



Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marcin Gąsiorek

Obliczenia symboliczne i algorytmy
kombinatoryczne w spektralnej klasyfikacji
skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
prof. dr hab. Daniel Simson

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

luty 2018

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

27 lutego 2018 r.

data

.....

Marcin Gąsiorek

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

27 lutego 2018 r.

data

.....

prof. dr hab. Daniel Simson

Streszczenie

Przedmiotem badań przedstawionych w rozprawie jest klasyfikacja spektralna Coxetera skończonych spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych (*porządków*) I , zakodowanych w postaci macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$, przy użyciu algorytmów kombinatorycznych oraz symbolicznych. Rozważamy porządki I , których symetryczna macierz Grama $G_I := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_{|I|}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona (tzw. *porządki dodatnie*) lub dodatnio półokreślona rzędu $|I| - r$ (tzw. *porządki nieujemne korangi r*) i klasyfikujemy je z dokładnością do \mathbb{Z} -kongruencji macierzy incydencji (relacja $\approx_{\mathbb{Z}}$) oraz \mathbb{Z} -kongruencji symetrycznych macierzy Grama (relacja $\sim_{\mathbb{Z}}$).

Głównym zagadnieniem rozważanym w rozprawie jest problem istnienia niezmienników, które wyznaczają spójny nieujemny porządek I jednoznacznie, z dokładnością do relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$. Pokazujemy, że w przypadku porządków dodatnich, które mają dokładnie jeden element maksymalny (*porządków jednopikowych*) lub co najwyżej $|I| \leq 14$ elementów, takimi niezmiennikami są zespolone spektrum $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$ macierzy Coxetera $\text{Cox}_I := -C_I \cdot (C_I^{tr})^{-1} \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ oraz typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{A_{|I|}, D_{|I|}, E_6, E_7, E_8\}$ wyznaczony jednoznacznie przez I . Co więcej, pokazujemy że w przypadku rozważanych porządków dodatnich relacje $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$ są tożsame. Następnie przestawiamy analogiczne wyniki dla przypadku spójnych porządków nieujemnych korangi $r \in \{1, 2\}$. W szczególności pokazujemy, że dobrym niezmiennikiem jest w takim wypadku para $(\text{spec}_I, \text{Dyn}_I)$.

Drugim ważnym zagadnieniem rozważanym w rozprawie jest problem konstrukcji algorytmów, które wyznaczają \mathbb{Z} -odwrotną macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującą relację $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ między spójnymi nieujemnymi n -elementowymi porządkami I oraz J , tj. spełniają równość $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$. Przedstawiamy dwa algorytmy stanowiące rozwiązanie tego problemu: gwarantujący znalezienie rozwiązania algorytm wyczerpujący dla przypadku porządków dodatnich oraz algorytm heurystyczny dla przypadku ogólniejszej klasy porządków nieujemnych.

Głównymi rezultatami rozprawy są: (a) algorytmy wyznaczające macierze definiujące relację $\approx_{\mathbb{Z}}$; (b) wykazanie, że dla szerokich klas skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych prawdziwe są równoważności

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{spec}_I = \text{spec}_J \Leftrightarrow \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J;$$

(c) pełna spektralna klasyfikacja Coxetera, z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$, szerokich klas porządków skończonych; (d) pełna spektralna klasyfikacja Coxetera, z dokładnością do izomorfizmu, jednopikowych porządków dodatnich oraz nieujemnych korangi jeden.

Większość wyników przedstawionych w rozprawie została opublikowana w artykułach [45, 46, 52–56].

Słowa kluczowe: spektralna klasyfikacja Coxetera, algorytmy kombinatoryczne, algorytmy symboliczne, zbiór częściowo uporządkowany, porządek dodatni, porządek główny, porządek korangi dwa, funkcjonal kwadratowy, dodatni funkcjonal kwadratowy, nieujemny funkcjonal kwadratowy, diagram Dynkina, diagram Euklidesa, macierz Coxetera, wielomian Coxetera, spektrum Coxetera, typ Dynkina

Klasyfikacja AMS MSC2000:

06A07, 06A11, 16G20, 05C22, 05C50, 15A63, 68W30, 20B40

Klasyfikacja ACM 2012:

Mathematics of computing → Discrete mathematics → Combinatorial algorithms

Mathematics of computing → Graph theory → Spectra of graphs

Mathematics of computing → Graph theory → Graph enumeration

Mathematical analysis → Numerical analysis → Computations on matrices

Abstract

The main subject of the research presented in the dissertation is the Coxeter spectral classification of finite connected partially ordered sets (*posets*) I , encoded in the form of incidence matrices $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$, by means of symbolic and combinatorial algorithms. We consider posets I with symmetric Gram matrix $G_I := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_{|I|}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ positive definite (*positive posets*) or positive semidefinite of rank $|I| - r$ (*nonnegative posets of corank r*) and we classify them up to the \mathbb{Z} -congruence of incidence matrices (the relation $\approx_{\mathbb{Z}}$), and \mathbb{Z} -congruence of symmetric Gram matrices (the relation $\sim_{\mathbb{Z}}$).

The main problem considered in the dissertation is the problem of the existence of invariants that define a connected nonnegative poset I uniquely, up to the relation $\approx_{\mathbb{Z}}$. We show that in the case of positive posets with exactly one maximal element (i.e. *one-peak* posets) or at most $|I| \leq 14$ elements, such invariants are: the complex spectrum $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$ of the Coxeter matrix $\text{Cox}_I := -C_I \cdot (C_I^{tr})^{-1} \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ and the Dynkin type $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, uniquely associated to I . Furthermore, we show that in the case of considered positive posets the relations $\sim_{\mathbb{Z}}$ and $\approx_{\mathbb{Z}}$ coincide. Next we present analogous results for the case of connected nonnegative posets of corank $r \in \{1, 2\}$. In particular, we show that the pair $(\text{spec}_I, \text{Dyn}_I)$ is a good invariant in case of such posets.

The second important problem considered in the dissertation is the construction of algorithms, that find an \mathbb{Z} -invertible matrix $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ that defines the $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ relation between connected nonnegative poset I and J of n elements, i.e. satisfy the equality $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$. We present two algorithms that solve this problem: first one is an exhaustive search algorithm, that guarantees to find a solution in a case of positive posets and the second one is the heuristic algorithm for a more general class of nonnegative posets.

The main results of the dissertation are: (a) algorithms that construct matrices defining the relation $\approx_{\mathbb{Z}}$; (b) the proof that, for broad classes of finite connected partially ordered sets, the following relations

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{spec}_I = \text{spec}_J \Leftrightarrow \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J$$

hold; (c) a complete Coxeter spectral classification, up to the relations $\sim_{\mathbb{Z}}$ and $\approx_{\mathbb{Z}}$, of broad classes of finite partially ordered sets; (d) a complete Coxeter spectral classification, up to isomorphism, of one-peak posets that are positive or non-negative of corank 1.

The main results of the dissertation have been published in articles [45, 46, 52–56].

Keywords: Coxeter spectral classification, combinatorial algorithms, symbolic algorithms, partially ordered set, positive poset, principal poset, nonnegative poset of corank two, quadratic form, positive quadratic form, nonnegative quadratic form, Dynkin diagram, Euclidean diagram, Coxeter matrix, Coxeter polynomial, Coxeter spectrum, Dynkin type

AMS Mathematical Subject Classification 2000:

06A07, 06A11, 16G20, 05C22, 05C50, 15A63, 68W30, 20B40

ACM Computing Classification System 2012:

Mathematics of computing → Discrete mathematics → Combinatorial algorithms

Mathematics of computing → Graph theory → Spectra of graphs

Mathematics of computing → Graph theory → Graph enumeration

Mathematical analysis → Numerical analysis → Computations on matrices

Spis treści

Spis symboli	1
Wstęp	3
1. Wprowadzenie	11
1.1. Grafy. Analiza spektralna grafów	12
1.2. Grafy krawędziowo-dwudzielne i analiza spektralna Coxetera	17
1.3. Bigrafy dodatnie i nieujemne. Pierwiastki	20
1.4. Zbiory częściowo uporządkowane	24
2. Podstawowe algorytmy	33
2.1. Narzędzia obliczeniowe	33
2.2. Algorytmiczna weryfikacja określoności macierzy	36
2.3. Obliczanie zbioru pierwiastków	41
2.4. Testy wydajności	46
3. Klasyfikacja spektralna Coxetera porządków dodatnich	51
3.1. Wprowadzenie	52
3.2. Typ Coxetera-Dynkina porządków dodatnich	56
3.3. Klasyfikacja spektralna porządków dodatnich	58
3.4. Wierne jednopikowe porządki dodatnie	65
3.5. Geometrie oczkowe pierwiastków	72
3.6. Algorytmiczne generowanie porządków dodatnich	80
3.7. Dwuliniowa \mathbb{Z} -równoważność: algorytm	84
4. Klasyfikacja spektralna Coxetera porządków głównych	93
4.1. Wprowadzenie	94
4.2. Algorytmy i wyniki eksperymentalne	105
4.3. Serie jednopikowe: lematy techniczne	120
4.4. Dowody twierdzeń spektralnych	130
4.5. Klasyfikacja porządków prawie TP-krytycznych	137
4.6. Zastosowania: izomorfizm grafów skierowanych	139
5. Klasyfikacja spektralna Coxetera porządków nieujemnych korangi dwa	143
5.1. Wprowadzenie	144
5.2. Klasyfikacja kwadratowa i dwuliniowa: typ Dynkina, typ Euklidesa	146
5.3. Algorytmy i wyniki eksperymentalne	154
5.4. Twierdzenie o strukturze porządków nieujemnych korangi dwa	160
5.5. Serie jednopikowe	166
A. Grafy krawędziowo-dwudzielne oraz formy kwadratowe	175
B. Systemy pierwiastków	189
Spis cytowanej literatury	203

Spis symboli

\cong	izomorfizm: grafów, definicja 1.5, str. 13; grafów skierowanych [digrafów, kołczanów], definicja 4.67, str. 139; grafów krawędziowo-dwudzielnych [bigrafów], definicja A.2, str. 176; zbiorów częściowo uporządkowanych, definicja 1.43, str. 25
$\sim_{\mathbb{Z}}; \sim_{\mathbb{Z}}^B$	kwadratowa \mathbb{Z} -równoważność porządków, definicja 1.53, str. 28; słaba \mathbb{Z} -kongruencja Grama bigrafów, definicja A.3, str. 176
$\approx_{\mathbb{Z}}; \approx_{\mathbb{Z}}^B$	dwuliniowa \mathbb{Z} -równoważność porządków, definicja 1.53, str. 28; silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama bigrafów, definicja A.3, str. 176
$\check{\Delta}$	graf (bigraf) nieoznaczony – klasa abstrakcji grafów (bigrafów) izomorficznych z Δ , definicja 1.7, str. 13 (definicja 1.27, str. 19)
Δ	graf krawędziowo-dwudzielny [bigraf], definicja A.1, str. 175; graf prosty, definicja 1.2, str. 12
$\Delta^{(s)}$	podgraf krawędziowo-dwudzielny $\Delta^{(s)} := \Delta \setminus \{s\} \subseteq \Delta$, str. 98
$\vec{\Delta}$	graf skierowany [digraf, kołczan], definicja 4.67, str. 139
$\Delta_1^+; \Delta_1^-$	zbiór krawędzi <i>przerywanych</i> ; <i>ciągłych</i> bigrafu Δ , definicja A.1, str. 175
Δ_I	bigraf wyznaczony przez porządek I , (1.41), str. 25
Δ_q	bigraf wyznaczony przez funkcjonal $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, (A.9), str. 178
Φ_{Δ}	transformacja Coxetera bigrafu Δ , definicja A.4, str. 176
Φ_I	transformacja Coxetera porządku I , definicja 1.46, str. 26
$\Gamma(\mathcal{R}, \Phi)$	kołczan Φ -oczkowy, definicja 3.36, str. 73
Ad_{Δ}	macierz sąsiedztwa grafu Δ , definicja 1.9, str. 14
b_q	polaryzacja funkcjonału $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, (A.13), str. 180
b_I	funkcjonał dwuliniowy wyznaczający porządek I , fakt 1.38, str. 24,
Bigr	klasa wszystkich skończonych bigrafów, str. 19
\mathbb{C}	ciało liczb zespolonych, str. 11
C_I	macierz incydencji wyznaczająca porządek I , fakt 1.38, str. 24
\widehat{C}_I	macierz Titsa jednopikowego porządku I , definicja 3.3, str. 54,
$\text{cox}_{\Delta}(t)$	wielomian Coxetera bigrafu Δ , definicja A.4, str. 176
$\text{cox}_I(t)$	wielomian Coxetera porządku I , definicja 1.46, str. 26
Cox_{Δ}	macierz Coxetera bigrafu Δ , definicja A.4, str. 176
Cox_I	macierz Coxetera porządku I , definicja 1.46, str. 26
crk_I	koranga nieujemnego porządku I , definicja 1.51, str. 27
\widetilde{DI}	typ Euklidesa spójnego porządku głównego I , definicja 4.9, str. 97
$\widetilde{\widetilde{DI}}$	typ Euklidesa spójnego porządku I korangi dwa, definicja 5.13, str. 152
Dyn_I	typ Coxetera-Dynkina porządku dodatniego, definicja 3.10, str. 56: typ Dynkina porządku głównego, definicja 4.14, str. 101 typ Dynkina porządku korangi dwa, definicja 5.12, str. 151
$\text{deg}(v)$	stopień wierzchołka w grafie, definicja 1.3, str. 12
e_1, \dots, e_n	elementy bazy standardowej grupy \mathbb{Z}^m , str. 11

E	macierz identycznościowa, $E = [e_1^{tr}, \dots, e_m^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, str. 11
$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{24}$	porządki nieokreślone przedstawione w tabeli 4.49, str. 120
$\check{G}_\Delta; G_\Delta$	niesymetryczna; symetryczna macierz Grama bigrafu Δ , definicja A.1, str. 175,
$\check{G}_q; G_q$	niesymetryczna; symetryczna macierz Grama funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, definicja A.8, str. 178,
G_I	symetryczna macierz Grama porządku I , (1.39), str. 25,
\widehat{G}_I	podwojona symetryczna macierz Grama porządku I , str. 36,
$\text{Gl}(m; \mathbb{Z})$	grupa [pierścień] kwadratowych macierzy \mathbb{Z} -odwracalnych stopnia m , $\text{Gl}(m; \mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}); \det A \in \{-1, 1\}\} \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, str. 11
$\text{Gl}(m; \mathbb{R})$	grupa [pierścień] kwadratowych macierzy nieosobliwych stopnia m , str. 11
$\text{Gl}(m; \mathbb{Z})_D$	grupa izotropii jednorodnego diagramu Dynkina D , str. 65
\mathcal{G}_r	klasa wszystkich grafów skończonych, str. 13
$\mathcal{H}(I)$	kołczan [digraf] Hasse wyznaczający porządek I , definicja 1.38, str. 24
$\widetilde{\mathcal{H}}(I)$	graf kodujący kołczan Hasse porządku I , str. 140
I	zbiór częściowo uporządkowany [porządek], definicja 1.37, str. 24
$I^{(s)}$	podzbiór częściowo uporządkowany $I^{(s)} := I \setminus \{s\} \subseteq I$, str. 99
$\mathcal{J}_i^{\widetilde{\mathcal{E}}_6}, \mathcal{J}_i^{\widetilde{\mathcal{E}}_7}, \mathcal{J}_i^{\widetilde{\mathcal{E}}_8}$	jednopikowe porządki główne typu $\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$, twierdzenie 4.26, str. 104
$\text{Ker } q_\Delta$	jądro bigrafu Δ , definicja A.4, str. 176
$\text{Ker } q_I$	jądro porządku I , definicja 1.46, str. 26
$\mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$	pierścień całkowitoliczbowych macierzy kwadratowych stopnia $ I $, $\mathbb{M}_I(\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{M}_{ I }(\mathbb{Z})$, str. 24
$\mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$	pierścień całkowitoliczbowych macierzy kwadratowych stopnia m , str. 11
\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych, str. 11
$\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{193}$	jednopikowe porządki dodatnie typu $\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$, twierdzenie 3.17, str. 58
\mathbb{Q}	ciało liczb wymiernych, str. 11
q_I	funkcjonał kwadratowy wyznaczony przez porządek I , (1.40), str. 25,
\hat{q}_I	funkcjonał Titsa jednopikowego porządku I , definicja 3.3, str. 54,
\mathbb{R}	ciało liczb rzeczywistych, str. 11
rank	ranga grupy, str. 181
$\mathcal{R}_I, \mathcal{R}_\Delta, \mathcal{R}_q$	zbiór pierwiastków (z jedynek): porządku I , definicja 1.46, str. 26; bigrafu Δ , definicja A.4, str. 176; jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ definicja A.8, str. 179
$\mathcal{R}_I^{\text{red}}$	redukt $\mathcal{R}_I^{\text{red}} \subseteq \mathcal{R}_I$, str. 112 oraz 157
rz	rzęd macierzy kwadratowej, str. 4
spec A	spektrum (widmo) macierzy kwadratowej, str. 11
spec Δ	spektrum (widmo) grafu Δ , definicja 1.10, str. 14
spec Δ	spektrum Coxetera bigrafu Δ , definicja A.4, str. 176
spec I	spektrum Coxetera porządku I , definicja 1.46, str. 26
$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}; \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}$	zbiór rozwiązań całkowitych; wymiernych jednorodnego układu równań liniowych, str. 180, 181
v^\vee	funkcjonał \mathbb{R} -liniowy stowarzyszony z $v \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$, definicja B.3, str. 189
\mathbb{Z}	pierścień [grupa wolna] liczb całkowitych, str. 11
\mathbb{Z}^m	grupa wolna generowana przez wektory $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m$, str. 11
\mathbb{Z}^I	grupa wolna, $\mathbb{Z}^I \equiv \mathbb{Z}^{ I }$, str. 24

Wstęp

W rozprawie podjęto tematykę spektralnej klasyfikacji Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych sformułowaną w [108, 119]. Prowadzone badania umotywowane są z jednej strony pewnymi wynikami znanymi w teorii reprezentacji grup i algebr [4, 73], z drugiej, zainspirowane są spektralną teorią grafów [25]. Spektralna teoria grafów to dziedzina, w której własności obiektów kombinatorycznych, jakimi są grafy, badane są przy pomocy narzędzi algebraicznych. Mówiąc bardziej precyzyjnie, z grafem stowarzysza się jednoznacznie macierz (np. sąsiedztwa, Laplace’a czy Seidla, patrz [27]) i na podstawie spektrum tej macierzy próbuje się uzyskać różnorodne charakteryzacje strukturalne danego grafu. Przykładowo: znajomość spektrum macierzy sąsiedztwa grafu umożliwia weryfikację k -regularności, patrz [25, str. 55].

Jedną z inspiracji do użycia metod algebraicznych w teorii grafów była próba znalezienia takiego niezmiennika grafu, który opisuje go *jednoznacznie*, z dokładnością do izomorfizmu [24, 25]. Załóżmy, że dane są dwa grafy proste $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$, gdzie $V_1 = V_2 = \{1, \dots, n\}$. Grafy te są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz permutacji $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, że

$$\text{Ad}_{G_1} = B^{tr} \cdot \text{Ad}_{G_2} \cdot B, \quad (*)$$

gdzie $\text{Ad}_G = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest symetryczną macierzą sąsiedztwa zdefiniowaną następująco: $a_{ij} = 1$ jeśli w grafie G istnieje krawędź $i - j$ oraz $a_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Z równości (*) wynika, że spektra macierzy sąsiedztwa grafów izomorficznych są identyczne. Odwrotna implikacja jest fałszywa, kontrprzykład można znaleźć wśród grafów o 5 wierzchołkach [25, 27]. Z tego powodu poszukuje się innych (dodatkowych) niezmienników, które pozwoliłyby na jednoznaczność, z dokładnością do izomorfizmu, charakteryzację szerokich klas grafów [24].

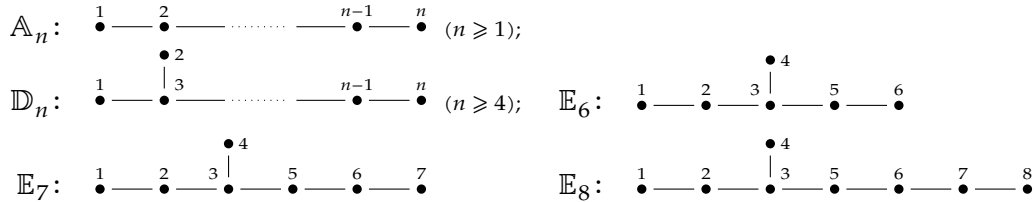
W rozprawie rozważamy problem klasyfikacji skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych (*porządków*) z dokładnością do dwóch równoważności: $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$, wprowadzonych w pracy [111] i analogicznych do (*). Z każdym skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym $I = (\{1, \dots, n\}, \leq_I)$ stowarzysza się jednoznacznie macierz incydencji $C_I = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $c_{ij} = 1$ jeśli $i \leq_I j$ oraz $c_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku (patrz [108, 119]), oraz symetryczną macierz Grama $G_I := \frac{1}{2} (C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$. Porządki I oraz J nazywamy:

- kwadratowo \mathbb{Z} -równoważnymi ($I \sim_{\mathbb{Z}} J$), jeśli $G_I = B^{tr} \cdot G_J \cdot B$;
- dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważnymi ($I \approx_{\mathbb{Z}} J$), jeśli $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$,

gdzie $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest pewną macierzą, taką że $\det B = \pm 1$. Równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$ i $\approx_{\mathbb{Z}}$ zdefiniowane w pracy [111] dotyczą ogólniejszych niż *porządki* obiektów kombinatorycznych: *skończonych grafów krawędziowo-dwudzielnych*. W takim przypadku mówimy o *silnej \mathbb{Z} -kongruencji* oraz *słabej \mathbb{Z} -kongruencji*, a w nowszych pracach o silnej i słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama, patrz np. [92, 115]. W dysertacji przyjęliśmy terminologię używaną w pracach [46, 108] dotyczących skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych.

Zauważmy, że rozważane przez nas równoważności są ogólniejsze od zagadnienia izomorfizmu, ponieważ izomorfizm porządków $I \simeq J$ implikuje równoważności $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ oraz $I \sim_{\mathbb{Z}} J$, natomiast odwrotna implikacja nie jest prawdziwa. Przykładowo: tabela 3.20 przedstawia 16 porządków, które są wzajemnie kwadratowo oraz dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne, ale żadne dwa spośród nich nie są izomorficzne.

W rozprawie badamy spójne skończone *nieujemne* m -elementowe zbiory częściowo uporządkowane I korangi $\text{crk}_I \in \{0, 1, 2\}$,¹ w relacji z grafami krawędziowo-dwudzielnymi w sensie [111], a w szczególności z diagramami Dynkina



oraz zredukowanymi nieprzywiedlnymi systemami pierwiastków w sensie Bourbaki [17], patrz dodatek B.

Problemy badawcze

Przedmiotem badań omawianych w rozprawie jest klasyfikacja skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych, których symetryczna macierz Grama jest dodatnio półokreślona (tzw. *porządków nieujemnych*), z dokładnością do równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$.

W szczególności rozprawa zawiera częściowe rozwiązania następujących czterech problemów sformułowanych w artykułach [108, 111, 113, 115].

Problem 1. Podać klasyfikację skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$.

Problem 1a. Podać klasyfikację skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych z dokładnością do relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$.

Problem 2. Wskazać *minimalny* układ spektralnych niezmienników, które wyznaczają szerokie klasy skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych *jednoznacznie*, z dokładnością do równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$.

Problem 3. Skonstruować algorytmy wyznaczające \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującą równoważność $\approx_{\mathbb{Z}}$ pomiędzy n -elementowymi porządkami I oraz J .

W rozważanych przypadkach skutecznym narzędziem klasyfikacyjnym są następujące niezmienniki:

- (i) zespolone spektrum Coxetera $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$, tj. spektrum macierzy Coxetera

$$\text{Cox}_I := -C_I \cdot (C_I^{\text{tr}})^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}),$$

- (ii) typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, m \geq 1; \mathcal{D}_m, m \geq 4; \mathcal{E}_6; \mathcal{E}_7; \mathcal{E}_8\}$ (patrz definicje 3.9, 4.14 oraz 5.12).

¹Porządek I nazywamy **porządkiem korangi** $\text{crk}_I \in \{0, 1, 2\}$, jeśli symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest dodatnio półokreślona rzędu $\text{rk } G_I = n - \text{crk}_I \in \{n, n-1, n-2\}$, odpowiednio.

W rozprawie omówione zostały następujące zagadnienia:

- A. Klasyfikacja spektralna Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych, których symetryczna macierz Grama jest dodatnio półokreślona korangi $0 \leq \text{crk}_I \leq 2$. W szczególności:
- Kiedy $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{specc}_I = \text{specc}_J$?
 - Kiedy $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J$?
 - Kiedy $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I \sim_{\mathbb{Z}} J$?
- B. Budowanie algorytmów pozwalających na przeprowadzenie spektralnej analizy Coxetera nieujemnych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych. W szczególności algorytmów służących do:
- generowania wszystkich porządków nieujemnych I , których macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ ma ustalony rząd,
 - obliczania typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, m \geq 1; \mathcal{D}_m, m \geq 4; \mathcal{E}_6; \mathcal{E}_7; \mathcal{E}_8\}$,
 - wyznaczania \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującej $I \sim_{\mathbb{Z}} J$,
 - wyznaczania \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującej $I \approx_{\mathbb{Z}} J$.

Spektralna klasyfikacja Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych może być rozważana jako szczególny przypadek zagadnienia klasyfikacji grafów krawędziowo-dwudzielnych [111, 113, 119] i często odwołuje się do wypracowanych tam metod. Z drugiej strony inspirowana jest teorią reprezentacji algebr [4, 117, 118] oraz macierzowych reprezentacji skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych [46, 106]. Stąd też główne zastosowania wyników prezentowanych w dysertacji leżą w tych dziedzinach, i są omówione w artykułach [108, 110, 111] oraz w [46, Remark 5.12], patrz również [97, 107] oraz [95].

Najważniejsze wyniki

Najważniejsze wyniki o charakterze teoretycznym prezentowane w dysertacji zawarte są w następujących twierdzeniach, które stanowią rozwiązania problemów badawczych 1, 1a oraz 2, sformułowanych w poprzednim paragrafie.

- (a) Twierdzenie 3.17, w którym pokazujemy, że w przypadku spójnych *dodatnich*² porządków I , które są *jednopikowe* (tj. mają dokładnie jeden element maksymalny) lub $|I| \leq 14$:

- z dokładnością do każdej z relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$, I jest jednym z porządków Dynkina $\mathbb{A}I_n, \mathbb{D}I_n, \mathbb{E}I_6, \mathbb{E}I_7, \mathbb{E}I_8$ typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$:

$$\mathbb{A}I_n: \bullet^1 \rightarrow \bullet^2 \rightarrow \dots \rightarrow \bullet^{n-1} \rightarrow \bullet^n \quad (n \geq 1);$$

$$\mathbb{D}I_n: \begin{array}{ccccccc} & & \bullet^1 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \bullet^2 & \rightarrow & \bullet^3 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \bullet^{n-1} \rightarrow \bullet^n \quad (n \geq 4); \end{array} \quad \mathbb{E}I_6: \begin{array}{ccccccc} & & & & \bullet^1 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \bullet^2 & \rightarrow & \bullet^3 & \rightarrow & \bullet^4 & \rightarrow & \bullet^5 \rightarrow \bullet^6 \end{array}$$

$$\mathbb{E}I_7: \begin{array}{ccccccc} & & & \bullet^1 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \bullet^2 & \rightarrow & \bullet^3 & \rightarrow & \bullet^4 & \rightarrow & \bullet^5 \rightarrow \bullet^6 \rightarrow \bullet^7 \end{array} \quad \mathbb{E}I_8: \begin{array}{ccccccc} & & & & \bullet^1 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \bullet^2 & \rightarrow & \bullet^3 & \rightarrow & \bullet^4 & \rightarrow & \bullet^5 \rightarrow \bullet^6 \rightarrow \bullet^7 \rightarrow \bullet^8, \end{array}$$

co stanowi częściowe rozwiązanie problemów 1 oraz 1a;

²Porządki I korangi zero nazywamy *dodatnimi*, ponieważ ich symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona.

- prawdziwe są równoważności:

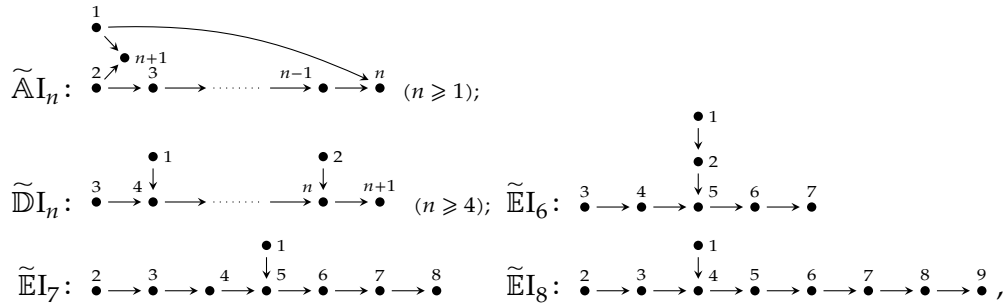
$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{spec}c_I = \text{spec}c_J \Leftrightarrow \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_{J'}$$

co stanowi rozwiązanie problemu 2 dla przypadku rozważanych porządków;

- wszystkie jednopikowe porządki I , z dokładnością do izomorfizmu opisane są przez cztery serie nieskończone (przedstawione w tabeli 3.18) oraz 193 kończony Hasse o 6, 7, 8 wierzchołkach (przedstawione w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3]).

(b) Twierdzenie 4.24, w którym prezentujemy następujące wyniki dla spójnych porządków I korangi 1, które są *jednopikowe* lub $|I| \leq 15$:

- z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ (oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$, jeśli I jest jednopikowy) I jest jednym z porządków Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}I_n, \tilde{\mathbb{D}}I_n, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8$ typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-1}, \mathcal{D}_{|I|-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$:



co stanowi częściowe rozwiązanie problemów 1 oraz 1a;

- prawdziwa jest równoważność:

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow (\text{spec}c_I, \text{Dyn}_I) = (\text{spec}c_J, \text{Dyn}_{J'}),$$

co stanowi częściowe rozwiązanie problemu 2, ponieważ Dyn_I jest niezmiennikiem o charakterze spektralnym: wyznaczony jest jednoznacznie przez spektrum pewnego dodatniego porządku $I' \subseteq I$;

- wszystkie jednopikowe porządki I , z dokładnością do izomorfizmu, opisane są przez siedem serii nieskończonych (przedstawionych w tabeli 4.25) oraz 422 kończony Hasse o 7, 8, 9 wierzchołkach (przedstawione w [52, Table 4.1, Table 4.2] oraz [51]);
- jeśli I jest jednopikowy, to prawdziwe są równoważności:

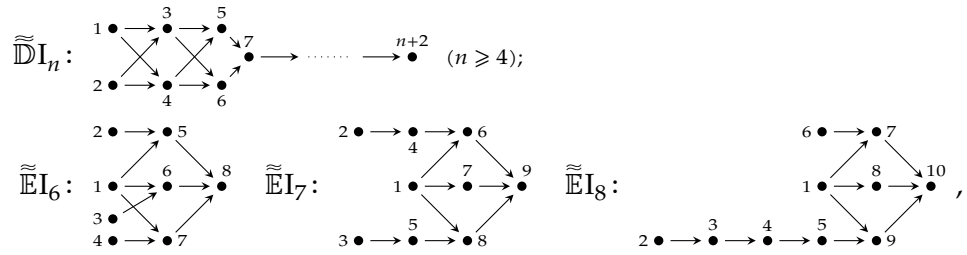
$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{spec}c_I = \text{spec}c_J \Leftrightarrow \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_{J'}$$

co stanowi rozwiązanie problemu 2 dla przypadku jednopikowych porządków korangi 1.

(c) W przypadku spójnych porządków I korangi 2, gdzie $|I| \leq 15$:

- (c1) Twierdzenie 5.5 pokazujące, że z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$, porządek I jest jednym z porządków Euklidesa korangi dwa $\tilde{\mathbb{D}}I_n, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8$ typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.³

³W przeciwieństwie do przypadku porządków I korangi $\text{crk}_I \in \{0, 1\}$, w tym wypadku nie ma porządków typu Dynkina $\mathcal{A}_{|I|-2}$, patrz tabela 5.24 oraz uwaga 5.46.



co stanowi częściowe rozwiązanie problemu 1;

(c2) Twierdzenie 5.20, które zawiera częściowe rozwiązanie problemu 2:

- prawdziwe są równoważności:

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow (\text{spec}c_I, \text{Dyn}_I) = (\text{spec}c_J, \text{Dyn}_J),$$

w szczególności, jeśli $|I| \notin \{9, 10\} \ni |J|$, to prawdziwe są równoważności:

$$\text{spec}c_I = \text{spec}c_J \Leftrightarrow I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J.$$

(c3) Lemat 5.48, który pokazuje, że z dokładnością do izomorfizmu, wszystkie jednopikowe porządki I opisane są przez 14 serii (przedstawionych w tabeli 5.43), oraz 426 macierzy incydencji (zawartych w [43]);

(c4) Twierdzenie 5.51, które pokazuje, że w przypadku porządków jednopikowych:

- z dokładnością do relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$ porządek I jest jednym z porządków Euklidesa korangi dwa $\tilde{\text{D}}I_n, \tilde{\text{E}}I_6, \tilde{\text{E}}I_7, \tilde{\text{E}}I_8$ typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, co stanowi częściowe rozwiązanie problemu 1a,
- prawdziwe są równoważności

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{spec}c_I = \text{spec}c_J \Leftrightarrow \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J,$$

co stanowi częściowe rozwiązanie problemu 2.

Najważniejszymi z przedstawionych w dysertacji algorytmów kombinatorycznych, które stanowią rozwiązanie problemu 3 dla szerokiej klasy skończonych spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych, są następujące dwa algorytmy o wykładniczej złożoności obliczeniowej.

- Wyczerpujący algorytm 3.58, który wyznacza \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującą równoważność $\approx_{\mathbb{Z}}$ między n -elementowymi spójnymi dodatnimi zbiorami częściowo uporządkowanymi. Algorytm ten gwarantuje znalezienie szukanej macierzy i stąd pozwala na deterministyczną weryfikację dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności. W uwadze 3.59(b) wskazujemy prostą modyfikację algorytmu 3.58, gwarantującą wyznaczenie *wszystkich* macierzy definiujących równoważność $\approx_{\mathbb{Z}}$.
- Heurystyczny algorytm 4.44, który umożliwia rozwiązanie problemu 3, dla przypadku spójnych n -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi $\text{crk}_I \in \{1, 2\}$. Algorytm ten jest wrażliwy na dane wejściowe i nie gwarantuje znalezienia szukanej macierzy.

Jednym z zastosowań przedstawionej w twierdzeniu 3.17 spektralnej klasyfikacji Coxetera jednopikowych porządków dodatnich jest dowód istnienia jedynie skończonej liczby jednopikowych *Titsowo-wiernych* porządków dodatnich, który przedstawiamy w twierdzeniu 3.32. Wynik ten jest podstawą dowodu twierdzenia 4.65, przedstawionego w podrozdziale 4.5, w którym prezentujemy alternatywny dowód twierdzenia o istnieniu skończonej liczby porządków *prawie TP-krytycznych*, znacząco prostszy od przedstawionego w [98, 101].

W podrozdziale 4.6 pokazujemy, że decyzyjny problem istnienia izomorfizmu pomiędzy porządkami nieujemnymi⁴ można rozwiązać w czasie wielomianowym. Ponadto wskazujemy na możliwość użycia rozważanej w dysertacji spektralnej klasyfikacji Coxetera porządków jednopikowych do konstrukcji algorytmu znajdującego izomorfizm pomiędzy jednopikowymi *digrafami typu porządkowego*.

Narzędzia algorytmiczne i teoretyczne

Badania prowadzone w ramach dysertacji związane są z algorytmiczną spektralną teorią grafów i mieszczą się w ramach *Scientific Computing*: interdyscyplinarnej dziedziny badań naukowych, w której bada się możliwości rozwiązania złożonych problemów teoretycznych przy pomocy wyników obliczeniowych.

Niezmiernie ważnym elementem rozprawy są algorytmy symboliczne i kombinatoryczne. Stanowią one podstawę prezentowanych wyników eksperymentalnych (patrz np. twierdzenie 3.61, fakt 4.30) i stanowią nieodłączną część dowodów wyników klasyfikacyjnych (patrz np. fakt 5.23, lemat 3.33). Ze względu na charakter obliczeń, główny nacisk przy projektowaniu algorytmów położony został na zapewnienie prawidłowości uzyskanych wyników. Kwestia minimalizacji czasu pracy algorytmów ma tu charakter drugorzędny, ponieważ najbardziej czasochłonne algorytmy wymagają jednokrotnego uruchomienia.

W dysertacji posługujemy się zarówno autorskimi implementacjami znanych algorytmów numerycznych (np. algorytm Sylwestera, patrz algorytm 2.7), dedykowanymi algorytmami symbolicznymi (patrz np. algorytm 4.44), jak i ogólnodostępnymi bibliotekami programistycznymi (na potrzeby rozwiązania problemu izomorfizmu grafów czy programowania całkowitoliczbowego, patrz dowód faktu 4.55).

Jednym z najważniejszych narzędzi teoretycznych stosowanych w dysertacji są *abstrakcyjne systemy pierwiastków* w sensie Bourbaki [17] krótko omówione w dodatku B. Przy ich pomocy, z każdym spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym I korangi $\mathbf{crk}_I = r \in \{0, 1, 2\}$ stowarzyszamy jednoznacznie nieoznaczony diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-r}, \mathcal{D}_{m-r}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz definicja 1.31 oraz definicje 3.9, 4.14 i 5.12), który (w pewnych przypadkach) definiuje I jednoznacznie, z dokładnością do równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$. Diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-r}, \mathcal{D}_{m-r}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jest w istocie grafem Coxetera systemu pierwiastków $\mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^{m-r}; v \cdot G_J \cdot v^{tr} = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{m-r}$ wyznaczonego przez dodatni porządek $J \subseteq I$ o $m - r$ elementach.

Bardzo ważne narzędzie w spektralnej analizie Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych stanowią też Φ_I -oczkowe systemy pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ w sensie [110], które omawiamy krótko w podrozdziale 3.5.

Zbiór $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków z jedynki porządku I korangi $\mathbf{crk}_I \in \{0, 1, 2\}$ odgrywa kluczową rolę w algorytmach służących do rozwiązania problemu 3, które przedstawiamy w dysertacji. Głównym tego powodem jest fakt, że kolumny dowolnej \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ definiującej równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ pomiędzy n -elementowymi porządkami należą do zbioru $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^n$ (fakt 1.55(d)).

Struktura dysertacji

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów oraz dwóch dodatków. W pierwszym rozdziale wprowadzamy niezbędne definicje i przedstawiamy podstawową charakteryzację rozważanych w dysertacji obiektów kombinatorycznych.

⁴Porządek I nazywamy *nieujemnym*, jeśli jego symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest dodatnio półokreślona.

Drugi rozdział poświęcony jest problemowi wyboru narzędzi obliczeniowych, które używane są w dysertacji. Dyskusję prowadzimy na przykładzie trzech wybranych problemów algorytmicznych, dotyczących n -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych I , których rozwiązanie stanowi niezbędny element większości rezultatów prezentowanych w rozprawie:

- weryfikacja dodatniej określoności symetrycznej macierzy Grama $G_I \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$,
- weryfikacja dodatniej półokreśloności symetrycznej macierzy Grama $G_I \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$,
- wyznaczenie zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_I := \{v \in \mathbb{Z}^n; v \cdot C_I \cdot v^{tr} = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Rozdział zaczynamy od przeglądu istniejących pakietów algorytmicznych, następnie analizujemy i opisujemy algorytmy, których autorskich implementacji używamy w rozprawie. Omawiamy ich złożoność i porównujemy wydajność na tle ogólnodostępnych rozwiązań.

Najważniejsze wyniki rozprawy zawarte są w trzecim, czwartym, oraz piątym rozdziale, które poświęcone są spektralnej klasyfikacji Coxetera spójnych n -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi $\text{crk}_I \in \{0, 1, 2\}$, odpowiednio. W poszczególnych rozdziałach omawiamy twierdzenia klasyfikacyjne oraz algorytmy i wyniki obliczeniowe stosowane w ich dowodach.

Na końcu dysertacji zamieszczamy dwa dodatki. W dodatku A zawarte zostały podstawowe informacje na temat grafów krawędziowo-dwudzielnych w sensie [111], natomiast dodatek B poświęcony jest abstrakcyjnym systemom pierwiastków (w sensie Bourbaki [17]), które stanowią podstawę definicji typu Dynkina oraz klasyfikacji skończonych spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych, których symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona, z dokładnością do równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$.

Publikacje i konferencje naukowe

Większość wyników dysertacji została zawarta w siedmiu artykułach naukowych opublikowanych w następujących czasopismach:

- *Linear Algebra and its Applications* [46, 54, 55],
- *European Journal of Combinatorics* [53],
- *Fundamenta Informaticae* [56],
- *Colloquium Mathematicum* [45],
- *Algebra and Discrete Mathematics* [52].

Część wyników została przedstawiona w sześciu referatach wygłoszonych na następujących międzynarodowych konferencjach naukowych i opublikowana w materiałach pokonferencyjnych:

- *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Budapest, EuroComb'11 [44],
- *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Pisa, EuroComb'13 [47],
- *Combinatorics 2012*, Perugia [49],
- *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing*, Timișoara, SYNASC 2012 [48], SYNASC 2013 [40] oraz SYNASC 2014 [50].

Rozdział 1

Wprowadzenie

Tematem przewodnim rozprawy jest spektralna klasyfikacja Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych. Jest to tematyka blisko związana ze spektralną teorią Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych, która czerpie inspiracje zarówno z klasycznej teorii spektralnej grafów, jak i problemów kombinatorycznych pojawiających się w algebrze, patrz [111] oraz [108, 113, 119]. W pierwszym rozdziale rozprawy przedstawiamy wprowadzenie do spektralnej analizy grafów, grafów oznakowanych, grafów krawędziowo-dwudzielnych (*bigrafów*) oraz skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych (*porządków*). W szczególności wskażemy związek pomiędzy bigrafami [porządkami] „dodatnimi” a jednorodnymi diagramami Dynkina (tabela 1.32). Pokazujemy, że z dokładnością do słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama [kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności] można je sklasyfikować przy pomocy zespolonego spektrum macierzy Coxetera $\text{spec}_D \subseteq \mathcal{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ diagramów Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ ¹ (składa się ono z zespolonych pierwiastków z jedynki, patrz 1.59).

W dysertacji używamy standardowej terminologii z zakresu teorii mnogości i algebry (patrz np. [83]). Ponadto, w zakresie (spektralnej) teorii grafów oraz spektralnej analizy Coxetera grafów i zbiorów częściowo uporządkowanych, posługujemy się terminologią wprowadzoną w monografiach [4, 24, 25, 28, 106] oraz artykułach [108, 109, 111, 119]. Definicje przedstawione w niniejszym rozdziale pochodzą z ww. prac.

Symbolem \mathbb{N} oznaczać będziemy zbiór liczb naturalnych, \mathbb{Z} oznaczać będzie pierścień liczb całkowitych a $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ciała liczb wymiernych, rzeczywistych oraz zespolonych. Zbiór \mathbb{Z}^m , gdzie $m \geq 1$, traktować będziemy jako grupę wolną, generowaną przez wektory jednostkowe $e_1 := [1, 0, \dots, 0], \dots, e_m := [0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{Z}^m$. Przez $\mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oznaczać będziemy pierścień całkowitoliczbowych macierzy kwadratowych stopnia m ; $E \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oznaczać będzie macierz identycznościową. **Pełną grupą liniową** nad pierścieniem liczb całkowitych, złożoną z macierzy \mathbb{Z} -odwracalnych stopnia m , oznaczać będziemy symbolem $\text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, tzn.

$$\text{Gl}(m; \mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}); \det A \in \{-1, 1\}\} \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}). \quad (1.1)$$

Analogicznie, $\text{Gl}(m; \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R}); \det A \neq 0\} \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$.

Macierze $A, A' \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$ nazywamy \mathbb{Z} -kongruentnymi, jeśli istnieje macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, taka że $A = B^{tr} \cdot A' \cdot B$. Zauważmy, że \mathbb{Z} -kongruencja jest relacją równoważności.

Przez **multizbiór** (*wielozbiór*, ang. *multiset*) rozumiemy zbiór, w którym pojedynczy element może występować wielokrotnie. Formalnie, multizbiorem nazywamy parę (A, m) , gdzie A jest dowolnym zbiorem, natomiast $m: A \rightarrow \mathbb{N}^+$ funkcją przyporządkowującą każdemu elementowi $a \in A$ jego krotność $m(a) \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

¹Patrz tabela B.17.

Symbolem $\text{spec } A := \{\lambda \in \mathbb{C}; \det(\lambda \cdot E - A) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$ oznaczamy spektrum macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Równoważnie $\text{spec } A := \{\lambda \in \mathbb{C}; P_A(\lambda) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$, gdzie $P_A(t) := \det(t \cdot E - A) \in \mathbb{C}[t]$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

1.1. Grafy. Analiza spektralna grafów

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy podstawowe definicje i fakty dotyczące teorii grafów. Szczególną uwagę poświęcamy *spektralnej teorii grafów*: omawiamy jej genezę oraz niektóre wyniki.

Za pierwszą publikację z dziedziny teorii grafów powszechnie uważa się artykuł Leonarda Eulera z 1741 roku.² Niemniej, to J. J. Sylvester, w 1878 roku, po raz pierwszy użył słowa *graf* w znaczeniu, w jakim używamy go współcześnie.³

Definicja 1.2. [16, 28] Oznaczonym grafem prostym (w skrócie: *grafem*, ang. *labelled simple graph*)⁴ nazywamy parę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 \neq \emptyset$ jest niepustym n -elementowym skończonym zbiorem wierzchołków a $\Delta_1 \subseteq \{e \in 2^{\Delta_0}; |e| = 2\} = \{\{i, j\}; i, j \in \Delta_0, i \neq j\}$ jest skończonym zbiorem krawędzi.

- Dowolny graf $\Delta = (\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}, \Delta_1)$ przedstawiamy graficznie w przestrzeni euklidesowej zgodnie z następującą konwencją: elementy zbioru $i \in \Delta_0$ przedstawiamy jako punkty „ \bullet_{a_i} ” (lub krócej: „ a_i ”), natomiast elementy zbioru Δ_1 przedstawiamy w postaci odcinków $a_i \text{---} a_j$.
- Graf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy spójnym, jeśli dla dowolnych wierzchołków $v, w \in \Delta_0$ istnieje taki ciąg wierzchołków $(v_1, \dots, v_k) \in (\Delta_0)^k$, że $v_1 = v, v_k = w, v_i \neq v_j$ dla $1 \leq i < j \leq k$ oraz $\{v_i, v_j\} \in \Delta_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j = i + 1$.

Innymi słowy, grafem $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy zbiór $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$, na którym wprowadzono dodatkową strukturę: „połączenia” par elementów $\{i, j\} \in \Delta_1$; graf nazywamy spójnym, jeśli każde dwa wierzchołki $v_1, v_k \in \Delta_0$ połączone są drogą $v_1 \text{---} v_2 \cdots v_{k-1} \text{---} v_k$ złożoną z krawędzi $v_i \text{---} v_{i+1} \equiv \{v_i, v_{i+1}\} \in \Delta_1$. Będziemy używać następującej terminologii.

Definicja 1.3. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ będzie grafem, który ma $|\Delta_0| = m$ wierzchołków.

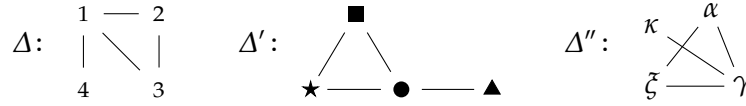
- Stopniem $\deg(v) \in \{0, \dots, m - 1\}$ wierzchołka $v \in \Delta_0$ nazywamy liczbę wierzchołków połączonych krawędzią z v , tj. $\deg(v) = |\{u \in \Delta_0; \{u, v\} \in \Delta_1\}|$.
- Graf Δ nazywamy k -regularnym, jeśli $\deg(v) = k$ dla każdego $v \in \Delta_0$. Graf Δ nazywamy regularnym, jeśli Δ jest k -regularny dla pewnego $k \in \{0, \dots, m - 1\}$.
- Graf Δ nazywamy r -dzielny, jeśli zbiór wierzchołków Δ_0 ma rozkład $\Delta_0 = \Delta_0^1 \cup \dots \cup \Delta_0^r$ taki, że $\Delta_0^i \cap \Delta_0^j = \emptyset$ dla $1 \leq i < j \leq r$ oraz $\{u, v\} \notin \Delta_1$ dla dowolnych $u, v \in \Delta_0^i$, gdzie $1 \leq i \leq r$. Jeśli $\{u, v\} \in \Delta_1$ dla wszystkich $u \in \Delta_0^i$ oraz $v \in \Delta_0^j$, gdzie $1 \leq i \leq r$, to graf Δ nazywamy r -dzielny grafem pełnym i oznaczamy symbolem $K_{|\Delta_0^1|, |\Delta_0^2|, \dots, |\Delta_0^r|}$.
- Graf Δ nazywamy drzewem, jeśli dowolne dwa wierzchołki $u, v \in \Delta_0$ połączone są dokładnie jedną drogą.

²L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1741, 128–140, URL: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E053.html>.

³J. J. Sylvester, *Chemistry and Algebra*, Nature 17, 1878, 284–284, doi:10.1038/017284a0.

⁴Oznaczonym ponieważ wierzchołki uznajemy za rozróżnialne, prostym, ponieważ wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź, patrz [16] (por. definicja A.1 oraz podrozdział 1.2). Grafy w sensie definicji A.1(c) nazywane są *multigrafami*, patrz np. [28, str. 24].

Przykład 1.4. Rozważmy następujące trzy grafy: $\Delta = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\})$, $\Delta' = (\{\bullet, \blacktriangle, \blacksquare, \star\}, \{\{\star, \blacksquare\}, \{\bullet, \blacksquare\}, \{\star, \bullet\}, \{\blacktriangle, \bullet\}\})$ oraz $\Delta'' = (\{\zeta, \alpha, \kappa, \gamma\}, \{\{\zeta, \alpha\}, \{\kappa, \gamma\}, \{\gamma, \alpha\}, \{\zeta, \gamma\}\})$. Grafy te można przedstawić *graficznie*, w przestrzeni euklidesowej.



Grafy Δ , Δ' oraz Δ'' są spójne: dla każdej pary wierzchołków $u, v \in \Delta_0$ [$u', v' \in \Delta'_0$; $u'', v'' \in \Delta''_0$] z ciągu $(4, 1, 2, 3, 1)$ [$(\blacktriangle, \bullet, \blacksquare, \star, \bullet)$; $(\kappa, \gamma, \alpha, \zeta, \gamma)$] można wybrać podciąg wierzchołków spełniających warunki definicji 1.2(b).

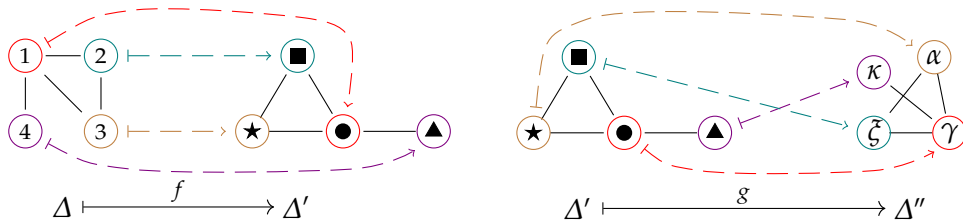
Zauważmy, że grafy Δ , Δ' oraz Δ'' przedstawione w przykładzie 1.4 są *podobne*, zawierają taką samą liczbę krawędzi i różnią się tylko *oznaczeniami* wierzchołków. Mówiąc precyzyjniej, grafy te są *izomorficzne*.

Definicja 1.5. [28, str. 3] Grafy $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ oraz $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$ nazywamy *izomorficznymi* (oznaczenie: $\Delta \simeq \Delta'$), jeśli istnieje taka bijekcja $f: \Delta_0 \rightarrow \Delta'_0$, że dla dowolnych $u, v \in \Delta_0$ zachodzi $\{u, v\} \in \Delta_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in \Delta'_1$.

Łatwo sprawdzić, że izomorfizm grafów \simeq jest relacją równoważności.

Przykład 1.6. Grafy Δ , Δ' oraz Δ'' przedstawione w przykładzie 1.4 są izomorficzne. Izomorfizm zadają funkcje $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{\bullet, \blacktriangle, \blacksquare, \star\}$, $g: \{\bullet, \blacktriangle, \blacksquare, \star\} \rightarrow \{\zeta, \alpha, \kappa, \gamma\}$ oraz $h: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{\zeta, \alpha, \kappa, \gamma\}$, gdzie:

- $f(1) = \bullet, f(2) = \blacksquare, f(3) = \star, f(4) = \blacktriangle,$
- $g(\bullet) = \gamma, g(\blacksquare) = \zeta, g(\star) = \alpha, g(\blacktriangle) = \kappa,$
- $h = g \circ f$, tj. $h(1) = \gamma, h(2) = \zeta, h(3) = \alpha, h(4) = \kappa.$



Wiele własności grafów (np. spójność) jest niezależna od oznaczeń wierzchołków (innymi słowy: jest niezmiennikiem izomorfizmu). Dlatego, w rozważaniach teoriografowych, z reguły pomija się oznaczenia wierzchołków. Formalnie, będziemy posługiwać się następującą definicją.

Definicja 1.7. [16, str. 14] Niech \mathcal{G}_r będzie klasą wszystkich grafów skończonych. Grafem nieoznaczonym (ang. unlabelled graph) nazywamy klasę abstrakcji relacji izomorfizmu grafów: \mathcal{G}_r / \simeq .

- (a) Grafy nieoznaczone przedstawiamy graficznie, w przestrzeni euklidesowej, używając identycznych oznaczeń na wszystkie wierzchołki, zwyczajowo: „•”.
- (b) Symbolem $\check{\Delta} := [\Delta]_{\simeq}$ oznaczać będziemy graf nieoznaczony, który powstaje z grafu Δ po „opuszczeniu” oznaczeń wierzchołków (formalnie: klasę abstrakcji zawierającą wszystkie grafy izomorficzne z grafem Δ).

Przykład 1.8. Grafy Δ , Δ' , Δ'' , przedstawione w przykładzie 1.4, będziemy utożsamiać (z dokładnością do izomorfizmu) z następującym grafem nieoznaczonym.

$$\check{\Delta} = \check{\Delta}' = \check{\Delta}'' : \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}$$

Wszystkie rozważane przez nas własności grafów są niezmiennicze ze względu na izomorfizm. Aby uprościć notację, w dalszej części dysertacji będziemy zakładać, że zbiór wierzchołków dowolnego grafu $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ składa się z kolejnych liczb naturalnych.

Definicja 1.9. Macierzą sąsiedztwa grafu $\Delta = (\Delta_0 = \{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ nazywamy macierz kwadratową $\text{Ad}_\Delta = [a_{ij}^\Delta] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, gdzie:

$$a_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \{i, j\} \in \Delta_1, \text{ tj. w grafie } \Delta \text{ istnieje krawędź } i \text{---} j, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Macierz sąsiedztwa $\text{Ad}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jednoznacznie wyznacza graf Δ , co pozwala na badanie obiektów kombinatorycznych, jakimi są grafy, przy pomocy narzędzi algebry liniowej.

Definicja 1.10. Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0 = \{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ jest grafem.

- (a) Wielomianem charakterystycznym grafu Δ nazywamy wielomian $P_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ zdefiniowany wzorem $P_\Delta(t) := \det(t \cdot E - \text{Ad}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$.
- (b) Spektrum grafu Δ nazywamy multizbiór $\text{spec}_\Delta := \text{spec Ad}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ wszystkich wartości własnych symetrycznej macierzy $\text{Ad}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$. Równoważnie: spektrum $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy multizbiór wszystkich m pierwiastków wielomianu $P_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

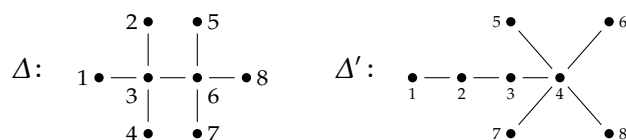
Zauważmy, że wielomian $P_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oraz spektrum $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ są niezmiennicze ze względu na izomorfizm grafów. Jest to konsekwencją następującego faktu, który wynika z definicji izomorfizmu (definicja 1.5) oraz macierzy sąsiedztwa grafu (definicja 1.9).

Fakt 1.11. Grafy $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ oraz $\Delta' = (\{1, \dots, n\}, \Delta'_1)$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$ oraz $B_\sigma^{tr} \cdot \text{Ad}_\Delta \cdot B_\sigma = \text{Ad}_{\Delta'}$, gdzie $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ jest bijekcją (permutacją) a macierz $B_\sigma \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą permutacji, tj. powstaje z macierzy identycznościowej $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przez σ -permutację wierszy.

