rozprawie podstawowe algorytmy numeryczne używane w spektralnej analizie Coxetera skończonych grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o $n \geq 1$ wierzchołkach (w sensie definicji 2.1.8), a w szczególności w badaniu równoważności Grama spójnych prostych grafów oznakowanych $\Delta \equiv (\Delta, \sigma)$ w sensie definicji 2.1.1. Najczęściej przez nas wykorzystywanymi algorytmami są: algorytm Sylwestera, algorytm Lagrange'a, algorytm ograniczonego zliczania oraz algorytm testujący spójność grafów.

A.1. Algorytm inflacyjny

W tym paragrafie przypominamy algorytm inflacyjny $\Delta \mapsto D\Delta$ opisujący przyporządkowanie dowolnemu spójnemu, dodatniemu grafowi krawędziowo-dwudzielnemu $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o $n \geq 1$ wierzchołkach jeden z jednorodnych diagramów Dynkina

$$D\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$$

o $n \geq 1$ ponumerowanych wierzchołkach (zobacz tabela 1). Ponadto algorytm oblicza \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ definiującą słabą \mathbb{Z} -równoważność Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D\Delta$.

Algorytm ten został szczegółowo opisany w pracach [52] oraz [70]. Zastosowanie go pozwala na redukcję badania pewnych własności spójnych, dodatnich grafów krawędziowo-dwudzielnych do badania pewnych własności dla jednorodnych diagramów Dynkina.

Rozpoczynamy od przypomnienia podstawowych elementów algorytmu oraz uzyskanych w jego konsekwencji wniosków, które zostały opisane w pracach [3], [52], [70].

W algorytmie inflacyjnym dany jest spójny graf krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o $n \geq 1$ ponumerowanych wierzchołkach a_1, \dots, a_n utożsamianych z kolejnymi liczbami naturalnymi $1, \dots, n$.

Algorytm stosuje dwa typy operacji $\Delta \mapsto \mathbf{t}_i^- \Delta \equiv \mathbf{t}_{a_i}^- \Delta$ oraz $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ij}^- \Delta \equiv \mathbf{t}_{a_i a_j}^- \Delta$. Pierwsza z nich $\mathbf{t}_i^- : \mathcal{Bigr}_n \rightarrow \mathcal{Bigr}_n$, zwana zamianą znaków w wierzchołku $i \equiv a_i$, przyporządkowuje bigrafowi Δ bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_i^- \Delta$ otrzymany z Δ przez zamianę każdej ciągłej krawędzi incydentnej z wierzchołkiem $i \equiv a_i$ na krawędź przerywaną oraz zamianę każdej przerywanej krawędzi incydentnej z wierzchołkiem $i \equiv a_i$ na krawędź ciągłą.

Łatwo widać, że symetryczna macierz Grama otrzymanego grafu Δ' jest równa $G_{\Delta'} = G_{\Delta} * E_i^-$, gdzie $E_i^- = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Drugi typ operacji inflacyjnej $\mathbf{t}_{ij}^- : \mathcal{Bigr}_n \rightarrow \mathcal{Bigr}_n$ jest zdefiniowane przez przyporządkowanie $\Delta \mapsto \hat{\Delta} := \mathbf{t}_{ij}^- \Delta$, dla dowolnej pary wierzchołków $i < j \in \Delta_0$, takich, że $|\Delta_1^+(i, j)| > 0$ (tzn. istnieje krawędź przerywana $i \text{---} \text{---} j$). Bigraf $\hat{\Delta}$ jest zdefiniowany tak, że jego symetryczna macierz Grama jest równa $G_{\hat{\Delta}} = G_{\Delta} * E_{ij}^-$ gdzie

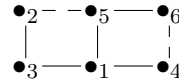
$$E_{ij}^- := \begin{cases} E - d_{ij}^{\Delta} \cdot e_{ij} & ; i < j \\ E - d_{ij}^{\Delta} \cdot e_{ji} & ; i > j \end{cases} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