Jednym z problemów rozważanych w teorii grafów jest problem znalezienia łatwych do obliczenia niezmienników opisujących graf $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu (innymi słowy: opisujących jednoznacznie graf nieoznaczony $\check{\Delta}$). Przykładem takiego niezmiennika jest leksykograficznie najmniejsza macierz sąsiedztwa $\text{Ad}_{\sigma\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ wybrana spośród wszystkich możliwych grafów $\sigma\Delta$ powstających z Δ przez permutację $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ zbioru wierzchołków $\{1, \dots, m\}$. Łatwo zauważyć, że obliczenie tego niezmiennika wymaga rozważania $m!$ możliwych grafów $\sigma\Delta$ i jest możliwe tylko w przypadku niewielkich grafów.

Günthard oraz Primas w 1956 roku w pracy [61] postawili następujący problem: czy $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ wyznacza graf Δ jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu? Negatywną odpowiedź na to pytanie udzielili Collatz i Sinogowitz rok później: w pracy [22], opublikowanej w *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, przedstawili parę drzew o identycznym spektrum.

Przykład 1.12. [22, str. 72] Rozważmy następujące dwa drzewa: Δ oraz Δ' .



Łatwo sprawdzić, że

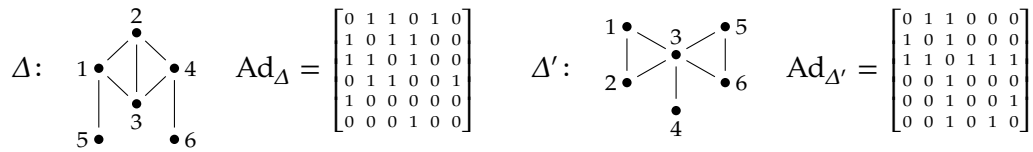
$$P_{\Delta} = P_{\Delta'} = t^8 - 7t^6 + 9t^4 = t^4 (t^2 - t - 3) (t^2 + t - 3)$$

i stąd otrzymujemy

$$\text{spec}_{\Delta} = \text{spec}_{\Delta'} = \left\{ -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Prawdopodobnie nie znając wcześniejszych wyników, w 1960 roku Harary ponownie postawił ten problem. Negatywnej odpowiedzi udzielił mu R. C. Bose i przedstawił przykład dwóch nieizomorficznych grafów o 16 wierzchołkach (patrz [65]). Obecnie wiadomo, że najmniejsze grafy o identycznym spektrum mają 5 wierzchołków⁵, a najmniejsze spójne kospektralne grafy nieizomorficzne mają 6 wierzchołków (patrz [24, 25]).

Przykład 1.13. [24, str. 8] Rozważmy następujące dwa grafy: Δ oraz Δ' .



Łatwo sprawdzić, że:

$$P_{\Delta} = P_{\Delta'} = t^6 - 7t^4 - 4t^3 + 7t^2 + 4t - 1 = (t - 1) (t + 1)^2 (t^3 - t^2 - 5t + 1),$$

oraz $\text{spec}_{\Delta} = \text{spec}_{\Delta'} =$

$$= \left\{ -\frac{8}{3} \cos \left(-\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{5}{32} \right) + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{3}; -1; -1; -\frac{8}{3} \sin \left(-\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{5}{32} \right) + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{5}{32} \right) \right) \right\} \approx \{-1,903; -1; -1; 0,194; 1; 2,709\}.$$

Analiza spektralna grafów

Analiza spektralna grafów jest częścią algebraicznej teorii grafów: dziedziny matematyki, w której grafy (obiekty kombinatoryczne) badane są przy pomocy narzędzi algebraicznych. Jednym z najważniejszych zagadnień jest tu zależność pomiędzy spektrum macierzy stowarzyszonych z grafami a strukturą tych grafów [19, 24, 25]. W szczególności, badane jest następujące zagadnienie: jakie grafy wyznaczone są przez spektrum jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu [27]. Analiza spektralna grafów rozwijana jest od lat 50-tych XX wieku i znalazła liczne zastosowania w fizyce, chemii czy informatyce, patrz [25, Rozdział 9] oraz [26].

Przytoczymy teraz (bez dowodów) trzy twierdzenia, które pokazują, w jaki sposób spektrum $\text{spec}_{\Delta} \subseteq \mathbb{R}$ opisuje pewne klasy grafów Δ .

Twierdzenie 1.14. [24, str. 12] *Jeśli Δ jest grafem*

- (a) *2-regularnym (definicja 1.3(b)) lub*
- (b) *n -dzielnym grafem pełnym $K_{n,n,\dots,n}$ (definicja 1.3(c)), gdzie $n \geq 1$,*

to Δ jest jednoznacznie wyznaczony przez spektrum $\text{spec}_{\Delta} \subseteq \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.15. [25, str. 55] *Graf Δ jest λ_1 -regularny (definicja 1.3(b)) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$n \cdot \lambda_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2,$$

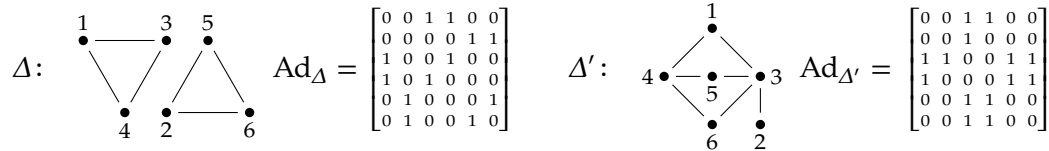
gdzie $\text{spec}_{\Delta} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ oraz $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

⁵ Grafy mają spektrum równe $\{-2, 0, 0, 0, 2\}$.

Twierdzenie 1.16. [25, str. 56] Załóżmy, że Δ jest grafem spójnym oraz $\text{spec}_\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, gdzie $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Następujące warunki są równoważne:

- Δ jest grafem dwudzielnym (definicja 1.3(c)),
- $\lambda_k = -\lambda_{n-k+1}$, gdzie $1 \leq k \leq n$,
- $\lambda_1 = -\lambda_n$.

Przykład 1.17. Rozważmy grafy Δ oraz Δ' .



Łatwo sprawdzić, że:

$$P_\Delta = t^6 - 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 + 12t + 4 = (t-2)^2(t+1)^4,$$

$$\text{spec}_\Delta = \{-1; -1; -1; -1; 2; 2\}$$

oraz

$$P_{\Delta'} = t^6 - 7t^4 + 3t^2 = t^2(t^4 - 7t^2 + 3),$$

$$\text{spec}_{\Delta'} = \left\{0, 0, \pm \sqrt{\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{37})}\right\} \approx \{-2,6; -0,68; 0; 0; 0,68; 2,6\}.$$

Na podstawie analizy spektrów $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\text{spec}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{R}$, z twierdzeń 1.15 oraz 1.16 otrzymujemy, że:

- Δ jest grafem 2-regularnym i nie jest grafem dwudzielnym,
- Δ' jest grafem dwudzielnym i nie jest grafem regularnym.

W spektralnej teorii grafów rozważa się także spektra innych macierzy stowarzyszonych z grafem Δ (patrz [24, 25, 27]), w tym tzw. uogólnione macierze sąsiedztwa.

Definicja 1.18. [27] Z grafem $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ stowarzyszymy:

- macierz Laplace'a $L_\Delta := D_\Delta - \text{Ad}_\Delta$,
- bezznakową macierz Laplace'a $Q_\Delta := |L_\Delta| = D_\Delta + \text{Ad}_\Delta$,

gdzie symbolem $D_\Delta := \text{diag}(\deg(1), \dots, \deg(m)) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oznaczamy macierz diagonalną, na której przekątnej znajdują się stopnie wierzchołków grafu Δ .

Spektra macierzy L_Δ oraz Q_Δ umożliwiają odróżnienie niektórych spośród nieizomorficznych grafów, które mają identyczne spektrum macierzy sąsiedztwa. W pracy [62] przedstawiono następujące wyniki eksperymentalne dla grafów mających co najwyżej 11 wierzchołków (przez „nDS A ” rozumiemy „grafy, które nie są determinowane przez spektrum macierzy A jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu”; ostatnie trzy wiersze tabeli przedstawiają odsetek grafów nDS A wśród wszystkich grafów).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
#grafów	2	4	11	34	156	1044	12 346	274 668	12 005 168	1 018 997 864
#nDS Ad_Δ	0	0	0	2	10	110	1722	51 038	2 560 516	215 331 677
#nDS L_Δ	0	0	0	0	4	130	1767	42 595	1 412 438	91 274 836
#nDS Q_Δ	0	0	2	4	16	102	1201	19 001	636 607	38 966 935
odsetek Ad_Δ	0	0	0	0,059	0,064	0,105	0,139	0,186	0,213	0,211
odsetek L_Δ	0	0	0	0	0,026	0,125	0,143	0,155	0,118	0,090
odsetek Q_Δ	0	0	0,182	0,118	0,103	0,098	0,097	0,069	0,053	0,038

Wyniki eksperymentalne sugerują, że prawdziwa jest następująca hipoteza: *grafy ko-spektralne stanowią niewielką część wszystkich grafów, a większość grafów jest rozróżnialna przez spektrum*, por. [27].

1.2. Grafy krawędziowo-dwudzielne i analiza spektralna Coxetera

Graf w rozumieniu definicji 1.2 jest stosunkowo prostym obiektem kombinatorycznym. W szczególności definicja opisuje tylko jeden „rodzaj” krawędzi i nie dopuszcza pętli. Z tego powodu często stosuje się bardziej ogólne definicje, a grafy spełniające definicję 1.2 nazywa się *grafami prostymi* [28, 57]. Przykładowo, Zaslavsky (w pracy [126]) definiuje graf Δ jako parę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie Δ_0 jest zbiorem wierzchołków (potencjalnie nieskończonym) a Δ_1 multizbiorem zawierającym jeden z czterech rodzajów łuków (ang. *arcs*) $e \in \Delta_1$:

- krawędzie (ang. *link*) $e = uv$ łączące dwa różne wierzchołki $u, v \in \Delta_0$,
- pętle (ang. *loop*) $e = vv$ łączące wierzchołek $v \in \Delta_0$ z samym sobą,
- półłuki (ang. *half arc*) $e = v$, gdzie $v \in \Delta_0$, które mają tylko jeden „koniec”,
- pętle wolne (ang. *free lop*) $e = \emptyset$, które nie mają żadnego „końca”.

Zauważmy, że nawet przy tak ogólnej definicji, krawędzie grafu Δ są *nierozróżnialne*: w grafie ① — ② — ③ nie ma możliwości zaznaczenia, że *relacja* łącząca wierzchołki ① i ② jest inna niż ta, która łączy ② oraz ③.

W 1953 roku w pracy [64], nawiązując do problemów rozważanych w psychologii społecznej, Harary wprowadził pojęcie grafu *oznakowanego*, tj. grafu, w którym każdej krawędzi przyporządkowuje się znak „+” lub „-”. Graf oznakowany umożliwił Harary’emu modelowanie następującej sytuacji: rozważamy grupę osób (wierzchołki grafu), wśród których każde dwie osoby są „przyjaciółmi” (krawędź „+”), „wrogami” (krawędź „-”) lub nie znają się (brak krawędzi).

Grafy oznakowane znalazły różnorodne zastosowania (np. obliczenie liczby komórek Weyla wyznaczonych przez pewne grupy Coxetera bez odwoływania się do grup Weyla, patrz [125]) i wielokrotnie były odkrywane „na nowo”.⁶ Przykładowo, niezależnie od rozważań dotyczących grafów oznakowanych w sensie Harary’ego, w teorii reprezentacji algebr oraz w algebraicznej teorii form kwadratowych, od lat 70. XX wieku wielu badaczy używa pojęcia *bigrafu*, patrz np. [7, 8, 68, 69, 81, 96, 102].

Definicja 1.19. [7] Funkcję $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ postaci:

$$q([x_1, \dots, x_n]) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \quad (1.20)$$

gdzie $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ dla $1 \leq i < j \leq m$, nazywamy *całkowitą jednolitą formą kwadratową*. Formę (1.20) przedstawiamy graficznie w przestrzeni euklidesowej w postaci *bigrafu*, który ma:

- n wierzchołków $1, \dots, n$,
- $|q_{ij}|$ krawędzi ciągłych (przerwywanych) między $i \neq j$ jeśli, $q_{ij} < 0$ ($q_{ij} > 0$).

Uwaga 1.21. Formalnie, definicja 1.19 nie opisuje formy kwadratowej tylko *funkcjonał kwadratowy*.⁷ Całkowitą **formą kwadratową** nazywamy jednorodny wielomian stopnia dwa postaci

$$q([x_1, \dots, x_n]) = q_{11} \cdot x_1^2 + \dots + q_{nn} \cdot x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], \quad (1.22)$$

⁶Zaslavsky przygotował zestawienie prac związanych z grafami oznakowanymi, patrz [127].

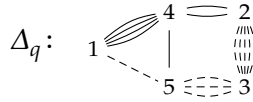
⁷Funkcję wielomianową zdefiniowaną przez jednorodny wielomian stopnia dwa.

tj. wielomian, który można przedstawić w postaci sumy jednomianów stopnia dwa, patrz [91]. W dysertacji, podobnie jak w pracach de la Peña, von Höhne czy Ringela (patrz [7, 8, 68, 69, 102]), będziemy używać tych określeń wymiennie, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Przykład 1.23. Rozważmy funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_5 - 4x_1x_4 + 5x_2x_3 - 2x_2x_4 + 3x_3x_5 - x_4x_5.$$

Funkcjonał $q: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez bigraf Δ_q .



Notacja *bigrafu*, w sensie definicji 1.19, wprowadzona została przez Ovsienkę [96] i była stosowana przez innych autorów od końca lat 70. XX wieku (patrz np. von Höhne [68, 69], Ringel [102]). Tak zdefiniowane bigrafy są w istocie szczególną klasą grafów oznakowanych, które spełniają dodatkowy warunek: wszystkie krawędzie łączące wybrane wierzchołki mają ten sam znak. Obserwacja ta została sformalizowana w pracy [111] z 2013. roku, gdzie Simson wprowadził definicję grafu krawędziowo-dwudzielnego (patrz definicja A.1). Jest to definicja bardziej ogólna od definicji 1.19, w szczególności, umożliwia badanie funkcjonałów kwadratowych, które nie są jednolite w terminach teoriografowych (por. [76–78]). W dalszej części przez *bigraf* będziemy rozumieć graf krawędziowo-dwudzielny w sensie definicji A.1.

Analiza spektralna grafów krawędziowo-dwudzielnych

Z każdym m -elementowym grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ , który nie ma pętli, stowarzysza się jednoznacznie niesymetryczną macierz Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & d_{13}^\Delta & \cdots & d_{1m}^\Delta \\ & 1 & d_{23}^\Delta & \cdots & d_{2m}^\Delta \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & d_{m-1m}^\Delta \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } d_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j, \\ 0, & \text{jeśli } i > j, \\ |\Delta_1^+(i, j)|, & \text{jeśli } (i, j) \in \Delta_1^+, \\ -|\Delta_1^-(i, j)|, & \text{jeśli } (i, j) \in \Delta_1^-, \end{cases}$$

symetryczną macierz Grama $G_\Delta := \frac{1}{2}(\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}) \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (definicja A.1(d)) oraz macierz Coxetera $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ ⁸ (patrz definicja A.4(a)). Spektro $\text{spec}_\Delta := \text{spec } G_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ symetrycznej macierzy Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ oraz $\text{specc}_\Delta := \text{spec } \text{Cox}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ macierzy Coxetera $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ stanowią użyteczne narzędzie do analizy i klasyfikacji grafów krawędziowo-dwudzielnych, patrz twierdzenie 2.10 (str. 39) oraz twierdzenia 3.17, 4.24 i 5.20.

Jednym z najważniejszych problemów rozważanych w spektralnej teorii grafów jest odpowiedź na pytanie: *jakie grafy Δ są wyznaczone jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu, przez spektrum pewnej macierzy stowarzyszonej z Δ ?* Równoważnie, problem ten możemy sformułować następująco: wyznaczyć grafy, których (pewne) spektrum wyznacza macierz sąsiedztwa jednoznacznie, z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$, gdzie macierz definiująca relację $\sim_{\mathbb{Z}}$ jest macierzą permutacji, patrz fakt 1.11.

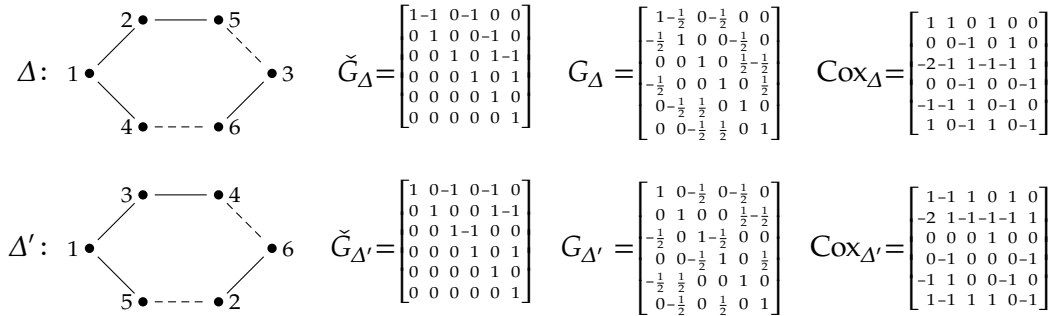
W przypadku analizy spektralnej grafów krawędziowo-dwudzielnych rozważa się zagadnienie ogólniejsze: *\mathbb{Z} -kongruencji Grama*. Bigrafy $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ oraz $\Delta' =$

⁸Stosujemy oznaczenie $A^{-tr} := (A^{tr})^{-1} = (A^{-1})^{tr}$.

$(\{1, \dots, m\}, \Delta'_1)$ nazywamy *słabo \mathbb{Z} -kongruentnymi* (*silnie \mathbb{Z} -kongruentnymi*), jeśli macierze G_Δ oraz $G_{\Delta'}$ (\check{G}_Δ oraz $\check{G}_{\Delta'}$) są \mathbb{Z} -kongruentne (patrz definicja A.3). Jednym z głównych problemów rozważanych w spektralnej teorii Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych jest następujące zagadnienie: *dla jakich bigrafów spektrum Coxetera $\text{spec}c_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ definiuje Δ jednoznacznie, z dokładnością do silnej (słabej) \mathbb{Z} -kongruencji Grama?*

Uwaga 1.24. Bigrafy izomorficzne (definicja A.2) mogą nie być silnie \mathbb{Z} -kongruentne, natomiast słaba \mathbb{Z} -kongruencja Grama jest niezmiennikiem izomorfizmu (słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama bigrafów izomorficznych definiuje macierz permutacji wyznaczona przez ten izomorfizm, por. fakt 1.11).

Przykład 1.25. Rozważmy następujące dwa izomorficzne bigrafy Δ oraz Δ' .



Łatwo sprawdzić, że $G_\Delta = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B$, gdzie $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest macierzą permutacji (por. fakt 1.11). Z drugiej strony

- $\text{cox}_\Delta(t) = t^6 - 2t^3 + 1 = (t-1)^2(t^2 + t + 1)^2$, $\text{spec}c_\Delta = \left\{ 1^2, \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \right\}$,
- $\text{cox}_{\Delta'}(t) = t^6 - t^4 - t^2 + 1 = (t-1)^2(t+1)^2(t^2 + 1)$, $\text{spec}c_{\Delta'} = \{-1^2, 1^2, -i, i\}$

i stąd bigrafy Δ oraz Δ' nie są silnie \mathbb{Z} -kongruentne (łatwo pokazać, używając argumentów analogicznych do użytych w dowodzie faktu 1.55(c), że silna \mathbb{Z} -kongruencja Grama implikuje równość wielomianów Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych).

Uwaga 1.26. Jak pokazuje przykład 1.25, wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oraz spektrum Coxetera $\text{spec}c_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ nie są niezmiennicze ze względu na izomorfizm bigrafów. Można pokazać, że w przypadku bigrafów Δ , które są drzewami,⁹ $\text{spec}c_\Delta$ oraz $\text{cox}_\Delta(t)$ są niezmiennikami relacji izomorfizmu bigrafów, patrz [111, Proposition 2.2].

Analogicznie jak w przypadku grafów (definicja 1.7), przez bigrafy nieoznaczone będziemy rozumieć bigrafy, w których pomijamy oznaczenia wierzchołków, tj. klasę abstrakcji relacji równoważności bigrafów (definicja A.2).

Definicja 1.27. Niech $\mathcal{B}igr$ będzie klasą wszystkich skończonych grafów krawędziowo-dwudzielnych (bigrafów). Bigrafem nieoznaczonym nazywamy klasę abstrakcji relacji izomorfizmu grafów krawędziowo-dwudzielnych: $\mathcal{B}igr / \simeq$.

- Bigrafy nieoznaczone przedstawiamy graficznie w przestrzeni euklidesowej, używając identycznych oznaczeń na wszystkie wierzchołki, zwyczajowo: „•”.
- Symbolem $\check{\Delta} := [\Delta]_{\simeq}$ oznaczać będziemy klasę bigrafów izomorficznych z bigrafem Δ . Innymi słowy, przez $\check{\Delta}$ rozumiemy bigraf (nieoznaczony), który powstaje z Δ po „opuszczeniu” oznaczeń wierzchołków.

Przykładowo, bigrafy Δ oraz Δ' przedstawione w przykładzie 1.25 definiują ten sam bigraf nieoznaczony, tj. $\check{\Delta} = \check{\Delta}'$.

⁹ Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy drzewem, jeśli każde dwa wierzchołki $u, w \in \Delta_0$ połączone są dokładnie jedną drogą, por. definicja 1.3(d).

1.3. Bigrafy dodatnie i nieujemne. Pierwiastki

Przypomnijmy, że każdy jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ wyznacza bigraf Δ_q (patrz definicja 1.19 oraz definicja A.1(d)). Z drugiej strony, każdy graf krawędziowo-dwudzielny (bez pętli) $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, m\}$ oraz $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$ można zakodować jednoznacznie w postaci jednolitego funkcjonału kwadratowego $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ postaci

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2 + \sum_{x_i \text{---} x_j} x_i \cdot x_j - \sum_{x_i \text{---} x_j} x_i \cdot x_j, \quad (1.28)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich krawędziach należących do zbioru Δ_1 .

W rozprawie analizujemy własności **nieujemnych** jednolitych funkcjonałów kwadratowych (równoważnie: nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli), w następującym sensie.

Definicja 1.29. Niech $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym funkcjonałem kwadratowym, z którym stowarzyszona jest symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (definicja A.8(a)) oraz niech Δ będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o m wierzchołkach, z którym stowarzyszona jest symetryczna macierz Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (definicja A.1(d)). Funkcjonał q [bigraf Δ] nazywamy:

- (a) **dodatnio określonym** (dodatnim), jeśli $q(v) > 0$ [$q_\Delta(v) > 0$] dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^m$ lub, równoważnie,[†] symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ [$G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$] jest dodatnio określona;
- (b) **nieujemnym**, jeśli $q(v) \geq 0$ [$q_\Delta(v) \geq 0$] dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^m$ lub, równoważnie,[†] symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ [$G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$] jest dodatnio półokreślona;
- (c) **nieujemnym korangi r** , jeśli symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ [$G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$] jest dodatnio półokreślona rzędu $n - r$.¹¹

Badanie klasy grafów krawędziowo-dwudzielnych, które są dodatnie/nieujemne ma z jednej strony uzasadnienie w ważnych zastosowaniach tej klasy bigrafów w teorii reprezentacji algebr,¹² z drugiej: pozwala na użycie szeregu narzędzi opracowanych do analizy nieujemnych jednolitych funkcjonałów kwadratowych.

Twierdzenie 1.30. Niech Δ będzie spójnym (definicja A.1(e)) grafem krawędziowo-dwudzielnym o m elementach, który nie ma pętli. Następujące warunki są równoważne.

- (a) Δ jest dodatni.
- (b) Zbiór $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest zredukowanym, nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki, typu $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_\Delta} \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz definicje B.3, B.6, twierdzenie B.14 oraz definicja B.16).
- (c) Δ jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny z jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $D\Delta \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ przedstawionych w tabeli B.17.

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie B.2 do funkcjonału $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.28). Szczegóły dowodu twierdzenia B.2 znajdują się w dodatku B. \square

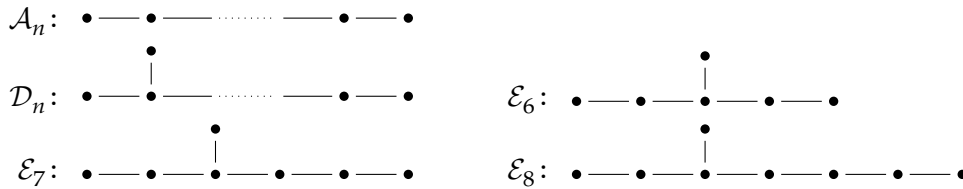
[†]Patrz fakt A.12.

¹¹Równoważnie: funkcjonal $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny a jądro $\text{Ker } q_I := \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest grupą wolną rangi r , por. fakt A.20.

¹²Patrz np. [111, Introduction and preliminaries].

Definicja 1.31. Grafy \mathcal{A}_n , gdzie $n \geq 1$, \mathcal{D}_n , gdzie $n \geq 4$, oraz \mathcal{E}_n , gdzie $n \in \{6, 7, 8\}$, to n -wierzchołkowe **jednorodnie nieoznaczone diagramy Dynkina**, tj. klasy abstrakcji relacji izomorfizmu (patrz definicja 1.7 oraz definicja 1.27) jednorodnych diagramów Dynkina. Innymi słowy $\mathcal{A}_n := \check{\mathbb{A}}_n$, $\mathcal{D}_n := \check{\mathbb{D}}_n$ oraz $\mathcal{E}_n := \check{\mathbb{E}}_n$, gdzie diagramy (grafy) \mathbb{A}_m , \mathbb{D}_m , \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 , \mathbb{E}_8 przedstawione zostały w tabeli B.17.

TABELA 1.32. JEDNORODNE NIEOZNACZONE DIAGRAMY DYNKINA



Uwaga 1.33. Grafy przedstawione w tabeli 1.32 (tabeli B.17) to tzw. jednorodne diagramy Dynkina (ang. *simply laced Dynkin diagrams*). Są to te spośród grafów Dynkina, które są grafami prostymi (por. tabela B.15). Diagramy Dynkina pojawiają się, w przypadku różnorodnych klasyfikacji obiektów matematycznych, w różnych dziedzinach matematyki, patrz [66] oraz [23]. Przykładowo:

- (teoria grup i algebr Liego) przy pomocy diagramów Dynkina klasyfikuje się proste zespolone algebry Liego oraz zredukowane nieprzywiedlne systemy pierwiastków ([17, Théorème 3, str. 197], [73, 105], patrz też twierdzenie B.14);
- (spektralna teoria grafów) spójny graf, którego największa wartość własna macierzy sąsiedztwa jest mniejsza od 2, jest podgrafem grafu Dynkina ([19, Theorem 3.1.3]),¹³
- (teoria reprezentacji algebr) K-algebra $A = KQ$ dróg acyklicznego spójnego kołczanu (grafu skierowanego) Q , gdzie K jest ciałem algebraicznie domkniętym, jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy graf \bar{Q} , powstały z Q przez pominięcie orientacji krawędzi, jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina (twierdzenie Gabriela, patrz [4, Theorem VII.5.10]).

Twierdzenie 1.30 sugeruje, że m -elementowe bigrafy dodatnie Δ , które nie mają pętli, można badać nie tylko w terminach jednolitych funkcjonałów kwadratowych, ale też przy pomocy zbiorów pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$. Spostrzeżenie to sformalizujemy w postaci następującego twierdzenia, które pokazuje, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^m$ wyznacza spójny bigraf Δ (spójny funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$) jednoznacznie. Jest to uogólnienie [40, Lemma 5.1], gdzie analogiczny rezultat został uzyskany dla grafów prostych (patrz też dowód [113, Theorem 2.9(b1)]). W dowodzie przedstawimy metodę konstrukcji $\mathcal{R}_\Delta \mapsto q_\Delta (\equiv \Delta)$.

Twierdzenie 1.34. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$, będzie skończonym spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym, który nie posiada pętli ani wielokrotnych krawędzi. Z bigrafem Δ jednoznacznie stowarzyszony jest zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n, q_\Delta(v) = 1\}$ funkcjonału kwadratowego $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Jeśli $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem kwadratowym, dla którego $p(v) = 1$ dla każdego $v \in \mathcal{R}_\Delta$, to $p = q_\Delta$.

Dowód. Dowód składa się z dwóch kroków. Pokażemy, że:

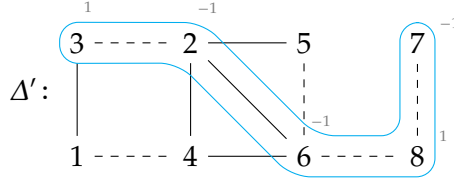
- 1° ścieżki łączące w (spójnym) bigrafie Δ dowolne dwa wierzchołki $1 \leq u < w \leq n$ wyznaczają pewne pierwiastki $r_u^w \in \mathcal{R}_\Delta^1 := \{u' \in \mathcal{R}_\Delta; u'_i \in \{-1, 0, 1\}\} \subseteq \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$;
- 2° podzbiór \mathcal{R}_Δ^1 zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jednoznacznie wyznacza współczynniki funkcjonału kwadratowego $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ spełniającego $p(r) = 1$ dla $r \in \mathcal{R}_\Delta^1$.

¹³ Rozszerzone grafy Dynkina (jednopunktowe rozszerzenia diagramów Dynkina, tzw. diagramy Euklidesa, patrz tabela 4.4) w spektralnej teorii grafów znane są pod nazwą grafów Smitha, patrz [19, Theorem 3.1.3].

Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0 = \{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym, który nie posiada pętli ani wielokrotnych krawędzi oraz $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem kwadratowym stowarzyszonym z Δ (definicja A.8(c)).

Krok 1° Bigraf Δ jest spójny i stąd (definicja A.1(e)) dla dowolnych $u \neq w \in \Delta_0$ istnieje ścieżka $l_u^w = x_1 \dots, x_s \in (\Delta_0)^s$, gdzie $x_1 := u$ oraz $x_s := w$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że l_u^w jest najkrótszą ścieżką łączącą u oraz w . Definiujemy rekurencyjnie wektor $r_u^w = r_{x_1}^{x_s} = [r_i]_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n$:

$$r_i := \begin{cases} 0, & \text{jeśli } i \notin l_u^w, \\ 1, & \text{jeśli } i = x_1, \\ r_j, & \text{jeśli } x_i \text{---} x_j \in \Delta_1, \\ -r_j, & \text{jeśli } x_i \text{---} x_j \in \Delta_1. \end{cases}$$



Przykładowo, w bigrafie Δ' wierzchołki 3 oraz 7 połączone są ścieżką $l_3^7 = (3, 2, 6, 8, 7)$ a wektor $r_3^7 \in \mathbb{Z}^8$ ma postać $r_3^7 = [0, -1, 1, 0, 0, -1, -1, 1]$.

Ponieważ każda ścieżka długości s zawiera dokładnie $s - 1$ krawędzi, z definicji wektora $r_u^w \in \mathbb{Z}^n$ oraz równości (1.28) otrzymujemy

$$q_\Delta(r_u^w) = r_1^2 + \dots + r_n^2 + \sum_{r_i \text{---} r_j} r_i \cdot r_j - \sum_{r_i \text{---} r_j} r_i \cdot r_j = s + \sum_{r_i \text{---} r_j} (-1) - \sum_{r_i \text{---} r_j} 1 = 1.$$

Stąd $r_u^w \in \mathcal{R}_\Delta^1 = \mathcal{R}_\Delta \cap \{-1, 0, 1\}^n \subseteq \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem funkcjonału $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Krok 2° Rozważmy funkcjonał kwadratowy $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, zdefiniowany wzorem

$$p(x) = p_{11}x_1^2 + \dots + p_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

i załóżmy, że $p(v) = 1$ dla każdego $v \in \mathcal{R}_\Delta^1 \subseteq \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$. Z poprzednich rozważań wynika, iż dla każdej pary indeksów $1 \leq i < j \leq n$ istnieje wektor $r = [r_1, \dots, r_n] \in \mathcal{R}_\Delta^1$ spełniający $r_i, r_j \neq 0$ (tj. $r := r_{ij}^j$). Pokażemy w jaki sposób wyznaczyć wartości współczynników p_{ij} .

(1) Ponieważ $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{R}_\Delta^1$ (funkcjonał q_Δ jest jednolity) oraz $p(e_i) = p_{ii} \cdot 1^2 = 1$, to funkcjonał p jest jednolity, tj. $p_{11} = p_{22} = \dots = p_{nn} = 1$.

(2) Rozważmy wszystkie pary indeksów $1 \leq i < j \leq n$, dla których istnieje $r \in \mathcal{R}_\Delta^1 \subseteq \mathbb{Z}^n$ spełniający $r_i, r_j \neq 0$ oraz $\sum_{1 \leq t \leq n} |r_t| = 2$ (tzn. $|\text{supp } r| = 2$). Z równości $r_i \cdot r_j = \pm 1$ oraz $1 = p(r) = r_i^2 + r_j^2 + p_{ij} \cdot r_i \cdot r_j$ otrzymujemy $p_{ij} = -r_i \cdot r_j$.

(3) Aby wyznaczyć pozostałe współczynniki p_{ij} funkcjonału p , rozważmy kolejno wszystkie pary indeksów $1 \leq i < j \leq n$, dla których istnieje $r \in \mathcal{R}_\Delta^1$ spełniający $r_i, r_j \neq 0$ oraz $|\text{supp } r| = \sum_{1 \leq t \leq n} |r_t| = k$, dla ustalonego $k = 3, \dots, n$. Mamy

$$1 = p(r) = \sum_{t \in S} r_t^2 + \sum_{t < s \in S} p_{ts} \cdot r_t \cdot r_s = y + p_{ij} \cdot r_i \cdot r_j,$$

gdzie $S = \{t; r_t = \pm 1\}$, $|S| = k$, gdzie $y \in \mathbb{Z}$ jest wyznaczony przez obliczone poprzednio współczynniki p_{ts} i stąd $p_{ij} := (1 - y) \cdot r_i \cdot r_j$ (patrz przykład 1.35).

Ponieważ współczynniki dowolnego funkcjonału kwadratowego $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ spełniającego $p(v) = 1$ dla każdego $v \in \mathcal{R}_\Delta^1 \subseteq \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ wyznaczone są jednoznacznie przez elementy zbioru \mathcal{R}_Δ^1 , wnioskujemy, że $p = q_\Delta$. \square

Przykład 1.35. Pokażemy teraz zastosowanie konstrukcji $\mathcal{R}_\Delta \mapsto q_\Delta$ w praktyce. Rozważmy 30-elementowy zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$ postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Delta = \{ & \pm e_1, & \pm e_2, & \pm e_3, & \pm e_4, & \pm e_5, \\ & \pm (e_1 - e_2), & \pm (e_1 - e_2 - e_3), & \pm (e_1 - e_2 - e_3 + e_4), & \pm (e_1 - e_2 - e_5), \\ & & \pm (e_2 + e_3), & \pm (e_2 + e_3 - e_4), & \pm (e_2 + e_5), \\ & & & \pm (e_3 - e_4), & \pm (e_3 - e_5), \\ & & & & \pm (e_3 - e_4 - e_5)\}. \end{aligned}$$

Szukamy współczynników $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ funkcjonału kwadratowego $p: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} p(x) = & p_{11} \cdot x_1^2 + p_{22} \cdot x_2^2 & + p_{33} \cdot x_3^2 & & + p_{44} \cdot x_4^2 & & + p_{55} \cdot x_5^2 & & + \\ & + p_{12} \cdot x_1 x_2 + p_{13} \cdot x_1 x_3 & & + p_{14} \cdot x_1 x_4 & & + p_{15} \cdot x_1 x_5 & & + \\ & & + p_{23} \cdot x_2 x_3 & & + p_{24} \cdot x_2 x_4 & & + p_{25} \cdot x_2 x_5 & & + \\ & & & & + p_{34} \cdot x_3 x_4 & & + p_{35} \cdot x_3 x_5 & & + \\ & & & & & & + p_{45} \cdot x_4 x_5, \end{aligned}$$

dla których $p(r) = 1$ dla każdego $r \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$.

Rozważmy równania $p(r) = 1$ dla kolejnych $r = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5] \in \mathcal{R}_\Delta^1 = \{v \in \mathcal{R}_\Delta; v_i \in \{-1, 0, 1\}\} \subseteq \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$, posortowanych rosnąco względem $|\text{supp } r| = |r_1| + |r_2| + |r_3| + |r_4| + |r_5|$. Zauważmy, że $p(-r) = p(-1 \cdot r) = (-1)^2 \cdot p(r) = p(r)$ i stąd wystarczy rozważyć jeden wektor z pary $\pm r \in \mathcal{R}_\Delta^1$. Zaczynamy od wektorów spełniających $|\text{supp } r| = 1$:

$$\begin{cases} 1 = p(e_1) = p_{11} \cdot 1^2 & \Rightarrow p_{11} = 1, \\ 1 = p(e_2) = p_{22} \cdot 1^2 & \Rightarrow p_{22} = 1, \\ 1 = p(e_3) = p_{33} \cdot 1^2 & \Rightarrow p_{33} = 1, \\ 1 = p(e_4) = p_{44} \cdot 1^2 & \Rightarrow p_{44} = 1, \\ 1 = p(e_5) = p_{55} \cdot 1^2 & \Rightarrow p_{55} = 1. \end{cases}$$

Następnie rozważmy wektory $r \in \mathcal{R}_\Delta^1$ spełniające $|\text{supp } r| = 2$:

$$\begin{cases} 1 = p(e_1 - e_2) = 1^2 + (-1)^2 + p_{12} \cdot 1 \cdot (-1) & \Rightarrow p_{12} = 1, \\ 1 = p(e_2 + e_3) = 1^2 + 1^2 + p_{23} \cdot 1 \cdot 1 & \Rightarrow p_{23} = -1, \\ 1 = p(e_2 + e_5) = 1^2 + 1^2 + p_{25} \cdot 1 \cdot 1 & \Rightarrow p_{25} = -1, \\ 1 = p(e_3 - e_4) = 1^2 + (-1)^2 + p_{34} \cdot 1 \cdot (-1) & \Rightarrow p_{34} = 1, \\ 1 = p(e_3 - e_5) = 1^2 + (-1)^2 + p_{35} \cdot 1 \cdot (-1) & \Rightarrow p_{35} = 1, \end{cases}$$

wektory $r \in \mathcal{R}_\Delta^1$ spełniające $|\text{supp } r| = 3$:

$$\begin{cases} 1 = p(e_1 - e_2 - e_3) = 3 + (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot p_{13} + (-1) & \Rightarrow p_{13} = 0, \\ 1 = p(e_1 - e_2 - e_5) = 3 + (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot p_{15} + (-1) & \Rightarrow p_{15} = 0, \\ 1 = p(e_2 + e_3 - e_4) = 3 + (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot p_{24} + (-1) & \Rightarrow p_{24} = 0, \\ 1 = p(e_3 - e_4 - e_5) = 3 + (-1) + (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot p_{45} & \Rightarrow p_{45} = 0 \end{cases}$$

oraz wektor $r \in \mathcal{R}_\Delta^1$ spełniający $|\text{supp } r| = 4$:

$$1 = p(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) = 4 + (-1) + 0 + (-1) \cdot p_{14} + (-1) + 0 + (-1) \Rightarrow p_{14} = 0.$$

Podsumowując, funkcjonał kwadratowy $p \equiv q_\Delta: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz bigraf Δ mają postać

$$p \equiv q_\Delta(x) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 + x_{12} - x_{23} - x_{25} + x_{34} + x_{35}, \quad \Delta: \begin{array}{c} \bullet 5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet 1 \text{---} \bullet 2 \text{---} \bullet 3 \text{---} \bullet 4 \end{array}$$

Zbiory pierwiastki odgrywają dużą rolę w rozważaniach przedstawionych w dysertacji. Z jednej strony pojawiają się w rozważaniach o charakterze teoretycznym (np. twierdzenie 3.17), z drugiej, stanowią ważny element przedstawionych algorytmów. Drugie z zastosowań wyjaśnia następujący fakt.

Fakt 1.36. [52, Lemma 3.12] *Niech Δ, Δ' będą m -elementowymi grafami krawędziowo-dwu-dzielnymi, które nie mają pętli. Jeśli $\check{G}_\Delta = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B$, gdzie $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ (tj. Δ jest silnie \mathbb{Z} -kongruentny z Δ'), to kolumny $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}^m$ macierzy $B = [b_1^{tr}, \dots, b_m^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ są pierwiastkami funkcjonału kwadratowego $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11).*

Dowód. Na podstawie definicji funkcjonałów kwadratowych $q_\Delta, q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (definicja A.8(c)) oraz przyjętych założeń, dla każdego $1 \leq i \leq m$ prawdziwe są równości:

$$1 = q_\Delta(e_i) = e_i \cdot \check{G}_\Delta \cdot e_i^{tr} = e_i \cdot B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B \cdot e_i^{tr} = (e_i \cdot B^{tr}) \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot (e_i \cdot B^{tr})^{tr} = q_{\Delta'}(e_i \cdot B^{tr}),$$

tj. $b_i = e_i \cdot B^{tr} \in \mathcal{R}_{\Delta'} = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_{\Delta'}(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest pierwiastkiem funkcjonału kwadratowego $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$. \square

1.4. Zbiory częściowo uporządkowane

Głównym przedmiotem badań przedstawionych w rozprawie są skończone zbiory częściowo uporządkowane w następującym sensie.

Definicja 1.37. *Skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym (ang. partially ordered set) nazywamy parę (I, \leq) , gdzie I jest skończonym zbiorem, natomiast $\leq \subseteq I \times I$ relacją częściowego porządku¹⁴ określoną na zbiorze I .*

W dalszej części będziemy pisać I zamiast (I, \leq) i nazywać zbiór I porządkiem (ang. poset). Zbiór $J \equiv (J, \leq_J)$ nazywamy podzbiorem (podporządkiem, podposetem) zbioru częściowo uporządkowanego $I \equiv (I, \leq_I)$ (oznaczenie $J \subseteq I$), jeśli $J \subseteq I$ oraz dla dowolnych $i, j \in J$ $i \leq_J j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \leq_I j$ (innymi słowy, \leq_J jest ograniczeniem relacji \leq_I do zbioru $J \subseteq I$).

Fakt 1.38. *Każdy m -elementowy zbiór częściowo uporządkowany $I = (\{a_1, \dots, a_m\}, \leq)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez:*

(a) **kołczan**¹⁵ (**digraf**) **Hasse** $\mathcal{H}(I) = (\mathcal{H}(I)_0, \mathcal{H}(I)_1)$, który jest acyklicznym grafem skierowanym, ze zbiorem wierzchołków $\mathcal{H}(I)_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$ oraz zbiorem krawędzi (strzałek) zdefiniowanym następująco: strzałka $a_i \rightarrow a_j$ należy do $\mathcal{H}(I)_1$ jeśli $a_i \leq a_j$ oraz nie ma takiej wierzchołka a_k , że $a_i \leq a_k \leq a_j$ (patrz [106, Section 14.1]);

(b) **macierz incydencji** $C_I = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, gdzie

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } a_i \leq a_j, \\ 0, & \text{jeśli } a_i \not\leq a_j; \end{cases}$$

(c) **funkcjonał dwuliniowy** $b_I: \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, zdefiniowany wzorem

$$b_I(x, y) := \sum_{i \in I} x_i \cdot y_i + \sum_{i < j} x_i \cdot y_j = \sum_{i \leq j} x_i \cdot y_j = x \cdot C_I \cdot y^{tr}.$$

W dalszej części, dla zbioru $I = \{a_1, \dots, a_m\}$, będziemy stosować utożsamienia $\mathbb{Z}^I \equiv \mathbb{Z}^m$ oraz $\mathbb{M}_I(\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$. Przypomnijmy, że \mathbb{Z}^I jest zbiorem funkcji $v: I \rightarrow \mathbb{Z}$, które utożsamiamy z wektorami $v \equiv (v_j)_{j \in I}$, gdzie $v_j := v(j)$.

¹⁴ Innymi słowy, \leq jest relacją zwrotną, przechodnią i antysymetryczną, patrz np. [83, str. 9].

¹⁵ Graf, którego krawędzie mają wyróżniony początek oraz koniec, patrz [36], [28, str. 23] oraz definicja 4.67.

Z każdym zbiorem częściowo uporządkowanym I , jednoznacznie wyznaczonym przez macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)) stowarzyszymy [108, 119]:

- **symetryczną macierz Grama**

$$G_I := \frac{1}{2} \cdot (C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_I(\mathbb{Q}), \quad (1.39)$$

- **funkcjonał kwadratowy** (formę kwadratową) $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$, zdefiniowaną wzorem

$$q_I(x) := b_I(x, x) = \sum_{i \in I} x_i^2 + \sum_{i < j} x_i \cdot x_j = \sum_{i \leq j} x_i \cdot x_j = x \cdot C_I \cdot x^{tr} = x \cdot G_I \cdot x^{tr}. \quad (1.40)$$

- **graf krawędziowo-dwudzielny** (patrz definicja A.1)

$$\Delta_I := \Delta_{q_I}, \text{ gdzie } G_{\Delta_I} := G_I \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z}). \quad (1.41)$$

Zbiór częściowo uporządkowany I nazywamy **spójnym**, jeśli graf krawędziowo-dwudzielny Δ_I jest spójny (równoważnie: kołczan Hasse $\mathcal{H}(I)$ jest spójny¹⁶).

Przykład 1.42. Rozważmy pięcioelementowy spójny zbiór częściowo uporządkowany

$$I = (\{a, b, c, d, e\}, \{a \leq c; a \leq d; a \leq e; c \leq e; d \leq e; b \leq d; b \leq e\}),$$

wtedy:

$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \bullet c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet a \quad \bullet e \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet b \quad \bullet d \end{array}, \quad \Delta_I: \begin{array}{c} \bullet c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet a \quad \bullet e \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet b \quad \bullet d \end{array}, \quad C_I = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}, \quad G_I = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

$$b_I(x, y) = x_a (y_a + y_c + y_d + y_e) + x_b (y_b + y_d + y_e) + x_c (y_c + y_e) + x_d (y_d + y_e) + x_e y_e,$$

$$q_I(x) = x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 + x_d^2 + x_e^2 + x_a x_c + x_a x_d + x_a x_e + x_b x_d + x_b x_e + x_c x_e + x_d x_e.$$

Analogicznie jak w przypadku grafów i bigrafów (definicje 1.5 oraz A.2), definiujemy izomorfizm zbiorów częściowo uporządkowanych.

Definicja 1.43. Porządki $I = (\{a_1, \dots, a_m\}, \leq_I)$ oraz $J = (\{b_1, \dots, b_m\}, \leq_J)$ nazywamy izomorficznymi (ozn. $I \simeq J$), jeśli istnieje taka bijekcja $f: \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$, że dla dowolnych $a_i, a_j \in I$ zachodzi $a_i \leq_I a_j \Leftrightarrow f(a_i) \leq_J f(a_j)$.

Fakt 1.44. Załóżmy, że $I = (\{a_1, \dots, a_m\}, \leq_I)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

- Jeśli bijekcja $\sigma: \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ definiuje izomorfizm między porządkami I oraz $J = (\{b_1, \dots, b_m\}, \leq_J)$, to macierze incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oraz $C_J \in \mathbb{M}_J(\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ są \mathbb{Z} -kongruentne, tj. $C_J = B_{\bar{\sigma}}^{tr} \cdot C_I \cdot B_{\bar{\sigma}}$, gdzie $B_{\bar{\sigma}} \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$. Ponadto $B_{\bar{\sigma}}$ jest macierzą permutacji $\bar{\sigma}: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, gdzie $\bar{\sigma}(i) = j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(a_i) = b_j$.
- Istnieje, izomorficzny z I , zbiór częściowo uporządkowany $\tilde{I} = (\{1, \dots, m\}, \leq_{\tilde{I}})$, którego macierz incydencji $C_{\tilde{I}} \in \mathbb{M}_{\tilde{I}}(\mathbb{Z})$ jest górnotrójkątna.

Dowód. (a) Załóżmy, że porządki $I = (\{a_1, \dots, a_m\}, \leq_I)$ oraz $J = (\{b_1, \dots, b_m\}, \leq_J)$, z którymi stowarzyszone są macierze incydencji $C_I = [c_{ij}^I] \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ oraz $C_J = [c_{ij}^J] \in \mathbb{M}_J(\mathbb{Z})$ są izomorficzne, a izomorfizm definiuje bijekcja $\sigma: \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$. Dla dowolnych $x = [x_1, \dots, x_m] \in \mathbb{Z}^m$ oraz $y = [y_1, \dots, y_m] \in \mathbb{Z}^m$ prawdziwa jest równość:

¹⁶ Digraf H nazywamy spójnym, jeśli graf powstały z H przez pominięcie orientacji krawędzi jest spójny.

$$x \cdot C_J \cdot y^{tr} = \sum_{b_i \leq_j b_j} x_i \cdot y_j = \sum_{\sigma(a_i) \leq_i \sigma(a_j)} x_i \cdot y_j = (x \cdot B_{\bar{\sigma}}^{tr}) \cdot C_I \cdot (y \cdot B_{\bar{\sigma}}^{tr})^{tr} = x \cdot (B_{\bar{\sigma}}^{tr} \cdot C_I \cdot B_{\bar{\sigma}}) \cdot y^{tr},$$

gdzie $B_{\bar{\sigma}} \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ jest macierzą powstałą z macierzy identycznościowej $E \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ przez $\bar{\sigma}$ -permutację kolumn. Stąd dla $1 \leq i \leq j \leq m$ mamy

$$c_{ij}^J = e_i \cdot C_J \cdot e_j = e_i \cdot (B_{\bar{\sigma}}^{tr} \cdot C_I \cdot B_{\bar{\sigma}}) \cdot e_j = (B_{\bar{\sigma}}^{tr} \cdot C_I \cdot B_{\bar{\sigma}})_{ij}$$

i w konsekwencji $C_J = B_{\bar{\sigma}}^{tr} \cdot C_I \cdot B_{\bar{\sigma}}$.

(b) Zauważmy, że kołczan Hasse (fakt 1.38(a)) $\mathcal{H}(I) = (\mathcal{H}(I)_0, \mathcal{H}(I)_1)$, gdzie $\mathcal{H}(I)_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$, jest acyklicznym grafem skierowanym. Wierzchołki każdego takiego grafu można posortować topologicznie (patrz [121, Podrozdział 15.2]), tj. istnieje taka bijekcja $\sigma: \mathcal{H}(I)_0 \rightarrow \{1, \dots, m\}$, że wierzchołki kołczanu $\sigma(\mathcal{H}(I)) = (\sigma(\mathcal{H}(I)_0), \sigma(\mathcal{H}(I)_1)) = (\{1, \dots, m\}, \{\sigma(a_i) \rightarrow \sigma(a_j); a_i \rightarrow a_j \in \mathcal{H}(I)_1\})$ są posortowane topologicznie, tzn. $\sigma(a_i) \rightarrow \sigma(a_j) \in \sigma(\mathcal{H}(I)_1)$ implikuje $\sigma(a_i) < \sigma(a_j)$. Definiujemy porządek $\tilde{I} = (\{1, \dots, m\}, \leq_{\tilde{I}})$, gdzie dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mamy $i \leq_{\tilde{I}} j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma^{-1}(i) \leq \sigma^{-1}(j)$. Aby zakończyć dowód, zauważmy, że $\mathcal{H}(\tilde{I}) = \sigma(\mathcal{H}(I))$ i w konsekwencji macierz incydencji $C_{\tilde{I}} \in \mathbb{M}_{\tilde{I}}(\mathbb{Z})$ porządku \tilde{I} , jest górnotrójkątna. \square

Uwaga 1.45. W świetle faktu 1.44, bez zmniejszania ogólności rozważań, w dalszej części rozprawy będziemy zakładać, że elementami każdego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I są kolejne liczby naturalne, a macierz $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ jest górnotrójkątna.

Będziemy posługiwać się następującą definicją (patrz [107, 108, 119]).

Definicja 1.46. Niech $I \equiv (I, \leq)$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym.

(a) **Macierzą Coxetera** $\text{Cox}_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ nazywamy całkowitoliczbową macierz kwadratową

$$\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } C_I^{-tr} := (C_I^{-1})^{tr} = (C_I^{tr})^{-1}.$$

(b) **Wielomianem Coxetera** $\text{cox}_I(t) \in \mathbb{Z}[t]$ nazywamy wielomian charakterystyczny macierzy $\text{Cox}_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, tzn.

$$\text{cox}_I(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) \in \mathbb{Z}[t].$$

(c) **Spektrum Coxetera** $\text{spec}_I := \text{spec } \text{Cox}_I \subseteq \mathbb{C}$ nazywamy multizbiór wszystkich m zespolonych wartości własnych macierzy Coxetera $\text{Cox}_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ lub, równoważnie, wszystkich m rozwiązań zespolonych równania $\text{cox}_I(t) = 0$.

(d) **Transformacją Coxetera** nazywamy automorfizm $\Phi_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$ grupy wolnej \mathbb{Z}^I zdefiniowany wzorem

$$\Phi_I(v) := v \cdot \text{Cox}_I.$$

(e) **Zbiorem pierwiastków** (z jedyinki) $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{R}_I := \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I.$$

(f) **Jądrem** porządku I nazywamy zbiór $\text{Ker } q_I := \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$.

Uwaga 1.47. Poprawność definicji macierzy Coxetera $\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ stowarzyszonej ze skończonym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym I (definicja 1.46(a)) wynika z faktu 1.44: macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jest \mathbb{Z} -kongruentna z górnotrójkątną macierzą $C_{\tilde{I}} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, gdzie kongruencję definiuje macierz permutacji $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$. Stąd otrzymujemy równości $\det C_I = \det(B^{tr} \cdot C_{\tilde{I}} \cdot B) = \det B^{tr} \cdot \det C_{\tilde{I}} \cdot \det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. W konsekwencji $C_I \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ i macierze $C_I^{-1} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oraz $\text{Cox}_I = -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ są dobrze zdefiniowane.

Przykład 1.48. Rozważmy sześćoelementowy spójny zbiór częściowo uporządkowany

$$I = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \leq 2; 1 \leq 3; 1 \leq 6; 2 \leq 6; 3 \leq 6; 4 \leq 6; 5 \leq 6\}),$$

wtedy:

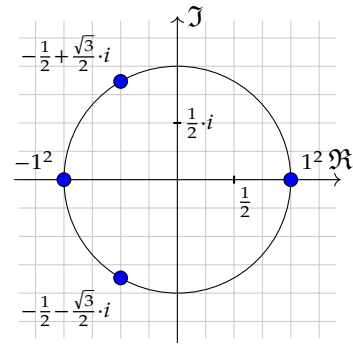
$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \bullet 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet 1 \quad \bullet 6 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \bullet 3 \quad \bullet 4 \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \bullet 5 \end{array}, \Delta_I: \begin{array}{c} \bullet 2 \\ \cdots \quad \cdots \\ \bullet 1 \quad \bullet 6 \\ \cdots \quad \cdots \\ \bullet 3 \quad \bullet 4 \\ \cdots \quad \cdots \\ \bullet 5 \end{array}, C_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

- funkcjonal $q_I: \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany jest wzorem

$$q_I(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)x_6;$$

- $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^6; q_I(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot [0, -1, -1, -1, -1, 2] \subseteq \mathbb{Z}^6;$

- $\text{cox}_I(t) = t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 = (t-1)^2(t+1)^2(t^2+t+1) \in \mathbb{Z}[t];$



- $\text{spec}_I = \left\{ -1, -1, 1, 1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right\}.$

W przeciwieństwie do sytuacji, jaka ma miejsce w przypadku grafów krawędziowo-dwudzielnych (przykład 1.25), definicje wielomianu Coxetera $\text{cox}_I(t) \in \mathbb{Z}[t]$ oraz spektrum Coxetera $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$ porządku I są niezmiennicze ze względu na izomorfizm zbiorów częściowo uporządkowanych.

Fakt 1.49. Jeśli zbiory częściowo uporządkowane $I = (\{1, \dots, m\}, \leq_I)$ oraz $J = (\{1, \dots, m\}, \leq_J)$ są izomorficzne, to $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_J(t)$ oraz $\text{spec}_I = \text{spec}_J$, gdzie $\text{cox}_I(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) \in \mathbb{Z}[t]$, $\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ oraz $\text{spec}_I := \{\lambda \in \mathbb{C}; \det(\lambda \cdot E - \text{Cox}_I) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$ jest multizbiorem wszystkich wartości własnych macierzy $\text{Cox}_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, patrz definicja 1.46.

Dowód. Z faktu 1.44(a) wynika, że istnieje macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, spełniająca równość $C_J = B^{tr} \cdot C_I \cdot B$. Stąd otrzymujemy równość

$$\text{Cox}_J = -C_J \cdot C_J^{-tr} = -(B^{tr} \cdot C_I \cdot B) \cdot (B^{tr} \cdot C_I \cdot B)^{-tr} = B^{tr} \cdot \text{Cox}_I \cdot B^{-tr} \quad (1.50)$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned} \text{cox}_J(t) &= \det(t \cdot E - \text{Cox}_J) = \det(t \cdot E - B^{tr} \cdot \text{Cox}_I \cdot B^{-tr}) = \\ &= \det(B^{tr} \cdot (t \cdot E - \text{Cox}_I) \cdot B^{-tr}) = \det(B^{tr}) \cdot \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) \cdot \det(B^{-tr}) = \text{cox}_I(t), \end{aligned}$$

a stąd $\text{spec}_I = \text{spec}_J$. □

Porządki dodatnie i nieujemne

W rozprawie badamy zbiory częściowo uporządkowane I , które są dodatnie lub nieujemne, w sensie następującej definicji (por. [119, Definition 2] oraz definicja 1.29).

Definicja 1.51. Zbiór częściowo uporządkowany I , $|I| = m$, nazywamy **dodatnim (nieujemnym korangi $\text{crk}_I \geq 0$)**, jeśli symetryczna macierz Grama $G_I = \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_I(\mathbb{R})$ (1.39) jest dodatnio określona (dodatnio półokreślona rzędu $m - \text{crk}_I$).¹⁷

¹⁷Równoważnie: funkcjonal $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni (nieujemny) a jądro $\text{Ker } q_I := \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest grupą trywialną (wolną rangi crk_I), por. fakt A.20.

Zauważmy, że definicja 1.51 nie zależy od numeracji wierzchołków (wynika to z faktu 1.44(a) oraz własności kongruencji, w szczególności, macierze kongruentne mają tę samą rangę, por [70, 0.4.6(b)]). Ponadto, porządek I jest dodatni (nieujemny korangi $r \geq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy bigraf Δ_I [funkcjonał $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$] jest dodatni (nieujemny korangi $r \geq 0$) w sensie definicji 1.29, patrz fakt A.12.

Przykład 1.52. Sześcioelementowy zbiór częściowo uporządkowany I przedstawiony w przykładzie 1.48 jest nieujemny (korangi 1) i nie jest dodatni, ponieważ

$$\begin{aligned} q_I(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)x_6 = \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_6\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_6\right)^2 + \\ &\quad + \left(x_4 + \frac{1}{2}x_6\right)^2 + \left(x_5 + \frac{1}{2}x_6\right)^2. \end{aligned}$$

Stąd łatwo sprawdzić, że $q_I(v) \geq 0$ dla każdego $v \in \mathbb{Z}$, a $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^6; q_I(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot [0, -1, -1, -1, -1, 2] \subseteq \mathbb{Z}^6$ jest grupą wolną rangi 1.

W rozprawie klasyfikujemy zbiory częściowo uporządkowane z dokładnością do dwóch równoważności: kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$.

Definicja 1.53. Niech $I \equiv (\{1, \dots, m\}, \leq_I)$, $J \equiv (\{1, \dots, m\}, \leq_J)$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi, natomiast $C_I, C_J \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oraz $G_I, G_J \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ stowarzyszonymi z nimi macierzami incydencji i Grama. Porządki I oraz J nazywamy:

- (a) \mathbb{Z} -równoważnymi lub kwadratowo \mathbb{Z} -równoważnymi (oznaczenie $I \sim_{\mathbb{Z}} J$), jeśli $G_I \sim_{\mathbb{Z}} G_J$, tzn. istnieje taka macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, że $G_I = B^{tr} \cdot G_J \cdot B$;
- (b) dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważnymi (oznaczenie $I \approx_{\mathbb{Z}} J$), jeśli $C_I \sim_{\mathbb{Z}} C_J$, tzn. istnieje macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, taka że $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$.

Będziemy używać notacji „ $\overset{B}{\sim}_{\mathbb{Z}}$ ” oraz „ $\overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}}$ ”, aby wskazać macierz definiującą równoważność. Zauważmy ponadto, że $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$ są relacjami równoważności.

Uwaga 1.54. W przypadku porządków I, J , których macierz incydencji jest górnotrójką, kwadratowa (dwuliniowa) \mathbb{Z} -równoważność jest tożsama ze słabą (silną) \mathbb{Z} -kongruencją Grama bigrafów Δ_I oraz Δ_J w sensie definicji A.3.

Następujące własności \mathbb{Z} -równoważności odgrywają bardzo istotną rolę w problematyce klasyfikacji nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych (por. [111]).

Fakt 1.55. Niech I oraz J będą zbiorami częściowo uporządkowanymi o m elementach.

- (a) Jeśli $I \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$, to $I \overset{B}{\sim}_{\mathbb{Z}} J$. Odwrotna implikacja nie musi być prawdziwa (patrz przykład 4.10).
- (b) Jeśli $I \sim_{\mathbb{Z}} J$, to $|\mathcal{R}_I| = |\mathcal{R}_J|$.
- (c) Jeśli $I \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$, to $\text{Cox}_I = B^{tr} \cdot \text{Cox}_J \cdot B^{-tr}$, $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_J(t)$ oraz $\text{specc}_I = \text{specc}_J$.
- (d) Jeśli $I \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$, to kolumny $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}^m$ macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniają równość $b_i \cdot C_J \cdot b_i^{tr} = (C_I)_{ii} = 1$, tj. są pierwiastkami funkcyjonału kwadratowego $q_J(v) = v \cdot C_J \cdot v^{tr}$.
- (e) Jeśli $I \sim_{\mathbb{Z}} J$, to I jest dodatni (nieujemny korangi r) wtedy i tylko wtedy, gdy J jest dodatni (nieujemny korangi r).

Dowód. (a) Z założenia $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$ i stąd

$$G_I = \frac{1}{2} (C_I + C_I^{tr}) = \frac{1}{2} (B^{tr} \cdot C_J \cdot B + B^{tr} \cdot C_J^{tr} \cdot B) = B^{tr} \cdot G_J \cdot B.$$

(b) Macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ definiuje automorfizm $h_B: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ grupy \mathbb{Z}^m , gdzie $h_B(v) := v \cdot B^{tr}$. Dla każdego $w \in \mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I$ mamy:

$$1 = q_I(w) = w \cdot G_I \cdot w^{tr} = w \cdot (B^{tr} \cdot G_J \cdot B) \cdot w^{tr} = (w \cdot B^{tr}) \cdot G_J \cdot (w \cdot B)^{tr} = q_J(h_B(w)),$$

patrz definicja (1.40). Stąd prawdziwa jest równość $|\mathcal{R}_I| = |\mathcal{R}_J|$.

(c) Ponieważ z założenia istnieje \mathbb{Z} -odwracalna macierz B , taka że $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$, prawdziwe są równości

$$\text{Cox}_I = B^{tr} \cdot \text{Cox}_J \cdot B^{-tr},$$

$\text{cox}_I(t) = \text{cox}_J(t)$ oraz $\text{spec}_I = \text{spec}_J$, patrz dowód faktu 1.49.

(d) Ponieważ dla każdego $j = 1, \dots, m$ zachodzi $b_j = e_j \cdot B^{tr}$, to

$$1 = q_I(e_j) = e_j \cdot C_I \cdot e_j^{tr} = e_j \cdot (B^{tr} \cdot C_J \cdot B) \cdot e_j^{tr} = b_j \cdot C_J \cdot b_j^{tr} = q_J(b_j).$$

(e) Z założenia istnieje taka macierz nieosobliwa $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \text{Gl}(m; \mathbb{R})$, że $G_I = B^{tr} \cdot G_J \cdot B$. W szczególności, macierz $B^{-1} \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \text{Gl}(m; \mathbb{R})$ jest dobrze zdefiniowana. Dla dowolnego wektora $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$ mamy:

$$v \cdot G_I \cdot v^{tr} > [\geq] 0 \Leftrightarrow v \cdot B^{tr} \cdot G_J \cdot B \cdot v^{tr} > [\geq] 0 \Leftrightarrow w \cdot G_J \cdot w^{tr} > [\geq] 0,$$

gdzie $w := v \cdot B^{tr}$ oraz $v = w \cdot B^{-tr}$. Stąd macierz $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona [półokreślona] wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $G_J \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona [półokreślona]. Aby zakończyć dowód, zauważmy że $\text{rz}(B^{tr} \cdot G_J \cdot B) = \text{rz}(B^{tr} \cdot G_J) = \text{rz } G_J$ (ponieważ przemnożenie macierzy $G_J \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ przez macierz nieosobliwą zachowuje rząd, patrz [70, 0.4.6(b)], [89, str. 137]). \square

Każdy zbiór częściowo uporządkowany $J = (\{a_1, \dots, a_m\}, \leq)$ jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny z porządkiem $I = (\{1, \dots, m\}, \leq)$, którego elementy uporządkowano topologicznie, patrz fakt 1.44(b). Macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ porządku I jest górnorójkątna i dlatego I można utożsamiać z grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ_I oraz funkcjonałem kwadratowym $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\check{C}_I = \check{C}_\Delta = \check{C}_{q_I} = C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$. Zauważmy, że dwuliniowa \mathbb{Z} -równoważność implikuje kwadratową \mathbb{Z} -równoważność (fakt 1.55(a)) i stąd, na podstawie twierdzenia B.2, otrzymujemy następującą spektralną klasyfikację Coxetera porządków dodatnich (por. twierdzenie 1.30).

Twierdzenie 1.56. *Niech I będzie spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym. Następujące warunki są równoważne.*

- (a) Porządek I jest dodatni.
- (b) Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ (definicja 1.46(e)) jest skończony.
- (c) Zbiór $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest zredukowanym, nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki, typu $\text{Dyn}_{\mathcal{R}_I} \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz definicje B.3, B.6, twierdzenie B.14 oraz definicja B.16).
- (d) Graf krawędziowo-dwudzielny Δ_I (1.41) jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny (definicja A.3(a)) z jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $DI \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (tabela B.17), tj. symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest \mathbb{Z} -kongruentna z symetryczną macierzą Grama $G_{DI} \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ bigrafu $DI \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.
- (e) Istnieje automorfizm $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$, taki że $q_I \circ h = q_\Delta$, gdzie $\Delta \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

Dowód. Ponieważ spójność kołczanu Hasse $\mathcal{H}(I)$ implikuje spójność funkcjonau kwadratowego $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (patrz definicja A.8), wystarczy zastosować twierdzenie B.2 do funkcjonau $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$. Szczegóły dowodu twierdzenia B.2 znajdują się w dodatku B. \square

Innymi słowy, każdy spójny dodatni zbiór częściowo uporządkowany I jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności, przez spektrum Coxetera $\text{spec}c_I = \text{spec}c_{DI} \subseteq \mathbb{C}$ lub, równoważnie, przez wielomian Coxetera $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{DI}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ diagramu Dynkina $DI \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$.

Fakt 1.57. [111, Proposition 2.3] *Jeśli $\Delta \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ jest jednorodnym diagramem Dynkina (tabela B.17), to wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ nie zależy od numeracji wierzchołków diagramu Δ i ma postać przedstawioną w tabeli 1.58.*

TABELA 1.58. WIELOMIANY COXETERA JEDNORODNYCH DIAGRAMÓW DYNKINA

$$\begin{aligned} \text{cox}_{\mathbb{A}_n}(t) &= t^n + t^{n-1} + \dots + t^2 + t + 1 & n \geq 1; & \quad \text{cox}_{\mathbb{E}_6}(t) = t^6 + t^5 - t^3 + t + 1 \\ \text{cox}_{\mathbb{D}_n}(t) &= t^n + t^{n-1} + t + 1 & n \geq 4; & \quad \text{cox}_{\mathbb{E}_7}(t) = t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1 \\ \text{cox}_{\mathbb{E}_8}(t) &= t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1 \end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ każdy z grafów $\Delta \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ przedstawionych w tabeli B.17 jest drzewem, jego wielomian Coxetera $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ nie zależy od numeracji wierzchołków, patrz [111, Proposition 2.2]. Jawną postać wielomianu $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ można znaleźć w [111, Proposition 2.3], patrz też [84, 108]. \square

Przykład 1.48 sugeruje, że spektrum Coxetera $\text{spec}c_I \subseteq \mathbb{C}$ nieujemnego zbioru częściowo uporządkowanego I składa się z liczb zespolonych leżących na okręgu jednostkowym $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Następujące znane twierdzenie potwierdza tę obserwację.

Twierdzenie 1.59. [7, 72, 111] *Załóżmy, że $A \in \text{Gl}(n; \mathbb{R})$ jest taką macierzą nieosobliwą, że macierz symetryczna $\frac{1}{2}(A + A^{tr})$ jest dodatnio półokreślona. Jeśli $\text{Cox}_A := -A \cdot A^{-tr} \in \text{Gl}(n; \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{cox}_A(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_A) \in \mathbb{R}[t]$ oraz $\text{spec}c_A := \text{spec} A = \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{cox}_A(\lambda) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$, to:*

- (a) $\text{spec}c_A \subseteq \mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$,
- (b) $1 \notin \text{spec}c_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\frac{1}{2}(A + A^{tr}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ jest dodatnio określona,
- (c) jeśli $\text{cox}_A(t) \in \mathbb{Z}[t]$, to każdy $z \in \text{spec}c_A \subseteq \mathbb{C}$ jest zespolonym pierwiastkiem z jedyńki.

Ponieważ macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ (niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$) dowolnego nieujemnego porządku I (grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ) spełnia założenia twierdzenia 1.59, prawdziwy jest następujący fakt.

Fakt 1.60. (a) [119, Proposition 5] *Jeśli I jest nieujemnym zbiorem częściowo uporządkowanym, to $\text{spec}c_I \subseteq \mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$ oraz każdy $z \in \text{spec}c_I \subseteq \mathcal{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ jest zespolonym pierwiastkiem z jedyńki. Ponadto $1 \notin \text{spec}c_I$ wtedy i tylko wtedy, gdy I jest dodatni.*

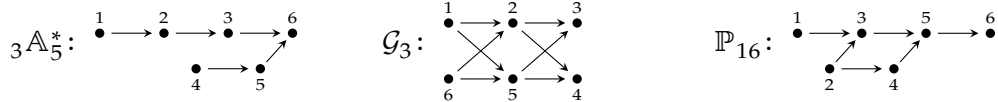
- (b) [111, Lemma 2.1] *Jeśli Δ jest nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym, to każdy $z \in \text{spec}c_\Delta \subseteq \mathcal{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ jest zespolonym pierwiastkiem z jedyńki. Ponadto $1 \notin \text{spec}c_\Delta$ wtedy i tylko wtedy, gdy Δ jest bigrafem dodatnim.*

Przykład 1.61. Rozważmy następujące trzy macierze nieosobliwe:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że:

- $A_1 = C_{3A_5^*} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$ jest macierzą incydencji dodatniego zbioru częściowo uporządkowanego $3A_5^*$ (patrz tabela 3.18),
- $A_2 = C_{G_3} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$ jest macierzą incydencji nieujemnego porządku korangi dwa, tzw. garlandy G_3 (patrz [54, Theorem 4.1(a)]),
- $A_3 \in \text{Gl}(6, \mathbb{Q})$ jest macierzą morsyfikacji (w sensie definicji A.6) porządku¹⁸ dodatniego \mathbb{P}_{16} (patrz tabela 3.20).



Łatwo pokazać, że:

$$\text{Cox}_{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{A_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{A_3} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

oraz

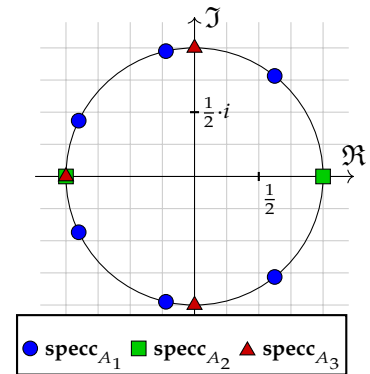
$$\begin{aligned} \text{cox}_{A_1}(t) &= t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1, \\ \text{cox}_{A_2}(t) &= t^6 + 2t^5 - t^4 - 4t^3 - t^2 + 2t + 1 = (t+1)^4(t-1)^2, \\ \text{cox}_{A_3}(t) &= t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2(t^2+1)^2 \end{aligned}$$

i w konsekwencji:

$$\text{specc}_{A_1} = \left\{ \begin{array}{l} -\cos\left(\frac{1}{7}\pi\right) - i\sin\left(\frac{1}{7}\pi\right), -\cos\left(\frac{1}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{7}\pi\right), \\ \cos\left(\frac{2}{7}\pi\right) - i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\right), \cos\left(\frac{2}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\right), \\ -\cos\left(\frac{3}{7}\pi\right) - i\sin\left(\frac{3}{7}\pi\right), -\cos\left(\frac{3}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{7}\pi\right) \end{array} \right\},$$

$$\text{specc}_{A_2} = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1\},$$

$$\text{specc}_{A_3} = \{-1, -1, -i, -i, i, i\}.$$



Z faktu 1.60(b) wynika, że spektrum Coxetera $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ jednorodnego diagramu Dynkina $\Delta \in \{A_m, D_m, E_6, E_7, E_8\}$ (tabela 1.32) składa się z (zespolonych) pierwiastków z jedyńki. Wynik ten można udowodnić przy pomocy następujących elementarnych argumentów podanych w [84].

Fakt 1.62. Jeśli $\Delta \in \{A_m, m \geq 1; D_m, m \geq 4; E_6; E_7; E_8\}$ jest jednorodnym diagramem Dynkina (tabela 1.32), to spektrum $\text{specc}_\Delta \in \mathbb{C}$ składa się z zespolonych pierwiastków z jedyńki.

¹⁸Formalnie: bigrafu $\Delta_{\mathbb{P}_{16}}$ stowarzyszonego z porządkiem \mathbb{P}_{16} , gdzie $\tilde{G}_{\Delta_{\mathbb{P}_{16}}} := C_{\mathbb{P}_{16}}$.

Dowód. [84, str. 545] Definiujemy wielomian $v_n := 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}[t]$ stopnia $n - 1$. Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ prawdziwa jest równość $v_n \cdot (t - 1) = t^n - 1$ a stąd wszystkie pierwiastki wielomianu $v_n \in \mathbb{Z}[t]$ są pierwiastkami z jedynki. Ponadto:

$$\begin{aligned} \text{cox}_{\mathbb{A}_m}(t) &= t^m + t^{m-1} + \dots + t^2 + t + 1 = v_{m+1}, \\ \text{cox}_{\mathbb{D}_m}(t) &= t^m + t^{m-1} + t + 1 = \frac{v_2 \cdot v_{2(m-1)}}{v_{m-1}}, \\ \text{cox}_{\mathbb{E}_6}(t) &= t^6 + t^5 - t^3 + t + 1 = \frac{v_2 \cdot v_3 \cdot v_{12}}{v_4 \cdot v_6}, \\ \text{cox}_{\mathbb{E}_7}(t) &= t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1 = \frac{v_2 \cdot v_3 \cdot v_{18}}{v_6 \cdot v_9}, \\ \text{cox}_{\mathbb{E}_8}(t) &= t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1 = \frac{v_2 \cdot v_3 \cdot v_5 \cdot v_{30}}{v_6 \cdot v_{10} \cdot v_{15}}, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości tezy. \square

Przykład 1.63. Rozważmy diagramy Dynkina \mathbb{A}_6 , \mathbb{D}_6 oraz \mathbb{E}_6 :

$$\mathbb{A}_6: \overset{1}{\bullet} - \overset{2}{\bullet} - \overset{3}{\bullet} - \overset{4}{\bullet} - \overset{5}{\bullet} - \overset{6}{\bullet}, \quad \mathbb{D}_6: \overset{1}{\bullet} - \overset{2}{\bullet} - \overset{3}{\bullet} - \overset{4}{\bullet} - \overset{5}{\bullet} - \overset{6}{\bullet}, \quad \mathbb{E}_6: \overset{1}{\bullet} - \overset{2}{\bullet} - \overset{3}{\bullet} - \overset{4}{\bullet} - \overset{5}{\bullet} - \overset{6}{\bullet}.$$

Niesymetryczne macierze Grama oraz macierze Coxetera tych diagramów mają postać:

$$\begin{aligned} \check{G}_{\mathbb{A}_6} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \check{G}_{\mathbb{D}_6} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \check{G}_{\mathbb{E}_6} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{Cox}_{\mathbb{A}_6} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, & \text{Cox}_{\mathbb{D}_6} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, & \text{Cox}_{\mathbb{E}_6} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd łatwo wykazać, że

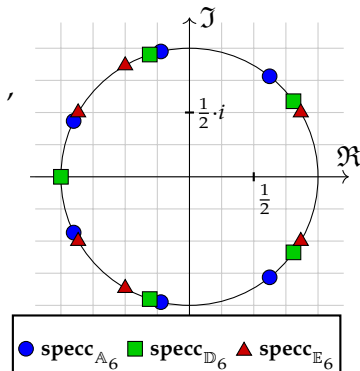
$$\begin{aligned} \text{cox}_{\mathbb{A}_6}(t) &= t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = v_7 = \frac{t^7 - 1}{t - 1}, \\ \text{cox}_{\mathbb{D}_6}(t) &= t^6 + t^5 + t + 1 = \frac{v_2 \cdot v_{10}}{v_5} = \frac{(t^2 - 1)(t^{10} - 1)}{(t - 1)(t^5 - 1)}, \\ \text{cox}_{\mathbb{E}_6}(t) &= t^6 + t^5 - t^3 + t + 1 = \frac{v_2 \cdot v_3 \cdot v_{12}}{v_4 \cdot v_6} = \frac{(t^2 - 1)(t^3 - 1)(t^{12} - 1)}{(t - 1)(t^4 - 1)(t^6 - 1)} \end{aligned}$$

i w konsekwencji:

$$\text{specc}_{\mathbb{A}_6} = \left\{ -\cos\left(\frac{1}{7}\pi\right) - i\sin\left(\frac{1}{7}\pi\right), \cos\left(\frac{2}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\right), -\cos\left(\frac{3}{7}\pi\right) - i\sin\left(\frac{3}{7}\pi\right), \right. \\ \left. -\cos\left(\frac{1}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{7}\pi\right), \cos\left(\frac{2}{7}\pi\right) - i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\right), -\cos\left(\frac{3}{7}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{7}\pi\right) \right\},$$

$$\text{specc}_{\mathbb{D}_6} = \left\{ -1, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}, \right. \\ \left. -1, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}} \right\},$$

$$\text{specc}_{\mathbb{E}_6} = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \right\}.$$



Rozdział 2

Podstawowe algorytmy

Bardzo ważną rolę w spektralnej klasyfikacji Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych odgrywają obliczenia symboliczne i numeryczne. Z jednej strony pozwalają na testowanie i weryfikowanie hipotez, z drugiej: stanowią podstawę wielu dowodów klasyfikacyjnych. W niniejszym rozdziale rozprawy dyskutujemy niektóre problemy związane z konstrukcją algorytmów oraz prezentujemy podstawowe algorytmy używane w rozprawie. Szczegółowo omawiamy trzy zagadnienia: problem weryfikacji dodatniej określoności i półokreśloności symetrycznej macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ oraz problem obliczania zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_q := \{v \in \mathbb{Z}^m; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$, gdzie $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnim jednolitym funkcjonałem kwadratowym (definicja A.8).

Pierwsze dwa z tych zagadnień związane są z obliczeniami numerycznymi (jedno z możliwych rozwiązań polega na obliczeniu wartości własnych macierzy i weryfikacji czy są dodatnie/nieujemne, patrz [89]). Trzecie natomiast, to w istocie problem rozwiązania jednorodnego równania diofantycznego, czyli problematyka tradycyjnie związana z obliczeniami symbolicznymi (por. [21]).

Rozdział zaczniemy od przeglądu ogólnodostępnego oprogramowania umożliwiającego rozwiązanie omawianych problemów. Następnie omawiamy algorytmy używane w rozprawie (szczególną uwagę zwracamy na stabilność numeryczną oraz złożoność obliczeniową). W ostatniej części rozdziału przedstawiamy porównanie czasu wykonywania naszych implementacji z istniejącymi rozwiązaniami omówionymi na początku rozdziału.

2.1. Narzędzia obliczeniowe

Badania, których wyniki zawarte są w dysertacji, mieszczą się w ramach *Scientific Computing*: interdyscyplinarnej dziedziny badań naukowych, w której bada się możliwości rozwiązania złożonych problemów teoretycznych przy pomocy wyników obliczeniowych. Dlatego niezwykle istotnym dla nas zagadnieniem jest wybór *optymalnych* narzędzi do przeprowadzania eksperymentów obliczeniowych. Przez *optymalne* rozumiemy tu narzędzia zapewniające nie tylko *wydajność* obliczeń, ale przede wszystkim ich *poprawność*. Celem niniejszego podrozdziału jest uzasadnienie konieczności implementacji autorskich algorytmów. Pokażemy, że istniejące narzędzia, które mogłyby być użyteczne w spektralnej analizie Coxetera skończonych porządków, nie spełniają naszego kryterium *optymalności*.

Głównym przedmiotem rozważań przedstawionych w rozprawie jest analiza skończonych m -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych I , których symetryczna macierz Grama $G_I = \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}^I$ (1.39) jest dodatnio określona lub półokreślona. Porządki te klasyfikujemy z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$ zdefiniowanej przez \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, patrz definicja 1.53(b). Ponieważ kolumny takich macierzy należą do zbioru $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$

pierwiastków funkcjonału kwadratowego $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) wyznaczonego przez porządek I (fakt 1.55(d)), algorytmy służące do jej wyznaczania konstruujemy przy założeniu znajomości zbioru pierwiastków.

W tym podrozdziale omawiamy zagadnienie wyboru narzędzi obliczeniowych, które umożliwiają efektywną weryfikację określoności symetrycznych macierzy postaci (1.39) oraz wyznaczanie zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (definicja 1.46(e)) rozważanych zbiorów częściowo uporządkowanych. Niniejszy podrozdział poświęcony jest przeglądowi oprogramowania oraz narzędzi algorytmicznych umożliwiających rozwiązanie tych problemów.

Aby sprawdzić określoność symetrycznej macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o współczynnikach rzeczywistych można posłużyć się m.in. następującymi metodami numerycznymi:

- obliczyć rozkład Choleskiego, który istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy macierz jest dodatnio określona (patrz np. [63, str. 63]);
- obliczyć wartości własne macierzy A (np. przy pomocy algorytmu QR, patrz [63, str. 110]). Macierz jest dodatnio określona (półokreślona) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wartości własne są dodatnie (nieujemne), patrz [70, Theorem 7.2.1].

Niestety, obie wymienione metody mogą podać błędny wynik z powodu niedokładności arytmetyki zmiennoprzecinkowej, co zilustrujemy na następującym przykładzie.

Przykład 2.1. Rozważmy symetryczną macierz Hilberta $H_n = [h_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, gdzie $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, która jest dodatnio określona dla każdego $n \geq 1$ (patrz [70, Problem 7.5.P22]). Na potrzeby obliczeń używamy biblioteki LAPACK [3], która zawiera standardowe implementacje wielu algorytmów numerycznych i jest używana zarówno w oprogramowaniu open-source, jak i komercyjnym.¹ Obliczenia wykonujemy z użyciem arytmetyki podwójnej precyzji (typ `double` wielkości 64 bitów, tj. `binary64` wg standardu IEEE 754):

- dla $n = 13$ obliczenie rozkładu Choleskiego przy pomocy funkcji `DPOTRF` kończy się błędem;
- dla $n = 14$ najmniejsza wartość własna obliczona przy pomocy funkcji `DSYEV` to $\approx -1,4601 \cdot 10^{-17}$ (w rzeczywistości jest równa $\approx 9,877 \cdot 10^{-20}$).

Zauważmy, że błędne wyniki obliczeniowe przedstawione w przykładzie 2.1 są konsekwencją nieprecyzyjnej arytmetyki maszynowej [63, str. 79] i nie mają związku z konkretną implementacją algorytmu (zwiększenie dokładności obliczeń zmiennoprzecinkowych pozwala na uzyskanie prawidłowego wyniku, por. <http://reference.wolfram.com/language/ref/CholeskyDecomposition.html>).

Ponieważ wyniki obliczeniowe stanowią istotny element dowodów wielu twierdzeń prezentowanych w rozprawie, błędy związane z arytmetyką zmiennoprzecinkową wykluczają użycie algorytmów numerycznych. Naturalnym rozwiązaniem problemów wynikających z arytmetyki maszynowej jest użycie *systemów algebry komputerowej*.

Uwaga 2.2. Przez *system algebry komputerowej* (ang. *computer algebra system*, w skrócie: CAS) rozumiemy² oprogramowanie, które umożliwia:

- obliczenia z użyciem abstrakcyjnych obiektów matematycznych (w tym wielomianów wielu zmiennych),
- obliczenia z dowolną precyzją (ograniczone wielkością pamięci operacyjnej komputera, a nie architekturą sprzętową).

¹Np. w Maple, patrz <https://www.maplesoft.com/products/maple/features/LinearAlgebra.aspx>.

²Por. https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Computer_algebra_package.

Do najpopularniejszych, a zarazem najbardziej rozbudowanych systemów algebry komputerowej należą:

- Maple firmy Waterloo Maple Inc. (nazwa handlowa: Maplesoft), program komercyjny, rozwijany od 1982 roku, <https://www.maplesoft.com/products/maple/>;
- Wolfram Mathematica firmy Wolfram Research, Inc., program komercyjny, rozwijany od 1988 roku, <https://www.wolfram.com/mathematica/>;
- SageMath, program open-source dostępny na licencji GNU GPLv3, rozwijany od 2005 roku, <https://www.sagemath.org/>.

Wśród rozważanych systemów algebry komputerowej uwzględniony został tylko jeden projekt open-source (SageMath), ponieważ pod jednym interfejsem zawiera on wiele programów typu CAS, w tym:

- Maxima (<http://maxima.sourceforge.net/>) – oparty na kodzie źródłowym programu Macsyma, jednego z najstarszych systemów CAS (rozwijanego od 1968 r.),
- GAP (<http://www.gap-system.org/>) – narzędzie szczególnie przydatne w badaniach dotyczących teorii grup (rozwijane od 1986 r.),
- GiNaC (<https://ginac.de/>) – biblioteka (napisana w języku C++) umożliwiająca wykonywanie obliczeń symbolicznych (rozwijana od 1997 r.),
- SymPy (<http://www.sympy.org/>) – biblioteka, która rozszerza język Python o funkcjonalności dostarczane przez systemy typu CAS (rozwijana od 2007 r.).

Następująca tabela przedstawia zestawienie możliwości rozwiązania trzech rozważanych w tym rozdziale problemów przy pomocy trzech programów typu CAS, do których mieliśmy dostęp.

	dodatniość	nieujemność	pierwiastki
Maple 2015	tak	tak	nie
Mathematica 10.2.0	tak	tak	tak
SageMath 8.0	tak	nie	nie

Podsumowując, jedynie Mathematica zapewnia środowisko pracy umożliwiające rozwiązanie trzech rozważanych problemów bez potrzeby implementacji żadnych dodatkowych algorytmów. Z drugiej strony, dwa istotne problemy wykluczają użycie systemu Mathematica na potrzeby obliczeń, których rezultaty przedstawione są w rozprawie.

1. Nie ma możliwości sprawdzenia jakich algorytmów użyli twórcy programu Mathematica ani analizy ich implementacji.³ Stąd poprawność dowodów, których elementem byłyby wyniki obliczeń, można w takim wypadku sprawdzić tylko „z dokładnością do poprawnego działania systemu Mathematica”, bez możliwości bardziej wnikliwej weryfikacji.

³Według oficjalnej dokumentacji „zazwyczaj nie jest to problem”, patrz <http://reference.wolfram.com/language/tutorial/WhyYouDoNotUsuallyNeedToKnowAboutInternals.html>.

2. Szybkość obliczeń uniemożliwia efektywną analizę dużych zbiorów danych. Przykładowo: obliczenie zbioru pierwiastków funkcjonału $q_{\mathbb{D}_{10}} : \mathbb{Z}^{10} \rightarrow \mathbb{Z}$ zajmuje ok. 175 minut⁴. Co więcej, wyniki empiryczne sugerują, że Mathematica używa do obliczeń algorytmu wykładniczego, por. uwaga 2.29(b). Jest to istotny problem, ponieważ obliczanie zbioru pierwiastków wielu porządków I (złożonych z $|I| \leq 14$ elementów) jest niezbędnym elementem przedstawianych w dysertacji dowodów (patrz np. twierdzenia 3.17 oraz 4.24).

Przeprowadzona analiza istniejących rozwiązań trzech podstawowych problemów algorytmicznych rozważanych w niniejszym rozdziale wyklucza ich użycie na potrzeby obliczeń, których wyniki prezentowane są w dysertacji. Co za tym idzie, wykazuje konieczność autorskich implementacji *optymalnych* (z punktu widzenia naszych zastosowań) algorytmów rozwiązujących te problemy. Takie implementacje omawiamy w dalszej części rozdziału oraz podrozdziałach 3.6, 3.7, 4.2 oraz 5.3.

2.2. Algorytmiczna weryfikacja określoności macierzy

Niniejszy podrozdział poświęcony jest przedstawieniu i analizie algorytmów, których implementacji używamy w rozprawie do weryfikacji dodatniości (nieujemności) m -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych.

Uwaga 2.3. Wymierna macierz Grama $G_I := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (1.39) jest dodatnio określona (dodatnio półokreślona rzędu r) wtedy i tylko wtedy, gdy całkowitoliczbowa podwojona macierz Grama $\widehat{G}_I = 2 \cdot G_I = C_I + C_I^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona (dodatnio półokreślona rzędu r). Dlatego, bez zmniejszenia ogólności rozważań, będziemy zakładać, że rozważane macierze symetryczne złożone są z liczb całkowitych.

Przedstawimy dwa kryteria, które umożliwiają weryfikację dodatniej określoności (półokreśloności) symetrycznej macierzy całkowitoliczbowej przy pomocy arytmetyki całkowitoliczbowej i w związku z tym pozwalają uniknąć problemów związanych z przybliżoną arytmetyką liczb zmiennoprzecinkowych. Pierwsze z nich, znane jako *Kryterium Sylwestera*, zawarte jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.4. Niech $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ będzie symetryczną macierzą kwadratową, o współczynnikach rzeczywistych.

- (a) Macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej wiodący minor główny, tj. wyznacznik macierzy $A^{(i)} \subseteq A$, gdzie $i \in \{1, \dots, m\}$ oraz

$$A^{(i)} := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_i(\mathbb{Z}),$$

jest dodatni.

- (b) Macierz $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej minor główny, tj. wyznacznik macierzy $A^{(i_1, \dots, i_s)} \subseteq A$, gdzie $s \in \{1, \dots, m\}$ oraz

$$A^{(i_1, \dots, i_s)} := \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_s} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s i_1} & a_{i_s i_2} & \cdots & a_{i_s i_s} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_s(\mathbb{Z})$$

dla dowolnych $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq m$, jest nieujemny.

⁴Na komputerze z procesorem Intel Xeon X5650 taktowanym zegarem 2,67 GHz.

Dowód twierdzenia 2.4 można znaleźć w [91, Twierdzenie 7, str. 349] (podpunkt (a)) oraz [89, Podrozdział 7.6, str. 558–567] (podpunkty (a) oraz (b)).

Następujący przykład pokazuje, jak weryfikuje się dodatniość oraz nieujemność skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych przy pomocy kryterium Sylwestera.

Przykład 2.5. Rozważmy dwa zbiory częściowo uporządkowane:

$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \bullet 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet 1 \quad \bullet 4 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \bullet 3 \end{array}, \quad \widehat{C}_I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{H}(J): \begin{array}{ccc} \bullet 1 & \longrightarrow & \bullet 4 \\ & \searrow & \swarrow \\ & & \bullet 3 \\ \bullet 2 & \longrightarrow & \bullet 3 \end{array}, \quad \widehat{C}_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

gdzie $\widehat{C}_I := C_I + C_I^{tr} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ oraz $\widehat{C}_J := C_J + C_J^{tr} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$. Ponieważ wyznaczniki macierzy $\widehat{C}_I^{(1)}, \dots, \widehat{C}_I^{(4)}$ są dodatnie, porządek I jest dodatni (a stąd nieujemny):

$$\det[2] = 2 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 > 0.$$

Porządek J nie jest dodatni, ponieważ $\det \widehat{C}_J^{(1,2,3,4)} = \det \widehat{C}_J = 0$, ale jest nieujemny, gdyż:

- $\det \widehat{C}_J^{(a)} = \det[2] = 2 \geq 0$, gdzie $a \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- $\det \widehat{C}_J^{(a,b)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \geq 0$, gdzie $(a, b) \in \{(1, 2), (3, 4)\}$,
- $\det \widehat{C}_J^{(a,b)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \geq 0$, gdzie $(a, b) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$,
- $\det \widehat{C}_J^{(a,b,c)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 \geq 0$, gdzie $(a, b, c) \in \{(1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$,
- $\det \widehat{C}_J^{(a,b,c)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \geq 0$, gdzie $(a, b, c) \in \{(1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$,
- $\det \widehat{C}_J^{(a,b,c,d)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$, gdzie $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$.

Uwaga 2.6. Implementacja kryterium Sylwestera (twierdzenie 2.4) nie wymaga użycia arytmetyki zmiennoprzecinkowej.

- (a) Dodatnia określoność: implementację kryterium można oprzeć na algorytmie Barreissa (patrz [6]). Jest to całkowitoliczbowy wariant eliminacji Gaussa, w którym obliczane są wiodące minory główne macierzy. W ten sposób otrzymujemy algorytm, który w pesymistycznym wypadku wykonuje $O(m^3)$ operacji w pierścieniu \mathbb{Z} .
- (b) Dodatnia półokreśloność: implementacja kryterium opisanego w twierdzeniu 2.4(b) w pesymistycznym przypadku wymaga obliczenia $2^m - 1$ minorów, co prowadzi do algorytmu o złożoności co najmniej wykładniczej.

- (c) Wykładnicza złożoność obliczeniowa algorytmu weryfikującego dodatnią półokreśloność macierzy kwadratowej opisanego w twierdzeniu 2.4(b), wyklucza użycie go do efektywnej pracy z dużymi zbiorami danych. Przykładowo, istnieje dokładnie 1 303 143 553 205 spójnych niezomorficznych 14-elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych (patrz [18]). Aby sprawdzić, przy pomocy kryterium opisanego w twierdzeniu 2.4(b), które spośród nich są nieujemne w sensie definicji 1.51, należy obliczyć $1\,303\,143\,553\,205 \cdot (2^{14} - 1) = 21\,349\,400\,832\,157\,515$ minorów.

Kryterium pozwalające na weryfikację dodatniej półokreśloności symetrycznych macierzy kwadratowych w czasie wielomianowym opisujemy w twierdzeniu 2.10 (uwaga 2.6(c) uzasadnia, czemu w tym celu nie rozważamy praktycznej implementacji twierdzenia 2.4(b)).

Kryterium Sylwestera (twierdzenie 2.4(a)) jest podstawą następującego algorytmu o wielomianowej złożoności obliczeniowej (w pesymistycznym przypadku).

Algorytm 2.7. **WEJŚCIE** Macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

WYNIK Wartość logiczna: **Prawda** jeśli macierz A jest dodatnio określona lub **Fałsz**, w przeciwnym wypadku.

KROK 1° Inicjalizujemy zmienną $B = [b_{ij}] := A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

KROK 2° Jeśli $n = 1$, zwracamy wynik porównania $b_{11} > 0$.

KROK 3° Jeśli $b_{11} \leq 0$ lub $(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) \leq 0$ kończymy działanie z wynikiem **Fałsz**.

KROK 4° Dla $(i, j) \in \{2, \dots, n\}^2$:

KROK 4.1° obliczamy $b_{ij} := b_{11} \cdot b_{ij} - b_{i1} \cdot b_{1j}$.

KROK 5° Dla każdego $2 \leq k < n$:

KROK 5.1° dla $(i, j) \in \{k+1, \dots, n\}^2$:

KROK 5.1.1° obliczamy $b_{ij} := (b_{kk} \cdot b_{ij} - b_{ik} \cdot b_{kj}) / b_{k-1k-1}$;

KROK 5.2° jeśli $b_{k+1k+1} \leq 0$ kończymy działanie z wynikiem **Fałsz**.

KROK 6° Kończymy działanie z wynikiem **Prawda**.

Uwaga 2.8. (a) Poprawność algorytmu 2.7 wynika z twierdzenia 2.4(a) oraz algorytmu Bareissa, ponieważ na przekątnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, obliczane są kolejne wiodące minory główne macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, patrz [6]. Co więcej, w kroku 5.1.1° algorytmu mamy gwarancję, że

$$(b_{kk} \cdot b_{ij} - b_{ik} \cdot b_{kj}) \bmod b_{k-1k-1} = 0$$

i stąd algorytm można zaimplementować przy pomocy arytmetyki całkowitoliczbowej.

(b) W pesymistycznym przypadku (dla dodatnio określonej macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $n \geq 2$) algorytm 2.7 wykonuje $\frac{1}{3}n(n-1)(2n-1)$ mnożeń oraz $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$ odejmowań i dzieleni. Ponieważ mnożenie oraz dzielenie są bardziej czasochłonnymi operacjami (w stosunku do dodawania oraz odejmowania), złożoność algorytmu możemy określić jako $n^3 - \frac{1}{2}(5n^2 - 5n + 2) = O(n^3)$. Zauważmy, że algorytm wykonuje mniej niż n^3 operacji: przykładowo, liczba mnożeń i dzieleni dla $n = 10$ wynosi $774 = 0,774 \cdot n^3$, natomiast dla $n = 15$ jest równa $2849 \approx 0,844 \cdot n^3$.

Przykład 2.9. Rozważmy zbiory częściowo uporządkowane I oraz J przedstawione w przykładzie 2.5. Aby zweryfikować dodatniość porządków I, J możemy sprawdzić przy pomocy algorytmu 2.7, czy macierze $\hat{C}_I := C_I + C_I^{tr} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ oraz $\hat{C}_J := C_J + C_J^{tr} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$

są dodatnio określone. Algorytm 2.7 sprowadza symetryczne macierze $\widehat{C}_I, \widehat{C}_J \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ do postaci górnotrójkątnej, gdzie na przekątnej znajdują się kolejne wiodące minory główne.

$$\widehat{C}_I: \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{3} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \boxed{4} & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \boxed{4} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{C}_J: \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \boxed{4} & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Stąd, w świetle twierdzenia 2.4(a), porządek I jest dodatni, natomiast porządek J nie jest dodatni (ponieważ $\det \widehat{C}_J = 0$, por. przykład 2.5).

Pokażemy teraz, że dodatnia półokreśloność oraz rząd symetrycznej macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ wyznaczone są jednoznacznie przez spektrum $\text{spec}_A = \{v \in \mathbb{Z}^m; \det(v \cdot E - A) = 0\} \subseteq \mathbb{R}$ stowarzyszone z tą macierzą (por. [70, Corollary 7.2.4]). Fakt ten wykorzystujemy w algorytmie 2.13, który pozwala na weryfikację dodatniej półokreśloności całkowitoliczbowych macierzy kwadratowych w czasie co najwyżej wielomianowym.

Twierdzenie 2.10. *Symetryczna macierz $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jest dodatnio półokreślona rzędu $m - r$ wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki wielomianu charakterystycznego*

$$F_A(t) = \det(t \cdot E - A) = f_0 + f_1 \cdot t + f_2 \cdot t^2 + \dots + f_m \cdot t^m \in \mathbb{Z}[t], \quad (2.11)$$

spełniają warunki: $f_i = 0$ dla $i < r$ oraz $f_i \cdot f_{i+1} < 0$ dla $r \leq i < m$.

Dowód. Teza wynika z następujących obserwacji:

- spektrum $\text{spec}_A = \{v \in \mathbb{Z}^m; F_A(v) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$ symetrycznej macierzy $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ jest rzeczywiste (patrz [70, Theorem 4.1.3]) i stąd wszystkie pierwiastki $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ wielomianu charakterystycznego $F_A(t) \in \mathbb{Z}[t] \subseteq \mathbb{R}[t]$ są rzeczywiste;
- (reguła znaków Kartezjusza [91, str. 232]) liczba rzeczywistych pierwiastków dodatnich wielomianu $F(t) = f_0 + f_1 t + \dots + f_m t^m \in \mathbb{R}[t]$, który posiada same pierwiastki rzeczywiste, jest równa liczbie zmian znaków w ciągu współczynników (f_0, f_1, \dots, f_m) ;
- macierz $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jest dodatnio określona (półokreślona) wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0$ ($\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$), patrz [89, str. 559,566], [70, Theorem 7.2.1];
- rząd macierzy $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jest równy liczbie niezerowych pierwiastków wielomianu $F_A(t) \in \mathbb{Z}[t]$, patrz [91, Twierdzenie 10, str. 362]. \square

Twierdzenie 2.10 opisuje kryterium dodatniej półokreśloności kwadratowej całkowitoliczbowej macierzy symetrycznej i prowadzi do wielomianowego algorytmu 2.13, który można zaimplementować przy użyciu operacji wykonywanych w pierścieniu liczb całkowitych \mathbb{Z} . Algorytm ten jest nieco wolniejszy od algorytmu 2.7 w przypadku weryfikacji dodatniej określoności ($O(n^4)$ vs. $O(n^3)$), ale w przypadku bardziej ogólnego problemu weryfikacji dodatniej półokreśloności jest zdecydowanie szybszy niż kryterium Sylwestera (złożoność wielomianowa vs. wykładnicza).

Przykład 2.12. Rozważmy dwa zbiory częściowo uporządkowane:

$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{ccc} 1 \bullet & \longrightarrow & 4 \bullet \\ & \searrow & \nearrow \\ 2 \bullet & \longrightarrow & 3 \bullet \end{array}, \widehat{C}_I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathcal{H}(J): \begin{array}{ccccc} 1 \bullet & \longrightarrow & 4 \bullet & \longrightarrow & 5 \bullet \\ & \searrow & \nearrow & & \\ 2 \bullet & \longrightarrow & 3 \bullet & & \end{array}, \widehat{C}_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\widehat{C}_I := C_I + C_I^{tr}$ oraz $\widehat{C}_J := C_J + C_J^{tr}$. Porządek I jest nieujemny korangi 1, natomiast porządek J nie jest nieujemny, ponieważ:

$$F_{\widehat{C}_I} = \det(t \cdot E - \widehat{C}_I) = t^4 - 8t^3 + 20t^2 - 16t,$$

$$F_{\widehat{C}_J} = \det(t \cdot E - \widehat{C}_J) = t^5 - 10t^4 + 33t^3 - 42t^2 + 14t + 4.$$

Aby w czasie wielomianowym obliczyć współczynniki $f_i \in \mathbb{Z}$ wielomianu charakterystycznego $F_A(t) = f_0 + f_1 \cdot t + f_2 \cdot t^2 + \dots + f_m \cdot t^m \in \mathbb{Z}[t]$ macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ używamy algorytmu Faddeeva-Leverriera, który opiera się na następującej równości:

$$f_k := \frac{-\text{trace}(A_k)}{k} \in \mathbb{Z}, \text{ dla } 1 \leq k \leq n \text{ oraz } A_{k+1} := A \cdot (A_k + f_k \cdot E) \text{ dla } 1 \leq k < n,$$

gdzie $f_0 := 1$ oraz $A_1 := A$, patrz [67].

Algorytm 2.13. **WEJŚCIE** Macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

WYNIK Liczba całkowita: $\mathbf{n} - \mathbf{rz} \mathbf{A}$ lub -1 , jeśli macierz nie jest dodatnio półokreślona.

KROK 1° Deklarujemy zmienne: $C = [c_{ij}], D = [d_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); x, y, ilosc_zer \in \mathbb{Z}$.

KROK 2° Ustawiamy $C := A, ilosc_zer := 0$.

KROK 3° Ustawiamy $y := 0$.

KROK 4° Dla $i \in \{1, \dots, n\}$ obliczamy $y := y - a_{ii}$.

KROK 5° Jeśli $y > 0$ kończymy z wynikiem -1 .

KROK 6° Jeśli $y = 0$ obliczamy $ilosc_zer := ilosc_zer + 1$.

KROK 7° Dla $1 \leq k < n$:

KROK 7.1° dla $i \in \{1, \dots, n\}$ wykonujemy $c_{ii} := c_{ii} + y$;

KROK 7.2° dla $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

KROK 7.2.1° ustawiamy $d_{ij} := 0$;

KROK 7.2.2° dla $s \in \{1, \dots, n\}$ obliczamy $d_{ij} := d_{ij} + a_{is} \cdot c_{sj}$;

KROK 7.3° ustawiamy $x := 0$;

KROK 7.4° dla $i \in \{1, \dots, n\}$ obliczamy $x := x - d_{ii}$;

KROK 7.5° obliczamy $x := x / (k + 1)$;

KROK 7.6° jeśli $x = 0$, wykonujemy $ilosc_zer := ilosc_zer + 1$;

KROK 7.7° jeśli $x \neq 0 \wedge (x \cdot y > 0 \vee ilosc_zer > 0)$ kończymy z wynikiem -1 ;

KROK 7.8° ustawiamy $y := x$ oraz $C := D$.

KROK 8° Kończymy działanie z wynikiem $ilosc_zer$.

Uwaga 2.14. (a) Złożoność obliczeniowa algorytmu 2.13 to $O(n^4)$, ponieważ w pesymistycznym przypadku wykonywanych jest $n^4 - n^3 + 2 \cdot n - 2$ operacji mnożenia i dzielenia.

(b) Wielomian charakterystyczny symetrycznej macierzy całkowitoliczbowej można policzyć przy pomocy $O(n^3)$ operacji w pierścieniu \mathbb{Z} przy pomocy metody przedstawionej w pracy [1]. Algorytm Faddeeva-Leverriera został wybrany jako podstawa algorytmu 2.13 ze względu na prostotę opisu i przejrzystość implementacji.

$f_1 := -\text{trace}(A)$

$A_{k+1} := A \cdot (A_k + f_k \cdot E)$

$f_{k+1} := \frac{-\text{trace}(A_{k+1})}{k+1} \in \mathbb{Z}$

2.3. Obliczanie zbioru pierwiastków

Jednym z celów niniejszej dysertacji jest rozwiązanie problemu 3 sformułowanego we wstępie dla pewnej klasy skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych, tj. konstrukcja algorytmów, które wyznaczają \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującą dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność pomiędzy n -elementowymi porządkami I oraz J , które są nieujemne korangi $0 \leq r \leq 2$. Kolumny takich macierzy należą do zbioru $\mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_J(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków funkcjonału kwadratowego $q_J: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40), patrz fakt 1.55(d). Dlatego w konstrukcji algorytmów zakładamy znajomość zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Następująca uwaga pokazuje, że wyznaczenie zbioru pierwiastków porządków I korangi $\text{crk}_I \in \{1, 2\}$ można sprowadzić do obliczenia pierwiastków porządku dodatniego (korangi 0). Dlatego w niniejszym rozdziale będziemy zakładać, że I jest skończonym porządkiem dodatnim.

Uwaga 2.15. Jeśli I jest nieujemnym n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi $1 \leq \text{crk}_I \leq 2$, to zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^n$ można przedstawić w postaci $\mathcal{R}_I = \mathcal{R}_{\bar{I}} + \text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $\mathcal{R}_{\bar{I}} \subseteq \mathbb{Z}^{n-r}$ jest zbiorem pierwiastków dodatniego funkcjonału kwadratowego $q_{\bar{I}}: \mathbb{Z}^{\bar{I}} \rightarrow \mathbb{Z}$, patrz fakt 4.41 oraz fakt 5.26.

Niniejszy podrozdział poświęcony jest omówieniu problemu obliczania zbioru $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków dodatniego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Wyniki tu prezentowane stosujemy w rozprawie głównie do funkcjonałów postaci $q := q_J: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40), gdzie J jest skończonym m elementowym porządkiem dodatnim. Następujący fakt pokazuje, że zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony.

Fakt 2.16. [87, Corollary 2.8] *Jeśli $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem dodatnio określonego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, to $-6 \leq v_i \leq 6$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Z faktu 2.16 wynikają następujące wnioski dotyczące obliczania zbioru $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$.

- (a) Zbiór $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków dodatniego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ można obliczyć przy pomocy wykładniczego algorytmu zachłannego: wystarczy sprawdzić, które wektory $v = [v_1, \dots, v_n] \in \{-6, \dots, 6\}^n$ spełniają warunek $q(v) = 1$.
- (b) Algorytm o lepszej złożoności otrzymuje się przez przyjęcie ograniczenia postaci $\min(6, \lfloor \min(\text{spec } G_q) \rfloor)$, gdzie $\text{spec } G_q \subseteq \mathbb{R}^n$ jest rzeczywistym spektrum symetrycznej macierzy Grama (definicja A.8(a)), patrz [109, Algorithm 3.7]. W wielu przypadkach pozwala to uzyskać precyzyjniejsze oszacowanie na wartości współrzędnych pierwiastków. Niemniej, podejście to wymaga obliczenia rzeczywistego spektrum symetrycznej macierzy $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, a stąd użycia nieprecyzyjnej arytmetyki zmiennoprzecinkowej. Ponadto wyznaczone ograniczenia mają charakter *globalny* (są identyczne dla wszystkich współrzędnych $v_i \in \mathbb{Z}$ pierwiastków $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$).
- (c) Inną metodę, która umożliwia wyznaczenia ograniczeń na poszczególne współrzędne pierwiastków dodatniego jednolitego funkcjonału kwadratowego, otrzymujemy jako wniosek z „dodatniej” wersji twierdzenia Lagrange’a.

Twierdzenie 2.17. [91] *Załóżmy, że $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ jest formą kwadratową (1.22) postaci $q(x) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_i x_j$, gdzie $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ dla $1 \leq i \leq j \leq n$, która definiuje*

dotatnio określony funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Dla dowolnej permutacji $\binom{1, \dots, n}{j_1, \dots, j_n}$ zbioru $\{1, \dots, n\}$ formę $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ można przedstawić w postaci kanonicznej

$$q(x) = \lambda_{j_1} (c_{j_1 j_1} x_{j_1} + \dots + c_{j_1 j_n} x_{j_n})^2 + \dots + \lambda_{j_{n-1}} (c_{j_{n-1} j_{n-1}} x_{j_{n-1}} + c_{j_{n-1} j_n} x_{j_n})^2 + \lambda_{j_n} x_{j_n}^2,$$

gdzie $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_{n-1}}, \lambda_{j_n} \in \mathbb{Q}^+$ są dodatnimi liczbami wymiernymi.

Dowód. [45, Theorem 5.3] Zauważmy najpierw, że współczynniki q_{11}, \dots, q_{nn} są dodatnie, ponieważ funkcjonal $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony. Twierdzenie udowodnimy przy pomocy indukcji zupełnej, ze względu na $n \geq 1$. Jeśli $n = 1$ to forma $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1]$ ma postać kanoniczną $q(x) = q_{11} x_1^2$.

Założmy, że $n \geq 2$. Formę $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ można przedstawić w postaci

$$q(x_1, \dots, x_n) = q_{j_1 j_1} \left(x_{j_1} + \frac{q_{j_1 j_2}}{2q_{j_1 j_1}} x_{j_2} + \dots + \frac{q_{j_1 j_n}}{2q_{j_1 j_1}} x_{j_n} \right)^2 + \check{q}(x_{j_2}, \dots, x_{j_n}),$$

gdzie forma

$$\check{q}(x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) := q(x) - q_{j_1 j_1} \left(x_{j_1} + \frac{q_{j_1 j_2}}{2q_{j_1 j_1}} x_{j_2} + \dots + \frac{q_{j_1 j_n}}{2q_{j_1 j_1}} x_{j_n} \right)^2$$

zależy wyłącznie od zmiennych x_{j_2}, \dots, x_{j_n} .

Pokażemy, że funkcjonal $\check{q}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony. Założmy, przez sprzeczność, że istnieje wektor $0 \neq u = (u_{j_2}, \dots, u_{j_n}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, taki że $\check{q}(u) \leq 0$. Wtedy, dla wektora

$$\hat{u} = (\hat{u}_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n}), \text{ gdzie } \hat{u}_{j_1} := - \left(\frac{q_{j_1 j_2}}{2q_{j_1 j_1}} u_{j_2} + \dots + \frac{q_{j_1 j_n}}{2q_{j_1 j_1}} u_{j_n} \right) \neq 0,$$

zachodzi $q(\hat{u}) = \check{q}(u) \leq 0$, co jest sprzeczne z założeniem dodatniej określoności funkcjonala $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Stąd forma $\check{q}(x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) \in \mathbb{Z}[x_{j_2}, \dots, x_{j_n}]$ definiuje dodatnio określony funkcjonal kwadratowy i można zastosować do niej założenie indukcyjne. \square

Wniosek 2.18. Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ dodatniego funkcjonala kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest skończony. Co więcej, dla każdego $1 \leq i \leq n$ istnieje takie $\mathbb{N} \ni k_i < \infty$, że dla każdego pierwiastka $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ prawdziwa jest nierówność $|v_i| \leq k_i$.

Dowód. Ustalmy indeks $1 \leq i \leq n$ oraz dowolną permutację $\binom{1, \dots, n-1, n}{j_1, \dots, j_{n-1}, i}$ zbioru $\{1, \dots, n\}$. Formę $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ można przedstawić w postaci

$$q(x) = \lambda_{j_1} (c_{j_1 j_1} x_{j_1} + \dots + c_{j_1 j_{n-1}} x_{j_{n-1}} + c_{j_1 i} x_i)^2 + \dots + \lambda_{j_{n-1}} (c_{j_{n-1} j_{n-1}} x_{j_{n-1}} + c_{j_{n-1} i} x_i)^2 + \lambda_i x_i^2,$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}^+$ są dodatnimi liczbami wymiernymi, patrz twierdzenie 2.17. Stąd oraz z równości $q(r) = 1$ otrzymujemy nierówność $\lambda_i \cdot r_i^2 \leq 1$ i w konsekwencji

$$|v_i| \leq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right\rfloor =: k_i < \infty. \quad \square$$

Następujący przykład pokazuje, jak wyznaczyć zbiór pierwiastków dodatniego funkcjonala kwadratowego $q: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$ przy pomocy omówionych metod obliczeniowych.