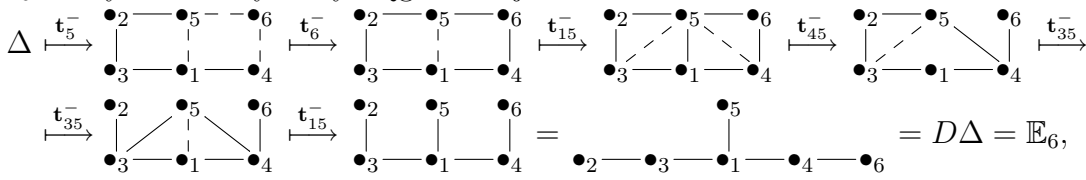
natomiast e_{ij} jest macierzą elementarną o współczynniku 1 na miejscu (i, j) oraz o współczynniku 0 na pozostałych miejscach tej macierzy.

Podstawowe własności algorytmu inflacyjnego zawarte są w następującym twierdzeniu udowodnionym w artykułach [52] oraz [70].

TWIERDZENIE A.1.1. *Jeśli $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ jest skończonym dodatnim spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_n$ bez pętli o $n \geq 1$ wierzchołkach, to istnieje jednorodny diagram Dynkina $D\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ o $n \geq 1$ ponumerowanych wierzchołkach oraz skończona sekwencja operacji inflacyjnych $\mathbf{t}_{j_1}, \mathbf{t}_{j_2}, \dots, \mathbf{t}_{j_k}$, $k \in \mathbb{N}$, opisanych powyżej dwóch typów takie, że*

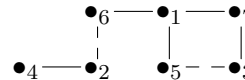
- (a) $D\Delta = \mathbf{t}_{j_k} \circ \dots \circ \mathbf{t}_{j_1}(\Delta)$, tzn. $\Delta \xrightarrow{\mathbf{t}_{j_1}} \Delta' \xrightarrow{\mathbf{t}_{j_2}} \Delta'' \xrightarrow{\mathbf{t}_{j_3}} \dots \xrightarrow{\mathbf{t}_{j_k}} D\Delta$;
- (b) istnieje słaba \mathbb{Z} -równoważność Grama $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D\Delta$.

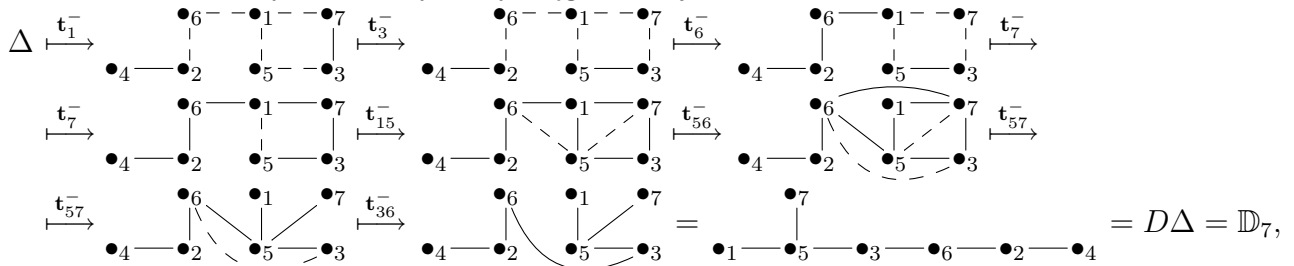
PRZYKŁAD A.1.2. Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$ jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym , to stosując algorytm inflacyjny do Δ otrzymujemy jednorodny diagram Dynkina $D\Delta = \mathbb{E}_6$. W tym celu używamy ciągu inflacji



stąd $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \mathbb{E}_6$, gdzie $B := E_5^- \cdot E_6^- \cdot E_{15}^- \cdot E_{45}^- \cdot E_{35}^- \cdot E_{15}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$.

Dodatkowo $\text{cox}_{\Delta}(t) = t^6 - t^5 + 2t^4 - t^3 + 2t^2 - t + 1 = F_{\mathbb{E}_6}^{(3)}(t)$, oraz $\mathbf{c}_{\Delta} = 6$.