Przykład 2.19. Rozważmy dodatni jednolity funkcjonal kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 - x_3 x_4,$$

gdzie

$$\Delta: \begin{array}{c} 1 \bullet \\ \diagdown \\ 3 \bullet \\ \diagup \\ 2 \bullet \end{array} \text{---} 4 \bullet, \quad \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że Δ jest jednorodnym diagramem Dynkina \mathbb{D}_4 (tabela 1.32), którego wierzchołki są ponumerowane tak jak w tabeli B.17. Zbiór $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^4$ składa się z 24 elementów:

$$\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_{\mathbb{D}_4} = \pm \{e_1, e_2, e_3, e_4, 2e_3, 2e_4, 3e_4, 1e_3, 1e_4, 1e_3 - e_2, 1e_4 - e_2, 1e_4 + e_3\},$$

gdzie $i e_j := e_i + e_{i+1} + \dots + e_j$, patrz tabela B.27 oraz lemat B.28(c).

Pokażemy, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^4$ można wyznaczyć algorytmicznie. Standardowe obliczenia pokazują, że:

$$F_\Delta(t) = t^4 - 4t^3 + \frac{21}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (t-1)^2 (4t^2 - 8t + 1),$$

$$\text{spec}_\Delta = \left\{ \frac{2-\sqrt{3}}{2}; 1; 1; \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right\} \approx \{0,133974596215561; 1; 1; 1,866025403784439\}.$$

Zauważmy, że współrzędne $r_i \in \mathbb{Z}$ dowolnego pierwiastka $r = [r_1, r_2, r_3, r_4] \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^4$ spełniają nierówność

$$|r_i| \leq \min \left(6, \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{3}}} \right\rfloor \right) = \min \left(6, \left\lfloor \sqrt{7,464} \right\rfloor \right) = \min (6, [2,732]) = 2.$$

Z drugiej strony, zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie wniosku 2.18, stosując czterokrotnie twierdzenie 2.17 (Lagrange'a) otrzymujemy

$$\begin{aligned} q_\Delta(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_3 - x_2x_3 - x_3x_4 = \\ &= \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_3 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_4 - \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = \\ &= \frac{3}{4}\left(x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_4 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{4}x_3^2 = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4)^2 + \frac{1}{2}x_4^2, \end{aligned}$$

a stąd $|r_i| \leq \lfloor \sqrt{2} \rfloor = \lfloor 1,4142 \rfloor = 1$, gdzie $i \in \{1, 2, 4\}$ oraz $|r_3| \leq \lfloor \sqrt{4} \rfloor = 2$. Podsumowując, zbiór $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^4$ składa się z co najwyżej 108 pierwiastków:

$$\mathcal{R}_\Delta \subseteq \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}^4.$$

Weryfikując równość $q(v) = 1$ dla każdego ze 108 możliwych wektorów pokazujemy, że zbiór $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^4$ składa się z 24 wektorów:

$$\begin{aligned} &[\hat{1}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{1}], [\hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}], [\hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 0], [\hat{1}, 0, \hat{1}, \hat{1}], [\hat{1}, 0, \hat{1}, 0], [\hat{1}, 0, 0, 0], [0, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}], [0, \hat{1}, \hat{1}, 0], \\ &[0, \hat{1}, 0, 0], [0, 0, \hat{1}, \hat{1}], [0, 0, \hat{1}, 0], [0, 0, 0, \hat{1}], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 0], \\ &[0, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 1], \end{aligned}$$

gdzie dla dowolnego $a \in \mathbb{N}$ stosujemy oznaczenie $\hat{a} := -a$.

Załóżmy, że $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ jest jednolitą formą kwadratową, która definiuje dodatni funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Jak pokazuje wniosek 2.18, istnieją skończone liczby całkowite $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ takie, że dla każdego pierwiastka $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q =$

$\{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ zachodzi $|v_i| \leq k_i$, gdzie $1 \leq i \leq n$. Dowód wniosku 2.18 wskazuje, że liczbę $k_i \in \mathbb{Z}$ można odczytać z postaci kanonicznej formy $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, którą otrzymujemy przez zastosowanie twierdzenia 2.17. Zauważmy, że procedura ta wymaga wyboru permutacji $\binom{1, \dots, n-1, n}{j_1, \dots, j_{n-1}, i}$ zbioru $1, \dots, n$, którego możemy dokonać na $(n-1)!$ sposobów.

Stąd powstaje pytanie: czy ograniczenia na poszczególne współrzędne $|v_i|$ pierwiastków $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q = \{u \in \mathbb{Z}^n; q(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wskazane w dowodzie wniosku 2.18 zależą od wyboru permutacji $\binom{1, \dots, n-1, n}{j_1, \dots, j_{n-1}, i}$ zbioru $\{1, \dots, n\}$? Lemat 2.20 pokazuje, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna: każda permutacja prowadzi do tego samego ograniczenia, a co za tym idzie, w praktycznych obliczeniach, możemy wybrać dowolną permutację.

Lemat 2.20. Niech $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie dodatnio określonym funkcjonałem kwadratowym

$$q(x_1, \dots, x_n) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_i x_j. \quad (+)$$

Dla każdego $1 \leq i \leq n$ istnieje dokładnie jedna liczba wymierna μ_i , dla której funkcjonal kwadratowy $q_i: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem $q_i(x) := q(x) - \mu_i \cdot x_i^2$ jest nieujemny i nie jest dodatni. W szczególności, współczynnik $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ w postaci kanonicznej

$$q(x) = \lambda_{j_1} (c_{j_1 j_1} x_{j_1} + \dots + c_{j_1 j_n} x_{j_n})^2 + \dots + \lambda_{j_{n-1}} (c_{j_{n-1} j_{n-1}} x_{j_{n-1}} + c_{j_{n-1} j_n} x_{j_n})^2 + \lambda_i x_i^2 \quad (*)$$

jest stały dla każdej permutacji $\binom{1, \dots, n-1, n}{j_1, \dots, j_{n-1}, i}$ zbioru $\{1, \dots, n\}$.

Dowód. Niech $\binom{1, \dots, n-1, n}{j_1, \dots, j_{n-1}, i}$ będzie dowolną, lecz ustaloną permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$. Z twierdzenia 2.17 wynika, że formę $q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ zdefiniowaną wzorem (+) można zapisać w postaci kanonicznej (*). Ponieważ funkcjonal $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony, z postaci (*) łatwo wywnioskować, że funkcjonal $q': \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ zdefiniowany wzorem $q'(x) := q(x) - \lambda_i x_i^2$ jest nieujemny i nie jest dodatni. Rozważmy symetryczną macierz Grama $G_{q'} \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$. Zauważmy, że funkcjonal $q'|_{x_i=0} = q|_{x_i=0}$ jest dodatnio określony i stąd, na podstawie twierdzenia 2.4, $\det G_{q'} = 0$.

Rozważmy funkcjonal $q_a: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ zdefiniowany wzorem $q_a(x) = q(x) - a \cdot x_i^2$. Rozumując analogicznie, jak w przypadku funkcjonu $q': \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ pokazujemy, że warunkiem koniecznym na to, aby funkcjonal $q_a: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ był nieujemny i nie był dodatni, jest równość $\det G_{q_a} = 0$. Ponieważ wyznacznik macierzy $G_{q_a} = [g_{ij}^a] \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ zdefiniowany jest wzorem $\det G_{q_a} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) g_{1\sigma(1)}^a \cdot g_{1\sigma(2)}^a \cdot \dots \cdot g_{1\sigma(n)}^a$, to $\det G_{q_a} = 0$ jest równaniem liniowym jednej zmiennej i ma jednoznaczne rozwiązanie. Podsumowując, funkcjonal $q' = q_a$ dla $a := \lambda_i$ jest jedynym funkcjonałem postaci $q_a: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$, który jest nieujemny i nie jest dodatni. Co więcej, współczynnik $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ nie zależy od wyboru pierwszych $n-1$ elementów j_1, \dots, j_{n-1} w permutacji $\binom{1, \dots, n-1, n}{j_1, \dots, j_{n-1}, i}$. \square

Następujący algorytm zachłanny, analogiczny do [110, Algorithm 4.2] oraz [45, Algorithm 5.5] jest konsekwencją wniosku 2.18.

Algorytm 2.21. **WEJŚCIE** Forma $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ definiująca dodatnio określony funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

WYNIK Skończony zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

KROK 1° Inicjalizujemy zbiór $\mathcal{R}_q := \{\}$ oraz tablicę całkowitoliczbową **ogr** rozmiaru n .

KROK 2° Dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$:

KROK 2.1° inicjalizujemy $q'(x) := q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$,

KROK 2.2° dla każdego $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ obliczamy

$$q'(x) := q'(x) - q_{jj} \left(x_j + \frac{1}{2q_{jj}} \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} q_{jk} \cdot x_k \right)^2,$$

KROK 2.3° obliczamy $\mathbf{ogr}[i] := \min \left(6, \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\rfloor \right)$, gdzie $\lambda = q'(x)/x_i^2 \in \mathbb{Q}$.

KROK 3° Dla $(r_1, \dots, r_n) \in \{-\mathbf{ogr}[1], \dots, \mathbf{ogr}[1]\} \times \dots \times \{-\mathbf{ogr}[n], \dots, \mathbf{ogr}[n]\}$:

KROK 3.1° jeśli $q(r_1, \dots, r_n) = 1$ dodajemy wektor (r_1, \dots, r_n) do zbioru \mathcal{R}_q .

KROK 4° Kończymy działanie z wynikiem \mathcal{R}_q .

Uwaga 2.22. (a) Algorytm 2.21 ma wykładniczą złożoność obliczeniową: w pesymistycznym wypadku, w kroku 3°, wymaga obliczenia wartości $q(v)$ funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ dla wszystkich $v \in \{-6, \dots, 6\}^n$. W praktyce, dla $n \leq 10$, obliczenia trwają kilka sekund. W przypadku większych wartości n czas obliczeń gwałtownie wzrasta, patrz tabela B.30.

(b) Ograniczenie na współrzędne pierwiastków w kroku 2° można obliczyć numerycznie: jako najmniejszą wartość własną symetrycznej macierzy Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$, patrz [109, Algorithm 3.7]. Jednak eksperymentalne wyniki pokazują, że lepsze ograniczenia uzyskuje się w wyniku zastosowania twierdzenia Lagrange'a.

(c) W algorytmie 2.21 tablica \mathbf{ogr} zawierająca ograniczenia $|v_i| \leq \mathbf{ogr}[i]$ na współrzędne pierwiastków $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wyznaczana jest przy pomocy obliczeń w pierścieniu wielomianów $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$. Z tego powodu algorytm w takiej postaci zaimplementować można tylko w środowiskach algebry komputerowej (lub przy użyciu bibliotek umożliwiających obliczenia na wielomianach).

Przedstawimy teraz algorytm, który pozwala wyznaczyć tablicę \mathbf{ogr} przy pomocy $O(n^4)$ operacji w ciele liczb wymiernych \mathbb{Q} . Dzięki algorytmowi 2.23 możemy zaimplementować algorytm 2.21 bez konieczności używania (czasochłonnych) obliczeń symbolicznych.

Idea algorytmu 2.23 jest następująca: analogicznie jak w algorytmie 2.21, aby wyznaczyć ograniczenie $\mathbf{ogr}[n] \in \{1, \dots, 6\}$ na n -tą współrzędną pierwiastka $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$, stosujemy algorytm Lagrange'a (patrz dowód twierdzenia 2.17). Dla $k = 1, \dots, n-1$ obliczamy wartość wyrażenia $q(x) := q(x) - q'(x)$, gdzie

$$q'(x) := q_{kk} \cdot \left(x_k + \frac{q_{kk+1}}{2q_{kk}} x_{k+1} + \dots + \frac{q_{kn}}{2q_{kk}} x_n \right)^2 \in \mathbb{Q}[x_k, \dots, x_n]. \quad (2.23)$$

Otrzymujemy $q(x) = \frac{r}{s} \cdot x_n^2$ oraz $\mathbf{ogr}[n] := \min(6, \lfloor \sqrt{s/r} \rfloor)$, patrz wniosek 2.18. Stosując tę procedurę n -krotnie, do formy $q(x)$, w której zamieniono zmienne x_i oraz x_n , możemy wyznaczyć pozostałe elementy tablicy $\mathbf{ogr} \subseteq \{1, \dots, 6\}^n$.

Na potrzeby obliczeń algorytmicznych będziemy zakładać, że dodatnio określona forma kwadratowa $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ zakodowana jest w postaci niesymetrycznej macierzy Grama $\check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, patrz definicja A.8(a) oraz uwaga 1.21. Współczynniki formy $q'(x)$ wyznaczamy przy pomocy wzoru

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + \sum_{i=1}^n 2 \cdot a_i \cdot (a_{i+1} + \dots + a_n).$$

Rozwijając prawą stronę wyrażenia (2.23), otrzymujemy:

$$q'(x) = q_{kk} \left[x_k^2 + \left(\frac{q_{kk+1}}{2q_{kk}} \right)^2 x_{k+1}^2 + \dots + \left(\frac{q_{kn}}{2q_{kk}} \right)^2 x_n^2 + x_k \left(\frac{q_{kk+1}}{q_{kk}} x_{k+1} + \dots + \frac{q_{kn}}{q_{kk}} x_n \right) + \frac{q_{kk+1}}{q_{kk}} x_{k+1} \left(\frac{q_{kk+2}}{2q_{kk}} x_{k+2} + \dots + \frac{q_{kn}}{2q_{kk}} x_n \right) + \frac{q_{kn-1}}{q_{kk}} x_{n-1} \frac{q_{kn}}{2q_{kk}} x_n \right],$$

a stąd współczynniki przy x_i^2 oraz $x_i x_j$, gdzie $1 \leq k < i < j \leq n$, mają postać:

$$\left(\frac{q_{ki}^2}{4q_{kk}}\right)x_i^2 = \left(d \cdot \frac{q_{ki}}{2}\right)x_i^2 \quad \text{oraz}$$

$$\left(\frac{q_{ki}q_{kj}}{2q_{kk}}\right)x_i x_j = \left(d \cdot q_{kj}\right)x_i x_j, \quad \text{gdzie } d := \frac{q_{ki}}{2q_{kk}}.$$

Algorytm 2.24. **WEJŚCIE** Niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ dodatnio określonego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (patrz definicja A.8(a)).

WYNIK Tablica **ogr** $\in \{0, \dots, 6\}^n$, zawierająca ograniczenia na współrzędne pierwiastków $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\}$, tj. spełniająca $|v_i| \leq \mathbf{ogr}[i]$.

KROK 1° Deklarujemy zmienne: $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$; $i, j, k, p, z, d \in \mathbb{Z}$ oraz tablicę całkowitoliczbową **ogr** rozmiaru n .

KROK 2° Dla każdego $z \in \{1, \dots, n\}$:

KROK 2.1° ustawiamy $A := \check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$;

KROK 2.2° dla każdego $i \in \{1, \dots, z-1\}$ wykonujemy: $a_{iz}, a_{in} := a_{in}, a_{zi}$;

KROK 2.3° dla każdego $i \in \{z+1, \dots, n-1\}$ wykonujemy: $a_{zi}, a_{in} := a_{in}, a_{zi}$;

KROK 2.4° dla każdego $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

KROK 2.4.1° obliczamy $p := 2 \cdot a_{kk}$,

KROK 2.4.2° dla każdego $i \in \{k+1, \dots, n\}$:

KROK 2.4.2.1° obliczamy $d := a_{ki}/p$,

KROK 2.4.2.2° obliczamy $a_{ii} := a_{ii} - d \cdot (a_{ki}/2)$,

KROK 2.4.2.3° dla każdego $j \in \{i+1, \dots, n\}$ obliczamy: $a_{ij} := a_{ij} - d \cdot a_{kj}$.

KROK 2.5° Obliczamy $\mathbf{ogr}[z] := \min\left(6, \left\lceil \sqrt{\frac{1}{a_{nn}}} \right\rceil\right)$.

KROK 3° Kończymy działanie z wynikiem **ogr**.

zamiana x_i, z

2.4. Testy wydajności

Niniejszy podrozdział poświęcony jest praktycznemu porównaniu czasu działania autorskich implementacji algorytmów omawianych w tym rozdziale oraz analogicznych rozwiązań udostępnianych przez systemy algebry komputerowej: Maple, Mathematica oraz SageMath. W szczególności pokazujemy, że nasze implementacje są wielokrotnie szybsze od rozwiązań dostępnych zarówno w komercyjnych, jak i niekomercyjnych bibliotekach czy systemach algebry komputerowej.

Rozważamy następujące trzy zagadnienia:

(I) wyznaczenie zbioru wszystkich jednolitych funkcjonałów kwadratowych $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$

$$q(x_1, \dots, x_m) := x_1^2 + \dots + x_m^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j, \quad \text{gdzie } q_{ij} \in \{0, 1\} \text{ oraz } m \in \{4, 5, 6, 7\}, \quad (*)$$

które są dodatnie w sensie definicji 1.29(a);

(II) wyznaczenie zbioru wszystkich jednolitych funkcjonałów kwadratowych $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ postaci (*), które są nieujemne w sensie definicji 1.29(b);

(III) rozwiązanie równania diofantycznego postaci $q_\Delta(v) = 1$, gdzie $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolitym funkcjonałem kwadratowym stowarzyszonym z dodatnim bigrafem Δ (definicja A.8(c)) na przykładzie jednorodnych diagramów Dynkina $\Delta \in \{\mathbb{A}_p, \mathbb{D}_p, \mathbb{E}_s\}$, gdzie $6 \leq p \leq 10$ oraz $6 \leq s \leq 8$, patrz tabela 1.32.

Wszystkie obliczenia przeprowadzone zostały na komputerze HP SL390s wyposażonym w dwa sześciordzeniowe procesory Intel Xeon X5650 taktowane zegarem 2,66 GHz (z wyłącznym Hyper-Threading) oraz 24 GB pamięci RAM. Każdy z testów został wykonany pięciokrotnie (za czas wykonania testu przyjęto najlepszy wynik).

Zagadnienia (I) oraz (II) można równoważnie sformułować następująco: należy wyznaczyć wszystkie symetrycznie macierze kwadratowe $A_m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, $m \in \{4, 5, 6, 7\}$, gdzie

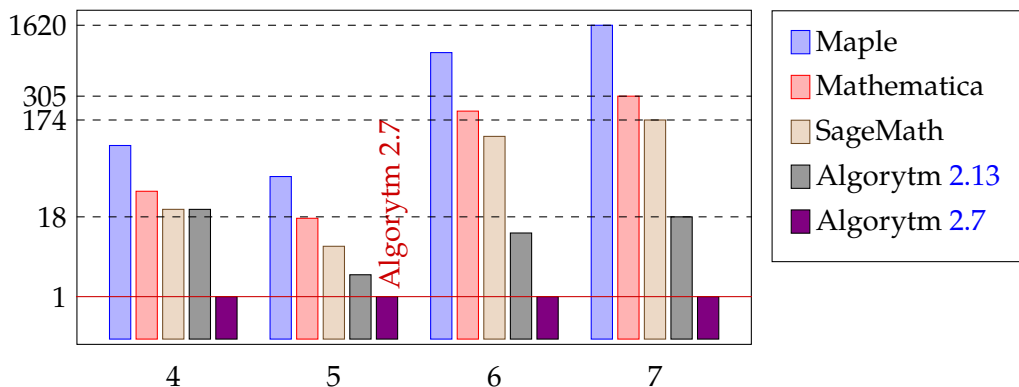
$$A_m := \begin{bmatrix} 2 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1m} \\ q_{12} & 2 & q_{23} & \cdots & q_{2m} \\ q_{13} & q_{23} & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & q_{m-1m} \\ q_{1m} & q_{2m} & \cdots & q_{m-1m} & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \text{ oraz } q_{ij} \in \{0, 1\} \text{ dla } 1 \leq i < j \leq m, \quad (+)$$

które są dodatnio określone lub półokreślone. Zauważmy, że istnieje dokładnie $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ macierzy postaci (+), tj. dla $m \in \{4, 5, 6, 7\}$ należy rozważyć $\{64, 1024, 32\,768, 2\,097\,152\}$ przypadków, odpowiednio.

Test (I). Obliczenia wykonujemy przy pomocy systemów algebry komputerowej: Maple 2015, Mathematica 10.2.0, SageMath 8.0 oraz algorytmów 2.7 i 2.13 (zaimplementowanych w języku Python i uruchomionych przy pomocy interpretera PyPy 5.8, por. uwaga 3.53). Czas (w sekundach) wykonania obliczeń przedstawiamy w następującej tabeli.

n	Maple	Mathematica	SageMath	Algorytm 2.13	Algorytm 2.7
4	0,058	0,02	0,013	0,013	0,002
5	0,652	0,244	0,126	0,065	0,039
6	36,764	9,268	5,112	0,525	0,117
7	3431,76	646,218	368,654	37,681	5,756

Aby lepiej zobrazować różnice w czasie działania rozważanych środowisk obliczeniowych, na następującym wykresie logarymicznym, przedstawione zostało porównanie czasu pracy przeskalowane względem rozwiązania najszybszego, tj. algorytmu 2.7.

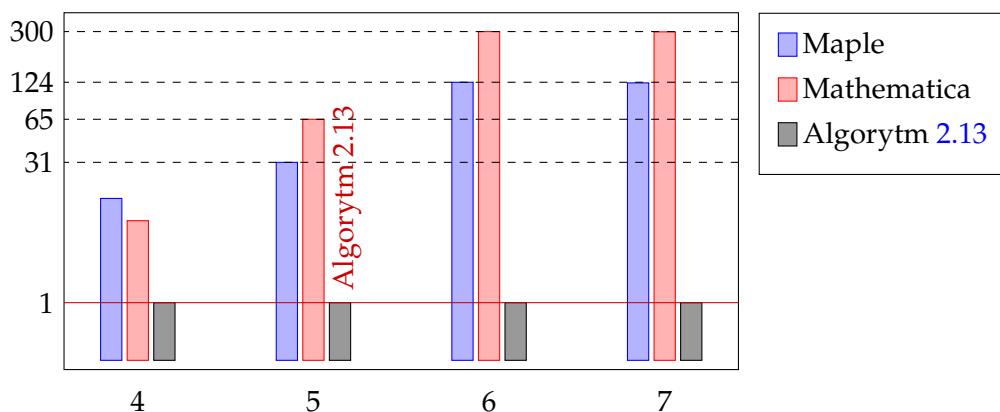


Innymi słowy, w przypadku $n = 7$ nasza implementacja algorytmu 2.7 jest ponad 300-krotnie szybsza od rozwiązań komercyjnych.

Test (II). Podobnie jak w przypadku dodatniej określoności, w następującej tabeli podsumowujemy informacje o czasie obliczeń potrzebnym do znalezienia dodatnio półokreślonych macierzy $A_m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ postaci (+), gdzie $m \in \{4, 5, 6, 7\}$. Tym razem porównanie dotyczy trzech sposobów obliczeń, ponieważ w standardowej bibliotece systemu algebry komputerowej SageMath w wersji 8.0 nie ma algorytmu służącego do tego celu.

n	Maple	Mathematica	Algorytm 2.13
4	0,08	0,054	0,013
5	0,749	1,581	0,066
6	24,123	58,091	0,528
7	1707,71	4140,134	37,773

Analogicznie jak w poprzednim wypadku, na następującym wykresie przedstawiamy porównanie czasu obliczeń rozważanych środowisk obliczeniowych (wykres w skali logarytmicznej, czasy obliczeń przeskalowane względem najkrótszego).



Zauważmy, że odwrotnie niż w przypadku weryfikacji dodatniej określoności macierzy, w przypadku badania dodatniej półokreśloności szybszym rozwiązaniem komercyjnym jest Maple. Niemniej nasza implementacja algorytmu 2.13 pozwala na ponad 120-krotnie szybsze obliczenia (dla $n \geq 6$) i jest szybsza od obu rozważanych rozwiązań komercyjnych.

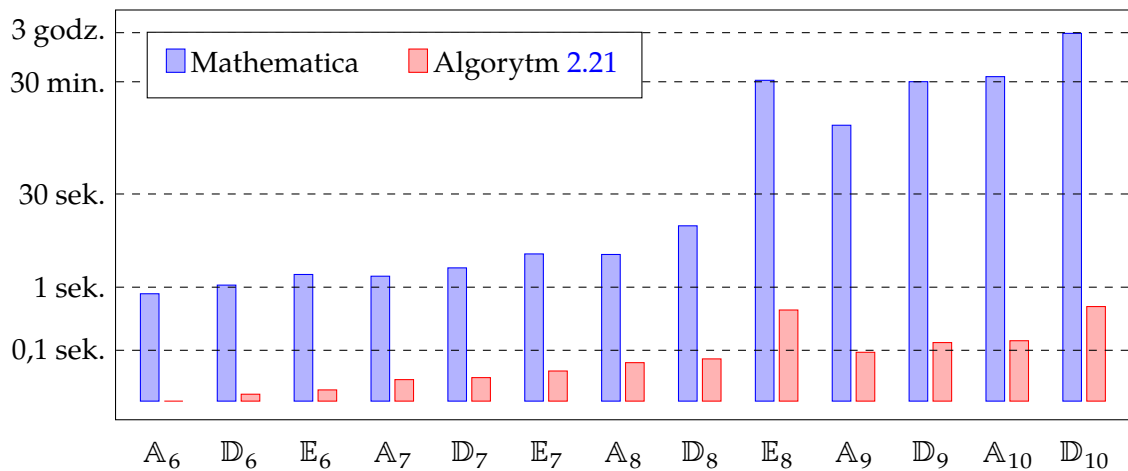
Test (III). Trzecim i ostatnim z rozważanych w niniejszym podrozdziale zagadnień jest zagadnienie rozwiązania równania diofantycznego zdefiniowanego wzorem $q_\Delta(v) = 1$, gdzie Δ jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym. Innymi słowy, naszym celem jest obliczenie zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ wyznaczonego przez jednolity funkcjonal kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.28). Dla przykładu rozważymy jednorodny diagramy Dynkina $\Delta \in \{A_p, D_p, E_s\}$, gdzie $6 \leq p \leq 10$ oraz $6 \leq s \leq 8$, patrz tabela 1.32.

Rozważane zagadnienie można rozwiązać przy pomocy algorytmu 2.21 lub programu Mathematica, który jako jedyny z rozważanych przez nas systemów algebry komputerowej umożliwia rozwiązywanie równań diofantycznych postaci $q_\Delta(v) = 1$. W następującej tabeli przedstawiamy czas pracy algorytmu 2.21 oraz programu Mathematica 10.2.0 w rozważanych przypadkach. W tabeli zamieściliśmy ponadto informację o tym, jakie przyspieszenie w czasie obliczeń uzyskujemy przez zastąpienie systemu algebry komputerowej Mathematica przez wyspecjalizowany algorytm 2.21.

	A_6	D_6	E_6	A_7	D_7	E_7	A_8	D_8	E_8
Mathematica	0,79	1,08	1,59	1,49	2,02	3,37	3,3	9,39	1898,73
Algorytm 2.21	0,02	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,43
przyspieszenie	50,3	53,6	67,5	43,5	54,8	71,6	51,8	128,5	4365,6
	A_9	D_9	A_{10}	D_{10}					
Mathematica	368,46	1806,4	2170,35	10 528,37					
Algorytm 2.21	0,09	0,13	0,14	0,49					
przyspieszenie	3962,6	13 629,8	15 307,2	21 343,1					

Uwaga 2.28. Algorytm 2.21 zaimplementowaliśmy w połączeniu z algorytmem 2.24 i co za tym idzie, nasza implementacja nie używa obliczeń symbolicznych (niemal wszystkie obliczenia wykonywane są w pierścieniu liczb całkowitych \mathbb{Z} oraz ciele liczb wymiernych \mathbb{Q}). Algorytm zaimplementowaliśmy w języku Python, a do obliczeń użyliśmy interpretera PyPy w wersji 5.8.

Następujące wykresy przedstawiają porównanie czasu obliczeń dwiema rozważanymi metodami. Ponieważ wraz z wielkością danych czas potrzebny na wykonanie obliczeń rośnie wykładniczo, na wykresach zastosowaliśmy skalę logarymiczną (na osi czasu).

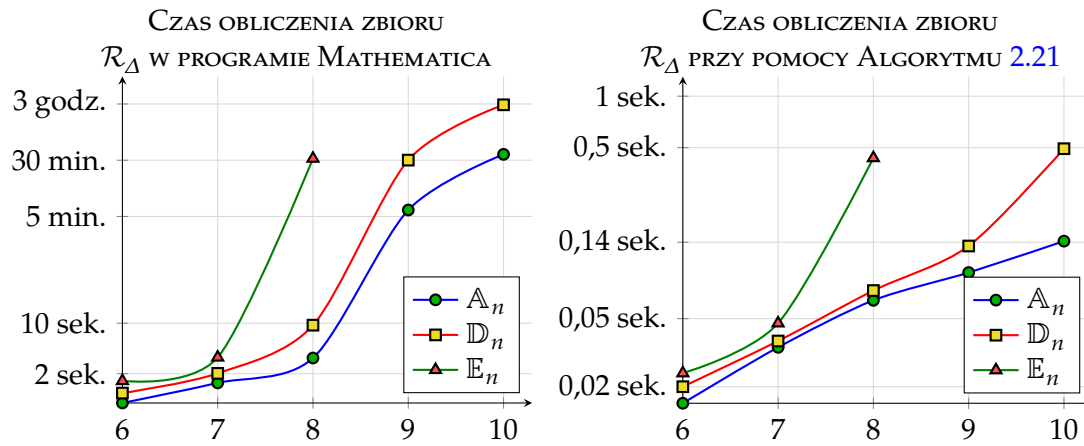


Uwaga 2.29. (a) Zauważmy, że duży wpływ na czas obliczeń ma nie tylko wielkość danych wejściowych, ale też sam funkcjonal kwadratowy. Przykładowo: czasy obliczeń zbioru pierwiastków funkcjonałów

- $q_{E_8}: \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $q_{D_9}: \mathbb{Z}^9 \rightarrow \mathbb{Z}$ w przypadku programu Mathematica,
- $q_{E_8}: \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $q_{D_{10}}: \mathbb{Z}^{10} \rightarrow \mathbb{Z}$ w przypadku algorytmu 2.21,

są w przybliżeniu równe.

(b) Wyniki empiryczne sugerują, że złożoność obliczeniowa algorytmów używanych przez program Mathematica do wyznaczenia zbioru pierwiastków dodatniego jednorodnego funkcjonału kwadratowego jest co najmniej wykładnicza, a co za tym idzie, nie jest lepsza od algorytmu 2.21. W praktyce nasza implementacja algorytmu 2.21 jest nawet 21 343 razy szybsza.



Podsumowując, autorskie implementacje algorytmów prezentowanych w niniejszym rozdziale rozprawy są wielokrotnie szybsze od rozwiązań dostępnych zarówno w komercyjnych, jak i niekomercyjnych bibliotekach czy systemach algebry komputerowej. Ponadto, stosują one arytmetykę całkowitoliczbową, która umożliwia uniknięcie błędów numerycznych. Co za tym idzie, stanowią dobrą podstawę do wykonywania obliczeń naukowych, których wyniki prezentowane są w dysertacji.

Rozdział 3

Klasyfikacja spektralna Coxetera porządków dodatnich

Trzeci rozdział rozprawy poświęcony jest spektralnej klasyfikacji Coxetera *dodatnich* skończonych m -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych, czyli takich I , których symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_I(\mathbb{Q})$ (1.39) jest dodatnio określona. Przedstawiamy pełną klasyfikację porządków dodatnich, które mają dokładnie jeden element maksymalny (**jednopikowych**) oraz omówimy narzędzia pozwalające na klasyfikację porządków wielopikowych. W szczególności przedstawiamy rozwiązanie sformułowanych we wstępie problemów 1, 1a oraz 2 dla szerokiej klasy porządków dodatnich. W twierdzeniu 3.17 pokazujemy, że w przypadku dodatnich porządków I , które są jednopikowe lub zawierają co najwyżej $|I| = m \leq 14$ elementów

- każdy porządek I jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny $\approx_{\mathbb{Z}}$ z porządkiem Dynkina $DI \in \{\mathbb{A}_{|I|}, \mathbb{D}_{|I|}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ przedstawionym w tabeli 3.13,
- każda klasa równoważności relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ opisana jest jednoznacznie przez typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.
- każdy porządek I wyznaczony jest przez zespolone spektrum Coxetera $\text{spec}_{\mathbb{C}} I \subseteq \mathbb{C}$ jednoznacznie, z dokładnością do relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$.

W twierdzeniu 3.32 pokazujemy, że liczba *wiernych* (definicja 3.25) dodatnich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych I jest skończona i pokazujemy, że współrzędne $v_i \in \mathbb{Z}$ pierwiastków $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (definicja 1.46(e)) takich porządków spełniają nierówność $|v_i| \leq \mathcal{R}\max_{\text{Dyn}_I} \leq 6$, gdzie liczba $\mathcal{R}\max_{\text{Dyn}_I} \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ zależy od typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jednoznacznie wyznaczonego przez I . W dalszej części rozdziału przedstawimy tzw. *geometrie oczkowe pierwiastków* i pokazujemy, że stanowią one użyteczne narzędzie w spektralnej analizie Coxetera skończonych porządków dodatnich. Umożliwiają one skonstruowanie \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$, gdzie $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, i mogą być użyte do konstrukcji algorytmu stanowiącego rozwiązanie sformułowanego we wstępie problemu 3 dla pewnych dodatnich porządków I, J .

Na zakończenie rozdziału omawiamy algorytmy, które stanowią istotne narzędzie w dowodach prezentowanych twierdzeń.

Większość z prezentowanych w tym rozdziale wyników została opublikowana w artykułach [45–47, 53]. Niemniej, część rezultatów przedstawionych w rozprawie dowiedziona została przy pomocy innych narzędzi i ma bardziej ogólny charakter. W szczególności:

- przedstawiamy jawną postać macierzy definiujących dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność (definicja 1.53(b)) pomiędzy m -elementowymi jednopikowymi dodatnimi porząd-

kami I a diagramami Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, bez odwoływania się do operacji *reflection-duality* oraz *waist reflection*, por. dowód (a) \Rightarrow (e) w [46, Theorem 5.2];

- w dowodzie twierdzenia 3.17(g), które zawiera opis jednopikowych porządków dodatnich, nie używamy wyników Bondarenki-Stepochkiny [11, 14, 15] (prezentowane przez nich dowody są trudne do weryfikacji), a opieramy prezentowany wynik na lemacie 4.53, którego pełen dowód przedstawiony jest w rozdziale 4 rozprawy, por. dowód (e) \Rightarrow (d) w [46, Theorem 5.2];
- w twierdzeniu 3.34, w którym dowodzimy, że współrzędne $v_i \in \mathbb{Z}$ pierwiastków $v = [v_1, \dots, v_{m+1}] \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^{m+1}$ dodatnich jednopikowych porządków spełniają nierówność $|v_i| \leq \mathcal{R}\max_{\text{Dyn}_I}$, nie ograniczamy rozważań do pierwiastków spełniających warunek $v_{m+1} \neq 0$, por. [45, Theorem 1.7(f)].

Zacniemy od omówienia znanych wyników oraz wprowadzenia niezbędnych definicji.

3.1. Wprowadzenie

Głównym celem trzeciego rozdziału dysertacji jest przedstawienie analizy spektralnej Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych, które są dodanie (definicja 1.51). W szczególności udowodnimy twierdzenie 3.17, które stanowi wynik silniejszy od twierdzenia 1.56. Załóżmy, że dodatni m -elementowy zbiór częściowo uporządkowany I spełnia co najmniej jeden z warunków:

- (i) $|I| = m \leq 14$,
- (ii) I ma dokładnie jeden element maksymalny (I jest jednopikowy).

Wtedy, na podstawie twierdzenia 1.56, istnieje taki jednorodny diagram Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ (patrz tabela B.17), że $D \sim_{\mathbb{Z}} \Delta_I$ (patrz definicja 1.41 oraz definicja A.3(a)). W twierdzeniu 3.17 pokażemy, że prawdziwa jest silniejsza zależność: w rozważanych przypadkach słaba \mathbb{Z} -kongruencja $I \sim_{\mathbb{Z}} \Delta_I$ implikuje¹ silną \mathbb{Z} -kongruencję $I \approx_{\mathbb{Z}} \Delta_I$ (definicja A.3(b)).

Część z wyników przedstawionych w niniejszym rozdziale opublikowana została w:

- pracach [40, 47, 53], gdzie omówiono przypadek (i) dla $|I| \leq 10$,
- artykule [46], gdzie udowodniony został przypadek (ii), przy równoważnym założeniu dodatniości funkcjonału kwadratowego Titsa (definicja 3.3) stowarzyszonego z porządkiem I , por. lemat 3.6(b).

Twierdzenie 3.17 zawiera pełną klasyfikację *dodatnich* (w sensie definicji 1.51) jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych, z dokładnością do izomorfizmu. Klasyfikacja ta została przedstawiona w artykule [46] oraz wcześniej, w innej formie, w pracy Bondarenki-Stepochkiny [14]. Przedstawimy teraz główne idee klasyfikacji przedstawionej przez Bondarenkę-Stepochkinę i omówimy powody, dla których zdecydowaliśmy się użyć innych metod dowodowych od prezentowanych w pracy [14].

Aby wyjaśnić wyniki pracy [14], załóżmy, że $T = (\{1, \dots, n\}, \leq)$ jest skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Funkcjonałem Titsa w sensie [30] porządku T jest jednolity funkcjonał kwadratowy $\hat{q}_T: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem:

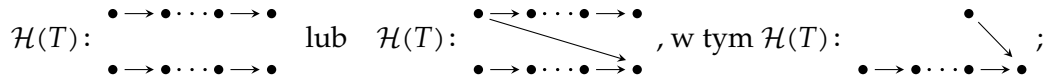
$$\hat{q}_T(x) = \hat{q}_T([x_0, x_1, \dots, x_n]) := x_0^2 + \sum_{i \in T} x_i^2 + \sum_{i \leq j; i, j \in T} x_i x_j - x_0 \sum_{i \in T} x_i. \quad (3.1)$$

¹Silna \mathbb{Z} -kongruencja zawsze implikuje słabą \mathbb{Z} -kongruencję, natomiast implikacja przeciwna na ogół jest fałszywa, por. fakt 1.55(a) oraz przykład 4.10.

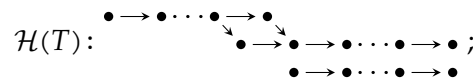
Zbiór częściowo uporządkowany T nazywamy Titsowo-dodatnim (w sensie [14]), jeśli funkcjonal (3.1) jest dodatni (definicja 1.29(a)). Wszystkie Titsowo-dodatnie porządki zostały scharakteryzowane w pracy [14] następująco.

Fakt 3.2. [14, Теорема 4] Załóżmy, że $T = (\{1, \dots, n\}, \leq)$ jest skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Funkcjonal kwadratowy Titsa $\hat{q}_T: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (3.1) zbioru T jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z trzech warunków:

- T jest jednostronną minimax-sumą² dwóch łańcuchów,³ tj. T ma postać:



- T jest sumą prostą łańcucha oraz prawie-łańcucha,⁴ tj. T ma postać:



- T jest izomorficzny lub antyizomorficzny⁵ z jednym ze 108 porządków przedstawionych w [14, Таблица 2].

Idea dowodu. Załóżmy, że $T = (\{1, \dots, n\}, \leq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, którego funkcjonal Titsa (3.1) jest dodatni. Stąd T jest porządkiem szerokości co najwyżej 3, tj. T zawiera co najwyżej trzy elementy, z których żadne dwa nie są w relacji \leq (w przeciwnym wypadku T zawierałby pewien podporządek, który nie jest dodatni, co jest sprzeczne z założeniem dodatniości T).

Aby wskazać wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) porządki dodatnie posługujemy się następującą obserwacją: każdy Titsowo-dodatni T jest (\min, \max) -równoważny w sensie Bondarenki (patrz [11, 14, 15]) z porządkiem szerokości dwa, a wszystkie takie porządki zostały opisane w pracy [15] następująco:

- [15, Theorem 1] Jeśli $|T| \geq 8$, to: (i) T jest sumą prostą dwóch łańcuchów; (ii) T jest prawie-łańcuchem; (iii) T jest jednostronną minmax-sumą rangi 1⁶ dwóch łańcuchów;
- Jeśli $|T| < 8$ to T spełnia warunki (i)–(ii) lub T jest (z dokładnością do 0-izomorfizmu oraz 0-antyizomorfizmu) jednym z 30 porządków opisanych w [15, Theorem 2]. \square

Dowody przedstawione w pracach [14, 15] mają charakter kombinatoryczny i składają się ze złożonej analizy wielu różnych przypadków. Trudność w posługiwaniu się wynikami tych prac stanowi fakt, że autorzy często pracują z *dokładnością* do różnorodnych równoważności (0-antyizomorfizm, (\min, \max) -równoważność itp.), a nie tylko izomorfizmu zbiorów częściowo uporządkowanych. Między innymi z tego powodu, problem opisu wszystkich (z dokładnością do izomorfizmu) dodatnich porządków skończonych został podjęty ponownie w pracy [46] oraz w niniejszej dysertacji. Drugim z powodów jest analiza spektralna Coxetera – naszym celem jest analiza porządków dodatnich w terminach zespolonego spektrum Coxetera, czego autorzy prac [14, 15] nie badają, gdyż została ona zdefiniowana kilka lat później w pracach [107, 108].

²Porządek $T = (A + B, \leq)$ jest sumą dwóch zbiorów częściowo uporządkowanych, w której jedyną dopuszczalną relacją między elementami zbiorów A oraz B jest $\min(A) \leq \max(B)$.

³Porządek nazywamy *łańcuchem*, jeśli dowolne dwa jego elementy są w relacji.

⁴Porządek nazywamy *prawie-łańcuchem*, jeśli dokładnie dwa jego elementy nie są w relacji.

⁵Mówimy, że porządek $T = (T, \leq_T)$ jest *antyizomorficzny* z porządkiem $S = (S, \leq_S)$, jeśli T jest izomorficzny z $S^{op} := (S, \geq_S)$, gdzie S^{op} jest porządkiem, który powstaje z S przez odwrócenie relacji.

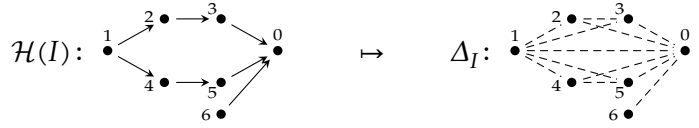
⁶Definicje rangi sumy porządków można znaleźć w [15, str. 21].

W szczególności pokazujemy, że rozważane zbiory częściowo uporządkowane można klasyfikować przy pomocy jednorodnych nieoznaczonych diagramów Dynkina (definicja 1.31). Porządki typów \mathcal{A}_m oraz \mathcal{D}_m opisane są przez nieskończone serie, natomiast porządki typów $\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$ mają ściśle ustaloną liczbę elementów. Z jednej strony w sposób naturalny wyjaśnia to rozdzielenie klasyfikacji porządków dodatnich zastosowaną w pracy [15] (tj. na porządki T mające $|T| \geq 8$ elementów w Theorem 1 oraz $|T| < 8$ opisane w Theorem 2), z drugiej, wskazuje na możliwość przeprowadzenia dowodu używającego obliczeń komputerowych. W dowodzie twierdzenia 3.17 porządki typów $\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$ (których liczba jest skończona) wyznaczamy przy pomocy obliczeń algorytmicznych, a porządki typów \mathcal{A}_m oraz \mathcal{D}_m (których jest nieskończenie wiele) wyznaczamy na podstawie rozważań teoretycznych.

Omówimy teraz terminologię używaną w dysertacji i wyjaśnimy różnice w stosunku do prac [11, 14, 15]. Forma kwadratowa (3.1) stowarzyszona z m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym $T = (\{1, \dots, m\}, \leq)$ jednoznacznie definiuje *spójny* graf krawędziowo-dwudzielny $\hat{\Delta}_T$ mający $m + 1$ wierzchołków, przykładowo:



Rozważmy porządek $I := T \cup \{0\}$, który powstaje z T przez dodanie elementu maksymalnego 0 oraz stowarzyszony z nim bigraf Δ_I (definicja 1.41).



Zauważmy, że bigraf $\hat{\Delta}_T$ różni się od bigrafu Δ_I tylko rodzajem krawędzi incydentnych z wierzchołkiem 0. Co więcej, łatwo wykazać, że bigrafy te są słabo \mathbb{Z} -kongruentne (słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\hat{\Delta}_T \sim_{\mathbb{Z}} \Delta_I$ definiuje macierz powstająca z macierzy identycznościowej przez wstawienie w odpowiednim miejscu na przekątnej liczby -1). Dlatego klasyfikacja n -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych T , z którymi stowarzyszony jest dodatni funkcjonal kwadratowy Titsa $\hat{q}_T: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (3.1), jest równoważna klasyfikacji $(n + 1)$ -elementowych *jednopikowych* porządków I , które są dodatnie w sensie definicji 1.51. Następująca definicja i lemat formalizują te obserwacje.

Definicja 3.3. [107], [108, Section 3] Niech $I = (\{1, \dots, n, n + 1 = *\}, \leq) \equiv T \cup \{*\}$ będzie jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego jedynym elementem maksymalnym jest $* = n + 1$.

(a) **Macierzą Titsa** porządku I nazywamy macierz

$$\hat{C}_I := \left[\begin{array}{c|c} C_T^{tr} & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}).$$

(b) **Funkcjonałem Titsa** stowarzyszonym z porządkiem I nazywamy jednolity funkcjonal kwadratowy $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem

$$\begin{aligned} \hat{q}_I(x) &:= x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_*^2 + \sum_{i \leq j \neq *} x_i \cdot x_j - x_*(x_1 + \dots + x_n) = \\ &= x \cdot \hat{C}_I \cdot x^{tr} = x \cdot \hat{G}_I \cdot x^{tr} = q_T(x^{(*)}) + x_*^2 - \sum_{i=1}^n x_* \cdot x_i, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie $x^{(*)} := [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$ dla dowolnego $x = [x_1, \dots, x_n, x_*] \in \mathbb{Z}^{n+1}$ (tj. rzutowanie wektora $x \in \mathbb{Z}^{n+1}$ na pierwszych n współrzędnych).

Uwaga 3.5. (a) W dysertacji przyjęliśmy konwencję stowarzyszania z n -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi form (funkcjonałów) kwadratowych n zmiennych. Dlatego w dalszej części będziemy zakładać, że funkcyjonał Titsa można stowarzyszyć tylko z porządkami jednopikowymi i ma on postać (3.4).

(b) Funkcyjonał kwadratowy Titsa $\hat{q}_{T \cup \{*\}}$ (3.4), stowarzyszony ze zbiorem częściowo uporządkowanym T , został wprowadzony w 1974 roku przez Yu. A. Drozda (patrz [30] oraz [106, Chapter 10]) i stanowi ważne narzędzie w teorii reprezentacji oraz kombinatoryce zbiorów częściowo uporządkowanych (w sensie Nazarowej-Roitera), patrz [11, 13–15, 80, 106].

Lemat 3.6. [107, 108] Niech $I = T \cup \{*\}$ będzie jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym, $q_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) oraz $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (3.4) funkcyjonałami kwadratowymi stowarzyszonymi z I . Przez $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$, $\widehat{\mathcal{R}}_I = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; \hat{q}_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ rozumiemy będziemy zbiory pierwiastków funkcyjonałów q_I oraz \hat{q}_I , odpowiednio.

(a) Przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_I & \subseteq & \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{q_I} \mathbb{Z} \\ h_*^- |_{\mathcal{R}_I} \downarrow \simeq & & h_*^- \downarrow \simeq \nearrow \hat{q}_I \\ \widehat{\mathcal{R}}_I & \subseteq & \mathbb{Z}^{n+1} \end{array}, \quad (3.7)$$

gdzie $h_*^-: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ jest automorfizmem grupy \mathbb{Z}^{n+1} zdefiniowanym wzorem

$$h_*^-([x_1, \dots, x_n, x_*]) = [x_1, \dots, x_n, -x_*], \text{ dla każdego } x \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

(b) Funkcyjonał kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy funkcyjonał kwadratowy Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony.

Dowód. (a) Ponieważ funkcja $h_*^-: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ jest inwolucją (tj. $h_*^- \circ h_*^- = id_{\mathbb{Z}^{n+1}}$), łatwo zauważyć, że jest też automorfizmem grupy \mathbb{Z}^{n+1} . Pokażemy, że $\hat{q}_I \circ h_*^- = q_I$. Wprost z definicji, dla dowolnego $x = [x_1, \dots, x_n, x_*] \in \mathbb{Z}^{n+1}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\hat{q}_I \circ h_*^-)(x) &= \hat{q}_I(h_*^-(x)) = \hat{q}_I([x_1, \dots, x_n, -x_*]) = \\ &= x_1^2 + \dots + x_n^2 + (-x_*)^2 + \sum_{i \leq j \neq *} x_i \cdot x_j - (-x_*) \cdot (x_1 + \dots + x_n) = \\ &= x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_*^2 + \sum_{i \leq j} x_i \cdot x_j = q_I(x). \end{aligned}$$

Stąd, dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^{n+1}$ mamy $(\hat{q}_I \circ h_*^-)(v) = 1 \Leftrightarrow q_I(v) = 1$ i w konsekwencji funkcja $h_*^-|_{\mathcal{R}_I}: \mathcal{R}_I \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}_I$ przeprowadza różnowartościowo zbiór \mathcal{R}_I na $\widehat{\mathcal{R}}_I$.

(b) Wynika z (a), ponieważ dla dowolnego $0 \neq x \in \mathbb{Z}^{n+1}$

$$\begin{aligned} „\Rightarrow”: \hat{q}_I(x) &= q_I((h_*^-)^{-1}(x)) > 0, \\ „\Leftarrow”: q_I(x) &= \hat{q}_I(h_*^-(x)) > 0. \end{aligned} \quad \square$$

Uwaga 3.8. Ponieważ macierze $\widehat{C}_I, C_I^{-1}, C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ są \mathbb{Z} -kongruentne (patrz [46, Corollary 2.4, Theorem 2.10]), analiza spektralna porządków z dokładnością do spektrum macierzy incydencji C_I jest równoważna analizie z dokładnością do spektrum macierzy Titsa $\widehat{C}_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (definicja 3.3(a)) lub macierzy $\overline{C}_I := C_I^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (tj. macierzy Eulera [108, 119]), por. [46, Theorem 5.2].

3.2. Typ Coxetera-Dynkina porządków dodatnich

W tym podrozdziale z dowolnym dodatnim skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym I stowarzyszamy typ Coxetera-Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ i dowodzimy, że

$$I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J,$$

patrz twierdzenie 3.12. Wskazujemy też porządki, które są *kanonicznymi* reprezentantami każdego z typów Coxetera-Dynkina, patrz tabela 3.13. W twierdzeniu 3.17, które przedstawiamy w następnym podrozdziale, udowodnimy, że z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ opisują one wszystkie skończone spójne dodatnie zbiory częściowo uporządkowane.

Załóżmy, że $I = (I, \leq)$ jest skończonym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ macierzą incydencji (fakt 1.38(b)) a $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jednolitym funkcjonałem kwadratowym zdefiniowanym wzorem $q_I(v) = v \cdot C_I \cdot v^{tr}$ (1.40). Jeśli I jest dodatni (definicja 1.51), to stowarzyszamy z nim typ Coxetera-Dynkina, w następującym sensie (por. [46, Definition 5.1] oraz definicja B.16).

Definicja 3.9. *Typem Coxetera-Dynkina dodatniego spójnego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I , nazywany nieoznaczony jednorodny diagram Dynkina (definicja 1.7) $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ wyznaczony przez nieprzywiedlny zredukowany system pierwiastków $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^m$, patrz twierdzenie 1.56(c).*

Zauważmy, że typ Coxetera-Dynkina dodatniego spójnego zbioru częściowo uporządkowanego I można zdefiniować *równoważnie* jako diagram Dynkina $D \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ słabo \mathbb{Z} -kongruentny (definicja A.3(a)) z bigrafem Δ_I (1.41), por. [10, Theorem 2.1].

Fakt 3.10. *Typem Coxetera-Dynkina dodatniego spójnego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I jest nieoznaczony diagram Dynkina $\check{D} \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, powstający przez opuszczenie numeracji wierzchołków diagramu Dynkina $D \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, który jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny z bigrafem Δ_I (1.41).*

Dowód. Z założenia istnieje jednorodny diagram Dynkina $D \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ taki, że $\Delta_I \sim_{\mathbb{Z}} D$, tzn. istnieje macierz $B \in \mathrm{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniająca równość $G_I = B^{tr} \cdot G_D \cdot B$ (patrz definicja A.3(a)). Stąd, z argumentacji analogicznej do użytej w dowodzie faktu 1.55(b) wynika, że $|\mathcal{R}_I| = |\mathcal{R}_D|$.

Na podstawie twierdzeń 1.56 oraz 1.30 zbiory $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ oraz $\mathcal{R}_D = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_D(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ są zredukowanymi nieprzywiedlnymi systemami pierwiastków w sensie Bourbaki. Ponieważ $|\mathcal{R}_I| = |\mathcal{R}_D|$, z faktu B.26 wynika, że systemy pierwiastków \mathcal{R}_I oraz \mathcal{R}_D mają ten sam typ Dynkina (definicja B.16), tj. $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_I} = \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_D}$. Aby zakończyć dowód zauważmy, że stosując lemat B.18(e), otrzymujemy $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_D} = \check{D} \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$. \square

Innymi słowy, fakt 3.10 pokazuje, że wyznaczenie typu Coxetera-Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ dodatniego zbioru częściowo uporządkowanego I jest równoważne ze znalezieniem jednorodnego diagramu Dynkina $D \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, który jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny z bigrafem Δ_I . Stąd, aby wyznaczyć typ Coxetera-Dynkina dodatniego porządku I zdefiniowanego przez macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, można:

- obliczyć zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I = \mathcal{R}_{q_I} = \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I$, gdzie $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany jest wzorem $q_I(v) := v \cdot C_I \cdot v^{tr}$ (np. przy pomocy algorytmu 2.21), a następnie wyznaczyć typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_I} \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ systemu pierwiastków $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^I$ (np. przy pomocy algorytmu B.24);

- wyznaczyć jednorodny diagram Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_{|I|}, \mathbb{D}_{|I|}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, który jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny z bigrafem Δ_I , gdzie $G_{\Delta_I} := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (np. przy pomocy algorytmu inflacyjnego, patrz algorytm A.33, [111, Algorithm 3.1] oraz [81, Algorithm 4.3]).

Uwaga 3.11. Typ Coxetera-Dynkina dodatniego spójnego zbioru częściowo uporządkowanego I można zdefiniować równoważnie jako *diagram Dynkina stowarzyszony z I przez zastosowanie algorytmu inflacyjnego* (por. [10, Theorem 2.1]).

Pokażemy teraz, że typ Coxetera-Dynkina wyznacza skończony dodatni zbiór częściowo uporządkowany I jednoznacznie, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności (definicja 1.53(b)).

Twierdzenie 3.12. *Jeśli I oraz J są skończonymi spójnymi dodatnimi n -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, to $I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J$.*

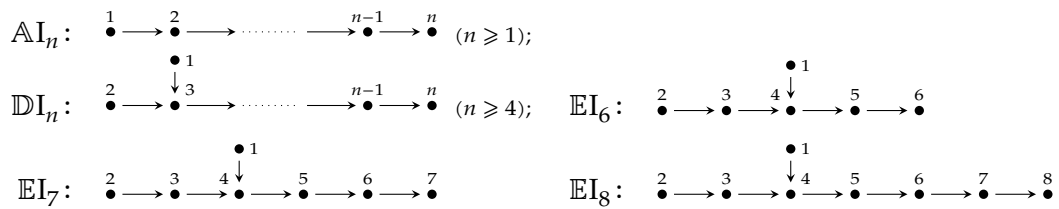
Dowód. Na podstawie twierdzenia 1.56(d) wiemy, że istnieją jednorodne diagramy Dynkina $D_I, D_J \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, takie, że $I \sim_{\mathbb{Z}} D_I$ oraz $J \sim_{\mathbb{Z}} D_J$.

„ \Rightarrow ” Z przechodniości relacji kwadratowej równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$ otrzymujemy $D_I \sim_{\mathbb{Z}} D_J$ i stąd $|\mathcal{R}_{D_I}| = |\mathcal{R}_{D_J}|$ (fakt 1.55(b)). Łatwo sprawdzić, że wielkość zbioru pierwiastków grafu Dynkina Δ wielkości m jednoznacznie wyznacza Δ (patrz tabela B.27) i w konsekwencji diagramy D_I, D_J są izomorficzne. Stąd, na podstawie faktu 3.10, prawdziwa jest równość $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J$.