PRZYKŁAD A.1.3. Jeśli $\Delta \in \mathcal{UBigr}_7$ jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym , to stosując algorytm inflacyjny do Δ otrzymujemy jednorodny diagram Dynkina $D\Delta = \mathbb{D}_7$. W tym celu używamy ciągu inflacji



$$\text{stad } \Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \mathbb{D}_7, \text{ gdzie } B := E_1^- \cdot E_3^- \cdot E_6^- \cdot E_7^- \cdot E_{15}^- \cdot E_{56}^- \cdot E_{57}^- \cdot E_{36}^- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in$$

$\text{Gl}(7, \mathbb{Z})$. Dodatkowo $\text{cox}_{\Delta}(t) = t^7 + t^5 + t^2 + 1 = F_{\mathbb{D}_7}^{(2)}(t)$, oraz $\mathbf{c}_{\Delta} = 20$.

A.2. Algorytm Sylwestera

Algorytm Sylwestera pozwala na zbadanie dodatniej określoności bigrafu Δ w terminach jego symetrycznej macierzy Grama (2.1.4) (zobacz [57]).

Dane wejściowe. Symetryczna macierz Grama $G_{\Delta} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ o $n \geq 1$ wierzchołkach.

Wynik. `true` jeśli bigraf Δ jest dodatnio określony, `false` w przeciwnym wypadku.

KROK 1°: Jeżeli $\det G_{\Delta} \leq 0$, to zwróć `false` w przeciwnym wypadku idź do kroku 2°.

KROK 2°: Dla $i = 1, \dots, n$ wyznaczyć kolejne macierze $M_i \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Q})$ powstałe z macierzy G_{Δ} przez usunięcie i -tej kolumny oraz i -tego wiersza. Jeżeli $\det M_i \leq 0$, to zwróć `false`, w przeciwnym wypadku zwróć `true`.

A.3. Algorytm ograniczonego zliczania

Następujący algorytm, zwany algorytmem ograniczonego zliczania, skonstruowano w [69, Algorithm 4.2].

Dane wejściowe. Liczba naturalna $d \geq 1$ oraz forma kwadratowa $q_{\Delta}(x)$ (2.1.13) dodatniego grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ .

Wynik. Skończony zbiór $\mathcal{R}_{\Delta}(d) := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{\Delta}(v) = v \cdot G_{\Delta} \cdot v^{tr} = d\}$ pierwiastków z liczby d .

KROK 1°: Wyznaczyć część całkowitą $EM_q \geq 1$ liczby rzeczywistej $M_q := \sqrt{\frac{d}{\inf q_{\Delta}(S^{n-1})}} \geq 1$, gdzie $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ jest sferą jednostkową w przestrzeni Euklidesa \mathbb{R}^n . Do liczenia $\inf q_{\Delta}(S^{n-1})$ używamy funkcji `NLPSolve` dostępnej w programie `Maple` w pakiecie `Optimization`.

KROK 2°: Wyznaczyć zbiór $\mathcal{R}_{\Delta}(d)$ znajdując wszystkie wektory $v \in \mathbb{Z}^n$ takie, że $q_{\Delta}(v) = d$ oraz $-EM_q \leq v_i \leq EM_q$, dla dowolnego $i = 1, \dots, n$.

A.4. Algorytm testujący spójność bigrafów

Następujący algorytm, oparty na klasycznym algorytmie przeszukiwania grafu w głąb tj. *DFS* (ang. *Depth-first search*), pozwala na określenie spójności bigrafu Δ w terminach jego niesymetrycznej macierzy Grama (2.1.3).

Dane wejściowe. Niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_{\Delta} = [d_{ij}^{\Delta}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ o $n \geq 1$ wierzchołkach.

Wynik. `true` jeśli bigraf Δ jest spójny, `false` w przeciwnym wypadku.

KROK 1°: Utworzyć pusty stos s .

KROK 2°: Utworzyć n -elementową tablicę `odwiedzona[1..n] := false`, zawierającą oznaczenie odwiedzonych wierzchołków. Ustawiamy liczbę odwiedzonych wierzchołków `licznik := 0`.