„ \Leftarrow ” Z faktu 3.10 wiemy, że $\mathbf{Dyn}_I = \check{D}_I$ oraz $\mathbf{Dyn}_J = \check{D}_J$ a stąd, na podstawie założeń, diagramy D_I oraz D_J są izomorficzne. Co więcej, bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $D_I = D_J$ (patrz fakt 1.44(a) oraz fakt 1.55(a)). Podsumowując, mamy: $I \sim_{\mathbb{Z}} D_I = D_J \sim_{\mathbb{Z}} J$ i teza wynika z przechodniości relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$. \square

Tabela 3.13 przedstawia porządki dodatnie $\mathbb{A}I_n, \mathbb{D}I_n, \mathbb{E}I_6, \mathbb{E}I_7, \mathbb{E}I_8$, które są *kanonicznymi* reprezentantami każdego z pięciu typów Coxetera-Dynkina $\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$.

TABELA 3.13. PORZĄDKI DYNKINA



Fakt 3.14. *Jeśli $DI \in \{\mathbb{A}I_n, \mathbb{D}I_n, \mathbb{E}I_6, \mathbb{E}I_7, \mathbb{E}I_8\}$ jest porządkiem Dynkina, którego kołczan Hasse przedstawiono w tabeli 3.13, to DI jest porządkiem dodatnim, którego typem Coxetera-Dynkina jest $\check{D} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, odpowiednio.*

Dowód. Załóżmy, że $DI \in \{\mathbb{A}I_n, \mathbb{D}I_n, \mathbb{E}I_6, \mathbb{E}I_7, \mathbb{E}I_8\}$ oraz $C_{DI} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą incydencji porządku DI (fakt 1.38(b)). Zauważmy, że prawdziwa jest równość

$$\overline{C}_{DI}^{tr} \cdot C_{DI} \cdot \overline{C}_{DI} = \overline{C}_{DI}^{tr} \quad (+)$$

gdzie $\overline{C}_{DI} := C_{DI}^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest tzw. macierzą Eulera porządku DI , patrz [108].

Zauważmy, że każde dwa wierzchołki w kołczanie $\mathcal{H}(DI)$ połączone są *dokładnie jedną* drogą skierowaną i dlatego, na podstawie [107, Proposition 2.12], macierz $\overline{C}_{DI} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ równa jest niesymetrycznej macierzy Grama $\check{G}_{\overline{\mathcal{H}(DI)}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ bigrafu $\overline{\mathcal{H}(DI)}$, który powstaje z kołczanu $\mathcal{H}(DI)$ po opuszczeniu orientacji strzałek. Stąd oraz z (+) otrzymujemy

równość

$$\overline{C}_{DI}^{tr} \cdot G_{DI} \cdot \overline{C}_{DI} = \overline{G}_{DI} = G_{\overline{\mathcal{H}(DI)}},$$

gdzie $\overline{G}_{DI} := \frac{1}{2} \cdot (\overline{C}_{DI} + \overline{C}_{DI}^{tr}) = \frac{1}{2} (\check{G}_{\overline{\mathcal{H}(DI)}}^{tr} + \check{G}_{\overline{\mathcal{H}(DI)}}) = G_{\overline{\mathcal{H}(DI)}} \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ i w konsekwencji teza wynika faktu 3.10, ponieważ $\overline{\mathcal{H}(DI)}$ jest jednorodnym diagramem Dynkina. \square

3.3. Klasyfikacja spektralna porządków dodatnich

Przypomnijmy, że skończone m -wierzchołkowe grafy krawędziowo-dwudzielne Δ, Δ' nazywamy słabo (silnie) \mathbb{Z} -kongruentnymi, jeśli symetryczne (niesymetryczne) macierze Grama stowarzyszone z tymi bigrafami (definicja A.1(d)) są \mathbb{Z} -kongruentne (definicja A.3). Podobnie, skończone m -elementowe zbiory częściowo uporządkowane I oraz J nazywamy kwadratowo (dwuliniowo) \mathbb{Z} -równoważnymi, jeśli stowarzyszone z nimi macierze Grama (incydencji) są \mathbb{Z} -kongruentne (definicja 1.53). Analogicznie definiujemy \mathbb{Z} -kongruencję (\mathbb{Z} -równoważność) między porządkami a bigrafami.

Definicja 3.15. Niech I będzie m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, z którym stowarzyszone są: macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)) oraz symetryczna macierz Grama (1.39) $G_I := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$, a Δ będzie m -wierzchołkowym grafem krawędziowo-dwudzielnym, z którym stowarzyszone są niesymetryczna oraz symetryczna macierz Grama (definicja A.1(d)). Porządek I oraz bigraf Δ nazywamy:

- (a) słabo \mathbb{Z} -kongruentnymi lub kwadratowo \mathbb{Z} -równoważnymi (oznaczenie $I \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$), jeśli macierze $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ oraz $G_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ są \mathbb{Z} -kongruentne;
- (b) silnie \mathbb{Z} -kongruentnymi lub dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważnymi (oznaczenie $I \approx_{\mathbb{Z}} \Delta$), jeśli macierze $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oraz $\check{G}_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ są \mathbb{Z} -kongruentne.

Uwaga 3.16. Zauważmy, że słaba \mathbb{Z} -kongruencja $I \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$ porządku I z bigrafem Δ oznacza słabą kongruencję bigrafów Δ_I (1.41) oraz Δ (ponieważ $G_{\Delta_I} = G_{q_I} = G_I \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$), natomiast nie jest prawdziwa równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} \Delta \not\Leftarrow \Delta_I \approx_{\mathbb{Z}} \Delta$ (ponieważ w przypadku porządków, których elementy nie są posortowane topologicznie, $\check{G}_{\Delta_I} \neq C_I$).

Głównym celem niniejszego rozdziału jest dowód następującego twierdzenia klasyfikacyjnego, które stanowi rozwiązanie sformułowanego we wstępie problemu 2 dla pewnych klas porządków dodatnich.

Twierdzenie 3.17. Załóżmy, że I jest spójnym dodatnim skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech

- $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I$ będzie zbiorem pierwiastków I (definicja 1.46(e)),
- $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ będzie typem Coxetera-Dynkina I (definicja 3.9),
- $D \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ będzie jednorodnym diagramem Dynkina spełniającym warunki: $\Delta_I \sim_{\mathbb{Z}} D$ oraz $\mathbf{Dyn}_I = \check{D}$ (definicja 3.10 oraz fakt 3.10),
- $DI \in \{\mathcal{A}I_n, \mathcal{D}I_n, \mathcal{E}I_6, \mathcal{E}I_7, \mathcal{E}I_8\}$ będzie porządkiem Dynkina (tabela 3.13), który spełnia $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_{DI}$.

Jeśli I spełnia jedno z dwóch założeń: (i) $|I| \leq 14$ lub (ii) I ma dokładnie jeden element maksymalny, to następujące warunki są równoważne.

- (a) Porządek I jest dodatni.
- (b) Typem Coxetera-Dynkina porządku I jest diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_I := \check{D} \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, którego spektrum Coxetera $\mathbf{spec}c_I \subseteq \mathbb{C}$ jest równe spektrum Coxetera $\mathbf{spec}c_{DI} \subseteq \mathbb{C}$.
- (c) I jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z porządkiem Dynkina $DI \in \{\mathcal{A}I_{|I|}, \mathcal{D}I_{|I|}, \mathcal{E}I_6, \mathcal{E}I_7, \mathcal{E}I_8\}$.

3° Załóżmy, że $I = \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$. Jeśli $p = 2$, to $\check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}} \stackrel{B_I}{\sim}_{\mathbb{Z}} C_I$, gdzie

$$B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I = \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & n & n+1 \\ \hline 0 & 0 & & & -1 & 0 \\ -1 & -1 & & & -1 & -1 \\ \hline & & & & 0 & \\ \hline & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}}_{B_I^{tr} \cdot C_I} \cdot \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & & n & n+1 \\ \hline 0 & -1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ \hline & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 0 & 1 & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{array}}_{B_I} = \check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}}.$$

Analogicznie, jeśli $p > 2$, to $\check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}} \stackrel{B_I}{\sim}_{\mathbb{Z}} C_I$, gdzie $B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I =$

$$= \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & \dots & p-2 & p-1 & p & p+1 & & n & n+1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & & & -1 & 0 \\ 0 & & -1 & -1 & & & & -1 & -1 \\ & & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ -1 & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}}_{B_I^{tr} \cdot C_I} \cdot \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & \dots & p & p+1 & & n & n+1 \\ \hline 1 & & -1 & & & 0 & \\ 0 & & -1 & 1 & & \vdots & \\ -1 & -1 & 1 & \ddots & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \\ \hline & & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & & & & & 1 & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{array}}_{B_I} = \check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}}.$$

4° Pokażemy teraz, że $\check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}} \sim_{\mathbb{Z}} C_I$, gdzie $I = {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$. Dowód przeprowadzimy w trzech krokach.

a) $C_s\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_0 \sim_{\mathbb{Z}} C_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$, ponieważ:

$$B_1^{tr} \cdot C_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p} \cdot B_1 = \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & \dots & p & p+1 & & n+1 \\ \hline C_s\mathbb{D}_{n-p}^* \diamond \mathbb{A}_0 & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & 1 \\ \hline & & & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & -1 & \dots & -1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & -1 & 0 \end{array}}_{B_1^{tr} \cdot C_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}} \cdot \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & \dots & p & p+1 & & n+1 \\ \hline 1 & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \\ \hline & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \hline & & & & & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}}_{B_1} = C_s\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_0.$$

b) $C_0\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_n \sim_{\mathbb{Z}} C_s\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_0$, ponieważ:

$$B_2^{tr} \cdot C_s\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_0 \cdot B_2 = \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} s+2 & & 2 & 1 & s+3 & n+1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & -1 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 1 & \dots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{array}}_{B_2^{tr} \cdot C_s\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_0} \cdot \underbrace{\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 2 & & s+2 & s+3 & n+1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ \hline & & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}}_{B_2} = C_0\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_n.$$

c) $\check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}} \sim_{\mathbb{Z}} C_{0\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_n}$, ponieważ:

$$B_3^{tr} \cdot C_{0\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_n} \cdot B_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & n+1 \\ \hline 1 & 0 & & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & & -1 \\ \hline & & & \ddots \\ & & & -1 \\ \hline \mathbf{0} & & & \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \\ B_3^{tr} \cdot C_{0\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_n} \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & n+1 \\ \hline 1 & 0 & & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & & -1 \\ \hline & & & \ddots \\ & & & -1 \\ \hline \mathbf{0} & & & \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \\ B_3 \end{bmatrix}} = \check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}}.$$

Podsumowując: $\check{G}_{\mathbb{D}_{n+1}} \stackrel{B_I}{\sim}_{\mathbb{Z}} C_{s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}}$, gdzie $B_I = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$.

Musimy jeszcze pokazać, że wskazane macierze $B_I \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ są \mathbb{Z} -odwracalne. Z równości $B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I = \check{G}_{\Delta}$ oraz twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy $\det B_I = \pm 1$, gdyż $\det C_I = 1$, $\det(\check{G}_{\Delta}) = 1$ oraz

$$1 = \det(\check{G}_{\Delta}) = \det(B_I^{tr}) \cdot \det(C_I) \cdot \det(B_I) = \det(B_I)^2.$$

(b) Ponieważ $\mathbb{A}_{n+1} = {}_n\mathbb{A}_n^*$ oraz $\mathbb{D}_{n+1} = {}_0\mathbb{D}_n^* \diamond \mathbb{A}_0$ stwierdzenie (b) jest konsekwencją (a) oraz przechodniości relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$. \square

Dowód twierdzenia 3.17

Udowodnimy teraz jeden z głównych wyników rozdziału: twierdzenie 3.17, które podsumowuje własności spektralne spójnych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych I , które są jednopikowe lub mają co najwyżej $|I| \leq 14$ elementów.

Dowód twierdzenia 3.17. Równoważność (a) \Leftrightarrow (e) wynika wprost z twierdzenia 1.56, którego dowód przedstawiony jest w dodatku B.

Aby udowodnić równoważność (c) \Leftrightarrow (e), zauważmy, że na podstawie twierdzenia 3.12, prawdziwa jest równoważność $I \sim_{\mathbb{Z}} DI \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_{DI}$. Ponieważ $\mathbf{Dyn}_{DI} = \check{D}$ na podstawie faktu 3.14, teza jest konsekwencją faktu 3.10 oraz przechodniości relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$.

(f) \Rightarrow (b) Aby udowodnić implikację, posłużymy się argumentami użytymi w dowodzie faktu 1.55. Z założenia istnieje \mathbb{Z} -odwracalna macierz B , taka że $C_I = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B$, gdzie $\Delta := DI$. Zauważmy, że $G_I \sim_{\mathbb{Z}} G_{\Delta}$, ponieważ

$$G_I = \frac{1}{2} (C_I + C_I^{tr}) = \frac{1}{2} (B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B + B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta}^{tr} \cdot B) = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B.$$

Stąd oraz z faktu 3.10 wynika, że $\mathbf{Dyn}_I = \check{D}I$ jest typem Coxetera-Dynkina porządku I . Musimy jeszcze pokazać, że $\mathbf{spec}c_I = \mathbf{spec}c_{\Delta}$. Z założenia oraz definicji macierzy Coxetera otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{Cox}_I &= -C_I \cdot C_I^{-tr} = -(B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B) \cdot (B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B)^{-tr} = \\ &= -B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B \cdot B^{-1} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr} \cdot B^{-tr} = B^{tr} \cdot (-\check{G}_{\Delta} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr}) \cdot B^{-tr} = B^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot B^{-tr}, \end{aligned}$$

a stąd:

$$\begin{aligned} \text{cox}_I(t) &= \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) = \det(t \cdot E - B^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot B^{-tr}) = \\ &= \det(t \cdot B^{tr} \cdot B^{-tr} - B^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot B^{-tr}) = \det(B^{tr} \cdot (t \cdot E - \text{Cox}_{\Delta}) \cdot B^{-tr}) = \\ &= \det(B^{tr}) \cdot \det(t \cdot E - \text{Cox}_{\Delta}) \cdot \det((B^{tr})^{-1}) = \det(t \cdot E - \text{Cox}_{\Delta}) = \text{cox}_{\Delta}(t), \end{aligned}$$

i w konsekwencji $\text{specc}_I = \text{specc}_\Delta$.

(b) \Rightarrow (e) Implikacja wynika z faktu 3.10.

Założmy, że spełniony jest warunek (i), tj. $|I| \leq 14$. Implikacja (a) \Rightarrow (f) oraz równoważność (f) \Leftrightarrow (d) są konsekwencją twierdzenia 3.61, którego dowód przedstawiamy na stronie 88, oraz przechodniości relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$.

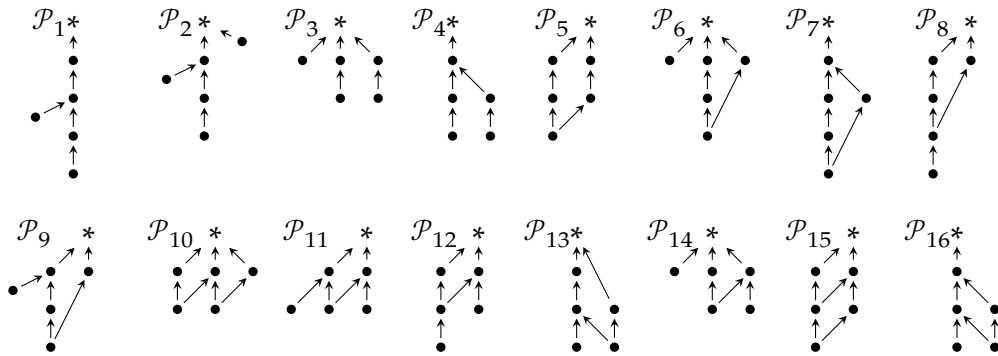
Założmy, że spełniony jest warunek (ii), tj. $|I|$ ma dokładnie jeden element maksymalny. Pokażemy, że (a) \Rightarrow (g) \Rightarrow (f) oraz (g) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c).

(a) \Rightarrow (g) Dowód przeprowadzimy w dwóch krokach. W przypadku $|I| \leq 14$ wynika on z przeprowadzonych wcześniej rozważań dla przypadku (i). Spośród obliczonych zbiorów częściowo uporządkowanych I , wybieramy takie, które mają dokładnie jeden element maksymalny. W ten sposób pokazujemy, że każdy taki I jest izomorficzny z jednym z czterech typów przedstawionych w tabeli 3.18: ${}_p\mathbb{A}_n^*$, \mathbb{D}_n^* , $\widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$, ${}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$, lub I jest izomorficzny z $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{193}$, które przedstawiono w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3]. Ponadto, z przeprowadzonych obliczeń oraz z faktu 3.10 wynika, że typem Coxetera-Dynkina Dyn_I jest:

- \mathcal{A}_{n+1} , jeśli I jest izomorficzny z ${}_p\mathbb{A}_n^*$,
- \mathcal{D}_{n+1} , jeśli I jest izomorficzny z \mathbb{D}_n^* , $\widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$ lub ${}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$,
- $\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8$, jeśli I jest izomorficzny z jednym ze zbiorów częściowo uporządkowanych $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{193}$ przedstawionych w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3], odpowiednio.

Przykładowo, wszystkie jednopikowe porządki I typu \mathcal{E}_6 są zawarte w następującej tabeli.

TABELA 3.20. DODATNIE JEDNOPIKOWE PORZĄDKI TYPU DYNKINA \mathcal{E}_6



Założmy teraz, że I jest dodatnim jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym, który posiada $m + 1 \geq 14$ elementów. Aby pokazać, iż I jest izomorficzny z pewnym zbiorem częściowo uporządkowanym $J \in \{{}_p\mathbb{A}_m^*, \mathbb{D}_m^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}\}$ posłużymy się indukcją zupełną ze względu na liczbę elementów porządku I . Prawdziwość tezy dla $m := |I| = 14$ jest konsekwencją omówionych wcześniej wyników obliczeniowych.

Aby udowodnić krok indukcyjny, zauważmy że po usunięciu z I wierzchołka minimalnego $a_{\min} \in I$ otrzymujemy dodatni jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany $I' := I \setminus \{a_{\min}\}$, który ma $|I'| = |I| - 1 \geq 14$ elementów. Analogicznie, każdy dodatni jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany mający $m > 1$ elementów, można skonstruować ze zbioru mającego $m - 1$ elementów, poprzez dodanie elementu minimalnego. Stąd prawdziwość tezy wynika z lematu 4.53(a): jeśli $I := I' \cup \{a_{\min}\}$ jest dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym, który powstał w wyniku dodania wierzchołka minimalnego do dodatniego jednopikowego $I' \in \{{}_p\mathbb{A}_{n-1}^*, \mathbb{D}_{n-1}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}\}$, to $I \in \{{}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}\}$.

(g) \Rightarrow (f) W przypadku $|I| \leq 14$ prawdziwość implikacji wynika z rozważonego wcześniej przypadku (i) natomiast w przypadku $|I| > 14$ implikacja wynika z lematu 3.19.

Aby zakończyć dowód pokażemy, że prawdziwe są implikacje (g) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c). Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $|I| > 14$ a stąd teza jest konsekwencją faktu 3.19(a) oraz faktu 1.55(a). \square

Uwaga 3.21. Przedstawiony dowód twierdzenia 3.17 jest analogiczny do dowodu [46, Theorem 5.2], ale nie wymaga odwołania do list minimalnych zbiorów częściowo uporządkowanych, które nie są Titsowo-dodatnie, przedstawionych w pracach [11, 14, 15]. Ponadto, w dowodzie lematu 3.19 prezentujemy jawną postać macierzy definiujących dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność jednopikowych porządków przedstawionych w tabeli 3.18 bez odwoływania się do operacji *waist reflection* oraz *reflection-duality*.

Pokażemy teraz, że wyznaczona przez nas lista dodatnich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych przedstawiona w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3], jest równoważna z listą porządków, których funkcjonal Titsa (3.1) jest dodatni, przedstawionych w [14, Таблица 2].

Fakt 3.22. Niech $I = (\{1, \dots, n, n+1 = *\}, \leq) \in \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{193}\}$ będzie jednym ze 193 dodatnich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych przedstawionych w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3], którego elementem maksymalnym jest *. Jeśli $T := I \setminus \{*\}$, to w [14, Таблица 2] istnieje taki porządek $P \in \{P_1, \dots, P_{108}\}$ że $T \simeq P$ lub $T \simeq P^{op}$.

Dowód. Dowód faktu ma charakter obliczeniowy.

Etap 1 $^\circ$ Inicjalizujemy listy:

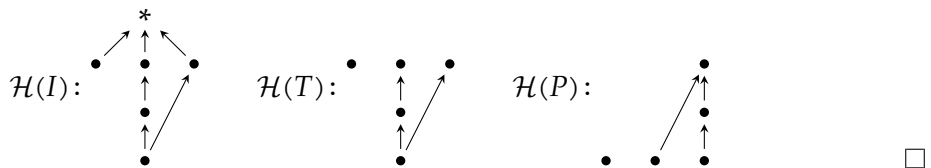
- **opeak** := $[\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{193}]$ złożoną z macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ dodatnich porządków jednopikowych $I = (\{1, \dots, n, n+1 = *\}, \leq)$ przedstawionych w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3] (np. na podstawie [41]),
- **bslist** := $[P_1, \dots, P_{108}]$ złożoną z macierzy incydencji porządków przedstawionych w [14, Таблица 2].

Etap 2 $^\circ$ Dla każdej macierzy $C_I \in \mathbf{opeak}$:

Etap 2.1 $^\circ$ konstruujemy macierz incydencji $C_T \in \mathbb{M}_{|I|-1}(\mathbb{Z})$ porządku $T := I \setminus \{*\}$, usuwając z macierzy $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ ostatni wiersz oraz ostatnią kolumnę,

Etap 2.2 $^\circ$ znajdujemy na liście **bslist** taką macierz incydencji $C_P \in \mathbf{bslist}$ porządku P , że $T \simeq P$ lub $T \simeq P^{op}$, gdzie $C_{P^{op}} := C_P^{tr}$ (aby sprawdzić, czy porządki T oraz P są izomorficzne, wystarczy zweryfikować izomorfizm kołczanów Hasse $\mathcal{H}(T)$ oraz $\mathcal{H}(P)$, np. przy pomocy biblioteki [igraph](http://www.igraph.org): www.igraph.org).

Przykładowo, w przypadku porządku $I = T \cup \{*\} := \mathcal{P}_6$ mamy $T \simeq P^{op}$ dla $P := P_{47}$.



Twierdzenie 3.17 pokazuje, że skończone dodatnie zbiory częściowo uporządkowane I , które są jednopikowe lub składają się z co najwyżej $|I| \leq 14$ elementów, wyznaczone są przez zespolone spektrum Coxetera $\mathbf{spec}_{\mathbb{C}} I \subseteq \mathbb{C}$ jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności.

Wniosek 3.23. Jeśli I, J są dodatnimi spójnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, które są jednopikowe lub spełniają $|I|, |J| \leq 14$, to $I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{specc}_I = \text{specc}_J$.

Dowód. Implikacja „ \Rightarrow ” wynika z faktu 1.55(c) i dlatego wystarczy pokazać „ \Leftarrow ”.

Założenie $\text{specc}_I = \text{specc}_J$ implikuje równość $|I| = |J|$ (ponieważ $|I| = |\text{specc}_I| = |\text{specc}_J| = |J|$). Na podstawie twierdzenia 3.17(f) wiemy, że istnieją takie \mathbb{Z} -odwracalne macierze $B_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z}) = \mathbb{M}_J(\mathbb{Z}) \ni B_J$, iż $\check{G}_{D_I} = B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I$ oraz $\check{G}_{D_J} = B_J^{tr} \cdot C_J \cdot B_J$ i stąd

$$\text{specc}_{D_I} = \text{specc}_I = \text{specc}_J = \text{specc}_{D_J}. \quad (*)$$

Ponieważ wielomiany Coxetera diagramów Dynkina mają postać przedstawioną w tabeli 1.58 (patrz [111, Proposition 2.3]) równości $|I| = |J|$ oraz (*) implikują izomorfizm diagramów $D_I \simeq D_J$. Zauważmy, że zmiana numeracji elementów porządku I prowadzi do porządku, który jest z nim dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny (patrz fakt 1.44(a)) i stąd, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $D_I = D_J$. Podsumowując:

$$B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I = \check{G}_{D_I} = \check{G}_{D_J} = B_J^{tr} \cdot C_J \cdot B_J \Rightarrow C_I = (B_J \cdot B_I^{-1})^{tr} \cdot C_J \cdot (B_J \cdot B_I^{-1})$$

i dlatego $I \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$, gdzie $B := B_J \cdot B_I^{-1}$. \square

Uwaga 3.24. Równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \text{specc}_I = \text{specc}_J$, gdzie I, J są dodatnimi zbiorami częściowo uporządkowanymi mającymi co najwyżej 10 elementów, została pokazana w pracach [40, 47] (patrz też [53]). Przedstawiony tam dowód opiera się na sprowadzeniu rozważanego problemu do analizy $\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D$ -orbit macierzowych morsyfikacji (definicja A.6) diagramów Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n; n \geq 1, \mathbb{D}_n; n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ (tabela B.17), gdzie

$$\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D := \{B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}); \check{G}_D = B^{tr} \cdot \check{G}_D \cdot B\}.$$

Kluczowym elementem dowodu [40, Theorem 8.1] jest obliczenie grupy **izotropii** $\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D \subseteq \text{Gl}(n; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}^n$, która jest skończona ([112, Proposition 2.9]) i izomorficzna z grupą $\text{Aut}(\mathcal{R}_D) \subseteq \mathbb{Z}^n$ automorfizmów zredukowanego systemu pierwiastków $\mathcal{R}_D := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_D(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ (por. [40]). Izomorfizm $\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D \simeq \text{Aut}(\mathcal{R}_D)$ pozwala obliczyć zarówno grupę $\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D \subseteq \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ jak i jej moc $|\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D|$ (patrz [73, Section 12.2]).

D	$\mathbb{A}_n, n \geq 1$	$\mathbb{D}_n, n > 4$	\mathbb{D}_4	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8
$ \text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D $	$2(n+1)!$	$2^n n!$	1152	103 680	2 903 040	696 729 600

Ponieważ wielkość grupy izotropii $\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D$ rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem liczby wierzchołków diagramu D (np. $|\text{Gl}(14; \mathbb{Z})_{\mathbb{D}_{14}}| = 2^{14} \cdot 14! = 1\,428\,329\,123\,020\,800$), jest to metoda trudna do przeniesienia na przypadek porządków, które mają więcej niż 10 elementów.

3.4. Wierne jednopikowe porządki dodatnie

Udowodnimy teraz, że istnieje *skończenie* wiele dodatnich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych, które są *wierne* w sensie definicji 3.25 oraz przedstawiamy pełną listę takich porządków, uzyskaną przy pomocy algorytmów kombinatorycznych przedstawionych w dysertacji. Rezultaty te zastosujemy do wykazania, że współrzędne $r_i \in \mathbb{Z}$ pierwiastków $r = [r_1, \dots, r_m] \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ dodatnich jednopikowych m -elementowych porządków I spełniają nierówność $|r_i| \leq \mathcal{R}\max_{\text{Dyn}_I} \leq 6$ (patrz twierdzenie 3.34).

Część z przedstawionych w tym podrozdziale wyników została opublikowana w [45].

Definicja 3.25. [80, 102, 117] Załóżmy, że I jest skończonym n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym.

- (a) Wektor $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy **wiernym** (ang. *sincere*; *omnipresent*), jeśli $v_i \neq 0$ dla wszystkich $1 \leq i \leq n$.
- (b) Zbiór częściowo uporządkowany I nazywamy **wiernym**, jeśli istnieje wierny pierwiastek $r \in \mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ funkcjonału $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40).
- (c) Jednopikowy porządek I nazywamy **Titsowo-wiernym**, jeśli istnieje wierny pierwiastek $r \in \widehat{\mathcal{R}}_I = \{v \in \mathbb{Z}^n; \hat{q}_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ funkcjonału Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ (3.4).

Jako prosty wniosek z lematu 3.6(a) otrzymujemy:

Wniosek 3.26. Jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany I jest wierny wtedy i tylko wtedy gdy jest Titsowo-wierny. Ponadto, pierwiastki funkcjonałów $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ różnią się tylko znakiem ostatniej współrzędnej.

Pokażemy, że $|r_i| \leq 6$ dla dowolnego pierwiastka $r = [r_1, \dots, r_n] \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^n$ (lub $r \in \widehat{\mathcal{R}}_I \subseteq \mathbb{Z}^n$), gdzie I jest dodatni i jednopikowy. Jest to szczególny przypadek bardziej ogólnego wyniku (patrz fakt 2.16): współrzędne dowolnego pierwiastka $r \in \mathbb{Z}^n$ dodatniego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ spełniają nierówność $|r_i| \leq 6$. Rezultat ten wynika z dość złożonego w dowodzie twierdzenia Ovsienki, które mówi o skończonej liczbie pierwiastków dodatnich *ślabo dodatnich* jednolitych funkcjonałów kwadratowych (tj. $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ spełniających $q(v) > 0$ dla $0 \neq v \in \mathbb{N}^n$), patrz [96, 102]. Dowód przedstawiony w dysertacji ma charakter kombinatoryczny i jest bardziej elementarny. Co więcej, pokazujemy że istnieje zależność pomiędzy maksymalną wielkością $|r_i| \in \mathbb{N}$ a typem Coxetera-Dynkina porządku I .

Będziemy używać następujących lematów.

Fakt 3.27. Załóżmy, że $I \subseteq J$ są zbiorami częściowo uporządkowanymi.

- (a) Jeśli J jest dodatni (nieujemny), to I jest dodatni (nieujemny).
- (b) Jeśli I nie jest dodatni (nieujemny), to J nie jest dodatni (nieujemny).

Dowód. Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^J & \xrightarrow{q_J} & \mathbb{Z} \\ \tau \downarrow \pi & \nearrow q_I & \\ \mathbb{Z}^I & & \end{array} ,$$

gdzie π oraz τ oznaczają standardowe operacje rzutowania oraz zanurzenia (włożenia).

(a) Dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^I$ mamy $q_I(v) = q_J(\tau(v))$, stąd dodatniość (nieujemność) J implikuje dodatniość (nieujemność) I .

(b) Z założenia, istnieje wektor $0 \neq v \in \mathbb{Z}^I$, taki że $q_I(v) = 0$ ($q_I(v) < 0$). Stąd, dla $w := \tau(v) \in \mathbb{Z}^J$ otrzymujemy $q_J(w) = q_I(\pi(w)) = q_I(v)$ i w konsekwencji porządek J nie jest dodatni (nieujemny). \square

Lemat 3.28. Jeśli I jest wiernym dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym, to I jest spójny.

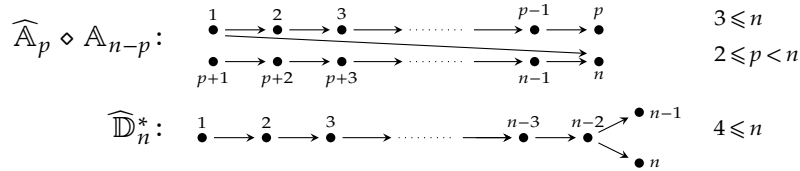
Dowód. Załóżmy, przez sprzeczność, że I nie jest spójny, tj. $I = I_1 \cup I_2$, gdzie $I_1, I_2 \neq \emptyset$. Zauważmy, że funkcjonały $q_{I_1}: \mathbb{Z}^{I_1} \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $q_{I_2}: \mathbb{Z}^{I_2} \rightarrow \mathbb{Z}$ są dodatnie (fakt 3.27(a)) oraz

dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^I$ mamy $q_I(x) = q_{I_1}(x|_{I_1}) + q_{I_2}(x|_{I_2})$. Jeśli $w \in \mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I$ jest wiernym pierwiastkiem porządku I , to $w|_{I_1} \neq 0, w|_{I_2} \neq 0$ i w konsekwencji

$$1 = q_I(w) = q_{I_1}(w|_{I_1}) + q_{I_2}(w|_{I_2}) \geq 2.$$

Uzyskana sprzeczność pokazuje, że istnienie wiernego pierwiastka implikuje spójność dodatniego zbioru częściowo uporządkowanego. \square

TABELA 3.29. SERIE PORZĄDKÓW DODATNICH $\widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}$ ORAZ $\widehat{\mathbb{D}}_n^*$



Lemat 3.30. Załóżmy, że $I \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, którego kołczan Hasse jest przedstawiony w tabeli 3.18 lub tabeli 3.29.

- (a) Porządek I jest dodatni.
- (b) Jeśli $|I| \geq 6$, to I nie ma pierwiastków wiernych.

Dowód. (a) Jeśli $I \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p} \}$, to teza wynika z równoważności (a) \Leftrightarrow (g) twierdzenia 3.17. W przypadku $I \in \{ \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$ teza jest konsekwencją faktu 3.27(a) (podzbiór dodatniego zbioru częściowo uporządkowanego jest dodatni) oraz poprzednich rozważań, ponieważ $\widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p} \subseteq \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}$ oraz $\widehat{\mathbb{D}}_n^* \subseteq {}_s\mathbb{D}_{n-2}^* \diamond \mathbb{A}_{n-2}$.

(b) Załóżmy, że $I \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$ oraz $|I| \geq 6$. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\}$ jest skończony (fakt 2.16) i można go obliczyć algorytmicznie (np. przy pomocy algorytmu 2.21).

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji zupełnej względem $n = |I|$. Prawdziwość tezy dla $n = 6$ weryfikujemy przy pomocy obliczeń komputerowych (obliczenia zajmują ok. 1s):

Etap 1° generujemy listę **mats** macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ wszystkich zbiorów częściowo uporządkowanych $I \in \{ {}_p\mathbb{A}_5^*, \mathbb{D}_5^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{5-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{5-p}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{6-p}, \widehat{\mathbb{D}}_6^* \}$ mających $|I| = 6$ elementów (jest ich dokładnie 22),

Etap 2° dla każdej macierzy $C_I \in \mathbf{mats}$:

Etap 2.1° wyznaczamy formę kwadratową $q_I \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_6]$, gdzie $q_I(x) := x \cdot C_I \cdot x^{tr}$,

Etap 2.2° przy pomocy algorytmu 2.21, zastosowanego do formy $q_I \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_6]$, obliczamy skończony zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^6; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^6$,

Etap 2.3° weryfikujemy, że zbiór $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^6$ nie zawiera wektorów wiernych.

Dowód kroku indukcyjnego przeprowadzimy przez sprowadzenie do sprzeczności. Załóżmy, że $n \geq 6$, teza jest prawdziwa dla wszystkich $I = (\{1, \dots, n\}, \leq) \in \{ {}_p\mathbb{A}_{n-1}^*, \mathbb{D}_{n-1}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$ wielkości $|I| = n$ oraz istnieje wierny zbiór częściowo uporządkowany $J = (\{1, \dots, n+1\}, \leq) \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p+1}, \widehat{\mathbb{D}}_{n+1}^* \}$ mający $|J| = n+1$ elementów. Z lematu A.35(d) zastosowanego do funkcjonau jedolitego $q_J: \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$ wynika, że istnieje wierny pierwiastek $w \in \mathcal{R}_J =$

$\mathcal{R}_{q_j} = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; q_j(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^J$ oraz indeks $1 \leq j \leq n+1$, takie że $w^{(j)} = [w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_{n+1}] \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem wiernym funkcjonału $q_j^{(j)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $q_j^{(j)}(x) := q_j([x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n])$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^n$. Zauważmy, że:

- (i) $q_j^{(j)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem kwadratowym stowarzyszonym z podzbiorem $J' \subseteq J$ zbioru częściowo uporządkowanego J , gdzie $J' := J \setminus \{j\}$, w szczególności J' jest wierny;
- (ii) $J' \subseteq J$ jest spójny;
- (iii) $J' \in \{ {}_p\mathbb{A}_{n-1}^*, \mathbb{D}_{n-1}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$.

Prawdziwość (i) wynika z definicji wiernego funkcjonału $q_j^{(j)}$ oraz definicji funkcjonału kwadratowego stowarzyszonego z $J' := J \setminus \{j\}$ (1.40), natomiast (ii) jest konsekwencją lematu 3.28. Ponieważ $J' := J \setminus \{j\} \subseteq J$ jest spójny, (iii) wynika z definicji kształtów zbioru częściowo uporządkowanego $J \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p+1}, \widehat{\mathbb{D}}_{n+1}^* \}$.

Stąd $J' \in \{ {}_p\mathbb{A}_{n-1}^*, \mathbb{D}_{n-1}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$ jest wiernym zbiorem częściowo uporządkowanym, który ma n elementów. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem indukcyjnym, co kończy dowód. \square

Każdy dodatni jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany $J = (\{1, \dots, n, *\}, \leq)$, który ma więcej niż 8 elementów, jest izomorficzny z porządkiem $I \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p} \}$ (patrz równoważność (a) \Leftrightarrow (g) w twierdzeniu 3.17) i stąd nie jest wierny (lemat 3.30). Prawdziwe jest silniejsze stwierdzenie: J nie ma pierwiastków *prawie wiernych*, tj. $v = [v_1, \dots, v_n, v_*] \in \mathcal{R}_J$ spełniających $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$ (por. [45, Proposition 3.3]).

Fakt 3.31. Załóżmy, że $I = (\{1, \dots, n, n+1 = *\}, \leq)$ jest dodatnim jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym, z którym stowarzyszone są funkcjonały kwadratowe $q_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) oraz $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (3.4). Jeśli $|I| \geq 9$, to:

- (a) funkcjonał $q_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ nie ma pierwiastków *prawie wiernych*,
- (b) funkcjonał Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ nie ma pierwiastków *prawie wiernych*.

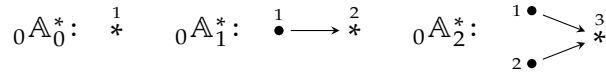
Dowód. Załóżmy, że I jest spójnym dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $|I| \geq 9$. Z twierdzenia 3.17 wynika, że $I \in \{ {}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p} \}$.

(a) Załóżmy, przez sprzeczność, że $v = [v_1, \dots, v_n, v_*] \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ jest pierwiastkiem spełniającym $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$. Wtedy $v_* = 0$, ponieważ w przeciwnym przypadku $v \in \mathbb{Z}^{n+1}$ byłby pierwiastkiem wiernym i otrzymalibyśmy sprzeczność z lematem 3.30. Stąd $\check{v} := [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem wiernym zbioru częściowo uporządkowanego $I' := I \setminus \{*\}$. Ponieważ $I' \in \{ {}_p\mathbb{A}_{n-1}^*, \mathbb{D}_{n-1}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p-1}, \widehat{\mathbb{A}}_p \diamond \mathbb{A}_{n-p}, \widehat{\mathbb{D}}_n^* \}$ oraz $|I'| \geq 8$, otrzymujemy sprzeczność z lematem 3.30.

(b) Wynika z (a), patrz wniosek 3.26. \square

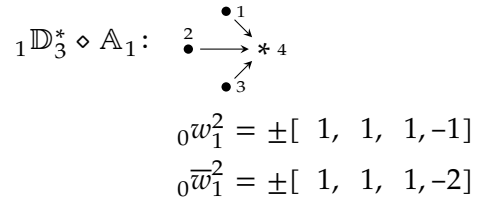
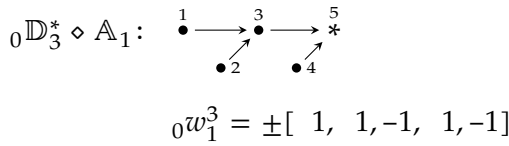
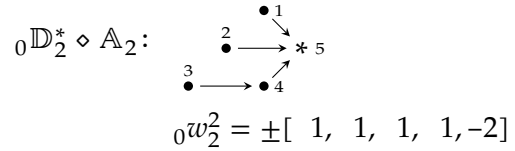
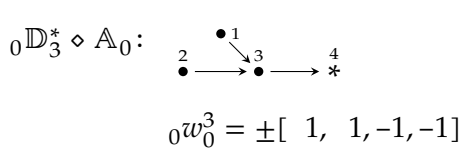
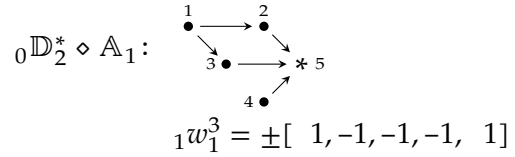
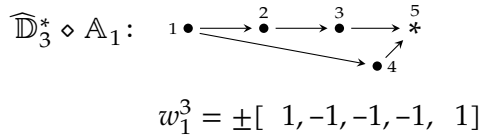
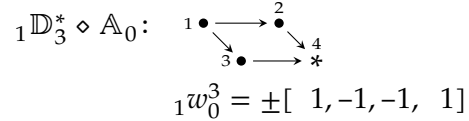
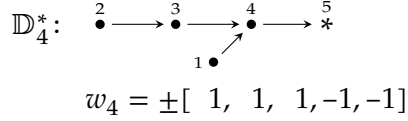
Twierdzenie 3.32. Załóżmy, że $I = (\{1, \dots, n, n+1 = *\}, \leq)$ jest dodatnim jednopikowym wiernym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego typem Coxetera-Dynkina jest $\mathbf{Dyn}_I \in \{ \mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8 \}$ (definicja 3.9).

- (a) Zbiór częściowo uporządkowany I jest Titsowo-wierny. Ponadto, pierwiastki funkcjonałów $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ różnią się tylko znakiem ostatniej współrzędnej.
- (b) $|I| \leq 8$.
- (c) Jeśli $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_{n+1}$, to $|I| = n+1 \leq 3$ oraz $I \in \{ {}_0\mathbb{A}_{0,0}^*, {}_0\mathbb{A}_{1,0}^*, {}_0\mathbb{A}_{2,0}^* \}$:



Ponadto, wektory ${}_0w_0 = \pm[1]$, ${}_0w_1 = \pm[1, -1]$ oraz ${}_0w_2 = \pm[1, 1, -1]$ są jedynymi pierwiastkami wiernymi funkcjonalów $q_{{}_0\mathbb{A}_0^*}$, $q_{{}_0\mathbb{A}_1^*}$ oraz $q_{{}_0\mathbb{A}_2^*}$, odpowiednio.

- (d) Jeśli $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_{n+1}$, to $|I| = n+1 \leq 5$ oraz I jest jednym z następujących 8 zbiorów częściowo uporządkowanych (wypisanych wraz z pełną listą ich pierwiastków wiernych).



- (e) Jeśli $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, to I jest jednym ze 167 zbiorów częściowo uporządkowanych przedstawionych w [46, Table 6.1, Table 6.2, Table 6.3], które mają niezerową liczbę pierwiastków wiernych funkcjonalu Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ (dla każdego I liczba ta została zapisana w tabelach „w kółku”: $\textcircled{S_I}$).

- (f) Całkowita liczba dodatnich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych, które są wierne wynosi 178.

- (g) Jeśli $v = [v_1, \dots, v_n, v_{n+1}] \in \mathcal{R}_I$ jest pierwiastkiem funkcjonalu kwadratowego $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$, to

$$\max\{|v_1|, \dots, |v_n|, |v_{n+1}|\} \leq \mathcal{R}\text{maxsinc}_{\mathbf{Dyn}_I}^* := \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_{n+1}, n \geq 0, \\ 2, & \text{jeśli } \mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_{n+1}, n \geq 3, \\ 3, & \text{jeśli } \mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_6, \\ 4, & \text{jeśli } \mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_7, \\ 6, & \text{jeśli } \mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_8. \end{cases}$$

Innymi słowy, liczba $\mathcal{R}\text{maxsinc}_{\mathbf{Dyn}_I}^* \in \{1, \dots, 6\}$ wyznacza górne ograniczenie na $|v_i|$, gdzie $v = [v_1, \dots, v_{n+1}] \in \mathbb{Z}^I$ jest wiernym pierwiastkiem dowolnego dodatniego jednopikowego zbioru częściowo uporządkowanego I typu $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

Dowód. (a) Wynika z lematu 3.6 (por. wniosek 3.26).

(b) Jest konsekwencją lematu 3.30 oraz równoważności (a) \Leftrightarrow (g) w twierdzeniu 3.17.

(c) – (g) Dowód ma charakter obliczeniowy.

Etap 1° przy pomocy algorytmu 3.52 generujemy listę **mats** złożoną z górnotrójkatnych macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ wszystkich nieizomorficznych jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych I , które mają co najwyżej 8 elementów,

Etap 2° usuwamy z listy **mats** te macierze, których ostatnia kolumna nie składa się z samych jedynek, tj. macierze incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ porządków I , które nie są jednopikowe,

Etap 3° dla każdej macierzy $C_I \in \mathbf{mats}$:

Etap 3.1° wyznaczamy formę kwadratową $q_I \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{|I|}]$, gdzie $q_I(x) := x \cdot C_I \cdot x^{tr}$,

Etap 3.2° przy pomocy algorytmu 2.21, zastosowanego do formy $q_I \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{|I|}]$, obliczamy skończony zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I$,

Etap 3.3° obliczamy liczbę wektorów wiernych należących do zbioru $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^I$,

Etap 3.4° przy pomocy algorytmu B.24 wyznaczamy typ Coxetera-Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|}, \mathcal{D}_{|I|}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ porządku I .

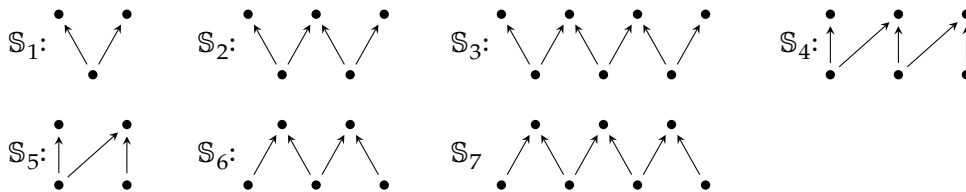
Na podstawie uzyskanych wyników obliczeniowych:

- weryfikujemy (g),
- pokazujemy (f): całkowita liczba wiernych dodatnich jednopikowych I wynosi 178,
- są to I opisane w podpunktach (c) – (e). □

Przedstawimy teraz analogiczne do twierdzenia 3.32 wyniki dla wszystkich (niekoniecznie jednopikowych) zbiorów częściowo uporządkowanych I , które mają co najwyżej $|I| \leq 8$ elementów.

Lemat 3.33. Niech I będzie dodatnim wiernym n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, gdzie $n = |I| \leq 8$, którego zbiorem pierwiastków jest $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

(a) Jeśli $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_n$, to $I \in \{{}_0\mathcal{A}_0^*, {}_0\mathcal{A}_1^*, {}_0\mathcal{A}_2^*\}$ (patrz tabela 3.18) lub I jest jednym z następujących siedmiu zbiorów częściowo uporządkowanych:



Ponadto, wektory $w_I = \sum_{j \in \max I} e_j - \sum_{k \in \min I} e_k$ oraz $-w_I$, gdzie $I \in \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_7\}$, są jedynymi pierwiastkami wiernymi funkcjonatu $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$.

(b) Całkowita liczba $\#\mathit{sinc}_I$ wiernych zbiorów częściowo uporządkowanych I typu Coxetera-Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_n, \mathcal{E}_n\} = \{\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_7, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ wynosi:

\mathbf{Dyn}_I	\mathcal{D}_4	\mathcal{D}_5	\mathcal{D}_6	\mathcal{D}_7	\mathcal{E}_6	\mathcal{E}_7	\mathcal{E}_8
$\#\mathit{sinc}_I$	5	13	22	17	36	175	521
$\#I$	5	19	43	95	43	197	548

(c) Dla $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ prawdziwa jest równość:

$$\mathcal{R}\max_{8\text{sinc}_\Delta} := \max_{\mathcal{R}I_\Delta^{n \leq 8}} \{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \Delta = \mathcal{A}_n, \\ 2, & \text{jeśli } \Delta = \mathcal{D}_n, \\ 3, & \text{jeśli } \Delta = \mathcal{E}_6, \\ 4, & \text{jeśli } \Delta = \mathcal{E}_7, \\ 6, & \text{jeśli } \Delta = \mathcal{E}_8, \end{cases} \quad \text{gdzie } \mathcal{R}I_\Delta^{n \leq 8} := \bigcup_{\substack{I: |I|=n \leq 8 \\ \text{Dyn}_I = \Delta}} \mathcal{R}I.$$

Innymi słowy, liczba $|v_i|$ dla dowolnego pierwiastka $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}I \subseteq \mathbb{Z}^n$ dodatniego porządku I , który składa się z co najwyżej 8 elementów i ma typ Coxetera-Dynkina $\text{Dyn}_I = \Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, jest ograniczona z góry przez $\mathcal{R}\max_{8\text{sinc}_\Delta} \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Dowód. Dowód ma charakter obliczeniowy i jest analogiczny do dowodu lematu 3.32 (podpunkty (c)–(g)). Używając algorytmu 3.52, obliczamy wszystkie macierze incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych I , złożonych z co najwyżej $n := |I| \leq 8$ elementów. Następnie, przy pomocy algorytmów B.24 oraz 2.21 obliczamy typ Dynkina $\text{Dyn}_I = \Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ oraz zbiór pierwiastków $\mathcal{R}I \subseteq \mathbb{Z}^n$ i weryfikujemy prawdziwość lematu. \square

Twierdzenie 3.34. Niech $I \equiv (\{1, \dots, n, n+1\}, \leq)$ będzie dodatnim $(n+1)$ -elementowym jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli wektor $v = [v_1, \dots, v_n, v_{n+1}] \in \mathbb{Z}^I$ jest

- (a) pierwiastkiem funkcjonału kwadratowego $q_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (tj. $q_I(v) = 1$), lub
- (b) pierwiastkiem funkcjonału kwadratowego Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (tj. $\hat{q}_I(v) = 1$),

to:

$$\max\{|v_1|, \dots, |v_n|, |v_{n+1}|\} \leq \mathcal{R}\max_{\text{Dyn}_I} := \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{A}_{n+1}, n \geq 0, \\ 2, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{D}_{n+1}, n \geq 3, \\ 3, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_6, \\ 4, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_7, \\ 6, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_8. \end{cases}$$

Dowód. Ponieważ pierwiastki funkcjonałów kwadratowych $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$, stowarzyszonych z I , różnią się tylko znakiem ostatniej współrzędnej (lemat 3.6), dowód wystarczy przeprowadzić dla przypadku (a).

Założmy, że $I = (\{1, \dots, n, n+1\}, \leq)$ jest dodatnim jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $v = [v_1, \dots, v_n, v_{n+1}] \in \mathcal{R}I = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1} \equiv \mathbb{Z}^I$ jest pierwiastkiem funkcjonału $q_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$. Rozważmy $m \leq n$ elementowy podzbiór częściowo uporządkowany $J := \text{supp } v \subseteq I$, gdzie $\text{supp } v := \{i \in I; v_i \neq 0\}$. Wprost z definicji wynika, że $v^{(J)} := v|_{\text{supp } v} \in \mathbb{Z}^J \equiv \mathbb{Z}^m$ jest pierwiastkiem wiernym funkcjonału $q_J: \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$. W konsekwencji J jest spójny (lemat 3.28) i dodatni (jako podzbiór dodatniego I , patrz fakt 3.27(a)). W zależności od typu Coxetera-Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ możliwe są następujące przypadki.

- 1) $\text{Dyn}_I = \mathcal{A}_{n+1}$. Wtedy $I \simeq {}_p\mathbb{A}_n^*$ (twierdzenie 3.17(g)) i stąd, jak pokazuje prosta analiza możliwych spójnych podzbiorów częściowo uporządkowanych $J \subseteq I$, zachodzi $J \simeq {}_{p'}\mathbb{A}_{m-1}^*$. W konsekwencji $\mathcal{R}\max_{\mathcal{A}_{n+1}} = \mathcal{R}\max_{\text{sinc}_{\mathcal{A}_m}^*} = 1$ na podstawie lematu 3.32(g).
- 2) $\text{Dyn}_I = \mathcal{D}_{n+1}$. Wtedy $I \in \{\mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p'} \diamond \mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p}\}$ (twierdzenie 3.17(g)). Analiza możliwych spójnych podzbiorów $J \subseteq I$ pokazuje, że $J \in \{{}_{p'}\mathbb{A}_{n'}^*, \mathbb{D}_{n'}^*, \widehat{\mathbb{D}}_{p'}^* \diamond \mathbb{A}_{n'-p'}, {}_{s'}\mathbb{D}_{p'}^* \diamond \mathbb{A}_{n'-p'}, \widehat{\mathbb{A}}_{p'} \diamond \mathbb{A}_{n'-p'}, \widehat{\mathbb{D}}_{n'}^*\}$, gdzie $n' := m-1$ (patrz tabela 3.29). Ponieważ J jest dodatni i wierny, to z lematu 3.30 otrzymujemy $|J| \leq 5$ i stąd oraz z lematu 3.33 wynika, że

$$\mathcal{R}\max_{\mathcal{D}_{n+1}} = \max\{\mathcal{R}\max_{8\text{sinc}_{\mathcal{A}_m}^*}, \mathcal{R}\max_{8\text{sinc}_{\mathcal{D}_m}^*}\} = \max\{1, 2\} = 2.$$

- 3) $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_8$. Ponieważ $|J| = m \leq 8$, to możliwym typem Coxetera-Dynkina J jest $\mathbf{Dyn}_J \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$. Stąd, oraz z lematu 3.33, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\max_{\mathcal{E}_8} = \max\{\mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{A}_m}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{D}_m}, \\ \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{E}_6}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{E}_7}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{E}_8}\} = \max\{1, 2, 3, 4, 6\} = 6. \end{aligned}$$

- 4) $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{E}_7, \mathcal{E}_6\}$. Rozumując analogicznie jak w przypadku 3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\max_{\mathcal{E}_7} &= \max\{\mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{A}_m}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{D}_m}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{E}_6}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{E}_7}\} = \\ &= \max\{1, 2, 3, 4\} = 4, \\ \mathcal{R}\max_{\mathcal{E}_6} &= \max\{\mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{A}_m}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{D}_m}, \mathcal{R}\max_8\text{sinc}_{\mathcal{E}_6}\} = \max\{1, 2, 3\} = 3. \quad \square \end{aligned}$$

3.5. Geometrie oczkowe pierwiastków

Celem niniejszego podrozdziału jest przedstawienie algorytmu 3.47, który umożliwia wyznaczenie macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \stackrel{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$, pomiędzy porządkami spełniającymi założenia twierdzenia 3.17. Algorytm ten stanowi częściowe rozwiązanie problemu 3 sformułowanego we wstępie, patrz wniosek 3.49.

Na początku podrozdziału przedstawiamy definicję Φ_I -oczkowego systemu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ w sensie [110], stowarzyszonego z dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym I . Pokażemy, że spójne dodatnie porządki I oraz J są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy kołczany (digrafy) $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ oraz $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$ są izomorficzne. Ponadto, pokażemy w jaki sposób znajomość kołczanu $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$, stowarzyszonego z dodatnim porządkiem $I = (I, \leq)$, umożliwia skonstruowanie \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy B definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$, gdzie $\mathbf{Dyn}_I = \check{D}$, i wskażemy możliwość użycia tej konstrukcji do rozwiązania sformułowanego we wstępie problemu 3 (patrz wniosek 3.49). Na zakończenie podrozdziału udowodnimy, że przy pewnych założeniach dodatnie spójne porządki $I = (I, \leq)$ są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne z porządkami I^{op} , gdzie $I^{op} = (I, \geq)$.

Z twierdzenia 1.56 wiemy, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^I; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^I$ dodatniego porządku I jest skończony i ma strukturę zredukowanego nieprzywiedlnego systemu pierwiastków w sensie Bourbaki [17] (patrz dodatek B). Pokażemy teraz, jak można wprowadzić na zbiorze $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^I$ strukturę tzw. *sieciowego systemu pierwiastków*, która „koduje” informacje o transformacji Coxetera $\Phi_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Zaczniemy od przedstawienia niezbędnych definicji, które pochodzą z pracy [110] (patrz też [113, 119]).

Założmy, że $\Phi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jest nietrywialnym automorfizmem zbioru $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Zbiór $\Phi\text{-Orb}(w) := \{\Phi^m(w), m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ nazywamy Φ -orbitą wektora $w \in \mathbb{Z}^n$ i przedstawiamy w postaci nieskończonego grafu skierowanego na płaszczyźnie euklidesowej.

$$\Phi\text{-Orb}(w): \quad \dots \leftarrow \Phi^2(w) \leftarrow \Phi(w) \leftarrow w \leftarrow \Phi^{-1}(w) \leftarrow \Phi^{-2}(w) \leftarrow \dots$$

Jeśli $|\Phi\text{-Orb}(w)| < \infty$, tj. istnieje liczba naturalna $0 \neq s < \infty$, taka że $\Phi^{-s}(w) = w$, Φ -orbitę $\Phi\text{-Orb}(w)$ nazywamy *skończoną* (długości s). W takim wypadku zbiór $\Phi\text{-Orb}(w)$ przedstawiamy na płaszczyźnie euklidesowej w postaci skierowanego grafu skończonego.

$$\mathcal{O}(w): \quad w \leftarrow \Phi^{-1}(w) \leftarrow \Phi^{-2}(w) \leftarrow \dots \leftarrow \Phi^{-s+1}(w) \leftarrow w$$

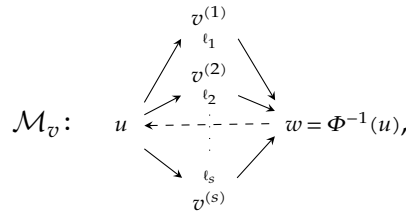
Uwaga: W dalszej części będziemy posługiwać się notacją $\mathcal{O}(w) \equiv \Phi\text{-Orb}(w)$, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Definicja 3.35. Załóżmy, że $\Phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest nietrywialnym automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n , zbiór $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest niepusty oraz $\Phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. Mówimy, że wektory $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}, w \in \mathcal{R}$ tworzą (ważone) Φ -oczko \mathcal{M}_v o początku u i końcu w , jeśli spełnione są następujące warunki:

- (i) $u = \Phi(w)$ oraz $u + w = \ell_1 \cdot v^{(1)} + \dots + \ell_s \cdot v^{(s)}$, gdzie $\ell_1, \dots, \ell_s \in \{1, 2, 3, \dots\}$,
- (ii) wektory $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ należą do różnych Φ -orbit.