KROK 3°: Rozpoczynamy przeszukiwanie od wierzchołka 1, który umieszczamy na stosie s i oznaczamy jako odwiedzony `odwiedzona[1] := true`, `licznik := 1`.

KROK 4°: Jeżeli stos s nie jest pusty, to zdejmujemy element ze stosu $v := \text{pop}(s)$ i zwiększamy liczbę odwiedzonych wierzchołków `licznik := licznik + 1`, w przeciwnym wypadku idziemy do kroku 6°.

KROK 5°: Dla każdego nieodwiedzonego sąsiada w wierzchołka v tj. wierzchołka dla którego $d_{v,w}^\Delta \neq 0$ lub $d_{w,v}^\Delta \neq 0$ oraz `odwiedzona[w] = false` umieszczamy wierzchołek w na stosie s i oznaczamy go jako odwiedzony `odwiedzona[w] := true`, następnie wracamy do kroku 4°.

KROK 6°: Jeżeli `licznik = n`, to zwróć `true`, w przeciwnym wypadku zwróć `false`.

A.5. Algorytm Lagrange'a

W tym paragrafie przypominamy algorytm Lagrange'a opisany szczegółowo w [66, Rozdział 1.3] oraz [68, Remark 3.8] który sprowadza formę kwadratową

$$q(x) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij}x_i x_j$$

zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ do postaci kanonicznej Lagrange'a. Algorytm ten oparty jest na następującym twierdzeniu udowodnionym w monografii [66, Twierdzenie 1.32] oraz w paragrafie XII.3 monografii [57].

TWIERDZENIE A.5.1. (Lagrange'a) *Załóżmy, że $q(x) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij}x_i x_j$ jest formą kwadratową zmiennych $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, gdzie $q_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz co najmniej jedna z liczb q_{ij} jest różna od zera. Istnieją liczby rzeczywiste q'_i, s_{ij} , gdzie $i, j \in \{1, \dots, n\}$, o następujących własnościach:*

(a) *co najmniej jedna z liczb q'_1, \dots, q'_n jest różna od zera;*

(b) *macierz $S = [s_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ jest nieosobliwa;*

(c) *forma kwadratowa $q(x)$ ma postać*

$$q(x) = q'_1 \cdot (s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n)^2 + \dots + q'_n \cdot (s_{n1}x_1 + \dots + s_{nn}x_n)^2 = q'_1 \cdot z_1^2 + q'_2 \cdot z_2^2 + \dots + q'_n \cdot z_n^2,$$

gdzie $[z_1, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_n] \cdot S^{tr}$;

(d) *jeśli każda z liczb q_{ij} jest wymierna, to również każda z liczb s_{ij} oraz q'_1, \dots, q'_n jest wymierna;*

(e) *$q(x)$ jest dodatnio określona wtw. gdy $q'_1 > 0, \dots, q'_n > 0$.*

Spis cytowanej literatury

- [1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.* 20 (1973), 147–169.
- [2] B. D. Acharya, Spectral criterion for cycle balance in networks, *J. Graph Theory* 4 (1980), 1–11.
- [3] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1. Techniques of Representation Theory*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2006.
- [4] M. Barot, A characterization of positive unit forms, Part II, *Bol. Soc. Mat. Mexicana.* (3) 7 (2001), 13–22.
- [5] M. Barot and J. A. de la Peña, The Dynkin type of a non-negative unit form, *Exposition. Math.* 17 (1999), 339–348.
- [6] M. Barot and J. A. de la Peña, Root-induced integral quadratic forms, *Linear Algebra Appl.* 412 (2006), 291–302.
- [7] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, *Uspiehi Mat. Nauk*, 28 (1973), 19–33. (in Russian); English translation in *Russian Math. Surveys*, 28 (1973), 17–32.
- [8] R. Bocian, M. Felisiak and D. Simson, Numeric and mesh algorithms for the Coxeter spectral study of positive edge-bipartite graphs and their isotropy groups, *J. Comp. Appl. Math.* 259 (2014), 815–827.
- [9] R. Bocian, M. Felisiak and D. Simson, On Coxeter type classification of loop-free edge-bipartite graphs and matrix morsifications, *15th Intern. Symp. on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC13*, Timisoara, September 2013, IEEE CPS, Tokyo, 2013, 115–118.
- [10] V. M. Bondarenko, V. Futorny, T. Klimchuk, V. V. Sergeichuk and K. Yusenko, Systems of subspaces of a unitary space, *Linear Algebra Appl.* 438 (2013), 2561–2573.
- [11] V. M. Bondarenko and M. V. Steepochkina, (Min, max)-equivalency of posets and nonnegative Tits forms, *Ukrain. Mat. Zh.* 60 (2008), 1157–1167.
- [12] V. M. Bondarenko and M. V. Steepochkina, Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form, *Ukrain. Mat. Zh.* 61 (2009), 611–624
- [13] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Izd. Nauka, Moscow, 1964.
- [14] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. IV-VI, Herman & Co. Paris, 1960.

-
- [15] R. A. Brualdi and D. M. Cvetković, *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and its Application*, CRS Press (Boca Raton), 2008.
- [16] S. Butler and J. Grout, A construction of cospectral graphs for the normalized Laplacian, *Electronic J. Comb.* 18 (2011), #P231.
- [17] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, American Math. Soc. (Providence), 1997.
- [18] L. Collatz, U. Sinogowitz, Spektren endlicher Grafen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 21, 1957, 63–77.
- [19] D. M. Cvetković and S. Simić, Graph spectra in computer science, *Linear Algebra Appl.* 434 (2011), 1545–1562.
- [20] D. M. Cvetković, P. Rowlinson and S. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, London Math. Soc. Student Texts 75, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2010.
- [21] R. Diestel, *Graph Theory*, 4th Edition. Graduate Texts in Mathematics 173, Springer 2012.
- [22] J. A. Drozd, Coxeter transformations and representations of partially ordered sets, *Funkc. Anal. i Priložen.* 8 (1974), 34–42 (in Russian).
- [23] P. Dräxler, J. A. Drozd, N. S. Golovachtchuk, S. A. Ovsienko, M. Zeldych, Towards the classification of sincere weakly positive unit forms, *Europ. J. Comb.* 16 (1995), 1–16.
- [24] M. Felisiak, Computer algebra technique for Coxeter spectral study of edge-bipartite graphs and matrix morsifications of Dynkin type A_n , *Fund. Inform.* 125 (2013), 21–49.
- [25] M. Felisiak, <http://www.mat.umk.pl/~felixx/morsyfikacje.html>, dostęp: 30 kwietnia 2016 r.
- [26] M. Felisiak, <http://www.mat.umk.pl/~felixx/slabakongruencja.pdf>, dostęp: 30 kwietnia 2016 r.
- [27] M. Felisiak and D. Simson, Experiences in computing mesh root systems for Dynkin diagrams using Maple and C++, *13th Intern. Symp. on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC11*, Timisoara, September 2011, IEEE CPS, Tokyo, 2011, 83–86.
- [28] M. Felisiak and D. Simson, On computing mesh root systems and the isotropy group for simply-laced Dynkin diagrams, *14th Intern. Symp. on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC12*, Timisoara, September 2012, IEEE CPS, Tokyo, 2012, 91–97.
- [29] M. Felisiak and D. Simson, On Coxeter spectral study of edge-bipartite graphs in relation with Dynkin diagrams, *11th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, CTW 2012*, Munich, Germany, May 29–31, 125–129.
- [30] M. Felisiak and D. Simson, On combinatorial algorithms computing mesh root systems and matrix morsifications for the Dynkin diagram A_n , *Discrete Math.* 313 (2013), 1358–1367.
- [31] M. Felisiak and D. Simson, Applications of matrix morsifications to Coxeter spectral study of loop-free edge-bipartite graphs, *Discrete Appl. Math.* 192 (2015), 49–64.
- [32] P. Gabriel and A. V. Roiter, *Representations of Finite Dimensional Algebras*, Algebra VIII, Encyclopaedia of Math. Sc., Vol. 73, Springer-Verlag, 1992.