Szerokością Φ -oczka nazywamy liczbę całkowitą $\ell_1 + \dots + \ell_s \geq 1$, gdzie $u, v^{(1)}, \dots, v^{(s)} \neq 0$.

Zazwyczaj Φ -oczko $\mathcal{M}_v \subseteq \mathcal{R}$ przedstawiamy graficznie w postaci ważonego bikołczanu (skierowanego grafu krawędziowo-dwudzielnego, z wagami przy wierzchołkach)

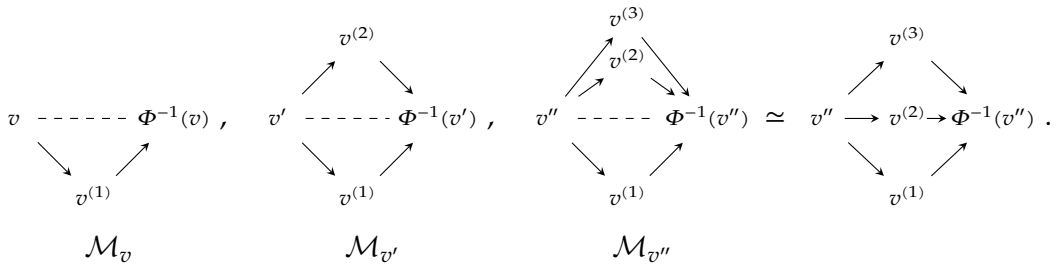


zgodnie z następującymi konwencjami:

- krawędzią przerywaną łączymy wektory należące do tej samej Φ -orbit;
- na rysunku pomijamy grot krawędzi przerywanej, zakładając orientację „od prawej do lewej”, tzn. $w \leftarrow \dots \Phi^{-1}(w) \equiv w \dashrightarrow \dots \Phi^{-1}(w)$;
- wagi ℓ_i nie zaznaczmy na rysunku w przypadku $\ell_i = 1$.

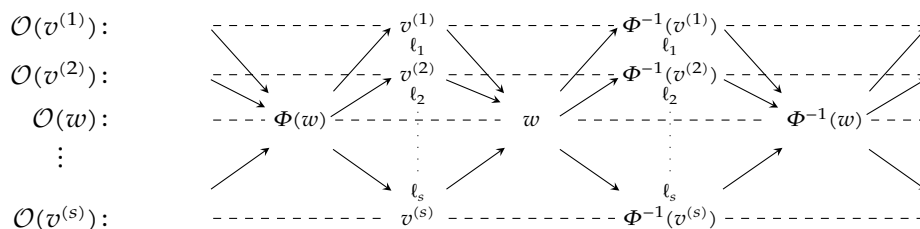
Jeśli $\ell_1 = \dots = \ell_s = 1$, to Φ -oczko nazywamy *jednorodnym*.

Przykładowo, jednorodne Φ -oczka $\mathcal{M}_v, \mathcal{M}_{v'}, \mathcal{M}_{v''}$ szerokości 1, 2 oraz 3 mają postać:



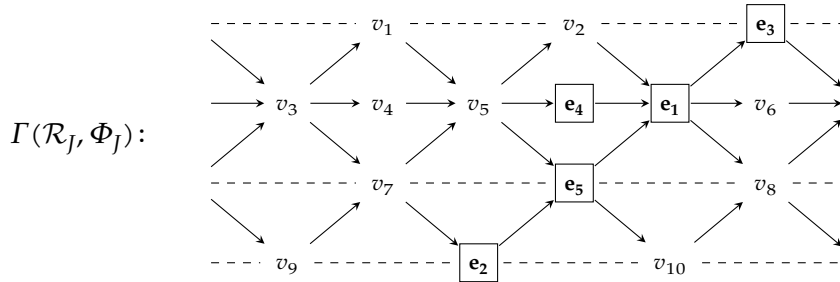
Definicja 3.36. Załóżmy, że $\Phi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest nietrywialnym automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n . Mówimy, że zbiór $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wyznacza strukturę kołczanu Φ -oczkowego $\Gamma(\mathcal{R}, \Phi)$, jeśli:

- (i) $\Phi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ (tj. zbiór \mathcal{R} jest Φ -niezmienniczy),
- (ii) wszystkie Φ -orbity wektorów $u \in \mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^n$ połączone są Φ -oczkami w taki sposób, że dla każdego $u \in \mathcal{R}$, podkołczan wypukły (indukowany podgraf skierowany) zawierający Φ -orbitę wektora u składa się z Φ -oczek i ma postać:



- funkcjonal kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ (patrz twierdzenie 1.34),
- automorfizm $\Phi_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^I$; ponieważ $e_i \longleftarrow \Phi_I(e_i) \subseteq \Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ dla $1 \leq i \leq |I|$, macierz przekształcenia $\Phi_I(v) = v \cdot \text{Cox}_I$ można odczytać z kołczanu $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$,
- macierz morsyfikacji (definicja A.6), która definiuje macierz Coxetera $\text{Cox}_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ (patrz twierdzenie A.7).

Przykład 3.40. Załóżmy, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^5$ pewnego zbioru częściowo uporządkowanego J wyznacza Φ_J -oczkową geometrię pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$, której kształt przedstawiono na rysunku (w \mathbb{R}^2).



(I) Zauważmy, że na podstawie kołczanu Φ_J -oczkowego $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$, który zawiera wektory jednostkowe, możemy (przy pomocy operacji \mathbb{Z} -elementarnych) wyznaczyć wszystkie wektory $v \in \mathcal{R}_J$. Przykładowo, aby wyznaczyć wartości wektorów v_1, \dots, v_{10} , analizujemy zależności \mathbb{Z} hyp liniowe wyznaczone przez następujące Φ_J -oczka:

- | | |
|---|--|
| (1) $\mathcal{M}_{v_2} \Rightarrow v_2 = e_1 - e_3$ | (6) $\mathcal{M}_{e_2} \Rightarrow v_{10} = e_5 - e_2$ |
| (2) $\mathcal{M}_{v_5} \Rightarrow v_5 = (v_2 + e_4 + e_5) - e_1 = e_4 + e_5 - e_3$ | (7) $\mathcal{M}_{e_4} \Rightarrow v_6 = e_1 - e_4$ |
| (3) $\mathcal{M}_{v_7} \Rightarrow v_7 = (v_5 + e_2) - e_5 = e_2 + e_4 - e_3$ | (8) $\mathcal{M}_{e_5} \Rightarrow v_8 = (e_1 + v_{10}) - e_5 = e_1 - e_2$ |
| (4) $\mathcal{M}_{v_1} \Rightarrow v_1 = v_5 - v_2 = e_4 + e_5 - e_1$ | (9) $\mathcal{M}_{v_9} \Rightarrow v_9 = v_7 - e_2 = e_4 - e_3$ |
| (5) $\mathcal{M}_{v_4} \Rightarrow v_4 = v_5 - e_4 = e_5 - e_3$ | (10) $\mathcal{M}_{v_3} \Rightarrow v_3 = (v_1 + v_4 + v_7) - v_5 = e_2 + e_4 + e_5 - e_1 - e_3$ |

W analogiczny sposób obliczamy pozostałe wektory $v \in \mathcal{R}_J$.

(II) Przypomnijmy, że zbiór $\mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^5; q_J(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^5$ wyznacza funkcjonal kwadratowy $q_J: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ jednoznacznie (patrz twierdzenia 1.34). Stosując argumenty użyte w dowodzie tego twierdzenia, możemy wyznaczyć współczynniki funkcjonau $q_J: \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}$

$$q_J(x) = x_1(x_1 + x_3) + x_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_5) + x_3^2 + x_4(x_1 + x_3 + x_4) + x_5(x_1 + x_3 + x_5),$$

a stąd otrzymujemy symetryczną macierz Grama

$$G_J = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Ponadto, z kołczanu $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$ możemy odczytać macierz Coxetera $\text{Cox}_J \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$:

$$\text{Cox}_J = \begin{bmatrix} \Phi_J(e_1) \\ \Phi_J(e_2) \\ \Phi_J(e_3) \\ \Phi_J(e_4) \\ \Phi_J(e_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_9 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

(III) Zauważmy, że kołczan Φ_J -oczkowy $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$ jest izomorficzny z kołczanem Φ_I -oczkowym $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ przedstawionym w przykładzie 3.37. Przez izomorfizm rozumiemy tu bijekcję $\Psi: \mathcal{R}_J \rightarrow \mathcal{R}_I$, która przeprowadza Φ_J -orbitę pierwiastków ze zbioru $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^5$ w Φ_I -orbitę pierwiastków ze zbioru $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^5$ z zachowaniem struktury Φ_J -oczek.⁷ Przykładowa bijekcja $\Psi: \mathcal{R}_J \rightarrow \mathcal{R}_I$ ma następujące wartości na wektorach bazowych e_1, \dots, e_5 :

$$B := \begin{bmatrix} \Psi(e_1) \\ \Psi(e_2) \\ \Psi(e_3) \\ \Psi(e_4) \\ \Psi(e_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 + e_4 - e_5 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_3 - e_5 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

(IV) Kołczan $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$ jednoznacznie koduje współrzędne wektorów $v \in \mathcal{R}_J$ w bazie standardowej $e_1, \dots, e_5 \in \mathbb{Z}^5$ (por. (I)). Ponieważ $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I) \simeq \Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$, więc każdy z wektorów $\Phi(v) \in \mathcal{R}_I$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji \mathbb{Z} -liniowej wektorów $\Psi(e_1), \dots, \Psi(e_5)$. Precyzyjnie: jeśli $\mathcal{R}_J \ni v = [v_1, \dots, v_5] = v_1 \cdot e_1 + \dots + v_5 \cdot e_5$, gdzie $v_i \in \mathbb{Z}$, to

$$\mathcal{R}_I \ni \Psi(v) = v_1 \cdot \Psi(e_1) + \dots + v_5 \cdot \Psi(e_5) = v \cdot B. \quad (*)$$

W szczególności, wektory $e_1, \dots, e_5 \in \mathcal{R}_I$ można przedstawić jako kombinację \mathbb{Z} -liniową wektorów $\Psi(e_1), \dots, \Psi(e_5)$ i stąd zbiór $\{\Psi(e_1), \dots, \Psi(e_5)\}$ stanowi \mathbb{Z} -bazę grupy wolnej \mathbb{Z}^5 , natomiast macierz $B \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$ jest macierzą zmiany bazy.

Rozważmy funkcjonal kwadratowy $p: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem

$$p(x) = x \cdot (B^{-1} \cdot G_J \cdot B^{-tr}) \cdot x^{tr}.$$

Dla dowolnego $w \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^5$ mamy

$$p(w) = w \cdot (B^{-1} \cdot G_J \cdot B^{-tr}) \cdot w^{tr} = (w \cdot B^{-1}) \cdot G_J \cdot (w \cdot B^{-1})^{tr} = 1,$$

ponieważ $w \cdot B^{-1} \in \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^5$. Z twierdzenia 1.34 otrzymujemy równość $p = q_I$ i stąd $G_I = B^{-1} \cdot G_J \cdot B^{-tr}$. W konsekwencji, zbiory częściowo uporządkowane I oraz J są kwadratowo \mathbb{Z} -równoważne (równoważność definiuje macierz $B^{-tr} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$). Dlatego też (fakt 1.55(e)) funkcjonal $q_J: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni.

(V) Ponieważ funkcjonal $q_J: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni, na podstawie twierdzenia A.7 możemy wyznaczyć macierz incydencji $C_J \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$ a stąd kołczan Hasse $\mathcal{H}(J)$.

$$C_J = 2 \cdot G_J \cdot (E - \text{Cox}_J)^{-tr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}) \quad \mathcal{H}(J): \begin{array}{ccccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & & & \nearrow & \\ & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

Pokażemy, że $C_J = B \cdot C_I \cdot B^{tr}$, tj. zbiory I oraz J są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne. Załóżmy, że $i \in \{1, \dots, 5\}$. Ponieważ kołczan $\Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J)$ jednoznacznie koduje współrzędne $r_1^{(i)}, \dots, r_5^{(i)} \in \mathbb{Z}$ wektora $\Phi_J(e_i) = r_1^{(i)} \cdot e_1 + \dots + r_5^{(i)} \cdot e_5 = [r_1^{(i)}, \dots, r_5^{(i)}]$, a $\Psi: \Gamma(\mathcal{R}_J, \Phi_J) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$, $\Psi(v) = v \cdot B$ (*) jest izomorfizmem kołczanów, to

$$\Phi_I(e_i \cdot B) = \Phi_I(\Psi(e_i)) = r_1^{(i)} \cdot \Psi(e_1) + \dots + r_5^{(i)} \cdot \Psi(e_5) = [r_1^{(i)}, \dots, r_5^{(i)}] \cdot B = \Phi_J(e_i) \cdot B.$$

Stąd przemienny jest diagram:

⁷Precyzyjną definicję izomorfizmu kołczanów oczkowych można znaleźć w [116, str. 63].

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^5 & \xrightarrow{\Phi_J} & \mathbb{Z}^5 \\
 \simeq \downarrow \Psi|_{\mathcal{R}_J} & \simeq \downarrow \Psi & \simeq \downarrow \Psi \\
 \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^5 & \xrightarrow{\Phi_I} & \mathbb{Z}^5
 \end{array}
 \quad \text{gdzie} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}_J \supseteq v & \xrightarrow{\Phi_J} & \Phi_J(v) = v \cdot \text{Cox}_J \\
 \simeq \downarrow \Psi & \simeq \downarrow \Psi & \simeq \downarrow \Psi \\
 \mathcal{R}_I \supseteq v \cdot B & \xrightarrow{\Phi_I} & \Phi_I(v \cdot B) = v \cdot B \cdot \text{Cox}_I
 \end{array}
 ,$$

oraz zachodzi równość $\text{Cox}_J = B \cdot \text{Cox}_I \cdot B^{-1}$. Podsumowując:

$$\begin{aligned}
 C_J &= 2 \cdot G_J \cdot (E - \text{Cox}_J)^{-tr} = 2 \cdot G_J \cdot (B \cdot B^{-1} - B \cdot \text{Cox}_I \cdot B^{-1})^{-tr} = \\
 &= 2 \cdot (B \cdot G_I \cdot B^{tr}) \cdot (B \cdot (E - \text{Cox}_I) \cdot B^{-1})^{-tr} = \\
 &= 2 \cdot B \cdot G_I \cdot B^{tr} \cdot B^{-tr} \cdot (E - \text{Cox}_I)^{-tr} \cdot B^{tr} = \\
 &= B \cdot (2 \cdot G_I \cdot (E - \text{Cox}_I)^{-tr}) \cdot B^{tr} = B \cdot C_I \cdot B^{tr},
 \end{aligned}$$

ponieważ $C_I = 2 \cdot G_I \cdot (E - \text{Cox}_I)^{-tr}$ z twierdzenia A.7 oraz $G_J = B \cdot G_I \cdot B^{tr}$ z (IV).

Twierdzenie 3.41 pokazuje, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^I$ każdego dodatniego zbioru częściowo uporządkowanego $I = (I, \leq)$, który spełnia założenia twierdzenia 3.17, ma strukturę Φ_I -oczkowego systemu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$.

Twierdzenie 3.41. Niech Δ, Δ' będą grafami krawędziowo-dwudzielnymi (bez pętli) mającymi $n = |\Delta_0| = |\Delta'_0| \geq 2$ wierzchołków. Załóżmy, że $A, A' \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ są macierzami morsyfikacji Δ oraz Δ' (patrz definicja A.6), $\mathcal{R}_\Delta, \mathcal{R}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$ zbiorami pierwiastków stowarzyszonymi z Δ oraz Δ' (odpowiednio), oraz $\Phi_A, \Phi_{A'}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ transformacjami Coxetera wyznaczonymi przez A oraz A' .

- (a) [110, Proposition 4.8] Jeśli $A = B^{tr} \cdot A' \cdot B$ (ozn. $A \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} A'$) oraz istnieje Φ_A -oczkowa geometria pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_A)$, to istnieje $\Phi_{A'}$ -oczkowa geometria pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{\Delta'}, \Phi_{A'})$ taka, że izomorfizm grup $h_B: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, gdzie $h_B(v) := v \cdot B^{tr}$, implikuje izomorfizm kołczanów oczkowych

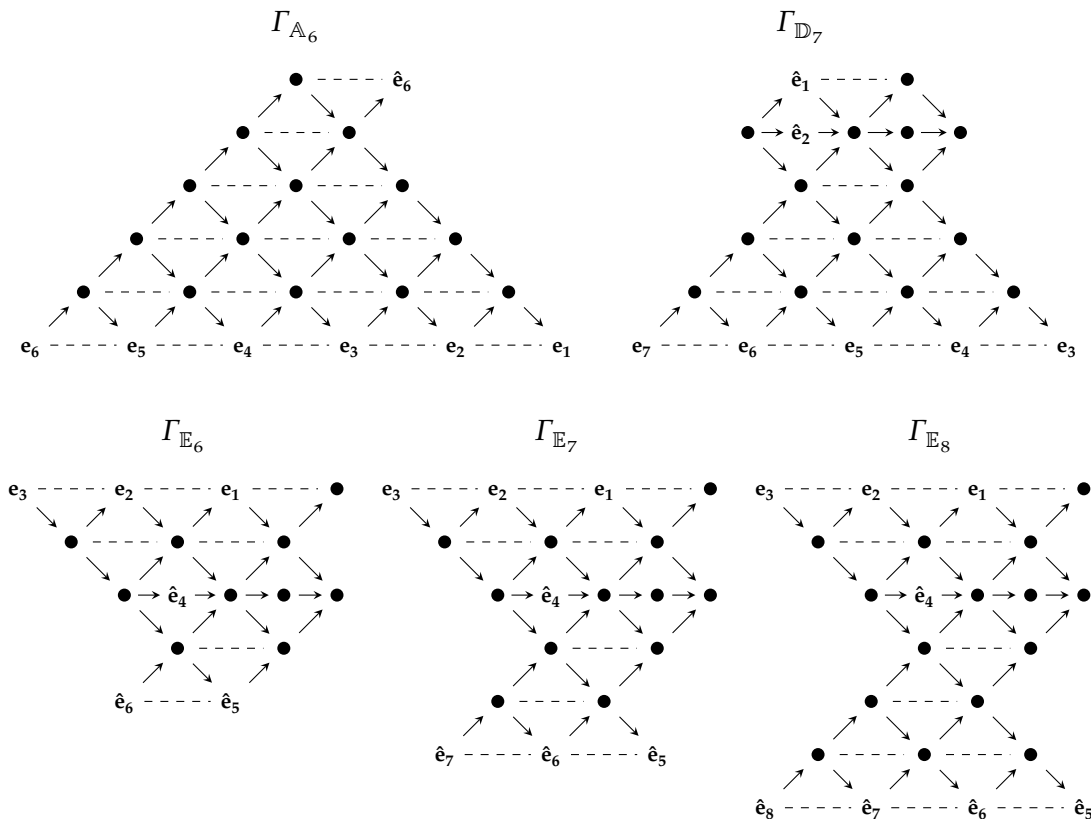
$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_A) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(\mathcal{R}_{\Delta'}, \Phi_{A'}).$$

- (b) [116, Theorem 3.13] Jeśli Δ jest jednym z jednorodnych Diagramów Dynkina (tabela B.17), $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}} \Delta$ oraz $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \overset{\Psi}{\cong} \Gamma(\mathcal{R}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$, to macierz $B := [\Psi(e_1)^{tr}, \dots, \Psi(e_n)^{tr}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$, której kolumny wyznaczone są przez wartości izomorfizmu $h: \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$ na wektorach bazowych $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$, definiuje silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama $\Delta \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} \Delta'$.

Istnienie Φ_Δ -oczkowej geometrii pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$, stowarzyszonej z jednorodnym diagramem Dynkina $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1; \mathbb{D}_n, n \geq 4; \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, zostało udowodnione w [110, Theorem 4.7], gdzie problem ten został powiązany z pewnymi twierdzeniami teorii reprezentacji algebr. Z drugiej strony, problem ten można rozwiązać przy pomocy argumentów kombinatorycznych, co pokazujemy w fakcie 3.42.

Fakt 3.42. Niech $\Delta \in \{\mathbb{A}_n; n \geq 1, \mathbb{D}_n; n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ będzie jednorodnym n -wierzchołkowym diagramem Dynkina przedstawionym w tabeli B.17, $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ (definicja A.4(b)) transformacją Coxetera a $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ zbiorem pierwiastków (definicja A.4). Zbiór $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma strukturę Φ_Δ -oczkowego systemu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$, którego fragment, zawierający wektory bazowe, przedstawiony został w tabeli 3.43, gdzie kołczany $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_n}, \Phi_{\mathbb{A}_n})$ oraz $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{D}_n}, \Phi_{\mathbb{D}_n})$ mają postać analogiczną do przedstawionych $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_6}, \Phi_{\mathbb{A}_6})$ oraz $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{D}_7}, \Phi_{\mathbb{D}_7})$; na rysunkach stosujemy konwencję $\hat{a} := -a$ dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n$.

TABELA 3.43. KONFIGURACJE PODSTAWOWE PIERWIĄTKÓW JEDNORODNYCH
 DIAGRAMÓW DYNKINA $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1; \mathbb{D}_n, n \geq 4; \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$



Dowód. Zauważmy, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ diagramu Dynkina $\Delta \in \{\mathbb{A}_n; n \geq 1, \mathbb{D}_n; n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ jest skończony (patrz fakt 2.16) i w konsekwencji wszystkie Φ_Δ -orbity pierwiastków mają skończoną długość.

Łatwo sprawdzić, że fragmenty kołczanów $\Gamma_\Delta \subseteq \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ przedstawione w tabeli 3.43 uzupełniają się jednoznacznie do kołczanów Φ_Δ -oczkowych $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ w kształcie cylindra, które składają się ze skończonej liczby Φ_Δ -oczek (por. przykład 3.40 (I)). Następnie weryfikujemy, że $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ zawiera wszystkie wektory $v \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ (w tym celu obliczamy zbiory $\mathcal{R}_{\mathbb{E}_6} \subseteq \mathbb{Z}^6, \mathcal{R}_{\mathbb{E}_7} \subseteq \mathbb{Z}^7, \mathcal{R}_{\mathbb{E}_8} \subseteq \mathbb{Z}^8$ przy pomocy algorytmu 2.21 oraz używamy jawnego opisu zbiorów $\mathcal{R}_{\mathbb{A}_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$ i $\mathcal{R}_{\mathbb{D}_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$ przedstawionego w lemacie B.28). \square

Uwaga 3.44. Fragmenty kołczanów Φ_Δ -oczkowych $\Gamma_\Delta \subseteq \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ przedstawione w tabeli 3.43 to tzw. **konfiguracje podstawowe pierwiastków** ([110, 113]). Jest to przydatne narzędzie umożliwiające odczytanie macierzy definiującej silną \mathbb{Z} -kongruencję między bigrafami (w szczególności: porządkami) na podstawie znajomości kołczanu oczkowego, analogicznie jak w przykładzie 3.40, patrz też [114, 123] oraz [46, Example 7.6].

Pokażemy teraz, że dodatni zbiór częściowo uporządkowany $I = (I, \leq)$, który spełnia założenia twierdzenia 3.17, jest \mathbb{Z} -dwuliniowo równoważny ze zbiorem $I^{op} = (I, \geq)$.

Twierdzenie 3.45. Załóżmy, że I jest n -elementowym dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym, który spełnia założenia twierdzenia 3.17.

- Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{I^{op}} \subseteq \mathbb{Z}^{I^{op}} \cong \mathbb{Z}^n$ ma strukturę $\Phi_{I^{op}}$ -oczkowego systemu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{I^{op}}, \Phi_{I^{op}})$, izomorficznego z $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$.
- $I \approx_{\mathbb{Z}} I^{op}$.

Dowód. (a) Zauważmy, że istnienie kołczanu oczkowego $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ wynika z twierdzenia 3.41(a) oraz twierdzenia 3.17. Z definicji zbioru częściowo uporządkowanego I^{op} otrzymujemy równość $C_{I^{op}} = C_I^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ i stąd $q_{I^{op}} = q_I$, $\mathcal{R}_{I^{op}} = \mathcal{R}_I$ oraz

$$\text{Cox}_{I^{op}} = -C_{I^{op}} \cdot C_{I^{op}}^{-tr} = -C_I^{tr} \cdot C_I^{-1} = (-C_I \cdot C_I^{-tr}) = \text{Cox}_I^{-1}.$$

W konsekwencji $\Phi_{I^{op}} = \Phi_I^{-1}$ i zbiór $\mathcal{R}_{I^{op}} = \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma strukturę $\Phi_{I^{op}}$ -oczkowego systemu pierwiastków $\Gamma(\mathcal{R}_{I^{op}}, \Phi_{I^{op}}) = \Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I^{-1}) \simeq \Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$, który powstaje z kołczanu $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ przez zmianę orientacji strzałek.

(b) Stosując argumenty przedstawione w przykładzie 3.40 łatwo pokazać, że izomorfizm $\Gamma(\mathcal{R}_{I^{op}}, \Phi_{I^{op}}) \simeq \Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ implikuje dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} I^{op}$. \square

Uwaga 3.46. (a) Problem istnienia dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności $I \approx_{\mathbb{Z}} I^{op}$ stanowi szczególny wariant ogólnego zagadnienia (patrz np. [58, 71]): czy macierze $A \in \mathbb{M}_n(F)$ oraz $A^{tr} \in \mathbb{M}_n(F)$, gdzie F jest ciałem, są kongruentne nad F ? Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Co więcej, macierz $B \in \text{Gl}(n; F)$ definiującą kongruencję można wybrać tak, aby $B^2 = E$, patrz [29, 58, 71].

(b) Twierdzenie 3.45 stanowi częściowe rozwiązanie szczególnego wariantu tego problemu: tj. problemu istnienia \mathbb{Z} -kongruencji całkowitoliczbowych macierzy $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oraz $A^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ sformułowanego w [113, Problem 1.14].

(c) Można pokazać, że macierz $B \in \text{Gl}(|I|; \mathbb{Z})$ definiującą \mathbb{Z} -dwuliniową równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} I^{op}$ można wybrać tak, aby $B^2 = E$, patrz [45, Theorem 1.10].

Twierdzenie 3.41, fakt 3.42 oraz twierdzenie 3.17(f) gwarantują poprawność następującego algorytmu (alternatywnego do algorytmu 3.58) służącego do obliczania macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność pomiędzy dodatnim n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym I , który ma co najwyżej $n \leq 14$ elementów (lub dokładnie jeden element maksymalny) oraz diagramem Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, gdzie $\text{Dyn}_I = \check{D}$ (por. przykład 3.40).

Algorytm 3.47. **WEJŚCIE** Macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ dodatniego porządku I , który ma co najwyżej $m \leq 14$ elementów lub dokładnie jeden element maksymalny.

WYNIK \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniająca równość $\check{G}_D = B^{tr} \cdot C_I \cdot B$, gdzie $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ (patrz tabela B.17).

KROK 1° Obliczamy typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ porządku I (np. przy pomocy algorytmu B.24).

KROK 2° Obliczamy zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (np. przy pomocy algorytmu 2.21).

KROK 3° Dzielimy zbiór $\mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ na Φ_I -orbitę i konstruujemy kołczan Φ_I -oczkowy $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ (np. przy pomocy algorytmu nawijania na torus, patrz [110, Proposition 4.5]).

KROK 4° Znajdujemy w kołczanie $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ podkołczan $\Gamma_I \subseteq \Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ izomorficzny z konfiguracją podstawową $\Gamma_D \in \{\Gamma_{\mathbb{A}_m}, \Gamma_{\mathbb{D}_m}, \Gamma_{\mathbb{E}_6}, \Gamma_{\mathbb{E}_7}, \Gamma_{\mathbb{E}_8}\}$, gdzie $\text{Dyn}_I = \check{D}$, którą przedstawiono w tabeli 3.43

KROK 5° Konstruujemy \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B := [\Psi_I(e_1), \dots, \Psi_I(e_m)]^{tr} \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$, gdzie $\Psi_I: \Gamma_D \rightarrow \Gamma_I$ jest izomorfizmem kołczanów (digrafów) Φ_I, Φ_D -oczkowych $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ oraz $\Gamma(\mathcal{R}_D, \Phi_D)$.

KROK 6° Zwracamy macierz $B^{tr} \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ jako wynik.

Przykład zastosowania algorytmu 3.47 można znaleźć w [46, Example 7.6].

Uwaga 3.48. (a) Algorytm 3.47 jest złożony w implementacji. W szczególności, konstrukcja kołczanu $\Gamma(\mathcal{R}_I, \Phi_I)$ przy pomocy *algorytmu nawijania na torus* wymaga wcześniejszego znalezienia tzw. *oczka początkowego* i jej wynik jest zależny od tego wyboru (patrz [110]).

- (b) Algorytm 3.47 ma wykładniczą złożoność obliczeniową, ponieważ implementacja kroku 2° wymaga użycia wykładniczego algorytmu 2.21, a implementacja kroku 4° wymaga użycia wykładniczego algorytmu znajdująca podgrafu izomorficznego (problem podgrafu izomorficznego jest NP-zupełny, patrz [39, A1.4: GT48, str. 202]).
- (c) Aby uniknąć wykładniczej złożoności obliczeniowej kroku 4°, zamiast używać algorytmów wyszukiwania podgrafu izomorficznego, w praktycznych implementacjach korzysta się z kombinatorycznego opisu konfiguracji podstawowych i konstruuje algorytmy dedykowane dla każdego typu Coxetera-Dynkina⁸ z osobna, patrz np. [123] oraz rozprawy doktorskie [32, 124].

Podsumowując, na potrzeby obliczeń, których wyniki prezentowane są w dysertacji, używamy algorytmu 3.58 i jego uogólnienia: algorytmu 4.44.

Wniosek 3.49. *Algorytm 3.47 stanowi rozwiązanie problemu 3 sformułowanego we wstępie dla przypadku spójnych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych, które mają co najwyżej $m \leq 14$ elementów lub dokładnie jeden element maksymalny.*

Dowód. Załóżmy, że I oraz J są spójnymi dodatnimi m -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, które spełniają założenia wniosku. Przy pomocy algorytmu 3.47 możemy obliczyć macierze $B_I, B_J \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniające równości

$$B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I = \check{G}_{D_I} \text{ oraz } B_J^{tr} \cdot C_J \cdot B_J = \check{G}_{D_J},$$

gdzie $C_I, C_J \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ są macierzami incydencji porządków I oraz J . Zauważmy, że I jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny z J wtedy i tylko wtedy, gdy $\check{G}_{D_I} = \check{G}_{D_J}$ (patrz wniosek 3.23 oraz równoważność (b) \Leftrightarrow (f) w twierdzeniu 3.17).

Jeśli $I \approx_{\mathbb{Z}} J$, to prawdziwa jest równość

$$B_I^{tr} \cdot C_I \cdot B_I = \check{G}_{D_I} = \check{G}_{D_J} = B_J^{tr} \cdot C_J \cdot B_J,$$

a stąd $C_I = B_I^{tr} \cdot C_J \cdot B_I$, gdzie $B := B_J \cdot B_I^{-1}$. Innymi słowy, macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ definiującą dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ możemy skonstruować przy pomocy standardowych obliczeń algebry komputerowej oraz dwukrotnego wywołania algorytmu 3.47. \square

3.6. Algorytmiczne generowanie porządków dodatnich

Niniejszy podrozdział poświęcony jest omówieniu algorytmu 3.52, który stanowi rozwiązanie problemu generowania *wszystkich*, z dokładnością do izomorfizmu, dodatnich (w sensie definicji 1.51) zbiorów częściowo uporządkowanych. Algorytm 3.52 umożliwia przygotowanie listy takich porządków I wielkości $1 \leq |I| \leq n$, gdzie $n \geq 2$ jest ustaloną liczbą naturalną. Algorytm ten stanowi niezbędny element dowodu twierdzenia 3.61 a stąd klasyfikacji spektralnej Coxetera przedstawionej w twierdzeniu 3.17.

Liczba wszystkich spójnych nieizomorficznych zbiorów częściowo uporządkowanych I wielkości $1 \leq |I| \leq 16$ wyznaczona została algorytmicznie w pracy [18].

⁸Precyzyjniej: dla każdej $\text{Gl}(n; \mathbb{Z})_D$ -orbity macierzowych morsyfikacji (por. uwaga 3.24) diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, por. [92, 93, 112–116].

TABELA 3.50. LICZBA SPÓJNYCH NIEIZOMORFICZNYCH PORZĄDKÓW WIELKOŚCI $1 \leq |I| \leq 16$

n	$\#I$	n	$\#I$	n	$\#I$	n	$\#I$
1	1	5	44	9	163 341	13	32 664 984 238
2	1	6	238	10	2 360 719	14	1 303 143 553 205
3	3	7	1650	11	43 944 974	15	66 900 392 672 168
4	10	8	14 512	12	1 055 019 099	16	4 413 439 778 321 689

W dysertacji rozważamy porządki I , które są dodatnie lub nieujemne korangi $\text{crk}_I \in \{1, 2\}$ (w sensie definicji 1.51). Stanowią one niewielki odsetek wszystkich nieizomorficznych porządków (patrz tabela 3.55 oraz tabela 4.33) i dlatego na potrzeby generowania *wszystkich dodatnich (nieujemnych)* zbiorów częściowo uporządkowanych I ustalonej wielkości $n = |I| \geq 2$ używamy dedykowanych algorytmów.

Przypomnijmy, że każdy n -elementowy zbiór częściowo uporządkowany $I = (I, \leq)$ można jednoznacznie zakodować w postaci macierzy kwadratowej stopnia n , tzw. *macierzy incydencji* $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)). Macierz $C_I = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą binarną zdefiniowaną następująco: $c_{ij} = 1$, jeśli $i \leq j$, lub 0, jeśli $i \not\leq j$. Z drugiej strony, każda macierz binarna $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ dla $1 \leq i, j \leq n$, która spełnia warunki:

- (zwrotność) $a_{ii} = 1$ dla każdego $1 \leq i \leq n$,
- (przechodność) jeśli $a_{ij} = 1$ oraz $a_{jk} = 1$, to $a_{ik} = 1$ dla dowolnych $1 \leq i, j, k \leq n$,
- (antysymetryczność) jeśli $a_{ij} = 1$, to $a_{ji} = 0$ dla dowolnych $1 \leq i, j \leq n$,

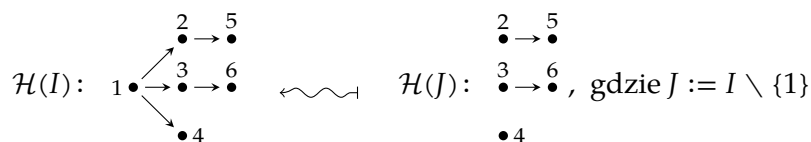
jest macierzą incydencji pewnego zbioru częściowo uporządkowanego. Dlatego problem generowania wszystkich (z dokładnością do izomorfizmu) n -elementowych porządków dodatnich będziemy rozumieć następująco: *jak, spośród 2^{n^2} macierzy binarnych stopnia n , wybrać macierze incydencji nieizomorficznych porządków dodatnich?*

Aby zmniejszyć przestrzeń przeszukiwań, złożoną z 2^{n^2} binarnych macierzy kwadratowych stopnia n , będziemy używać następujących obserwacji.

- Elementy każdego porządku I można ponumerować topologicznie (patrz fakt 1.44(b)) i dlatego, bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że każda macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest *górnotrójkątna*.
- W każdym n -elementowym porządku I można znaleźć *element minimalny* $a \in I$ i stąd $I = J \cup \{a\}$, gdzie $|J| = n - 1$. Ponadto, jeśli porządek I jest dodatni, to porządek J również jest dodatni (patrz fakt 3.27(a)).

Stąd, aby wygenerować listę wszystkich dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych wielkości $n + 1$, będziemy rozważać wszystkie jednopunktowe rozszerzenia dodatnich zbiorów wielkości n o wierzchołek minimalny.

Uwaga 3.51. Rozważmy następujący 6-elementowy dodatni zbiór częściowo uporządkowany.



Konstrukcja 6-elementowego porządku I metodą rozszerzania o element minimalny porządku 5-elementowego wymaga rozważenia **niespójnego** porządku J . Stąd w algorytmie 3.52 generującym wszystkie **spójne** porządki dodatnie musimy także rozważyć porządki niespójne.

Algorytm 3.52. **WEJŚCIE** Liczba całkowita $n \geq 1$.

WYNIK Skończone zbiory $\mathbf{posit}[i]$, $1 \leq i \leq n$, zawierające wszystkie nieizomorficzne spójne porządki dodatnie wielkości $1 \leq i \leq n$, zakodowane w postaci macierzy incydencji.

KROK 1° Inicjalizujemy zbiór $\mathbf{posit}[1]$, wstawiając do niego macierz $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_1(\mathbb{Z})$.

KROK 2° Dla każdego $m = 1, \dots, n - 1$:

KROK 2.1° $\mathbf{candidate}_m = \{ \}$.

KROK 2.2° Dla każdego porządku $J \in \mathbf{posit}[m - 1]$, tworzymy listę wszystkich możliwych rozszerzeń J o nowy punkt minimalny, do porządku o wielkości m . Innymi słowy, generujemy listę $W_J \ni w$ złożoną ze wszystkich takich wektorów $w = [w_2, \dots, w_m] \in \{0, 1\}^{m-1}$, że macierz

$$C_{J_w} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & w \\ \hline 0 & C_J \end{array} \right] = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$$

jest macierzą incydencji zbioru częściowo uporządkowanego (tzn. macierzą spełniającą następujący warunek: jeśli $c_{ij} = 1$ oraz $c_{js} = 1$, to $c_{is} = 1$, dla dowolnych $1 \leq i, j, s \leq n$).

KROK 2.3° Dla każdego porządku $J \in \mathbf{posit}[m - 1]$ oraz każdego wektora $w \in W_J$, konstruujemy macierz $C_{J_w} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ i dodajemy J_w do listy $\mathbf{candidate}_m$, jeśli macierz symetryczna $\widehat{G}_{J_w} := C_{J_w} + C_{J_w}^{tr}$ jest dodatnio określona (dodatnią określoność macierzy można sprawdzić przy pomocy algorytmu 2.7).

KROK 2.4° Konstruujemy zbiór $\mathbf{posit}[m]$, wybierając z listy $\mathbf{candidate}_m$ porządki nieizomorficzne (aby sprawdzić, czy porządki I oraz J są izomorficzne, wystarczy zweryfikować izomorfizm kołczanów Hasse $\mathcal{H}(I)$ oraz $\mathcal{H}(J)$, np. przy pomocy biblioteki `igraph`: www.igraph.org).

KROK 3° Z każdego zbioru $\mathbf{posit}[i]$, gdzie $1 \leq i \leq n$, usuwamy porządki niespójne (spójność $I \in \mathbf{posit}[i]$ można sprawdzić np. stosując do kołczanu Hasse⁹ $\mathcal{H}(I)$ algorytm przeszukiwania grafu wszerz, patrz np. [85]).

KROK 4° Zwracamy zbiory $\mathbf{posit}[i]$, $1 \leq i \leq n$, jako wynik.

Przedstawiony algorytm opiera się na klasycznej metodzie wyczerpującego przeszukiwania przestrzeni rozwiązań. Konstrukcja sugeruje, że jest to algorytm wykładniczy: w kroku 2.2° dla każdego n elementowego I generujemy listę $W_I \subseteq \{0, 1\}^n$ rozszerzeń I do $n + 1$ elementowego I_w . Wyniki eksperymentalne potwierdzają zarówno wykładniczą złożoność obliczeniową, jak i wykładniczą liczbę dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych I wielkości $|I| \leq 14$ (patrz tabela 3.55 oraz rysunek 3.56).

Uwaga 3.53. Obliczenia, których wyniki prezentowane są w dysertacji, przeprowadzone zostały na komputerze wyposażonym w procesor AMD FX-8120 taktowany zegarem 4,0 GHz, wyposażonym w 16 GB pamięci RAM. Ponadto, wszystkie algorytmy prezentowane w rozprawie zostały zaimplementowane w języku Python 2.7 (www.python.org). Jako środowisko uruchomieniowe wybrany został interpreter PyPy (www.pypy.org), który

⁹Patrz fakt 1.38(a).

wykorzystuje technikę *just-in-time compilation* (precyzyjniej: *tracing JIT*¹⁰). PyPy automatycznie, w trakcie wykonywania programu, wykrywa często wykonywane fragmenty kodu i kompiluje związane z nimi instrukcje do wydajnego kodu maszynowego. Pozwala to na znaczące przyspieszenie programu. Dla przykładu, w tabeli 3.54 przedstawione zostały czasy obliczeń kroku 2° algorytmu 3.52 przy pomocy interpreterów PyPy oraz CPython (standardowy interpreter, który można pobrać ze strony www.python.org).

TABELA 3.54. CZAS WYKONYWANIA KROKU 2° ALGORYTMU 3.52 W ZALEŻNOŚCI OD INTERPRETERA: CPYTHON ORAZ PYPY

n	6	7	8	9	10	11	12	13
CPython 2.7.10	0,04 s	0,25 s	1,44 s	7,47 s	34,07 s	164,83 s	801,43 s	3966,48 s
PyPy 2.5	0,01 s	0,05 s	0,23 s	1,14 s	3,33 s	12,97 s	58,48 s	248,45 s
przyspieszenie	3,89	5,15	6,25	6,53	10,22	12,71	13,7	15,97

Ponieważ większość rozważanych w rozprawie problemów ma charakter wykładniczy, użycie języka C czy Fortran do implementacji algorytmów w niewielkim stopniu wpłynęłoby na możliwość użycia ich do badania własności „dużych” zbiorów częściowo uporządkowanych i dlatego nie rozważamy takich implementacji, tylko używamy języka Python, który dostarcza bogatą bibliotekę standardową i zapewnia stabilne środowisko pracy.

TABELA 3.55. LICZBA DODATNICH ZBIORÓW CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH I WIELKOŚCI $|I| \leq 14$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
wszystkie	1	2	5	15	47	165	552	1 621	3 168	7 843	20 641	56 151	153 765	417 596
spójne	1	1	3	9	29	102	328	819	583	1 215	2 575	5 375	11 295	23 551
jednopiki	1	1	2	5	12	33	80	152	40	49	60	71	84	97

Fakt 3.56. Całkowita liczba dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych I wielkości $|I| \leq 14$ wynosi 661 572, w tym 45 886 spójnych oraz 687 jednopikowych. Informacje o liczbie dodatnich I ustalonej wielkości $|I| = n \leq 14$ zostały przedstawione w tabeli 3.55.

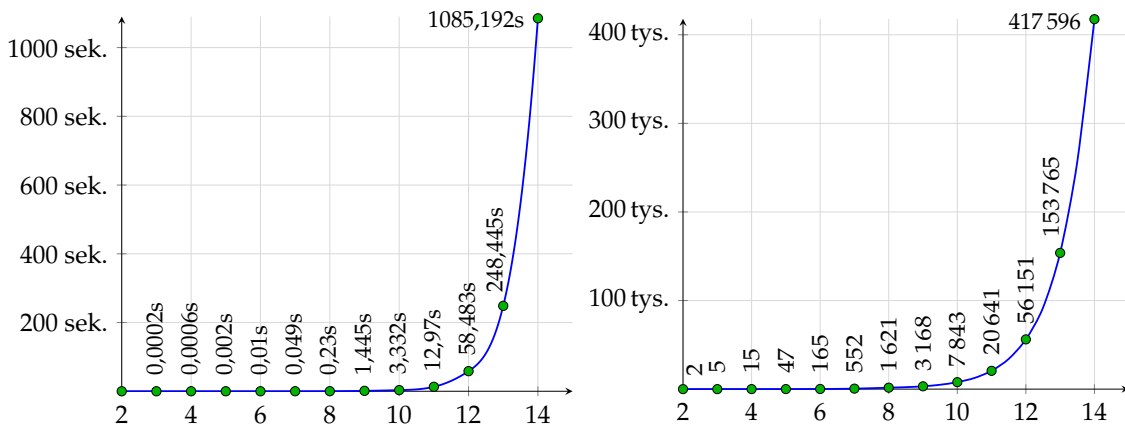
Dowód. Dowód ma charakter obliczeniowy. Przy pomocy algorytmu 3.52, w którym pomijamy wykonanie kroku trzeciego, generujemy górnotrójkątne macierze incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ wszystkich dodatnich nieizomorficznych porządków I wielkości $2 \leq |I| \leq 14$. Następnie, spośród nich wybieramy porządki:

- spójne (weryfikujemy spójność przy pomocy algorytmu BFS – przeszukiwania grafu wszcz, zastosowanego do kołczanu $\mathcal{H}(I)$),
- jednopikowe (wybierając macierze $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, których ostatnia kolumna złożona jest z samych jedynek)

i weryfikujemy tezę. Czas obliczeń oraz całkowita liczba wyznaczonych dodatnich porządków przedstawione są na rysunku 3.56 (por. uwaga 3.53). \square

¹⁰C. F. Bolz, A. Cuni, M. Fijalkowski i A. Rigo, „Tracing the Meta-level: PyPy’s Tracing JIT Compiler”, w: *Proceedings of the 4th Workshop on the Implementation, Compilation, Optimization of Object-Oriented Languages and Programming Systems, ICPOOLPS ’09*, Genova, Italy: ACM, 2009, 18–25, doi: [10.1145/1565824.1565827](https://doi.org/10.1145/1565824.1565827).

RYSUNEK 3.56. CZAS DZIAŁANIA KROKU 2° ALGORYTMU 3.52 ORAZ CAŁKOWITA LICZBA ZBIORÓW CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH WIELKOŚCI n



3.7. Dwuliniowa \mathbb{Z} -równoważność: algorytm

Niniejszy podrozdział poświęcony jest opisowi algorytmu 3.58, który stanowi rozwiązanie problemu 3 sformułowanego we wstępie dla przypadku spójnych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych. Mówiąc precyzyjniej, algorytm ten pozwala na znalezienie \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ pomiędzy dodatnimi spójnymi n -elementowymi porządkami I oraz J . Algorytm ten ma bardziej ogólny charakter: pozwala na obliczanie macierzy definiującej \mathbb{Z} -kongruencję pomiędzy macierzami morsyfikacji dodatnich spójnych bigrafów (definicja A.6). Przy jego pomocy udowodnimy twierdzenie 3.61, tj. pokażemy, że w przypadku spójnych dodatnich porządków I , które mają co najwyżej 14 elementów, $I \approx_{\mathbb{Z}} D$ (definicja 3.15(b)), gdzie $D \in \{\mathbb{A}_{|I|}, \mathbb{D}_{|I|}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Jest to kluczowy element dowodu twierdzenia 3.17, który stanowi główny wynik w tym rozdziale dysertacji.

Rozważmy problem znalezienia \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, która definiuje dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność pomiędzy dodatnimi spójnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi I oraz J , gdzie $|I| = |J| = n$. Innymi słowy, szukamy macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ spełniającej równość

$$C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B. \quad (*)$$

Zauważmy, że wiersze macierzy $B^{tr} \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ składają się z pierwiastków jedolitego funkcjonału kwadratowego $q_J: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $q_J(v) := v \cdot C_J \cdot v^{tr}$ (patrz fakt 1.55(d)). Dlatego, aby znaleźć macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ spełniającą równość (*), wystarczy rozważyć wszystkie macierze kwadratowe $B^{tr} = [v_1, \dots, v_n]^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, dla których $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_J(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Taki algorytm gwarantuje znalezienie szukanej macierzy (bądź wykluczenie jej istnienia), ale wymaga rozważenia $|\mathcal{R}_J|^n \approx O(n^{2n})$ przypadków i nie jest użyteczny w praktyce. Przykładowo, jeśli $DJ = \mathbb{E}_8$, to $|\mathcal{R}_J| = |\mathcal{R}_{\mathbb{E}_8}| = 240$ (patrz fakt 1.55(b) oraz tabela B.27) i w pesymistycznym wypadku algorytm musi sprawdzić $240^8 = 11\,007\,531\,417\,600\,000\,000 \approx 1,1 \cdot 10^{19}$ możliwych macierzy $B \in \mathbb{M}_8(\mathbb{Z})$.

Załóżmy, że I, J są ustalonymi dodatnimi n -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi oraz $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$, gdzie $B = [b_{ij}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$. Zauważmy, że:

- prawdziwa jest równość

$$\text{Cox}_I = B^{tr} \cdot \text{Cox}_J \cdot B^{-tr},$$

gdzie $\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oraz $\text{Cox}_J := -C_J \cdot C_J^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ są macierzami Coxetera porządków I oraz J , patrz fakt 1.55(c), a stąd macierz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ spełnia równość $\text{Cox}_I \cdot B^{tr} - B^{tr} \cdot \text{Cox}_J = 0$;

- $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_J(t)$ (patrz fakt 1.55(c));
- $|b_{ij}| \leq 6$, ponieważ wiersze macierzy B^{tr} składają się z pierwiastków funkcjonału kwadratowego $q_J: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (por. fakt 2.16);
- jeśli $I \approx_{\mathbb{Z}}^B J$, to $I \approx_{\mathbb{Z}}^{-B} J$, ponieważ $C_I = (-B)^{tr} \cdot C_J \cdot (-B) = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$ oraz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$.

Obserwacje te prowadzą do następującego algorytmu, który stanowi rozwinięcie algorytmu podanego w [46, Algorithm 7.5].

Algorytm 3.58. **WEJŚCIE** Macierze incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oraz $C_J \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ dodatnich spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych I oraz J , gdzie $|I| = |J| = m$.

WYNIK \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniająca równość $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$ lub błąd, jeśli takiej macierzy nie znaleziono.

KROK 1° Obliczamy macierze Coxetera $\text{Cox}_I = -C_I \cdot C_I^{-tr}$ oraz $\text{Cox}_J = -C_J \cdot C_J^{-tr}$. Jeśli

$$\det(t \cdot E - \text{Cox}_I) = \text{cox}_I(t) \neq \text{cox}_J(t) = \det(t \cdot E - \text{Cox}_J),$$

kończymy działanie i zwracamy błąd.

KROK 2° Obliczamy zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_J = \{u \in \mathbb{Z}^m; q_J(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ (zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$ można obliczyć przy pomocy algorytmu 2.21).

KROK 3° Inicjalizujemy zbiór **sprawdzone** := {}.

KROK 4° Dla każdego pierwiastka $v := [v_1, \dots, v_m] \in \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$:

KROK 4.1° Dodajemy v do zbioru **sprawdzone**. Jeśli $-v \in \text{sprawdzone}$ przerywamy pętlę i przechodzimy do analizy kolejnego pierwiastka $v \in \mathcal{R}_J$.

KROK 4.2° Konstruujemy macierz kwadratową B_v^1 stopnia m postaci

$$B_v^1 := \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}, \quad (*)$$

w której w pierwszym wierszu znajduje się pierwiastek $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$ a w pozostałych wierszach $(m-1) \cdot m$ zmiennych symbolicznych b_{ij} , gdzie $2 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq m$.

KROK 4.3° Obliczamy macierz $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] := \text{Cox}_I \cdot B_v^1 - B_v^1 \cdot \text{Cox}_J$ i w ciele liczb wymiernych rozwiązujemy układ m^2 równań liniowych

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11} = 0; & \tilde{b}_{12} = 0; & \cdots & \tilde{b}_{1m} = 0; \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{b}_{m1} = 0; & \tilde{b}_{m2} = 0; & \cdots & \tilde{b}_{mm} = 0; \end{cases} \quad (**)$$

zmiennych b_{21}, \dots, b_{mm} . Możliwe są trzy sytuacje:

KROK 4.3.1° Układ (**) jest sprzeczny. Wtedy przerywamy pętlę i przechodzimy do analizy kolejnego pierwiastka $v \in \mathcal{R}_J$.

KROK 4.3.2° Układ (**) posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Wtedy:

KROK 4.3.2.1° wstawiamy obliczone wartości $b_{ij} \in \mathbb{Q}$ do macierzy B_v^1 ;

KROK 4.3.2.2° jeśli $B_v^1 \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, $\det B_v^1 = \pm 1$ oraz $B_v^1 \cdot C_J \cdot (B_v^1)^{tr} = C_I$, kończymy pracę i zwracamy macierz $(B_v^1)^{tr}$ jako wynik, w przeciwnym przypadku przerywamy pętlę i przechodzimy do analizy kolejnego pierwiastka $v \in \mathcal{R}_J$.

KROK 4.3.3° Układ (***) ma nieskończenie wiele rozwiązań $b_{ij} \in \mathbb{Q}$ zależnych od parametrów $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Q}$. Wtedy, dla $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \{-6, -5, \dots, 5, 6\}^k$:

KROK 4.3.3.1° na podstawie ustalonych $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ obliczamy wartości $b_{ij} \in \mathbb{Q}$;

KROK 4.3.3.2° konstruujemy macierz $\bar{B} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$, wstawiając do macierzy B_v^1 obliczone wartości $b_{ij} \in \mathbb{Q}$;

KROK 4.3.3.3° jeśli $\bar{B} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, $\det \bar{B} = \pm 1$ oraz $C_I = \bar{B} \cdot C_J \cdot \bar{B}^{tr}$, kończymy działanie i zwracamy \bar{B}^{tr} jako wynik.

KROK 5° Kończymy działanie i zwracamy błąd.

Zauważmy, że algorytm 3.58 opiera się na klasycznej metodzie wyczerpującego przeszukiwania przestrzeni rozwiązań. W pesymistycznym przypadku algorytm ten ma wykładniczą złożoność obliczeniową (patrz krok 2° oraz krok 4.3.3°).

Uwaga 3.59. (a) Algorytm 3.58 ma charakter bardziej ogólny i można go zastosować do wyszukiwania macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ definiującej silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama pomiędzy dodatnimi spójnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi (patrz definicja A.3(b)) oraz macierzowymi morsyfikacjami tych bigrafów (patrz definicja A.6).

(b) Algorytm 3.58 łatwo zmodyfikować tak, aby wyszukiwał *wszystkie* macierze $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ definiujące dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$: wystarczy nie przerywać pracy w krokach 4.3.2.2° oraz 4.3.3.3°, tylko zapisać znalezioną macierz na liście wynikowej i kontynuować pracę algorytmu.

(c) Krok 3° algorytmu wymaga obliczenia zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$ dodatniego spójnego zbioru częściowo uporządkowanego J , co prowadzi do znacznego wydłużenia czasu działania (przykładowo obliczenie zbioru \mathcal{R}_J przy pomocy algorytmu 2.21 zajmuje ponad 40 minut, jeśli $D = \mathbb{D}_m$ oraz $m = |I| > 14$, por. tabela B.30). Aby uniknąć tego problemu, stosujemy następujące strategie:

- do macierzy \tilde{B} wstawiamy najpierw wektory jednostkowe $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{R}_J$ i dopiero w dalszej kolejności obliczamy zbiór $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$;
- ponieważ nie jest konieczna znajomość całego zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$ „z góry”, kolejne elementy zbioru $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$ obliczamy stopniowo, dopiero gdy są niezbędne;¹¹
- w przypadku szukania \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ spełniającej równość $C_I = B^{tr} \cdot \tilde{G}_D \cdot B$, gdzie $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, używamy jawnego opisu zbioru $\mathcal{R}_D \subseteq \mathbb{Z}^m$ przedstawionego w lemacie B.28.

(d) Z naszych eksperymentów wynika, że drugim (po obliczaniu zbioru pierwiastków w kroku 2°) elementem algorytmu 3.58, który znacząco wpływa na czas obliczeń, jest rozwiązywanie układu m^2 równań liniowych w kroku 4.2°. Przykładowo, dla 14-elementowych porządków $I := \mathbb{D}_4^* \diamond \mathbb{A}_9$ oraz $J := {}_2\mathbb{D}_7^* \diamond \mathbb{A}_6$ (patrz tabela 3.18) rozwiązanie układu 196 równań liniowych 182 zmiennych, wyznaczonego przez równość $\text{Cox}_I \cdot B_{e_1}^1 - B_{e_1}^1 \cdot \text{Cox}_J = 0$, przy pomocy standardowej funkcji `solve()` biblioteki SymPy (<http://www.sympy.org>) zajmuje ok. 10,15 s.¹² Dlatego w naszych obliczeniach używamy własnej implementacji algorytmu rozwiązującego układ równań liniowych, opartego o całkowitoliczbową eliminację Gaussa, który rozwiązuje omawiany układ równań w czasie ok. 0,16 sek.