- [33] A. Garrido, Graph properties and invariants, by their associated matrices. *J. Adv. Modeling and Opt.* 11 (3) (2009), 337–348.
- [34] M. Gąsiorzek, Efficient computation of the isotropy group of a finite graph: a combinatorial approach, *15th Intern. Symp. on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC13*, Timisoara, September 2013, IEEE CPS, Tokyo, 2014, 104–111.
- [35] M. Gąsiorzek, *Obliczenia symboliczne i algorytmy kombinatoryczne w spektralnej klasyfikacji skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych*, rozprawa doktorska, Toruń, 2018.
- [36] M. Gąsiorzek and D. Simson, One-peak posets with positive Tits quadratic form, their mesh translation quivers of roots, and programming in Maple and Python, *Linear Algebra Appl.* 436 (2012), 2240–2272.
- [37] M. Gąsiorzek, D. Simson and K. Zając, Structure and a Coxeter-Dynkin type classification of corank two non-negative posets, *Linear Algebra Appl.* 469 (2015), 76–113.
- [38] M. Gąsiorzek, D. Simson and K. Zając, On Coxeter type study of non-negative posets using matrix morsifications and isotropy groups of Dynkin and Euclidean diagrams, *Europ. J. Comb.* 48 (2015), 127–142.
- [39] T. G. Gerasimova, R. A. Horn and V. V. Sergeichuk, Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one, *Linear Algebra Appl.* 431 (2009), 1620–1632.
- [40] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite Reflection Groups*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [41] F. Harary, On the notion of balance of a signed graph, *Michigan Math. J.* 2 (1953), 143–146.
- [42] H.-J. von Höhne, On weakly positive unit forms, *Comment Math. Helvetici*, 63 (1988), 312–336.
- [43] H.-J. von Höhne and J. A. de la Peña, Isotropic vectors of non-negative integral quadratic forms, *Europ. J. Comb.* 19 (1998), 621–638.
- [44] R. A. Horn and V. V. Sergeichuk, Congruences of a square matrix and its transpose, *Linear Algebra Appl.* 389 (2004), 347–353.
- [45] J. E. Humphreys, *Reflections Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [46] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [47] V. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* 56 (1980), 57–92.
- [48] S. Kasjan and D. Simson, Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, I. Mesh root systems, *Fund. Inform.* 139 (2015), 153–184.
- [49] S. Kasjan and D. Simson, Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, II. Application to Coxeter spectral analysis, *Fund. Inform.* 139 (2015), 185–209.
- [50] S. Kasjan and D. Simson, Algorithms for isotropy groups of Cox-regular edge-bipartite graphs, *Fund. Inform.* 139 (2015), 249–275.
- [51] L. Kronecker, Über complexe Einheiten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1857, 176–181.