¹¹W naszej implementacji algorytmów 2.21 oraz 3.58 w języku Python używamy generatorów, patrz <https://www.python.org/dev/peps/pep-0255/>.

¹²Komputer z procesorem AMD FX-8120 4,0 GHz, biblioteka SymPy w wersji 1.0, interpreter PyPy 5.7.1.

Wybrane kroki algorytmu 3.58 wyjaśnimy na przykładzie. W szczególności pokażemy, że algorytm 3.58 może zostać użyty do konstrukcji \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy definiującej \mathbb{Z} -kongruencję pomiędzy macierzą incydencji zbioru częściowo uporządkowanego a niesymetryczną macierzą Grama bigrafu (por. uwaga 3.59(a)).

Przykład 3.60. Rozważmy następujący zbiór częściowo uporządkowany:

$$I \equiv \mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \bullet 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet 1 \quad \bullet 4 \\ \searrow \quad \swarrow \\ \bullet 3 \end{array}, \quad C_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}).$$

Pokażemy, przy pomocy algorytmu 3.58, że $C_I \approx_{\mathbb{Z}} \check{G}_{\mathbb{D}_4}$, gdzie

$$\mathbb{D}_4: \begin{array}{c} \bullet 2 \\ | \\ \bullet 1 \text{---} \bullet 3 \text{---} \bullet 4 \end{array}, \quad \check{G}_{\mathbb{D}_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}).$$

KROK 1° Obliczamy macierze Coxetera $\text{Cox}_I \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ oraz $\text{Cox}_{\mathbb{D}_4} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$:

$$\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{\mathbb{D}_4} := -\check{G}_{\mathbb{D}_4} \cdot \check{G}_{\mathbb{D}_4}^{-tr} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mamy: $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_{\mathbb{D}_4}(t) = t^4 + t^3 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$.

KROK 4° Ustalamy $v = [v_1, v_2, v_3, v_4] := [1, 0, 0, 0] = e_1 \in \mathcal{R}_{\mathbb{D}_4} \subseteq \mathbb{Z}^4$.

KROK 4.2° Konstruujemy macierz kwadratową $B_{e_1}^1$ stopnia 4 postaci

$$B_{e_1}^1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

KROK 4.3° Obliczamy macierz $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] := \text{Cox}_I \cdot B_{e_1}^1 - B_{e_1}^1 \cdot \text{Cox}_I$ i w ciele liczb wymiernych rozwiązujemy układ 16 równań liniowych $\tilde{b}_{ij} = 0$, tj. układ:

$$\begin{cases} -b_{41} & = 0; & -b_{42}-1 & = 0; & -b_{43} & = 0; \\ -b_{44}+1 & = 0; & -b_{22}-b_{23}+b_{31}-b_{41} & = 0; & -b_{21}-b_{23}+b_{32}-b_{42} & = 0; \\ -b_{24}+b_{33}-b_{43} & = 0; & b_{21}+b_{22}+b_{23}+b_{24}+b_{34}-b_{44} & = 0; & b_{21}-b_{32}-b_{33}-b_{41} & = 0; \\ b_{22}-b_{31}-b_{33}-b_{42} & = 0; & b_{23}-b_{34}-b_{43} & = 0; & b_{24}+b_{31}+b_{32}+b_{33}+b_{34}-b_{44} & = 0; \\ b_{21}+b_{31}-b_{41}-b_{42}-b_{43}-1 & = 0; & b_{22}+b_{32}-b_{41}-b_{42}-b_{43} & = 0; & b_{23}+b_{33}-b_{43}-b_{44} & = 0; \\ b_{24}+b_{34}+b_{41}+b_{42}+b_{43} & = 0; & & & & \end{cases} \quad (**)$$

zmiennych $b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}$.

KROK 4.3.3° Układ **(**)** ma nieskończenie wiele rozwiązań wymiernych, wyznaczonych jednoznacznie przez dwa parametry: λ_1 oraz λ_2 .

$$\begin{cases} b_{21} = \lambda_1; & b_{22} = -\lambda_1 + \lambda_2 - 1; & b_{23} = -\lambda_2 + 1; & b_{24} = \lambda_2; \\ b_{31} = -\lambda_1; & b_{32} = \lambda_1 - \lambda_2; & b_{33} = \lambda_2; & b_{34} = -\lambda_2 + 1; \\ b_{41} = 0; & b_{42} = -1; & b_{43} = 0; & b_{44} = 1; \end{cases}$$

Będziemy rozważać możliwe wartości $(\lambda_1, \lambda_2) \in \{-6, \dots, 6\} \times \{-6, \dots, 6\}$.

Przykładowo, załóżmy, że $(\lambda_1, \lambda_2) = (-6, -3)$.

KROK 4.3.3.1° Obliczamy wartości zmiennych b_{21}, \dots, b_{44} .

$$\begin{cases} b_{21} = -6; & b_{22} = 2; & b_{23} = 4; & b_{24} = -3; \\ b_{31} = 6; & b_{32} = -3; & b_{33} = -3; & b_{34} = 4; \\ b_{41} = 0; & b_{42} = -1; & b_{43} = 0; & b_{44} = 1; \end{cases}$$

KROK 4.3.3.2° Macierz $\bar{B} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Q})$ ma postać:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 4 & -3 \\ 6 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Q}).$$

KROK 4.3.3.3° Łatwo sprawdzić, że $\bar{B} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_4(\mathbb{Q})$, $\det \bar{B} = -1$ oraz

$$\bar{B} \cdot \check{G}_{\mathbb{D}_4} \cdot \bar{B}^{tr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 4 & -3 \\ 6 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & 1 \\ -6 & 49 & -54 & -5 \\ 6 & -54 & 61 & 7 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \end{bmatrix} \neq C_I.$$

Założmy teraz, że $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$.

KROK 4.3.3.1° Obliczamy wartości zmiennych b_{21}, \dots, b_{44} .

$$\begin{cases} b_{21} = 0; & b_{22} = -1; & b_{23} = 1; & b_{24} = 0; \\ b_{31} = 0; & b_{32} = 0; & b_{33} = 0; & b_{34} = 1; \\ b_{41} = 0; & b_{42} = -1; & b_{43} = 0; & b_{44} = 1; \end{cases}$$

KROK 4.3.3.2° Macierz $\bar{B} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Q})$ ma postać:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Q}).$$

KROK 4.3.3.3° Łatwo sprawdzić, że $\bar{B} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_4(\mathbb{Q})$, $\det \bar{B} = -1$ oraz

$$\bar{B} \cdot \check{G}_{\mathbb{D}_4} \cdot \bar{B}^{tr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_I$$

Podsumowując, macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ porządku I jest \mathbb{Z} -kongruentna z niesymetryczną macierzą Grama $\check{G}_{\mathbb{D}_4} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$ diagramu Dynkina \mathbb{D}_4 .

Jednym z głównych wyników tego rozdziału dysertacji jest twierdzenie 3.17, w którym przedstawiamy spektralną klasyfikację Coxetera pewnych klas porządków dodatnich. W jego dowodzie używamy twierdzenia 3.61, którego dowód ma charakter obliczeniowy i jest w znacznej mierze oparty o algorytm 3.58.

Twierdzenie 3.61. *Jeśli I jest spójnym dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym wielkości $|I| = m \leq 14$, to $I \approx_{\mathbb{Z}} D$, gdzie $D \in \{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ jest jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w tabeli B.17, tj. istnieje \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, dla której $C_I = B^{tr} \cdot \check{G}_D \cdot B$.*

Dowód. Twierdzenie dowodzimy obliczeniowo, weryfikując tezę dla wszystkich możliwych przypadków.

Etap 1° Przy pomocy algorytmu 3.52, generujemy wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, spójne dodatnie zbiory częściowo uporządkowane I wielkości $|I| = m \leq 14$ (jest ich dokładnie 45 886, por. tabela 3.55).

Etap 2° Używając standardowych obliczeń algebry komputerowej, dzielimy obliczony zbiór macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ wszystkich spójnych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych I według wielomianu Coxetera $\text{cox}_I(t) \in \mathbb{Z}[t]$. W wyniku otrzymujemy 27 zbiorów $\mathbf{CP}_{\text{cox}_I}$.

Etap 3° Dla każdego z 27 zbiorów $\mathbf{CP}_{\text{cox}_I}$:

Etap 3.1° konstruujemy niesymetryczną macierz Grama $\check{G}_D \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ diagramu Dynkina $D \in \{\mathbb{A}_{|I|}, \mathbb{D}_{|I|}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ dla którego $\text{cox}_D(t) = \text{cox}_I(t)$;

Etap 3.2° przy pomocy algorytmu 3.58 obliczamy \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ spełniającą równość $C_I = B^{tr} \cdot \check{G}_D \cdot B$.

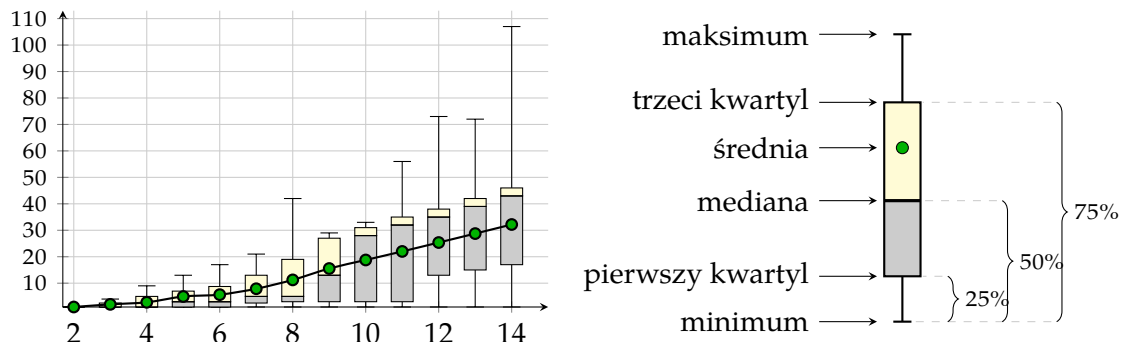
Listę obliczonych macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ oraz macierzy $B \in \text{Gl}(|I|; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ spełniających równość $C_I = B^{tr} \cdot \check{G}_D \cdot B$ można znaleźć w [41]. \square

Uwaga 3.62. Aby przyspieszyć obliczenia, w dowodzie twierdzenia 3.61 algorytm 3.58 wywołujemy równolegle, ponadto:

- używamy optymalizacji omówionych w uwadze 3.59;
- pomijamy porównywanie wielomianów Coxetera w kroku 1° algorytmu 3.58,
- w kroku 4.3.3° algorytmu 3.58 ograniczamy się do sprawdzenia możliwych wartości parametrów $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ w zbiorze $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \{-1, 0, 1\}^k$.

Całkowity czas obliczeń, w przeliczeniu na jeden procesor, wynosi 313,28 godz.¹³

Przejdziemy teraz do dokładniejszej analizy działania algorytmu 3.58, dla przypadku obliczania \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy B definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$, gdzie I jest spójnym dodatnim porządkiem mającym co najwyżej 14 elementów. Zaczniemy od analizy liczby wywołań pętli opisanej w kroku 4°. Innymi słowy, interesuje nas informacja o tym, ile pierwiastków funkcjonału kwadratowego $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\Delta = D$ oraz $m = |I| = |\Delta_0|$, musi zostać sprawdzonych, aby znaleźć macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$. Dane dotyczące tego zagadnienia zostały zebrane na następującym wykresie pudełkowym.



Przykładowo, w ponad 75% przypadków porządków I złożonych z 14 elementów algorytm wymaga sprawdzenia mniej niż 50 pierwiastków. Z drugiej strony, w ponad 75% przypadków algorytm sprawdza więcej niż 14 pierwiastków, co oznacza konieczność rozważania pierwiastków innych niż $e_1, e_2, \dots, e_{14} \in \mathbb{Z}^{14}$ (patrz uwaga 3.59(c)).

¹³Komputer z procesorem AMD FX-8120 4,0 GHz wyposażony w 16 GB pamięci RAM; obliczenia zostały wykonywane równolegle przez 8 procesorów w czasie ok. 39,16 godz.

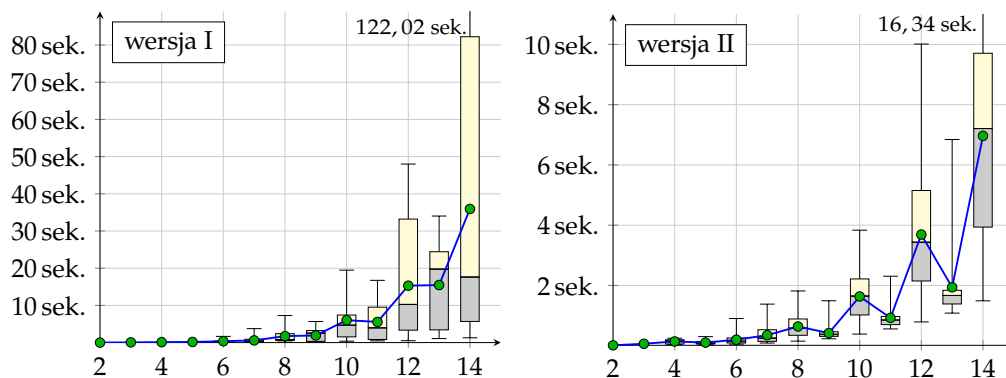
Innym stosunkowo czasochłonnym elementem algorytmu 3.58 jest krok 4.3.3°. W następującej tabeli zebrane zostały informacje o liczbie k , definiującej liczbę parametrów $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, które zostały rozważone ($k = 0$ oznacza, że algorytm nie wykonuje kroku 4.3.3°, tylko 4.3.1° lub 4.3.2°) w trakcie obliczeń.

$k \backslash n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	2	4	11	46	153	596	142	256	478	1024	1845	2274
1	0	1	0	15	0	157	0	421	0	1483	0	8541	0
2	0	0	4	3	47	0	162	0	623	87	2667	0	12635
3	0	0	0	0	0	18	0	0	0	466	0	0	0
4	0	0	1	0	9	0	61	20	241	0	1684	0	8642
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	61	0	707	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	95	0	0	202	0

Podsumowując, w większości rozważanych przypadków, w trakcie działania algorytmu pojawiają się dwa parametry, co w naszej implementacji oznacza konieczność sprawdzenia 9 przypadków $(\lambda_1, \lambda_2) \in \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$. Zdecydowanie większy wpływ na czas działania algorytmu ma konieczność rozważenia dużej liczby pierwiastków w kroku 4°.

Zauważmy, że rozważania przedstawione w podrozdziale 3.5 sugerują *istnienie* macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniającej równość $C_I = B \cdot \check{G}_D \cdot B^tr$, której *pewien* wiersz równy jest wektorowi jednostkowemu $e_1 \in \mathbb{Z}^m$. Z drugiej strony, w algorytmie 3.58 rozważamy tylko macierze postaci B_v^1 (patrz krok 4.2° algorytmu), tj. macierze, których pierwszy wiersz jest ustalony. Stąd naturalne jest rozważenie następującej modyfikacji kroku 4.2° algorytmu 3.58: oprócz macierzy B_v^1 rozważmy także macierze B_v^k , gdzie $2 \leq k \leq m$, w których k -tym wierszu znajduje się ustalony pierwiastek $v \in \mathcal{R}_D$ (np. $v := e_1$) a pozostałymi elementami macierzy są zmienne b_{ij} , gdzie $1 \leq i \neq k \leq m$ oraz $1 \leq j \leq m$. Z jednej strony zwiększamy w ten sposób przestrzeń poszukiwań, ale z drugiej: zwiększmy szansę na to, że w kroku 4.1° wystarczy rozważyć wektor $e_1 \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathbb{Z}^m$.

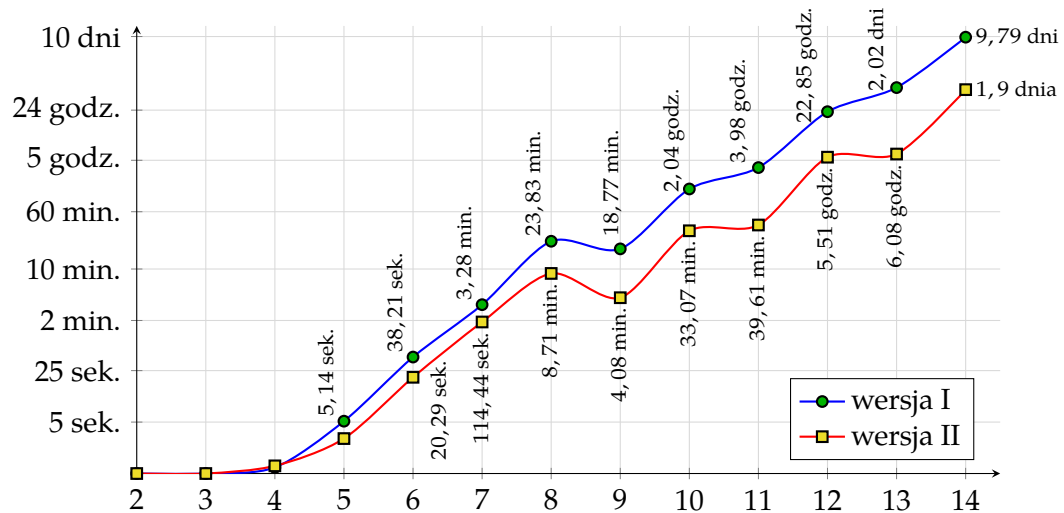
Z naszych eksperymentów wynika, że taka wersja algorytmu 3.58 (nazwalibyśmy ją wersją II) jest wyraźnie szybsza od wersji I, rozważanej wcześniej. Rozważmy problem obliczenia macierzy definiujących dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$ dla wszystkich spójnych dodatnich porządków I wielkości $|I| \leq 14$ (tj. dowód twierdzenia 3.61). Na następujących wykresach pudełkowych przedstawione są statystyki czasu obliczeń¹⁴ macierzy $B \in \text{Gl}(|I|; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$, w zależności od $|I|$.



Całkowity czas obliczeń, w przeliczeniu na jeden procesor, wynosi 313,28 godz. w przypadku wersji I implementacji algorytmu 3.58 oraz 58,61 godz. w przypadku wersji II.

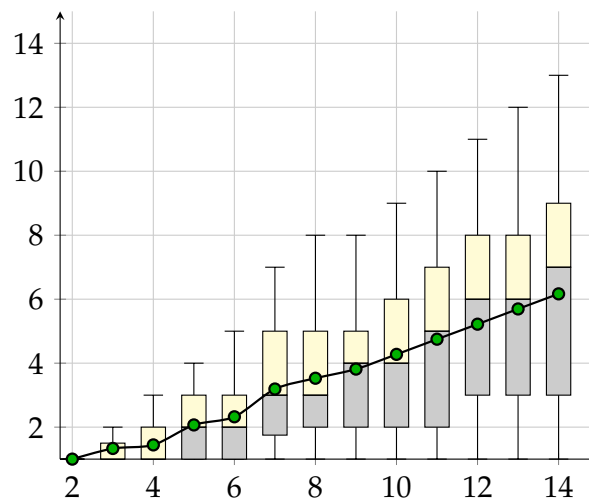
¹⁴Komputer z procesorem AMD FX-8120 4,0GHz wyposażony w 16 GB pamięci RAM; obliczenia zostały wykonywane równoległe przez 8 procesorów.

Oznacza to, że $|I|$ -krotne zwiększenie przestrzeni przeszukiwań algorytmu w praktyce prowadzi do 5-krotnego skrócenia czasu obliczeń. Następujący wykres przedstawia sumaryczny czas obliczeń wszystkich macierzy $B \in \text{Gl}(|I|; \mathbb{Z})$ definiujących dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$ dodatnich spójnych porządków I ustalonej wielkości.



Na zakończenie podrozdziału przedstawiamy dokładniejszą analizę drugiej wersji implementacji algorytmu 3.58. Zaczniemy od liczby wywołań pętli opisanej w kroku 4°. Zauważmy, że w tym wypadku, dla porządku I złożonego z m elementów, liczba wywołań równa co najwyżej m oznacza znalezienie macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ postaci $B_{e_1}^k$, gdzie $1 \leq k \leq m$ (analogicznie, liczba wywołań większa od m^2 oznacza, że algorytm analizuje pierwiastki inne niż $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m$).

Z naszych eksperymentów wynika, że wersja II algorytmu znajduje szukaną \mathbb{Z} -odwrotną macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ na podstawie pierwiastka $e_1 \in \mathbb{Z}^m$ i nie wymaga rozważenia innych pierwiastków. Następujący wykres przedstawia statystyki liczby wywołań pętli opisanej w kroku 4° dla II wersji implementacji algorytmu 3.58, w trakcie obliczeń macierzy definiujących dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} D$, dla wszystkich spójnych dodatnich porządków I wielkości $|I| \leq 14$.



W przypadku wersji I implementacji algorytmu 3.52 znaczący wpływ na czas obliczeń ma krok 4.3.3°. W przeprowadzonych przez nas testach algorytm wymagał analizy maksymalnie 6 parametrów $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, natomiast w przypadku wersji II liczba parametrów nie

przekroczyła dwóch. Następująca tabela przedstawia informacje o tym, ile razy w trakcie obliczeń algorytm rozważał k parametrów ($k = 0$ oznacza, że algorytm nie wykonuje kroku 4.3.3°, tylko 4.3.1° lub 4.3.2°).

$k \backslash n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	3	4	29	59	131	612	583	256	2575	1024	11295	4096
1	0	0	0	0	0	197	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	5	0	43	0	207	0	959	0	4351	0	19455

Rozdział 4

Klasyfikacja spektralna Coxetera porządków głównych

Czwarty rozdział rozprawy poświęcony jest spektralnej klasyfikacji Coxetera spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych I , których symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_I(\mathbb{Q})$ (1.39) jest dodatnio półokreślona korangi 1, tzw. **porządków głównych**. Wyniki przedstawione w tym rozdziale stanowią rozwinięcie rezultatów z rozdziału trzeciego.

Do najważniejszych wyników tego rozdziału należą następujące klasyfikacje.

- Twierdzenie 4.24, które stanowi rozwiązanie sformułowanych we wstępie problemów 1, 1a oraz 2 dla szerokiej klasy skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych. Wskazuje ono niezmienniki, które opisują spójne główne (w sensie definicji 4.1(b)) porządki I , które są jednopikowe lub spełniają $|I| = m \leq 15$, z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz $\approx_{\mathbb{Z}}$. W szczególności pokazujemy, że z dokładnością do tych relacji wszystkie takie porządki opisane są przez *porządki Euklidesa* przedstawione w tabeli 4.7.
- Twierdzenie 4.26, które stanowi ważny element dowodu twierdzenia 4.24 i zawiera pełną klasyfikację Coxetera *jednopikowych* porządków głównych wraz z opisem kończanów Hasse wszystkich takich porządków dowolnej wielkości.

Analogicznie jak w przypadku porządków dodatnich (por. fakt 3.14), z każdym spójnym porządkiem głównym I stowarzysza się jednoznacznie *porządek Euklidesa*, który jest z nim kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny (tzw. typ Euklidesa $\tilde{D}I$). To przyporządkowanie, wprowadzone w pracy [119] (patrz też [81, 111]), prowadzi do klasyfikacji spójnych porządków głównych, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności. Udowodnimy, że typ Euklidesa spójnego porządku głównego I jest równoważny z typem Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-1}, \mathcal{D}_{|I|-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ porządku I wprowadzonym w [56]. Innymi słowy, wykażemy, że jednorodne diagramy Dynkina umożliwiają klasyfikację (z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności) nie tylko porządków dodatnich, ale też głównych.

Następnie pokażemy, że w przypadku jednopikowych porządków głównych prawdziwa jest równoważność $I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I \approx_{\mathbb{Z}} J$ oraz, inaczej niż w przypadku porządków dodatnich, implikacja $I \sim_{\mathbb{Z}} J \Rightarrow I \approx_{\mathbb{Z}} J$ nie jest prawdziwa dla porządków mających więcej niż jeden element maksymalny, patrz przykład 4.19 (por. twierdzenie 3.17).

Bardzo ważną rolę w prezentowanej w niniejszym rozdziale spektralnej klasyfikacji Coxetera skończonych spójnych porządków głównych odgrywają algorytmy i uzyskane przy ich pomocy wyniki obliczeniowe. Do najważniejszych z nich należą:

- algorytm 4.36, który umożliwia obliczenie wektora $0 \neq \mathbf{h}_I \in \mathbb{Z}^I$ generującego jądro $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^I$ głównego porządku I ;

- heurystyczny algorytm 4.44, który służy do obliczenia \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}}^B J$ pomiędzy nieujemnymi m -elementowymi porządkami I oraz J i stanowi częściowe rozwiązanie problemu 3.

Na zakończenie rozdziału podamy dwa zastosowania przedstawionej w dysertacji analizy spektralnej Coxetera porządków nieujemnych. Omówimy problem klasyfikacji porządków prawie TP-krytycznych (w sensie [101]) i wskażemy na możliwość użycia klasyfikacji porządków jednopikowych do przygotowania algorytmu weryfikującego izomorfizm pewnej klasy grafów skierowanych.

Część z wyników prezentowanych w niniejszym rozdziale została opublikowana w artykułach [46, 48, 52, 56]. Niemniej, wiele dowodów przedstawionych w dysertacji ma inny charakter i opiera się na innej argumentacji (patrz np. dowód lematu 4.13). Ponadto, wynikami niepublikowanymi wcześniej są:

- twierdzenie 4.26: pokazujemy, że m -elementowe zbiory częściowo uporządkowane należące do siedmiu serii porządków jednopikowych przedstawionych w tabeli 4.25 (patrz też [52, Table 1.11]) są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne z jednorodnym diagramem Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_{m-1}$ i nie ma innych jednopikowych porządków o tej własności (w artykule [52] przedstawiono słabszy wynik: udowodniono, że są to *pewne* porządki kwadratowo \mathbb{Z} -równoważne z diagramem $\tilde{\mathbb{D}}_{m-1}$, por. [52, Theorem 1.7]);
- rozwiązanie [52, Problem 1.6] – pokazujemy, że nie ma jednopikowych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I kwadratowo \mathbb{Z} -równoważnych z diagramem Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_{|I|-1}$, patrz wniosek 4.61;
- definicja typu Coxetera-Euklidesa jako równoważny typowi Coxetera-Dynkina [56] niezmiennik dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności spójnych porządków głównych (patrz definicja 4.20(b) oraz twierdzenie 4.24).

4.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale analizujemy zbiory częściowo uporządkowane, które są **główne** w następującym sensie (patrz [109, Definition 2.1] oraz [119, Definition 2]).

Definicja 4.1. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolitym funkcjonałem kwadratowym (definicja A.8), I jest n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym (definicja 1.37), a Δ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym o n wierzchołkach, który nie posiada pętli (definicja A.1).

- Funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy **głównym**, jeśli $q(v) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ oraz grupa $\text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest cykliczna i nieskończona (tj. $\text{Ker } q := \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$, gdzie $0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$).
- Porządek I nazywamy **głównym**, jeśli funkcjonal kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) jest główny.
- Bigraf Δ nazywamy **głównym**, jeśli funkcjonal kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11) jest główny.

Równoważnie, porządek I (bigraf Δ) nazywamy głównym, jeśli jest nieujemny korangi 1 w sensie definicji 1.51 (definicji 1.29(c)), por. [119, Proposition 9].

Lemat 4.2. Skończony n -elementowy zbiór częściowo uporządkowany I (n -wierzchołkowy graf krawędziowo-dwudzielny Δ) jest główny (definicja 4.1) wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieujemny korangi 1 w sensie definicji 1.51 (definicji 1.29(c)).

Dowód. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolitym funkcjonałem kwadratowym (w szczególności $q := q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) lub $q := q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11)), z którym stowarzyszone są: jądro $\text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, oraz symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ (definicja A.8(a)). Jeśli funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny, to na podstawie faktu A.20 wiemy, że jądro $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą wolną oraz

$$\text{rank}(\text{Ker } q) = n - \text{rz}_{\mathbb{Q}} G_q. \quad (*)$$

Implikacja „ \Rightarrow ” wynika wprost z równości (*). Dla dowodu „ \Leftarrow ” musimy pokazać, że założenie $\text{rz}_{\mathbb{Q}} G_q = n - 1$ implikuje, iż $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą cykliczną i nieskończoną. Z równości (*) wynika, że $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą wolną rangi 1, czyli cykliczną. Musimy jeszcze pokazać, że $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą nieskończoną. Zauważmy, że każda podgrupa grupy \mathbb{Z}^n jest trywialna lub nieskończona i stąd wystarczy wskazać niezerowy wektor $0 \neq w \in \text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$. Z lematu A.16 wynika, że $q(x) = 0 \Leftrightarrow G_q \cdot x^{tr} = 0$ Ponieważ $\text{rz}_{\mathbb{Q}} G_q = n - 1$ (z założenia), układ równań liniowych $G_q \cdot x^{tr}$ ma rozwiązanie $0 \neq v := [\frac{v_1}{v'_1}, \dots, \frac{v_n}{v'_n}] \in \mathbb{Q}^n$. Zauważmy, że wektor $0 \neq w := v \cdot \text{NWW}(v'_1, \dots, v'_n) \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{Q}^n$ spełnia równość $G_q \cdot w^{tr}$, a stąd $q(w) = 0$ i w konsekwencji $0 \neq w \in \text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$. \square

Przedstawimy teraz najważniejsze własności jednolitych funkcjonałów kwadratowych, które są główne [109, Proposition 2.10(iv)].

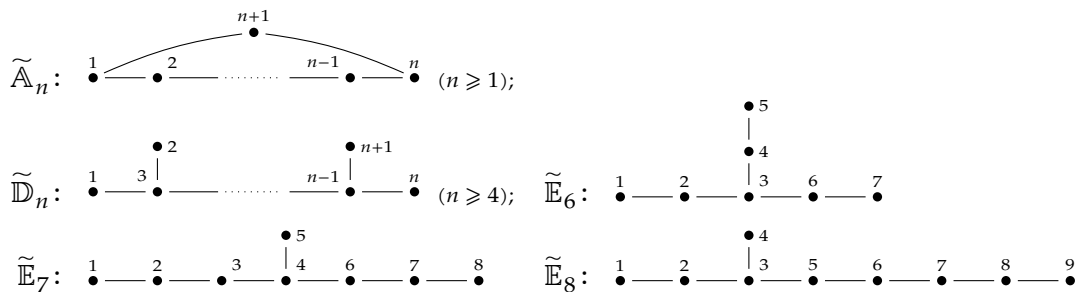
Fakt 4.3. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym głównym jednolitym funkcjonałem kwadratowym oraz $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $0 \neq \mathbf{h} := [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n] \in \mathbb{Z}^n$.

- (a) Dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n$ prawdziwa jest równość $q(v + k \cdot \mathbf{h}) = q(v)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. W szczególności, zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest nieskończony.
- (b) Współrzędne $\mathbf{h}_i \in \mathbb{Z}$ wektora $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n] \in \mathbb{Z}^n$ spełniają nierówność $-6 \leq \mathbf{h}_i \leq 6$. Ponadto, dla pewnego $1 \leq s \leq n$, prawdziwa jest równość $\mathbf{h}_s = \pm 1$.

Dowód. Podpunkt (a) jest konsekwencją faktu A.22, natomiast (b) wynika z twierdzenia A.30 zastosowanego do grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ_q (definicja A.8(a)). \square

W analizie spektralnej Coxetera głównych zbiorów częściowo uporządkowanych ważną rolę odgrywiają jednorodnie diagramy Euklidesa (znane też pod nazwą rozszerzonych diagramów Dynkina), przedstawione w tabeli 4.4.

TABELA 4.4. JEDNORODNE DIAGRAMY EUKLIDESA



Lemat 4.5. (a) Jeśli $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_n, n \geq 1; \tilde{D}_n, n \geq 4; \tilde{E}_6; \tilde{E}_7; \tilde{E}_8\}$ jest jednym z diagramów Euklidesa przedstawionych w tabeli 4.4, to \tilde{D} jest bigrafem głównym oraz $\text{Ker } \tilde{D} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\tilde{D}}$,

gdzie $\mathbf{h}_{\tilde{D}} \in \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \dots 1 \end{matrix}; \begin{matrix} 1 \\ 1 \dots 2 \end{matrix}; \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} 3 \\ 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{matrix} \right\}$, odpowiednio.

- (b) Jeśli Δ jest dodatnim grafem prostym, to Δ jest izomorficzny z jednym z jednorodnych diagramów Dynkina $D\Delta \in \{\tilde{A}_n, n \geq 1; \tilde{D}_n, n \geq 4; \tilde{E}_6; \tilde{E}_7; \tilde{E}_8\}$ przedstawionych w tabeli 1.32.
- (c) Jeśli Δ jest grafem głównym, który nie ma pętli, to Δ jest izomorficzny z jednym z jednorodnych diagramów Euklidesa $\tilde{D}\Delta \in \{\tilde{A}_n, n \geq 1; \tilde{D}_n, n \geq 4; \tilde{E}_6; \tilde{E}_7; \tilde{E}_8\}$ przedstawionych w tabeli 4.4.

Dowód. (a) Wynika z prostej analizy równania $q_{\tilde{D}}(x) = 0$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_n, n \geq 1; \tilde{D}_n, n \geq 4; \tilde{E}_6; \tilde{E}_7; \tilde{E}_8\}$ oraz $q_{\tilde{D}}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonalem kwadratowym stowarzyszonym z \tilde{D} , analogicznie jak w dowodzie lematu B.18(a) (patrz [4, Lemma VII.4.2]).

(b)–(c) Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest skończonym grafem, który nie ma pętli. Ponieważ funkcjonal kwadratowy $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^{\Delta_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ (definicja A.8(c)) można utożsamiać z funkcjonalem kołczanu w sensie [4, Section VII.4], teza jest konsekwencją [4, Proposition VII.4.5]. \square

Przypomnijmy, że każdy dodatni spójny zbiór częściowo uporządkowany jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny (w sensie definicji 3.15(a)) z jednym z jednorodnych diagramów Dynkina przedstawionych w tabeli 1.32 (patrz równoważność (a) \Leftrightarrow (d) w twierdzeniu 1.56). Analogicznie, każdy spójny główny zbiór częściowo uporządkowany, jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z jednym z jednorodnych diagramów Euklidesa przedstawionych w tabeli 4.4.

Twierdzenie 4.6. [119, Proposition 9], [52, Theorem 1.4] *Niech I będzie spójnym skończonym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym. Następujące warunki są równoważne.*

- (a) Porządek I jest główny (definicja 4.1(b)).
- (b) Porządek I jest nieujemny korangi 1 (definicja 1.51).
- (c) Porządek I jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z jednym z jednorodnych diagramów Euklidesa $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-1}, \tilde{D}_{m-1}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$ (definicja 3.15(a)).
- (d) Istnieje automorfizm $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ grupy \mathbb{Z}^m , taki że $q_I \circ h = q_{\tilde{D}}$, gdzie funkcjonały kwadratowe $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) oraz $q_{\tilde{D}}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11) stowarzyszone są z porządkiem I oraz jednym z jednorodnych diagramów Euklidesa $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-1}, \tilde{D}_{m-1}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$, odpowiednio.

Dowód. (a) \Leftrightarrow (b) Wynika z lematu 4.2.

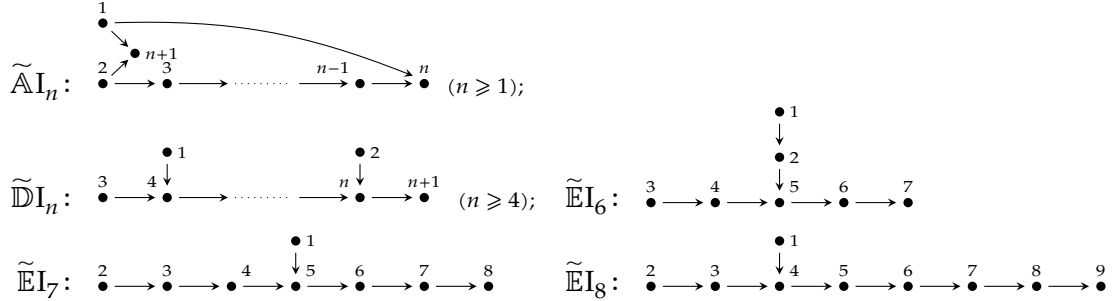
(a) \Rightarrow (c) Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ stowarzyszona ze zbiorem częściowo uporządkowanym I (fakt 1.38(b)) jest górnotrójkątna, patrz uwaga 1.45. Stąd porządek I możemy utożsamiać z bigrafem Δ_I (1.41), gdzie $\check{G}_{\Delta_I} := C_I$, i teza wynika z twierdzenia A.30 (por. [111, Theorem 3.2]).

(c) \Rightarrow (d) Z założenia istnieje macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniającą równość $G_{\tilde{D}} = B^{tr} \cdot G_I \cdot B$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-1}, \tilde{D}_{m-1}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$ jest jednorodnym diagramem Euklidesa. Łatwo sprawdzić, że automorfizm $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ zdefiniowany wzorem $h(x) := x \cdot B^{tr}$ spełnia równość $q_I \circ h = q_{\tilde{D}}$.

(d) \Rightarrow (a) Zauważmy, że graf $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-1}, \tilde{D}_{m-1}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$ jest główny oraz $\text{Ker } \tilde{D} = \text{Ker } q_{\tilde{D}} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\tilde{D}} \subseteq \mathbb{Z}^m$ gdzie $0 \neq \mathbf{h}_{\tilde{D}} \in \mathbb{Z}^m$, patrz lemat 4.5(a). Ponieważ, z założenia, istnieje taki automorfizm $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ grupy \mathbb{Z}^m , że $q_I \circ h = q_{\tilde{D}}$, to $\text{Ker } q_I = h^{-1}(\text{Ker } q_{\tilde{D}}) = \mathbb{Z} \cdot h^{-1}(\mathbf{h}_{\tilde{D}}) \subseteq \mathbb{Z}^m$, jest grupą oraz $h^{-1}(\mathbf{h}_{\tilde{D}}) \neq 0$. Ponadto, dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^m$ zachodzi $q_I(x) = q_{\tilde{D}} \circ h^{-1}(x) = q_{\tilde{D}}(h^{-1}(x)) \geq 0$ (ponieważ graf \tilde{D} jest nieujemny). Podsumowując, porządek I jest nieujemny, a jego jądro $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest nieskończoną grupą cykliczną, tj. porządek I jest główny w sensie definicji 4.1(b). \square

Tabela 4.7 przedstawia porządki główne $\tilde{\mathbb{A}}I_n, \tilde{\mathbb{D}}I_n, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8$, które są odpowiednikami diagramów Euklidesa $\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ w klasie spójnych głównych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych (por. tabela 3.13), patrz fakt 4.8.

TABELA 4.7. PORZĄDKI EUKLIDESA



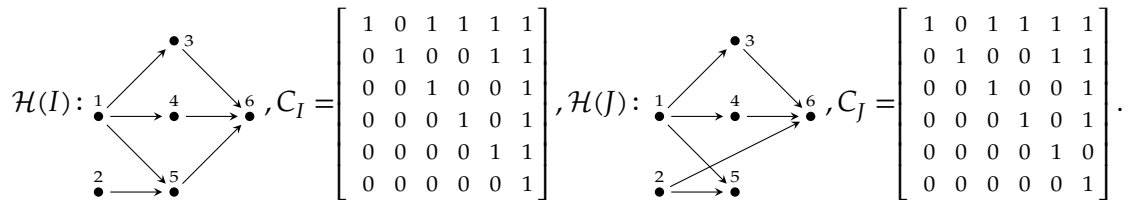
Fakt 4.8. Jeśli $\tilde{DI} \in \{\tilde{\mathbb{A}}I_n, \tilde{\mathbb{D}}I_n, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8\}$ jest porządkiem Euklidesa, którego kołczan Hasse przedstawiono w tabeli 4.7, to \tilde{DI} jest porządkiem głównym, który jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny (definicja 3.15(b)) z jednorodnym diagramem Euklidesa $\tilde{D} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (tabela 4.4), odpowiednio.

Dowód. Teza wynika z argumentów przedstawionych w dowodzie faktu 3.14. □

Równoważność (a) \Leftrightarrow (c) w twierdzeniu 4.6, przechodniość relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz fakt 4.8 uzasadniają następującą definicję.

Definicja 4.9. Typem Euklidesa głównego spójnego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I nazywamy porządek Euklidesa $\tilde{DI} \in \{\tilde{\mathbb{A}}I_m, \tilde{\mathbb{D}}I_m, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8\}$ kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z I .

Przykład 4.10. Rozważmy porządki główne I oraz J , zdefiniowane następująco:



Łatwo sprawdzić, że $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot [1, 0, -1, -1, -1, 1] \subseteq \mathbb{Z}^6$, $\text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot [-1, -1, 0, 0, 1, 1] \subseteq \mathbb{Z}^6$ oraz $I \stackrel{B_I}{\sim}_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{D}}_5 \stackrel{B_J}{\sim}_{\mathbb{Z}} J$, gdzie:

$$B_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}), \quad B_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}).$$

Stąd $\tilde{DI} = \tilde{DJ} = \tilde{\mathbb{D}}I_5$ oraz $I \sim_{\mathbb{Z}} J$, ale $I \not\approx_{\mathbb{Z}} J$ ponieważ

$$\text{cox}_I(t) = t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1 \neq t^6 - t^4 - t^2 + 1 = \text{cox}_J(t),$$

patrz fakt 1.55(c).

Rozważmy spójny główny bigraf $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ (bez pętli), którego jądro $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$ generowane jest przez wektor $0 \neq \mathbf{h} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n] \in \mathbb{Z}^n$. Pokażemy, że bigraf $\Delta^{(s)} := \Delta \setminus \{s\} \subseteq \Delta$, który powstaje z Δ przez usunięcie wierzchołka $s \in \{1, \dots, n\}$ dla którego $\mathbf{h}_s = \pm 1$ jest spójny i dodatni.

Lemat 4.11. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$, będzie spójnym głównym bigrafem (bez pętli) oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Jeśli $\mathbf{h}_s = \pm 1$, gdzie $s \in \{1, \dots, n\}$, to bigraf $\Delta' = \Delta^{(s)} := \Delta \setminus \{s\}$ jest dodatni oraz spójny.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozważań będziemy zakładać, że $\mathbf{h}_s = 1$ (w przeciwnym przypadku przyjmujemy $\mathbf{h} := -\mathbf{h}$). Dowód przeprowadzimy w dwóch krokach.

Krok 1° Funkcjonał kwadratowy $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony.

Zauważmy, że $q_{\Delta'} = q_\Delta \circ \tau^{(s)}$, gdzie $\tau^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, jest zanurzeniem

$$\mathbb{Z}^{n-1} \ni w = [w_1, \dots, w_{n-1}] \xrightarrow{\tau^{(s)}} [w_1, \dots, w_{s-1}, 0, w_s, \dots, w_{n-1}] \in \mathbb{Z}^n.$$

Stąd funkcyjnał $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemny i wystarczy pokazać, że $\text{Ker } q_{\Delta'} = \{0\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$.

Rozważmy funkcję $t_{\mathbf{h}}^{(s)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $t_{\mathbf{h}}^{(s)}(v) := v - v_s \cdot \mathbf{h}$ oraz funkcyjnał kwadratowy $\check{q}_\Delta: \mathbb{Z}^n|_{v_s=0} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\check{q}_\Delta(v) = q_\Delta(v)$ dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n|_{v_s=0} := \{v \in \mathbb{Z}^n; v_s = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Ponieważ $q_\Delta(v + k \cdot \mathbf{h}) = q_\Delta(v)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ (patrz fakt 4.3(a)), łatwo sprawdzić, że przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{q_\Delta} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{q_\Delta} & \mathbb{Z}^n & \supseteq & \text{Ker } q_\Delta \\ & \searrow \tau^{(s)} & \uparrow q_{\Delta'} & \swarrow \check{q}_\Delta & \downarrow t_{\mathbf{h}}^{(s)} & & \\ \text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1} & \xleftarrow{\pi^{(s)}} & \mathbb{Z}^n|_{v_s=0} & \supseteq & \text{Ker } \check{q}_\Delta & & \end{array},$$

gdzie $\pi^{(s)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$ jest rzutowaniem

$$\mathbb{Z}^n \ni v = [v_1, \dots, v_n] \xrightarrow{\pi^{(s)}} [v_1, \dots, v_{s-1}, v_{s+1}, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Ponadto, wprost z definicji, $\check{q}_\Delta(v) = (q_\Delta \circ t_{\mathbf{h}}^{(s)})(v)$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n|_{v_s=0}$ i stąd

$$\text{Ker } q_{\Delta'} = \pi^{(s)}(\text{Ker } \check{q}_\Delta) = \pi^{(s)}(\text{Ker } (q_\Delta \circ t_{\mathbf{h}}^{(s)})) = \pi^{(s)}(t_{\mathbf{h}}^{(s)}(\text{Ker } q_\Delta)) = \pi^{(s)}(\{0\}) = \{0\}.$$

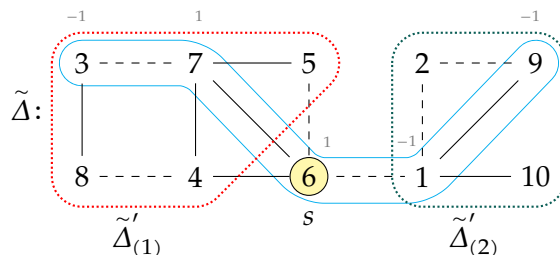
Krok 2° Bigraf $\Delta' := \Delta \setminus \{s\}$ jest spójny.

Załóżmy, przez sprzeczność, że $\Delta' = \Delta'_{(1)} \cup \Delta'_{(2)}$ oraz wierzchołki $u \in \Delta'_{(1)}, w \in \Delta'_{(2)}$ nie są połączone ścieżką w Δ' .

Zauważmy, że dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^{n-1}$ zachodzi: $q_{\Delta'}(v) = q_{\Delta'_{(1)}}(v|_{\Delta'_{(1)}}) + q_{\Delta'_{(2)}}(v|_{\Delta'_{(2)}})$, gdzie $q_{\Delta'_{(1)}}: \mathbb{Z}^{\Delta'_{(1)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $q_{\Delta'_{(2)}}: \mathbb{Z}^{\Delta'_{(2)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ są dodatnimi funkcyjnałami kwadratowymi.

Ponieważ, na podstawie założenia, bigraf Δ jest spójny (definicja A.1(e)), istnieje ścieżka $l_u^w \subseteq \Delta$ łącząca wierzchołki u oraz w , przechodząca przez wierzchołek s . Załóżmy, że $l_u^w := x_0 \dots, x_k \in \{1, \dots, n\}^{k+1}$, gdzie $x_0 := u$ oraz $x_k := w$, jest najkrótszą taką ścieżką. Definiujemy wektor $r_u^w = [r_1, \dots, r_n] \in \mathbb{Z}^n$:

$$r_i := \begin{cases} 0, & \text{jeśli } i \notin l_u^w, \\ 1, & \text{jeśli } i = s, \\ r_j, & \text{jeśli } x_i \text{---} x_j \in \Delta_1, \\ -r_j, & \text{jeśli } x_i \text{---} x_j \in \Delta_1. \end{cases}$$



Przykładowo, w bigrafie $\tilde{\Delta}$ wierzchołki 3 oraz 9 połączone są ścieżką $l_3^9 = (3, 7, 6, 1, 9)$ a wektor $r_3^9 \in \mathbb{Z}^{10}$ ma postać $r_3^9 := [-1, 0, -1, 0, 0, 1, 1, 0, -1, 0] \in \mathbb{Z}^{10}$.

Łatwo sprawdzić (patrz dowód twierdzenia 1.34), że $r_u^w \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem funkcjonału kwadratowego $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Definiujemy wektor $x := r_u^w - \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$, który, na podstawie faktu 4.3(a), jest pierwiastkiem funkcjonału $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Zauważmy, że $x_s = 0$ oraz $x^{(s)} := \pi^{(s)}(x) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest pierwiastkiem funkcjonału $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, tj.

$$1 = q_{\Delta'}(x^{(s)}) = q_{\Delta'_{(1)}}(x^{(s)}|_{\Delta'_{(1)}}) + q_{\Delta'_{(2)}}(x^{(s)}|_{\Delta'_{(2)}}).$$

Ponieważ funkcjonały kwadratowe $q_{\Delta'_{(1)}}: \mathbb{Z}^{\Delta'_{(1)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $q_{\Delta'_{(2)}}: \mathbb{Z}^{\Delta'_{(2)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ są dodatnie, to $x^{(s)}|_{\Delta'_{(1)}} \in \text{Ker } q_{\Delta'_{(1)}}$ lub $x^{(s)}|_{\Delta'_{(2)}} \in \text{Ker } q_{\Delta'_{(2)}}$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań założymy, że zachodzi pierwsza z możliwości. Oznacza to, że $x^{(s)}|_{\Delta'_{(1)}} = 0$ i w konsekwencji $\mathbf{h}|_{\Delta'_{(1)}} = r_u^w|_{\Delta'_{(1)}}$.

Z konstrukcji wektora $r_u^w \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ wynika, że $z := r_u^w|_{\Delta'_{(1)}=0} \subseteq \mathbb{Z}^n$ także jest pierwiastkiem funkcjonału $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (w przykładowym bigrafie $\tilde{\Delta}$, mamy $r_3^9|_{\Delta'_{(1)}=0} = [-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0]$). Stąd $y := z - \mathbf{h} \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz $y^{(s)} := \pi^{(s)}(y) \in \mathcal{R}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, tj.

$$1 = q_{\Delta'}(y^{(s)}) = q_{\Delta'_{(1)}}(y^{(s)}|_{\Delta'_{(1)}}) + q_{\Delta'_{(2)}}(y^{(s)}|_{\Delta'_{(2)}}).$$

Z konstrukcji wektora y otrzymujemy $y^{(s)}|_{\Delta'_{(1)}} = -\mathbf{h}|_{\Delta'_{(1)}} = -r_u^w|_{\Delta'_{(1)}} \neq 0$ i stąd $\mathbf{h}|_{\Delta'_{(2)}} = r_u^w|_{\Delta'_{(2)}}$. Podsumowując:

$$\mathbf{h} = r_u^w \Rightarrow 0 = q_\Delta(\mathbf{h}) = q_\Delta(r_u^w) = 1.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód lematu. \square

Wniosek 4.12. *Założmy, że $I = (\{1, \dots, n\}, \leq_I)$ jest spójnym głównym zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^n$. Jeśli $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$, gdzie $s \in \{1, \dots, n\}$, to porządek $I^{(s)} := I \setminus \{s\} \subseteq I$ jest dodatni i spójny.*

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że elementy zbioru I zostały posortowane topologicznie i macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ porządku I jest górnotrójkątna (patrz uwaga 1.45). Stąd I można utożsamiać z grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ_I (1.41), gdzie $\tilde{G}_{\Delta_I} := C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, i teza wynika z lematu 4.11. \square

Jednym z najważniejszych wyników niniejszego podrozdziału jest przedstawienie definicji **typu Dynkina** $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego głównego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I , który wyznacza I jednoznacznie, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności. Kluczowe znaczenie ma tu lemat 4.13, ponieważ przy jego pomocy pokażemy, że definicja ta jest poprawna.

Założmy, że $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ jest spójnym głównym grafem krawędziowo-dwudzielnym (bez pętli), $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$ i $\mathbf{h}_s = \pm 1$ oraz $\mathbf{h}_t = \pm 1$, gdzie $s \neq t$. Pokażemy, że bigrafy $\Delta^{(s)} := \Delta \setminus \{s\} \subseteq \Delta$ oraz $\Delta^{(t)} := \Delta \setminus \{t\} \subseteq \Delta$ są słabo \mathbb{Z} -kongruentne (definicja A.3(a)). Innymi słowy, bigraf $\Delta^{(a)} \subseteq \Delta$, który powstaje z Δ przez usunięcie wierzchołka $a \in \Delta$, dla którego $\mathbf{h}_a = \pm 1$, wyznaczony jest *jednoznacznie*, z dokładnością do słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama. Rezultat ten został udowodniony w [53, Lemma 3.3(a)]. W dysertacji przedstawiamy dowód konstrukcyjny i prezentujemy jawny opis \mathbb{Z} -odwracalnych macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}^n$ definiujących \mathbb{Z} -kongruencje.

Przez $G^{(i)} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ rozumiemy macierz powstałą z macierzy kwadratowej $G \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ po usunięciu i -tego wiersza oraz i -tej kolumny. Zauważmy, że $G_{\Delta^{(i)}} = G_{\Delta}^{(i)} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$, gdzie $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oraz $G_{\Delta^{(i)}} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ są symetrycznymi macierzami Grama stowarzyszonymi z bigrafami Δ oraz $\Delta^{(i)} \subseteq \Delta$, odpowiednio (patrz definicja A.1(d)).

Lemat 4.13. Załóżmy, że $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ jest spójnym głównym grafem krawędziowo-dwudzielnym o n wierzchołkach oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $0 \neq \mathbf{h}^\Delta \in \mathbb{Z}^n$ jest wektorem spełniającym warunek $\mathbf{h}_i^\Delta = \pm 1$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Jeśli $\mathbf{h}_k^\Delta = \pm 1$, gdzie $k \in \{1, \dots, n\}$, to $\Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(k)}$.

(b) Jeśli $\Delta' = (\{1, \dots, n\}, \Delta'_1)$ jest bigrafem głównym oraz $\text{Ker } \Delta' = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $0 \neq \mathbf{h}^{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\mathbf{h}_j^{\Delta'} = \pm 1$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\}$, to $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow \Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'^{(j)}$.

Dowód. (b) Definiujemy macierze \mathbb{Z} -odwracalne $P_s := [e_s^{tr}, e_1^{tr}, \dots, e_{s-1}^{tr}, e_{s+1}^{tr}, \dots, e_n^{tr}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ oraz $B_s^{\mathbf{h}^\Delta} := [P_s^{-1} \cdot \mathbf{h}^{\Delta tr}, e_2^{tr}, \dots, e_n^{tr}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$. Ponieważ $\mathbf{h}^\Delta \cdot G_\Delta = 0 = G_\Delta \cdot \mathbf{h}^{\Delta tr}$ (patrz lemat A.15), prawdziwe są równości:

$$\tilde{G}_\Delta^{(i)} := \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & G_{\Delta^{(i)}} \end{array} \right] = B_i^{tr} \cdot P_i^{tr} \cdot G_\Delta \cdot P_i \cdot B_i, \quad \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} := \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & G_{\Delta'^{(j)}} \end{array} \right] = B_j^{tr} \cdot P_j^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot P_j \cdot B_j, \quad (*)$$

gdzie $B_i := B_i^{\mathbf{h}^\Delta} \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ oraz $B_j := B_j^{\mathbf{h}^{\Delta'}} \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$.

„ \Rightarrow ” Z założenia istnieje macierz $\bar{B} \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ spełniająca $G_\Delta = \bar{B}^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot \bar{B}$. Ponieważ

$$P_i^{-tr} \cdot B_i^{-tr} \cdot \tilde{G}_\Delta^{(i)} \cdot B_i^{-1} \cdot P_i^{-1} = G_\Delta \quad \text{oraz} \quad P_j^{-tr} \cdot B_j^{-tr} \cdot \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} \cdot B_j^{-1} \cdot P_j^{-1} = G_{\Delta'},$$

na podstawie (*), prawdziwa jest równość:

$$P_i^{-tr} \cdot B_i^{-tr} \cdot \tilde{G}_\Delta^{(i)} \cdot B_i^{-1} \cdot P_i^{-1} = \bar{B}^{tr} \cdot P_j^{-tr} \cdot B_j^{-tr} \cdot \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} \cdot B_j^{-1} \cdot P_j^{-1} \cdot \bar{B}$$

i stąd

$$\tilde{G}_\Delta^{(i)} = B^{tr} \cdot \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} \cdot B, \quad \text{gdzie } B := B_j^{-1} \cdot P_j^{-1} \cdot \bar{B} \cdot P_i \cdot B_i \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}). \quad (**)$$

Łatwo sprawdzić, że (**) implikuje równość $G_{\Delta^{(i)}} = B^{(1)tr} \cdot G_{\Delta'^{(j)}} \cdot B^{(1)}$.