-
- [52] J. Kosakowska, Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms, *Fund. Inform.* 119 (2012), 149–162.
- [53] J. Kunegis and S. Schmidt, Spectral analysis of signed graphs for clustering, prediction, and visualization, *SDM SIAM 2010*, 559–570.
- [54] H. Lenzing and J. A. de la Peña, Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities, In: *Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics*, ICRA XII, (ed. A. Skowroński), Series of Congress Reports, European Math. Soc. Publishing House, Zürich, 2008, 541–588.
- [55] G. Marczak, A. Polak and D. Simson, P -critical integral quadratic forms and positive forms. An algorithmic approach, *Linear Algebra Appl.* 433 (2010), 1873–1888.
- [56] R. Merris, Laplacian matrices of graphs: a survey, *Linear Algebra Appl.* 197, 198 (1994), 143–176.
- [57] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, 1965.
- [58] A. Mróz and J. A. de la Peña, Tubes in derived categories and cyclotomic factors of Coxeter polynomials of an algebra, *J. Algebra*, 420 (2014), 242–260.
- [59] S. A. Ovsienko, Integral weakly positive forms, in „Schur Matrix Problems and Quadratic Forms”, Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, Preprint 78.25 (1978), 3–17 (in Russian).
- [60] J. A. de la Peña, Algebras whose Coxeter polynomials are products of cyclotomic polynomials, *Algebras and Repr. Theory*, 17 (2014), 905–930.
- [61] A. Polak and D. Simson, Coxeter spectral classification of almost TP -critical one-peak posets using symbolic and numeric computations, *Linear Algebra Appl.* 445 (2014), 223–255.
- [62] A. Polak and D. Simson, Algorithms computing $O(n, \mathbb{Z})$ -orbits of P -critical edge-bipartite graphs and P -critical unit forms using Maple and C#, *Algebra and Discrete Mathematics*. 16 (2013), 1–40.
- [63] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [64] J. J. Seidel, Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3, *Linear Algebra Appl.* 1 (1968), 281–298.
- [65] D. Simson, *Linear Representation of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Algebra, Logic and Applications, Vol. 4, Gordon & Breach Science Publishers, 1992.
- [66] D. Simson, *Pierwiastki funkcjonalów kwadratowych, diagramy Dynkina i zbiory częściowo uporządkowane*, Wykłady monograficzne - skrypt, Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń, wrzesień 2004–kwiecień 2009.
- [67] D. Simson, Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets, *Linear Algebra Appl.* 433 (2010), 699–717.
- [68] D. Simson, Mesh algorithms for solving principal Diophantine equations, sand-glass tubes and tori of roots, *Fund. Inform.* 109 (2011), 425–462.
- [69] D. Simson, Mesh geometries of root orbits of integral quadratic forms, *J. Pure Appl. Algebra*, 215 (2011), 13–34.

-
- [70] D. Simson, A Coxeter-Gram classification of positive simply-laced edge-bipartite graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 27 (2013), 827–854.
- [71] D. Simson, Algorithms determining matrix morsifications, Weyl orbits, Coxeter polynomials and mesh geometries of roots for Dynkin diagrams, *Fund. Inform.* 123 (2013), 447–490.
- [72] D. Simson, A framework for Coxeter spectral analysis of loop-free edge-bipartite graphs, their rational morsifications and mesh geometries of root orbits, *Fund. Inform.* 124 (2013), 309–338.
- [73] D. Simson, Toroidal algorithms for mesh geometries of root orbits of the Dynkin diagram \mathbb{D}_4 , *Fund. Inform.* 124 (2013), 339–364.
- [74] D. Simson, Tame-wild Birkhoff type problems for nilpotent linear operators, *J. Algebra*, 424 (2015), 254–293.
- [75] D. Simson, Symbolic algorithms computing Gram congruences in the Coxeter spectral classification of edge-bipartite graphs, I. A Gram classification, *Fund. Inform.* 145 (2016), 19–48.
- [76] D. Simson, Symbolic algorithms computing Gram congruences in the Coxeter spectral classification of edge-bipartite graphs, II. Isotropy mini-groups, *Fund. Inform.* 145 (2016), 49–80.
- [77] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 2. Tubes and Concealed Algebras of Euclidean type*, London Math. Soc. Student Texts, Vol. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [78] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 3. Representation-Infinite Tilted Algebras*, London Math. Soc. Student Texts, Vol. 73, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2007.
- [79] D. Simson and K. Zając, A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots, *International J. Math. and Math. Sciences*, Volume 2013, Article ID 743734, 22 pages.
- [80] A. P. Wojda, A condition for a graph to contain k -matching, *Discrete Math.* 276 (2004), 375–378.
- [81] T. Zaslavsky, Signed graphs, *Discrete Appl. Math.* 4 (1982), 47–74.
- [82] Y. Zhang, Eigenvalues of Coxeter transformations and the structure of the regular components of the Auslander-Reiten quiver, *Comm. Algebra* 17 (1989), 2347–2362.
- [83] Y. Zhang, The structure of stable components, *Canad. J. Math.* 43 (1991), 652–672.