Aby skończyć dowód, musimy jeszcze pokazać, że $\det B^{(1)} = \pm 1$, tj. $B^{(1)} \in \text{Gl}(n-1; \mathbb{Z})$. Zauważmy, że symetryczne macierze Grama $G_{\Delta^{(i)}}, G_{\Delta'^{(j)}} \in \mathbb{M}_{n-1}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ są dodatnio określone (patrz lemat 4.11) i dlatego wszystkie ich wartości własne są dodatnie (patrz np. [70, Theorem 7.2.1]). Ponieważ \mathbb{Z} -kongruencja (**) implikuje równość $\text{spec } \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} = \text{spec } \tilde{G}_\Delta^{(i)}$ zbiorów wartości własnych macierzy blokowych $\tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ oraz $\tilde{G}_\Delta^{(i)} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$, to

$$\text{spec } G_{\Delta^{(i)}} = \text{spec } \tilde{G}_\Delta^{(i)} \setminus \{0\} = \text{spec } \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} \setminus \{0\} = \text{spec } G_{\Delta'^{(j)}}.$$

Ponieważ $\det G_{\Delta^{(i)}} = \prod_{\lambda \in \text{spec } G_{\Delta^{(i)}}} \lambda = \prod_{\lambda' \in \text{spec } G_{\Delta'^{(j)}}} \lambda' = \det G_{\Delta'^{(j)}}$ oraz $\det B^{(1)} \in \mathbb{Z}$, z (**) oraz twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy:

$$0 \neq \det G_{\Delta^{(i)}} = (\det B^{(1)})^2 \cdot \det G_{\Delta'^{(j)}} \Rightarrow \det B^{(1)} = \pm 1.$$

„ \Leftarrow ” Z założenia istnieje macierz $\tilde{B} \in \text{Gl}(n-1; \mathbb{Z})$ spełniająca $G_{\Delta^{(i)}} = \tilde{B}^{tr} \cdot G_{\Delta'^{(j)}} \cdot \tilde{B}$. Łatwo sprawdzić, że $G_\Delta = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B$, gdzie:

$$\tilde{B}^{[1]} := \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{B} \end{array} \right] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}) \quad \text{oraz} \quad B := P_k \cdot B_k \cdot \tilde{B}^{[1]} \cdot B_i^{-1} \cdot P_i^{-1}.$$

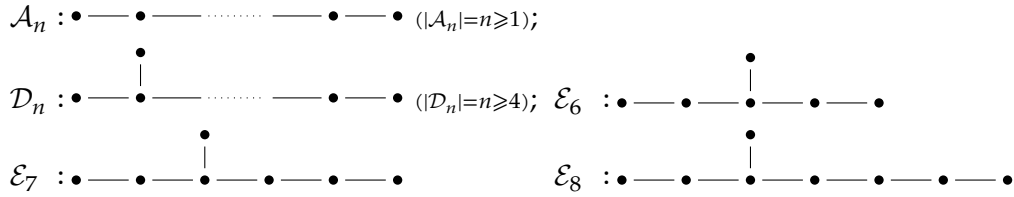
Dla zakończenia dowodu zauważmy, że $\det B = \det \tilde{B} = \pm 1$ i stąd $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$.

(a) Definiujemy $\Delta' := \Delta$. Ponieważ $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^E \Delta'$, gdzie $E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą identycznościową, teza wynika z (b). \square

Reasumując, fakt 4.3(b), wniosek 4.12 oraz lemat 4.13(a), uzasadniają poprawność następującej definicji, wprowadzonej w pracy [56, Definition 4.3] (patrz też [53, Section 3]).

Definicja 4.14. Niech I będzie spójnym głównym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego jądro ma postać $\text{Ker } q_I = \mathbf{h}^I \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}^m$. Typem Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz tabela 4.15) nazywamy typ Coxetera-Dynkina (definicja 3.9) dodatniego podporządku spójnego $I^{(s)} \subseteq I$, gdzie $s \in \{1, \dots, m\}$ jest indeksem spełniającym $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$.

TABELA 4.15. JEDNORODNE NIEOZNACZONE DIAGRAMY DYNKINA



Uwaga 4.16. Załóżmy, że I jest spójnym głównym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym. Łatwo pokazać, przy pomocy argumentów analogicznych do użytych w dowodzie lematu 4.13, że typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ przedstawiony w definicji 4.14 jest równoważny typowi Dynkina nieujemnego funkcjonału kwadratowego $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ w sensie [7].

Pokażemy teraz, że definicja typu Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego głównego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I jest poprawna. Co więcej, definicja ta jest równoważna definicji typu Euklidesa $\tilde{D}I \in \{\tilde{A}I_{m-1}, \tilde{D}I_{m-1}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$, ponieważ $\mathbf{Dyn}_{\tilde{D}I} = D$.

Lemat 4.17. Załóżmy, że $I = (\{1, \dots, n\}, \leq)$ jest spójnym głównym n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego jądro ma postać $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $0 \neq \mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^n$.

- Typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (definicja 4.14) wyznaczony jest przez I jednoznacznie, tj. nie zależy od wyboru indeksu $s \in \{1, \dots, n\}$ spełniającego $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$.
- Typem Euklidesa $\tilde{D}I$ porządku I jest porządek Euklidesa odpowiadający typowi Dynkina \mathbf{Dyn}_I , tj. $\tilde{D}I = \tilde{A}I_{n-1} \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_{n-1}$ itd.

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że elementy zbioru częściowo uporządkowanego I ponumerowane zostały topologicznie (patrz uwaga 1.45). Stąd macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)) porządku I jest górnotrójkątna i dlatego porządek I możemy utożsamiać z bigrafem Δ_I (1.41), gdzie $\tilde{G}_{\Delta_I} := C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

(a) Pokażemy, że $\mathbf{Dyn}_{I^{(i)}} = \mathbf{Dyn}_{I^{(j)}}$ dla dowolnych $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ spełniających $\mathbf{h}_i^I = \pm 1, \mathbf{h}_j^I = \pm 1$. Z wniosku 4.12 oraz lematu 4.13(a) wynika, że $I^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} I^{(j)}$, gdzie $I^{(i)}, I^{(j)}$ są spójnymi porządkami dodatnimi i stąd teza wynika z twierdzenia 3.12.

(b) Udowodnimy najpierw implikację $\tilde{D}I = \tilde{D}I_{n-1} \Rightarrow \mathbf{Dyn}_I = \check{D}$. Na podstawie faktu 4.8 wiemy, że porządek $\tilde{D}I$ jest główny. Łatwo sprawdzić, że jądro $\text{Ker } q_{\tilde{D}I} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\tilde{D}I} \subseteq \mathbb{Z}^n$ generowane jest przez wektor $\mathbf{h}_{\tilde{D}I} \in \mathbb{Z}^n$ postaci

$$\mathbf{h}_{\tilde{D}I} = \begin{cases} [-1, -1, 0, \dots, 0, 1, 1], & \text{jeśli } \tilde{D}I = \tilde{A}I, \\ [-1, -1, -1, 0, \dots, 0, 1, 1], & \text{jeśli } \tilde{D}I = \tilde{D}I, \\ [-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1], & \text{jeśli } \tilde{D}I = \tilde{E}I_6, \\ [-2, -1, -1, -1, 1, 1, 1], & \text{jeśli } \tilde{D}I = \tilde{E}I_7, \\ [-3, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1], & \text{jeśli } \tilde{D}I = \tilde{E}I_8. \end{cases}$$

Stąd, na podstawie wniosku 4.12 porządek $J := I \setminus \{n\}$ jest dodatnim spójnym porządkiem jednopikowym i teza jest konsekwencją twierdzenia 3.17(g).

Ponieważ implikacja $\mathbf{Dyn}_I = \tilde{D} \Rightarrow \tilde{D}I = \tilde{D}I_{n-1}$ jest konsekwencją lematu 4.13(b) oraz faktu 3.10, dowód jest zakończony. \square

Twierdzenie 4.18. *Jeśli I oraz J są skończonymi spójnymi głównymi n -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, to $I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J \Leftrightarrow \tilde{D}I = \tilde{D}J$.*

Dowód. Zauważmy, że równoważność $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J \Leftrightarrow \tilde{D}I = \tilde{D}J$ wynika z lematu 4.17(b) i stąd wystarczy udowodnić, że $I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J$.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że elementy porządków I oraz J ponumerowane zostały topologicznie (patrz uwaga 1.45). Stąd macierze incydencji $C_I, C_J \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)) są górnotrójkątne i dlatego porządki I oraz J możemy utożsamiać z bigrafami Δ_I, Δ_J (1.41), gdzie $\check{G}_{\Delta_I} := C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oraz $\check{G}_{\Delta_J} := C_J \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Załóżmy, że $\text{Ker } q_I = \text{Ker } q_{\Delta_I} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz $\text{Ker } q_J = \text{Ker } q_{\Delta_J} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^J \subseteq \mathbb{Z}^n$. Na podstawie faktu 4.3(b) istnieją takie indeksy $s, t \in \{1, \dots, n\}$, że $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$ oraz $\mathbf{h}_t^J = \pm 1$. Z lematu 4.13(b) wynika, że $I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow I^{(s)} \sim_{\mathbb{Z}} J^{(t)}$, gdzie $I^{(s)} \subseteq I$ oraz $J^{(t)} \subseteq J$ są porządkami dodatnimi (patrz wniosek 4.12). Zauważmy, że $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_{I^{(s)}}$ oraz $\mathbf{Dyn}_J = \mathbf{Dyn}_{J^{(t)}}$ na podstawie definicji 4.14 i stąd teza jest konsekwencją twierdzenia 3.12, z którego wynika, że $I^{(s)} \sim_{\mathbb{Z}} J^{(t)} \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_{I^{(s)}} = \mathbf{Dyn}_{J^{(t)}}$. \square

Przypomnijmy, że na podstawie wniosku 3.23, każdy spójny dodatni m -elementowy zbiór częściowo uporządkowany I , który ma co najwyżej $m = 14$ elementów, jest wyznaczone przez zespolone spektrum Coxetera $\text{spec}c_I \subseteq \mathbb{C}$ jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności. Następujący przykład pokazuje, że nie jest to prawdą w przypadku spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych. Innymi słowy, pokażemy, że równość spektrów $\text{spec}c_I = \text{spec}c_J$ nie implikuje dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności spójnych głównych porządków I oraz J .

Przykład 4.19. Rozważmy następujące dwa spójne porządki, które są główne.

$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, C_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{H}(J): \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, C_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że:

- $\text{Ker } q_I = \text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^6$, gdzie $\mathbf{h} := [-1, -1, 0, 0, 1, 1] \in \mathbb{Z}^6$ (algoritm 4.36);
- $\text{spec}c_I = \text{spec}c_J$, ponieważ $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_J(t) = t^6 - t^4 - t^2 + 1 \in \mathbb{Z}[t]$,
- $\tilde{D}I_5 = \tilde{D}I \neq \tilde{D}J = \tilde{A}I_5$ oraz $\mathbb{D}_5 = \mathbf{Dyn}_I \neq \mathbf{Dyn}_J = \mathbb{A}_5$, ponieważ $G_I \sim_{\mathbb{Z}}^{B_I} G_{\mathbb{D}_5}$, $G_J \sim_{\mathbb{Z}}^{B_J} G_{\mathbb{A}_5}$, $G_I \sim_{\mathbb{Z}}^{\bar{B}_I} G_{\mathbb{A}_5}$, $G_J \sim_{\mathbb{Z}}^{\bar{B}_J} G_{\mathbb{D}_5}$ oraz $G_J \sim_{\mathbb{Z}}^{\bar{B}_I} G_{\mathbb{A}_5}$, gdzie:

$$B_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B}_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Porządki I oraz J nie są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne, ponieważ

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \Rightarrow I \sim_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J,$$

patrz fakt 1.55(a) oraz twierdzenie 4.18. Ponieważ w przypadku rozważanych porządków $\mathbf{Dyn}_I \neq \mathbf{Dyn}_J$, to $I \not\approx_{\mathbb{Z}} J$.

Typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego głównego m -elementowego porządku I wyznacza porządek I jednoznacznie, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności (patrz twierdzenie 4.18), ale nie jest niezmiennikiem dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności i nie wyznacza spektrum Coxetera $\mathbf{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$, patrz przykład 4.10 oraz twierdzenie 4.18. Analogicznie, przykład 4.19 pokazuje, że spektrum Coxetera $\mathbf{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$ nie wyznacza typu Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$. Powyższe rozważania uzasadniają następującą definicję.

Definicja 4.20. Załóżmy, że I jest spójnym głównym porządkiem skończonym.

(a) Typem Coxetera-Dynkina porządku I nazywamy parę $\mathbf{CDtype}_I := (\mathbf{spec}_I, \mathbf{Dyn}_I)$.

(b) Typem Coxetera-Euklidesa porządku I nazywamy parę $\mathbf{CEtype}_I := (\mathbf{spec}_I, \tilde{D}I)$.

Uwaga 4.21. Typ Coxetera-Dynkina spójnego porządku głównego I , w formie przedstawionej w definicji 4.20(a), został wprowadzony w pracy [56, (1.2)], gdzie zastosowano oznaczenie $\mathbf{CType}_I := (\mathbf{spec}_I, \mathbf{Dyn}_I)$. Wcześniej, typ ten był definiowany w pracach [119, Definition 4(e)] oraz [53, (3.1)] w innej formie. Jak pokazują przykłady 4.10 i 4.19 oraz twierdzenie 4.24 definicja typu Coxetera-Dynkina przedstawiona w pracy [56] wydaje się być optymalnym sposobem zdefiniowania *minimalnego* niezmiennika dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności zbiorów częściowo uporządkowanych.

Lemat 4.22. Niech I, J będą spójnymi głównymi zbiorami częściowo uporządkowanymi.

(a) Jeśli $I \approx_{\mathbb{Z}} J$, to $\mathbf{CDtype}_I = \mathbf{CDtype}_J$ oraz $\mathbf{CEtype}_I = \mathbf{CEtype}_J$.

(b) $\mathbf{CDtype}_I = \mathbf{CDtype}_J \Leftrightarrow \mathbf{CEtype}_I = \mathbf{CEtype}_J$

Dowód. (a) Z faktu 1.55(c) wynika, że $\mathbf{spec}_I = \mathbf{spec}_J$. Ponadto $I \sim_{\mathbb{Z}} J$ na podstawie faktu 1.55(a) a stąd $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J$ oraz $\tilde{D}I = \tilde{D}J$ na podstawie twierdzenia 4.18.

(b) Ponieważ, z założenia, $\mathbf{spec}_I = \mathbf{spec}_J$, dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J \Leftrightarrow \tilde{D}I = \tilde{D}J$ na podstawie lematu 4.17(b). \square

Uwaga 4.23. Jak pokazuje lemat 4.22(b), w przypadku dowolnego spójnego głównego porządku I , typ Coxetera-Euklidesa $\mathbf{CEtype}_I = (\mathbf{spec}_I, \tilde{D}I)$ jest równoważny typowi Coxetera-Dynkina $\mathbf{CDtype}_I = (\mathbf{spec}_I, \mathbf{Dyn}_I)$ wprowadzonemu w pracy [56]. Niemniej, rozważanie każdego z tych typów ma uzasadnienie:

- typ Euklidesa pozwala na opis spójnych n -elementowych porządków głównych w języku spójnych *kanonicznych* porządków Euklidesa wielkości n ,
- typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-1}, \mathcal{D}_{|I|-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ to w istocie *typ Dynkina zredukowanego nieprzywiedlnego systemu pierwiastków* (w sensie Bourbaki) stowarzyszonego z dodatnim porządkiem $I' \subseteq I$, a co za tym idzie, do jego analizy możemy stosować znane wyniki dotyczące porządków dodatnich oraz zredukowanych systemów pierwiastków (patrz np. dowód twierdzenia 4.18 oraz lematu 4.17(b)).

Jednym z głównych celów niniejszego rozdziału jest udowodnienie następujących dwóch twierdzeń spektralnych, analogicznych do twierdzenia 3.17 oraz wniosku 3.23.

Twierdzenie 4.24. Załóżmy, że I, J są spójnymi głównymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, które są (i) jednopikowe lub (ii) mają co najwyżej 15 elementów. Następujące warunki są równoważne.

- (a) $I \approx_{\mathbb{Z}} J$,
- (b) $\text{CDtype}_I = \text{CDtype}_J$,
- (c) $\text{CETYPE}_I = \text{CETYPE}_J$.

Jeśli I, J , spełniają (i), to każdy z warunków (a)–(c) jest równoważny z:

- (d) $I \sim_{\mathbb{Z}} J$,
- (e) $\text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J$,
- (f) $\tilde{D}I = \tilde{D}J$,
- (g) $\text{specc}_I = \text{specc}_J$.

TABELA 4.25. JEDNOPIKOWE PORZĄDKI GŁÓWNE TYPU EUKLIDESA \tilde{D}_m

$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(1)}$:		$0 \leq s, s+5 \leq p \leq m+1,$ $4 \leq m$
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(2)}$:		$0 \leq s, 4 \leq m, s+4 \leq m$
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(3)}$:		$1 < p \leq s \leq m-3,$ $5 \leq m,$
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(4)}$:		$1 \leq s, s+3 \leq p \leq m,$ $4 \leq m$
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}$:		$0 \leq s, s+3 \leq p,$ $6 \leq p+3 \leq r \leq m+1,$
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(6)}$:		$0 \leq s, s+2 \leq r,$ $4 \leq r+2 \leq p \leq m,$
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(7)}$:		$5 \leq m, 1 < s < m-2.$

Twierdzenie 4.26. Załóżmy, że I jest głównym zbiorem częściowo uporządkowanym, który składa się z $n+1$ elementów i ma dokładnie jeden element maksymalny.

- (a) $\tilde{D}I \neq \tilde{A}I_n$ oraz $\text{Dyn}_I \neq \mathcal{A}_n$.
- (b) Jeśli $\tilde{D}I = \tilde{D}I_n$ ($\text{Dyn}_I = \mathcal{D}_n$), to porządek I jest izomorficzny z jednym z siedmiu porządków $\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(1)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(2)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(3)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(4)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(6)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(7)}$ przedstawionych w tabeli 4.25;

- (c) Jeśli $\tilde{DI} = \tilde{EI}_6$ ($\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_6$), to porządek I jest izomorficzny z jednym z 31 porządków $\mathcal{J}_1^{\tilde{E}_6}, \dots, \mathcal{J}_{31}^{\tilde{E}_6}$ przedstawionych w [52, Table 4.1].
- (d) Jeśli $\tilde{DI} = \tilde{EI}_7$ ($\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_7$), to porządek I jest izomorficzny z jednym z 132 porządków $\mathcal{J}_1^{\tilde{E}_7}, \dots, \mathcal{J}_{132}^{\tilde{E}_7}$ przedstawionych w [52, Table 4.2].
- (e) Jeśli $\tilde{DI} = \tilde{EI}_8$ ($\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_8$), to porządek I jest izomorficzny z jednym z 422 porządków $\mathcal{J}_1^{\tilde{E}_8}, \dots, \mathcal{J}_{422}^{\tilde{E}_8}$ przedstawionych w [51].
- (f) Typem Euklidesa $\tilde{DI} \in \{\tilde{DI}_n, \tilde{EI}_6, \tilde{EI}_7, \tilde{EI}_8\}$ porządku I jest taki porządek Euklidesa, że $\mathbf{spec}c_I = \mathbf{spec}c_{\tilde{DI}}$.
- (g) Porządek I jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny z porządkiem Euklidesa $\tilde{DI} \in \{\tilde{DI}_n, \tilde{EI}_6, \tilde{EI}_7, \tilde{EI}_8\}$.
- (h) Porządek I jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny z jednorodnym diagramem Euklidesa $\tilde{D} \in \{\tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$, gdzie $\tilde{DI} \in \{\tilde{DI}_n, \tilde{EI}_6, \tilde{EI}_7, \tilde{EI}_8\}$.

Dowód twierdzenia 4.24 przedstawiamy na stronie 137 a dowód twierdzenia 4.26 na stronie 133.

Uwaga 4.27. Twierdzenia 4.24 oraz 4.26 stanowią częściowe rozwiązanie problemu 2 sformułowanego we wstępie, dla przypadku spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I :

- (twierdzenie 4.24) jeśli $|I| \leq 15$, to I jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności, przez typ Coxetera-Dynkina \mathbf{CDtype}_I oraz typ Coxetera-Euklidesa \mathbf{CEtype}_I ;
- (twierdzenie 4.26) jeśli I jest jednopikowy, to I jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności, przez zespolone spektrum Coxetera $\mathbf{spec}c_I \subseteq \mathbb{C}$.

4.2. Algorytmy i wyniki eksperymentalne

Głównym celem niniejszego podrozdziału jest omówienie algorytmów oraz wyników obliczeniowych, których używamy w spektralnej analizie Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych, które są *główne* w sensie definicji 4.1(b). W szczególności omówimy algorytm 4.44 stanowiący częściowe rozwiązanie problemu 3, tj. umożliwiający wyznaczenie \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, która definiuje dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \stackrel{B}{\sim}_{\mathbb{Z}} J$ pomiędzy m -elementowymi nieujemnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi I oraz J .

Zacznijmy od problemu generowania wszystkich porządków nieujemnych I ustalonej wielkości $n := |I|$. W trzecim rozdziale rozprawy omawiamy algorytm 3.52, który umożliwia wygenerowanie wszystkich (spójnych) porządków dodatnich. Łatwo zmodyfikować ten algorytm tak, aby generował porządki nieujemne I korangi $0 \leq \mathbf{cr}k_I \leq r \in \mathbb{N}$.

Algorytm 4.28. **WEJŚCIE** Liczby naturalne $\mathbf{cr} \geq 0$, $n > 1$ oraz zbiór **par_y_nneg** złożony z par $(C_I, \mathbf{cr}k_I)$, gdzie $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą incydencji n -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego oraz $\mathbf{cr}k_I = n - \mathbf{r}z C_I \leq \mathbf{cr}$.

WYNIK Zbiór par $(C_J, \mathbf{cr}k_J)$, $C_J \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$, złożony z macierzy incydencji wszystkich (nieizomorficznych) nieujemnych porządków J , które są rozszerzeniami porządków wejściowych o wierzchołek minimalny i spełniają $\mathbf{cr}k_J = (n + 1) - \mathbf{r}z C_J \leq \mathbf{cr}$.

KROK 1° Inicjalizujemy zbiór $\mathbf{res} := \{\}$.

KROK 2° Dla każdej pary $(C_I, \mathbf{crk}_I) \in \mathbf{pary_nneg}$:

KROK 2.1° dla każdego wektora $w = [w_2, \dots, w_{n+1}] \in \{0, 1\}^n$, takiego że macierz

$$C_{I_w} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & w \\ \hline 0 & C_I \end{array} \right] = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$$

spełnia warunek: jeśli $c_{ij} = 1$ oraz $c_{js} = 1$, to $c_{is} = 1$ (dla $1 \leq i, j, s \leq n + 1$):

KROK 2.1.1° jeśli macierz symetryczna $\widehat{G}_{I_w} := C_{I_w} + C_{I_w}^{tr}$ nie jest nieujemna korangi $\mathbf{crk}_{I_w} \leq \mathbf{cr}$, przerywamy pętlę i wracamy do kroku 2.1° (warunek sprawdzamy np. przy pomocy algorytmu 2.13);

KROK 2.1.2° dodajemy parę $(C_{I_w}, \mathbf{crk}_{I_w})$ do zbioru \mathbf{res} jeśli kołczan Hasse $\mathcal{H}(I_w)$ porządku I_w nie jest izomorficzny z kołczanem Hasse $\mathcal{H}(I)$ żadnego z porządków I znajdujących się już w zbiorze \mathbf{res} , dla których $\mathbf{crk}_I = \mathbf{crk}_{I_w}$ (izomorfizm digrafów $\mathcal{H}(I_w)$ oraz $\mathcal{H}(I)$ testujemy np. przy pomocy biblioteki igrph: www.igrph.org).

KROK 3° Zwracamy zbiór \mathbf{res} , jako wynik.

Uwaga 4.29. (a) Przy pomocy algorytmu 4.28 można wygenerować wszystkie porządki *główne* ustalonej wielkości (porządek I jest główny w sensie definicji 4.1(b)) wtedy i tylko wtedy, gdy stowarzyszona z nim symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (1.39) jest dodatnio półokreślona korangi 1, patrz lemat 4.2).

(b) Algorytm 4.28 konstruuje porządki n -elementowe, rozszerzając o element minimalny porządki o $n - 1$ elementach. Dlatego, aby przy jego pomocy wygenerować *wszystkie* porządki spójne o n elementach, należy rozważyć *wszystkie*, w tym **niespójne** porządki o $n - 1$ elementach, por. uwaga 3.51.

Fakt 4.30. Liczba wszystkich nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych I wielkości $|I| \leq 15$ wynosi 5 415 925, w tym: 401 404 porządków spójnych oraz 8153 porządków jednopikowych. Dokładna liczba porządków dodatnich, głównych oraz korangi dwa, w zależności od liczby elementów $|I|$, przedstawiona jest w tabeli 4.33.

Dowód. Dowód faktu ma charakter obliczeniowy.

Etap 1° Konstruujemy zbiór $\mathbf{nnegs}[1]$ złożony z jednej pary: $([1], 0)$, kodującej porządek jednoelementowy, który jest dodatni (tj. korangi zero).

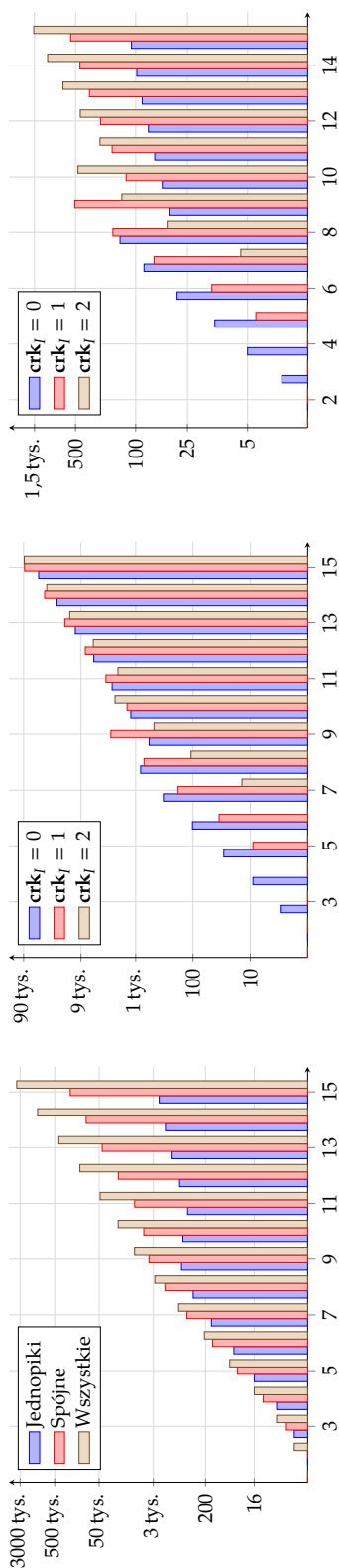
Etap 2° Kolejno, dla każdego $k \in \{2, \dots, 14\}$:

Etap 2.1° ustalamy: $\mathbf{cr} := 2, n := k - 1$ oraz $\mathbf{pary_nneg} := \mathbf{nnegs}[k - 1]$ i wyznaczamy zbiór $\mathbf{nnegs}[k]$ przy pomocy algorytmu 4.28.

Etap 3° Sprawdzamy prawdziwość informacji przedstawionych w tabeli 4.33:

- spójność porządku I weryfikujemy przy pomocy algorytmu przeszukiwania grafu wszcz zastosowanego do kołczanu Hasse $\mathcal{H}(I)$ (fakt 1.38(a));
- konstrukcja algorytmu 4.28 gwarantuje, że wygenerowane macierze incydencji n -elementowych porządków nieujemnych I są górnotrójkątne i dlatego łatwo zweryfikować, czy dany porządek I jest jednopikowy: wystarczy sprawdzić, czy ostatnia kolumna macierzy $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ składa się z samych jedynek.

Obliczenia przeprowadziliśmy na komputerze wyposażonym w procesor AMD FX-8120 4,0 GHz oraz 16 GB pamięci RAM. Całkowity czas obliczeń to ok. 83 godziny. \square



RYSUNEK 4.32. LICZBA PORZĄDKÓW NIEUJEMNYCH (ODPOWIEDNIO: WSZYSTKICH; SPÓJNYCH, JEDNOPIKOWYCH)

n	wszystkie			spójne			jednopiki			czas obliczeń
	$crk_I = 0$	$crk_I = 1$	$crk_I = 2$	$crk_I = 0$	$crk_I = 1$	$crk_I = 2$	$crk_I = 0$	$crk_I = 1$	$crk_I = 2$	
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0,0 sek.
2	2	2	0	1	1	0	1	1	0	0,0 sek.
3	5	5	0	3	3	0	2	2	0	0,0 sek.
4	16	15	1	10	9	1	5	5	0	0,0 sek.
5	57	47	10	38	29	9	16	12	4	0,0 sek.
6	212	165	46	138	102	35	46	33	13	0,0 sek.
7	807	552	240	524	328	182	147	80	61	0,1 sek.
8	2772	1621	1026	1641	819	714	379	152	184	0,9 sek.
9	7937	3168	4139	3766	583	2704	694	40	509	5,7 sek.
10	18 575	7843	7568	3164	4921	1215	647	49	129	31,7 sek.
11	47 435	20 641	20 108	6686	7918	2575	508	60	188	2,6 min.
12	135 629	56 151	58 835	20 643	18 413	5375	768	71	256	14,0 min.
13	403 758	153 765	179 662	70 331	42 628	11 295	1129	84	345	1,3 godz.
14	1 212 862	417 596	547 174	248 092	97 840	23 551	1598	97	445	7,2 godz.
15	3 585 857	1 085 943	1 650 929	848 985	223 562	49 215	87 698	112	570	74,2 godz.

TABELA 4.33. LICZBA NIEUJEMNYCH ZBIORÓW CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYCH I KORANGI $crk_I \leq 2$, WIELKOŚCI $|I| \leq 15$

Uwaga 4.31. (a) W celu wygenerowania skończonych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych ustalonej wielkości możemy posłużyć się algorytmem 3.52 lub ogólniejszym algorytmem 4.28 (tabela 4.33 oraz tabela 3.55). Zauważmy, że algorytm 3.52 jest wyraźnie szybszy: wyznaczenie przy jego pomocy porządków dodatnich I wielkości $|I| \leq 14$ zajmuje ok. 25 minut, patrz rysunek 3.56.

(b) Na rysunku 4.32 przedstawione zostało porównanie liczby porządków I w kategoriach: wszystkie, spójne oraz jednopikowe korangi $\text{crk}_I = 0, 1, 2$ (odpowiednio). Ze względu na szybki wzrost liczby porządków (wraz ze wzrostem liczby elementów $|I|$), wykresy zostały wykonane w skali logarytmicznej. Analiza rysunku 4.32 pokazuje, że w analizowanych przypadkach algorytm 4.28 ma wykładniczą złożoność obliczeniową oraz wykładniczą złożoność pamięciową.

Rozważmy problem wyznaczenia typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego głównego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I . Możliwe są (co najmniej) dwa rozwiązania tego zagadnienia:

- użycie algorytmu inflacyjnego A.33, opisanego w [111, Algorithm 3.1] oraz [81, Algorithm 4.3] (dowodzi się, że $\text{Dyn}_I = [D]_{\approx}$ wtedy i tylko wtedy, gdy bigraf Δ_I (1.41) spełnia $\Delta_I \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{\mathcal{A}}_{m-1}, \tilde{\mathcal{D}}_{m-1}, \tilde{\mathcal{E}}_6, \tilde{\mathcal{E}}_7, \tilde{\mathcal{E}}_8\}$ oraz $D := \tilde{D} \setminus \{m\}$, patrz lemat 4.5 oraz lemat 4.13);
- typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ można wyznaczyć zgodnie z opisem przedstawionym w definicji 4.14: wyznaczając typ Coxetera-Dynkina spójnego dodatniego porządku $I^{(s)} := I \setminus \{s\}$, gdzie $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^m$ oraz $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$ (np. przy pomocy algorytmu B.24).

W obu przedstawionych przypadkach niezbędna jest znajomość wektora generującego jądro $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^I$ spójnego głównego zbioru częściowo uporządkowanego I . Dlatego przejdziemy teraz do omówienia tego zagadnienia.

Załóżmy, że I jest spójnym głównym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ macierzą incydencji (fakt 1.38(b)), $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (1.39) symetryczną macierzą Grama a $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jednolitym funkcjonałem kwadratowym (1.40). Zauważmy, że zgodnie z lematem A.15, wyznaczenie jądra $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ jest równoważne z rozwiązaniem układu równań $G_I \cdot x^{tr} = 0$ w pierścieniu liczb całkowitych. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 4.34. Rozważmy następujący 7-elementowy spójny główny jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany I :

$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \bullet_6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet_1 \rightarrow \bullet_4 \rightarrow \bullet_5 \rightarrow \bullet_7 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \bullet_2 \quad \bullet_3 \end{array}, \quad C_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z}).$$

Pokażemy, że jądro $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^7; q_I(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{Z}^7; v \cdot C_I \cdot v^{tr} = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^7$ porządku I ma postać $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^7$, gdzie $\mathbf{h} := [-1, 0, -1, -1, -1, 0, 2] \in \mathbb{Z}^7$.

Na podstawie lematu A.15 zbiór $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^7$ złożony jest z całkowitoliczbowych rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych

$$G_I \cdot x^{tr} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_7 = 0 \\ & x_2 & + \frac{1}{2}x_5 & + \frac{1}{2}x_7 = 0 \\ & & x_3 & + \frac{1}{2}x_7 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & & x_4 + \frac{1}{2}x_5 & + \frac{1}{2}x_7 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & + \frac{1}{2}x_4 + x_5 & + \frac{1}{2}x_7 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & & & x_6 + \frac{1}{2}x_7 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 & + x_7 = 0 \end{cases}, \quad (4.35)$$

gdzie $G_I := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_7(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest macierzą Grama (1.39) stowarzyszoną z porządkiem I . Układ (4.35) można przekształcić przy pomocy operacji \mathbb{Z} -elementarnych do postaci:

$$(4.35) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & & + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ & 2x_2 & & + x_5 + x_7 = 0 \\ & & 2x_3 & & + x_7 = 0 \\ x_1 & & & + 2x_4 + x_5 & + x_7 = 0 \\ x_1 + x_2 & & & + x_4 + 2x_5 & + x_7 = 0 \\ x_1 & & & & + 2x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & & + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ & 2x_2 & & + x_5 + x_7 = 0 \\ & & 2x_3 & & + x_7 = 0 \\ & & & 3x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 0 \\ & & & & 5x_5 - 2x_6 - x_7 = 0 \\ & & & & & 2x_6 + x_7 = 0 \end{cases}$$

Przyjmując $x_7 := \lambda \in \mathbb{Z}$ (lub $x_7 := \lambda \in \mathbb{Q}$), otrzymujemy

$$\begin{cases} 2x_1 & + x_4 + x_5 + x_6 = -\lambda \\ & 2x_2 & + x_5 = -\lambda \\ & & 2x_3 = -\lambda \\ & & & 3x_4 + x_5 - x_6 = -\lambda \\ & & & & 5x_5 - 2x_6 = \lambda \\ & & & & & 2x_6 = -\lambda \\ & & & & & & x_7 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = -\lambda \\ 2x_3 = -\lambda \\ 2x_4 = -\lambda \\ x_5 = 0 \\ 2x_6 = -\lambda \\ x_7 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2}\lambda \\ x_3 = -\frac{1}{2}\lambda \\ x_4 = -\frac{1}{2}\lambda \\ x_5 = 0 \\ x_6 = -\frac{1}{2}\lambda \\ x_7 = \lambda \end{cases}$$

i stąd zbiór rozwiązań wymiernych $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(4.35) \subseteq \mathbb{Q}^7$ równania (4.35) jest jednowymiarową przestrzenią liniową postaci $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(4.35) = \mathbb{Q} \cdot [0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1] \subseteq \mathbb{Q}^7$. Zauważmy, że zbiór rozwiązań całkowitych $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(4.35) \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(4.35)$ równania (4.35) jest \mathbb{Z} -wolną grupą cykliczną (por. fakt A.20).

Łatwo sprawdzić, że generatorem grupy $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(4.35) \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(4.35) \subseteq \mathbb{Q}^7$ jest wektor

$$\mathbf{h}_{\mathbb{Z}} = \frac{2}{1} \cdot [0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1] = [0, -1, -1, -1, 0, -1, 2] \in \mathbb{Z}^7.$$

Istotnie, z wcześniejszych rozważań wiemy, że $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^7$ jest grupą cykliczną, tzn. $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ dla pewnego $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^7$. Stąd istnieje takie $\lambda \in \mathbb{Z}$, że $\lambda \cdot \mathbf{h} = [0, -1, -1, -1, 0, -1, 2] = \mathbf{h}_{\mathbb{Z}}$ i w konsekwencji $\mathbf{h} = \pm \mathbf{h}_{\mathbb{Z}}$ jest generatorem grupy $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^7$.

Ogólnie, jeśli $\mathbf{h}_{\mathbb{Q}} = [\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}] \in \mathbb{Q}^m$, gdzie $p_i \in \mathbb{Z}$ oraz $q_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dla $i \in \{1 \dots m\}$, jest generatorem jednowymiarowej przestrzeni liniowej $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cdot \mathbf{h}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}^m$, to generatorem grupy \mathbb{Z} -wolnej $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} = \{v \in \mathbb{Z}^m; v \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}\} \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}^m$ jest wektor $\mathbf{h}_{\mathbb{Z}} := \frac{a}{b} \cdot \mathbf{h}_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}^m$, gdzie $a := \text{NWD}(q_1, \dots, q_m)$ oraz $b := \text{NWW}(a \cdot p_1, \dots, a \cdot p_m)$.

Następujący algorytm, oparty o całkowitoliczbową eliminację Gaussa (por. algorytm Bareissa [6] oraz algorytm 2.7) stanowi praktyczną implementację idei przedstawionych w przykładzie 4.34. Algorytm ten umożliwia wyznaczenie generatora $\mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^m$ grupy cyklicznej $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (równoważnie: generatora \mathbb{Z} -grupy rozwiązań całkowitoliczbowych układu równań liniowych $G_I \cdot x^{tr} = 0$). Co więcej, wszystkie obliczenia wykonywane w algorytmie przeprowadzane są w pierścieniu liczb całkowitych \mathbb{Z} (bez konieczności użycia liczb wymiernych czy zmiennoprzecinkowych).

Algorytm 4.36. **WEJŚCIE** Macierz incydencji $C_I = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ głównego zbioru częściowo uporządkowanego (definicja 4.1).

WYNIK Wektor $\mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^n$ generujący jądro $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^n$.

KROK 1° Inicjalizujemy macierz symetryczną $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} := C_I + C_I^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

KROK 2° Dla $(i, j) \in \{2, \dots, n\} \times \{n, \dots, 2\}$ wykonujemy: $m_{ij} := m_{11} \cdot m_{ij} - m_{1j} \cdot m_{i1}$.

Sprowadzamy macierz M do postaci górnoschodkowej

KROK 3° Dla każdego $k \in \{2, \dots, n\}$:

KROK 3.1° $i := -1$,

KROK 3.2° dla $r \in \{k, \dots, n\}$: jeśli $m_{rk} \neq 0$, to $i := r$ i przechodzimy do kroku 3.4°,

KROK 3.3° jeśli $i = -1$, to przerywamy pętlę i przechodzimy do kroku 4°,

KROK 3.4° jeśli $i \neq k$, to dla $j \in \{k, \dots, n\}$ wykonujemy: $(m_{kj}, m_{ij}) := (m_{ij}, m_{kj})$,

KROK 3.5° dla $(r, j) \in \{k+1, \dots, n\} \times \{n, \dots, k+1\}$ wykonujemy:

$$m_{rj} := \frac{m_{kk} \cdot m_{rj} - m_{kj} \cdot m_{rk}}{m_{k-1k-1}}.$$

Rozwiązanie wyznaczamy w k -tej kolumnie

KROK 4° $m_{kk} := 1$.

KROK 5° Dla każdego $i \in \{1, \dots, k-1\}$ wykonujemy $m_{ik} := -m_{ik}$.

KROK 6° Obliczmy $d := \text{NWD}(m_{k-1k-1}, m_{k-1k})$ i ustalamy $m_{k-1k-1}/= d$; $m_{k-1k}/= d$.

Sprowadzamy macierz M do postaci przekątnej

KROK 7° Dla każdego $c \in \{k-1, \dots, 2\}$:

KROK 7.1° Dla każdego $r \in \{1, \dots, c-1\}$:

KROK 7.1.1° jeśli $m_{cr} \neq 0$:

KROK 7.1.1.1° obliczamy $w := \text{NWW}(m_{cc}, m_{rc})$ oraz $d := \frac{w}{m_{rc}}$,

KROK 7.1.1.2° dla każdego $i \in \{r, \dots, k\}$ wykonujemy $m_{ri} := m_{ri} \cdot d$,

KROK 7.1.1.3° obliczamy $m_{rk} := \frac{w}{m_{cc}} \cdot m_{ck}$

KROK 7.2° obliczmy $d := \text{NWD}(m_{cc}, m_{ck})$ i ustalamy $m_{cc}/= d$; $m_{ck}/= d$.

KROK 8° Obliczamy $d := \text{NWW}(m_{11}, m_{22}, \dots, m_{kk})$.

KROK 9° Jeśli $d \neq 1$, to dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ wykonujemy $m_{ik} := m_{ik} \cdot \frac{d}{m_{ii}}$.

KROK 10° Obliczamy $d := \text{NWD}(m_{1k}, m_{2k}, \dots, m_{kk})$.

KROK 11° Kończymy działanie z wynikiem $[\frac{m_{1k}}{d}, \frac{m_{2k}}{d}, \dots, \frac{m_{kk}}{d}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{Z}^n$.

Zauważmy, że algorytm 4.36 opiera się na klasycznym algorytmie eliminacji Gaussa, a jego asymptotyczna złożoność obliczeniowa wynosi $O(n^3)$.

Uwaga 4.37. Algorytm 4.36 można (bez żadnych modyfikacji) użyć do obliczenia generatora jądra m -wierzchołkowego głównego grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ (definicja A.4(f)) zakodowanego w postaci niesymetrycznej macierzy Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ (definicja A.1(d)).

Aby obliczyć typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (definicja 4.14) spójnego głównego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I będziemy posługiwać się następującym algorytmem.

Algorytm 4.38. **WEJŚCIE** Macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ spójnego głównego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I .

WYNIK Typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

KROK 1° Obliczamy wektor $\mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^m$ generujący jądro $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$, tj. wektor spełniający równość $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I$ (np. przy pomocy algorytmu 4.36).

KROK 2° Znajdujemy indeks $s \in \{1, \dots, m\}$ spełniający równość $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$.

KROK 3° Zwracamy jako wynik typ Coxetera-Dynkina spójnego dodatniego porządku $I^{(s)} := I \setminus \{s\}$ (obliczony np. przy pomocy algorytmu B.24 zastosowanego do jednolitego funkcjonau kwadratowego $q_{I^{(s)}} : \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40)).

Dzięki zastosowaniu algorytmu 4.38 do spójnych głównych porządków I wielkości $|I| \leq 15$ otrzymujemy następującą charakteryzację.

Fakt 4.39. Wszystkie spójne główne zbiory częściowo uporządkowane I wielkości $|I| \leq 15$ można podzielić na 119 klas, z dokładnością do typu Coxetera-Dynkina (definicja 4.20(a)):

$ I $	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\#I$	1	9	35	182	714	2704	1413	3305	7556	17206	38684	86649
$\# \text{klas CDtype}_I$	1	2	4	7	11	13	10	11	13	14	16	17

patrz tabela 4.40.

Dowód. Dowód faktu ma charakter obliczeniowy. Najpierw, przy pomocy algorytmu 4.28, generujemy wszystkie nieujemne zbiory częściowo uporządkowane I wielkości $|I| \leq 15$ i korangi $\text{crk}_I \leq 1$ (por. dowód faktu 4.30). Następnie wybieramy spójne główne porządki I i dzielimy je względem typu Coxetera-Dynkina

$$\text{CDtype}_I = (\text{Dyn}_I, \text{spec}_I) \equiv (\text{Dyn}_I, \text{cox}_I(t)),$$

gdzie:

- typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-1}, \mathcal{D}_{|I|-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ obliczamy używając algorytmu 4.38,
- wielomian Coxetera $\text{cox}_I(t) \in \mathbb{Z}[t]$ obliczamy przy pomocy standardowych algorytmów algebry komputerowej. □

TABELA 4.40. LICZBA GŁÓWNYCH SPÓJNYCH PORZĄDKÓW I WIELKOŚCI $|I| \leq 15$, POGRUPOWANYCH WZGLĘDEM TYPU COXETERA-DYNKINA

$\text{cox}_I(t)$	Dyn_I	$\#I$	$\text{cox}_I(t)$	Dyn_I	$\#I$	$\text{cox}_I(t)$	Dyn_I	$\#I$
t^4-2t^2+1	\mathcal{A}_3	1						
$t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{A}_4	1	$t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_4	8			
t^6-2t^3+1	\mathcal{A}_5	3	$t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_5	1	$t^6+t^5-t^4-2t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_5	29
$t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{A}_5	2						
$t^7-t^4-t^3+1$	\mathcal{A}_6	4	$t^7-t^5-t^2+1$	\mathcal{E}_6	1	$t^7+t^6-2t^4-2t^3+t+1$	\mathcal{E}_6	83
$t^7-t^4-t^3+1$	\mathcal{D}_6	2	$t^7-2t^5+t^4+t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_6	3	$t^7+t^6-t^5-t^4-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_6	87
$t^7-t^5-t^2+1$	\mathcal{A}_6	2						
t^8-2t^4+1	\mathcal{A}_7	8	$t^8-t^6-t^2+1$	\mathcal{A}_7	3	$t^8-2t^6+2t^4-2t^2+1$	\mathcal{E}_7	4
t^8-2t^4+1	\mathcal{D}_7	3	$t^8-t^6-t^2+1$	\mathcal{D}_7	7	$t^8+t^7-t^5-2t^4-t^3+t+1$	\mathcal{E}_7	463
$t^8-t^5-t^3+1$	\mathcal{A}_7	6	$t^8-t^6-t^2+1$	\mathcal{E}_7	1	$t^8+t^7-t^6-t^5-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_7	211
$t^8-t^5-t^3+1$	\mathcal{E}_7	2	$t^8-2t^6+2t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_7	6			
$t^9-t^5-t^4+1$	\mathcal{A}_8	13	$t^9-t^7-t^2+1$	\mathcal{E}_8	1	$t^9-t^7+t^6-t^5-t^4+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_8	12
$t^9-t^5-t^4+1$	\mathcal{D}_8	4	$t^9-2t^7+t^5+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_8	10	$t^9-2t^7-t^6+2t^5+2t^4-t^3-2t^2+1$	\mathcal{E}_8	11
$t^9-t^5-t^4+1$	\mathcal{E}_8	3	$t^9-t^7-t^6+t^5+t^4-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_8	16	$t^9+t^8-t^6-t^5-t^4-t^3+t+1$	\mathcal{E}_8	2078
$t^9-t^6-t^3+1$	\mathcal{A}_8	9	$t^9-t^7-t^6+t^5+t^4-t^3-t^2+1$	\mathcal{E}_8	9	$t^9+t^8-t^7-t^6-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_8	535
$t^9-t^7-t^2+1$	\mathcal{A}_8	3						

$t^{10}-2t^5+1$	\mathcal{A}_9	20	$t^{10}-t^8-t^2+1$	\mathcal{A}_9	4	$t^{10}-t^8-t^7+2t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_9	30
$t^{10}-t^6-t^4+1$	\mathcal{A}_9	21	$t^{10}-t^8-t^2+1$	\mathcal{D}_9	31	$t^{10}-t^8+t^7-2t^5+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_9	18
$t^{10}-t^6-t^4+1$	\mathcal{D}_9	5	$t^{10}-2t^8+t^6+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_9	15	$t^{10}+t^9-t^8-t^7-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_9	1258
$t^{10}-t^7-t^3+1$	\mathcal{A}_9	11						
$t^{11}-t^6-t^5+1$	\mathcal{A}_{10}	41	$t^{11}-t^9-t^2+1$	\mathcal{A}_{10}	4	$t^{11}-t^9-t^8+t^6+t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	50
$t^{11}-t^7-t^4+1$	\mathcal{A}_{10}	29	$t^{11}-2t^9+t^7+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	21	$t^{11}-t^9+t^8-t^6-t^5+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	25
$t^{11}-t^7-t^4+1$	\mathcal{D}_{10}	6	$t^{11}-t^9+t^7-t^6-t^5+t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	52	$t^{11}+t^{10}-t^9-t^8-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_{10}	2998
$t^{11}-t^8-t^3+1$	\mathcal{A}_{10}	14	$t^{11}-t^9-t^7+t^6+t^5-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	65			
$t^{12}-2t^6+1$	\mathcal{A}_{11}	55	$t^{12}-t^{10}-t^2+1$	\mathcal{A}_{11}	5	$t^{12}-t^{10}+t^8-2t^6+t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	80
$t^{12}-t^7-t^5+1$	\mathcal{A}_{11}	65	$t^{12}-t^{10}-t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	121	$t^{12}-t^{10}+t^9-t^7-t^5+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	33
$t^{12}-t^8-t^4+1$	\mathcal{A}_{11}	42	$t^{12}-2t^{10}+t^8+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	28	$t^{12}-t^{10}-t^9+t^7+t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	77
$t^{12}-t^8-t^4+1$	\mathcal{D}_{11}	7	$t^{12}-t^{10}-t^8+2t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	120	$t^{12}+t^{11}-t^{10}-t^9-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_{11}	6905
$t^{12}-t^9-t^3+1$	\mathcal{A}_{11}	18						
$t^{13}-t^7-t^6+1$	\mathcal{A}_{12}	131	$t^{13}-t^{11}-t^2+1$	\mathcal{A}_{12}	5	$t^{13}-t^{11}+t^9-t^7-t^6+t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	116
$t^{13}-t^8-t^5+1$	\mathcal{A}_{12}	98	$t^{13}-t^{11}+t^8-t^7-t^6+t^5-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	205	$t^{13}-t^{11}-t^{10}+t^8+t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	112
$t^{13}-t^9-t^4+1$	\mathcal{A}_{12}	54	$t^{13}-t^{11}-t^8+t^7+t^6-t^5-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	246	$t^{13}-t^{11}+t^{10}-t^8-t^5+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	42
$t^{13}-t^9-t^4+1$	\mathcal{D}_{12}	8	$t^{13}-2t^{11}+t^9+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	36	$t^{13}+t^{12}-t^{11}-t^{10}-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_{12}	15929
$t^{13}-t^{10}-t^3+1$	\mathcal{A}_{12}	21	$t^{13}-t^{11}-t^9+t^7+t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	203			
$t^{14}-2t^7+1$	\mathcal{A}_{13}	154	$t^{14}-t^{12}-t^2+1$	\mathcal{A}_{13}	6	$t^{14}-t^{12}+t^{10}-t^8-t^6+t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	161
$t^{14}-t^8-t^6+1$	\mathcal{A}_{13}	216	$t^{14}-t^{12}-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	456	$t^{14}-t^{12}-t^{10}+t^8+t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	322
$t^{14}-t^9-t^5+1$	\mathcal{A}_{13}	142	$t^{14}-t^{12}+t^9-2t^7+t^5-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	325	$t^{14}-t^{12}+t^{11}-t^9-t^5+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	52
$t^{14}-t^{10}-t^4+1$	\mathcal{A}_{13}	72	$t^{14}-t^{12}-t^9+2t^7-t^5-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	455	$t^{14}-t^{12}-t^{11}+t^9+t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	156
$t^{14}-t^{10}-t^4+1$	\mathcal{D}_{13}	9	$t^{14}-2t^{12}+t^{10}+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	45	$t^{14}+t^{13}-t^{12}-t^{11}-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_{13}	36088
$t^{14}-t^{11}-t^3+1$	\mathcal{A}_{13}	25						
$t^{15}-t^8-t^7+1$	\mathcal{A}_{14}	428	$t^{15}-t^{13}-t^2+1$	\mathcal{A}_{14}	6	$t^{15}-t^{13}-t^{11}+t^9+t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	486
$t^{15}-t^9-t^6+1$	\mathcal{A}_{14}	334	$t^{15}-t^{13}-t^9+t^8+t^7-t^6-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	917	$t^{15}-t^{13}+t^{11}-t^9-t^6+t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	216
$t^{15}-t^{10}-t^5+1$	\mathcal{A}_{14}	200	$t^{15}-t^{13}+t^9-t^8-t^7+t^6-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	786	$t^{15}-t^{13}+t^{12}-t^{10}-t^5+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	63
$t^{15}-t^{11}-t^4+1$	\mathcal{A}_{14}	90	$t^{15}-t^{13}-t^{10}+t^8+t^7-t^5-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	784	$t^{15}-t^{13}-t^{12}+t^{10}+t^5-t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	210
$t^{15}-t^{11}-t^4+1$	\mathcal{D}_{14}	10	$t^{15}-t^{13}+t^{10}-t^8-t^7+t^5-t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	490	$t^{15}+t^{14}-t^{13}-t^{12}-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_{14}	81544
$t^{15}-t^{12}-t^3+1$	\mathcal{A}_{14}	30	$t^{15}-2t^{13}+t^{11}+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{14}	55			

Jednym z głównych wyników prezentowanych w niniejszym rozdziale jest spektralna klasyfikacja Coxetera spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych wielkości $m := |I| \leq 15$. Kluczowym narzędziem służącym do przygotowania tej klasyfikacji jest algorytm heurystyczny 4.44, który umożliwia wyznaczenie \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \overset{B}{\sim} J$, gdzie I oraz J są spójnymi głównymi m -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi. Przypomnijmy, że kolumny każdej takiej macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ są pierwiastkami funkcjonału $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40), patrz fakt 1.55(d).

Pokażemy, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^m; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$, spójnego jednolitego głównego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ można przedstawić w postaci

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_q^{\text{red}} + \text{Ker } q = \mathcal{R}_q^{\text{red}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^m,$$

gdzie $\mathcal{R}_q^{\text{red}} \subseteq \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^m$ (tzw. **redukt**, por. [109, Definition 3.6]) jest zbiorem skończonym, patrz [109, Theorem 3.2].

Fakt 4.41. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym głównym jednolitym funkcjonałem kwadratowym, którego jądro ma postać $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $0 \neq \mathbf{h} := [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n] \in \mathbb{Z}^n$. Zbiór

pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ można przedstawić w postaci

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} + \text{Ker } q = \mathcal{R}_q^{\text{red}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n, \quad (4.42)$$

gdzie $\mathbf{h}_s = \pm 1$, natomiast $\mathcal{R}_q^{\text{red}} := \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończonym zbiorem pierwiastków dodatniego funkcjonatu kwadratowego $\tilde{q}^{(s)}: \mathbb{Z}^{s-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-s} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\tilde{q}^{(s)}(v) = q^{(s)}(v^{(s)}) = q(v)$.

Dowód. Z lematu 4.3(b) wynika, że istnieje indeks $s \in \{1, \dots, n\}$, dla którego $\mathbf{h}_s = \pm 1$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że $\mathbf{h}_s = 1$ (w przeciwnym wypadku przyjmujemy $\mathbf{h} := -\mathbf{h}$). Dla dowolnych wektorów $v \in \mathbb{Z}^n$ oraz $w \in \mathbb{Z}^{n-1}$ definiujemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \ni v &\mapsto \tilde{v}^{(s)} := [v_1, \dots, v_{s-1}, 0, v_{s+1}, \dots, v_n] = v|_{v_s=0} \in \mathbb{Z}^n \text{ oraz} \\ \mathbb{Z}^{n-1} \ni w &\mapsto w^{[s]} := [w_1, \dots, w_{s-1}, 0, w_s, \dots, w_{n-1}] \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Definiujemy jednolity funkcjonal kwadratowy $\tilde{q}^{(s)}: \mathbb{Z}^{s-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-s} \rightarrow \mathbb{Z}$ wzorem $\tilde{q}^{(s)}(v) := q(v^{(s)})$. Wykażemy prawdziwość równości (4.42).

„ \subseteq ” Załóżmy, że $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q = \{u \in \mathbb{Z}^n; q(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Z lematu 4.3(a) otrzymujemy równości

$$1 = q(v) = q((v - v_s \cdot \mathbf{h}) + v_s \cdot \mathbf{h}) = q(\bar{v} + v_s \cdot \mathbf{h}) = q(\bar{v}) = \tilde{q}^{(s)}(\bar{v}),$$

gdzie wektor $\bar{v} = [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] := v - v_s \cdot \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ spełnia $\bar{v}_s = 0$. Ponieważ $v = \bar{v} + v_s \cdot \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\bar{v} \in \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wnioskujemy, że $\mathcal{R}_q \subseteq \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$.

„ \supseteq ” Załóżmy, że $v \in \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$, tj. $v = \bar{v} + k \cdot \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $\bar{v} \in \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^{s-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-s}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$. Na podstawie założeń oraz lematu 4.3(a) wnioskujemy, że

$$1 = \tilde{q}^{(s)}(\bar{v}) = q(\bar{v}) = q(\bar{v} + k \cdot \mathbf{h}) = q(v),$$

a stąd $\mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathcal{R}_q$.

Aby zakończyć dowód, należy jeszcze wykazać, że zbiór $\mathcal{R}_q^{\text{red}} := \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony. Zauważmy, że jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ można utożsamiać z grafem krawędziowo-dwudzielny Δ_q (definicja A.8(b)). Z lematu 4.11, zastosowanego do bigrafu Δ_q wynika, że bigraf $\Delta_q^{(s)} := \Delta \setminus \{s\}$ jest dodatni. Stąd funkcjonal kwadratowy $q_{\Delta_q^{(s)}} = q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $q^{(s)}(w) := q(w^{[s]})$, jest dodatni i w konsekwencji funkcjonal $\tilde{q}^{(s)}: \mathbb{Z}^{s-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-s} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\tilde{q}^{(s)}(v) = q(v^{(s)}) = q^{(s)}(v^{(s)})$, jest dodatni. Stąd, na podstawie faktu 2.16, zbiór $\mathcal{R}_q^{\text{red}} = \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony. \square

Dowód faktu 4.41 prowadzi do następującego algorytmu służącego do obliczania reduktu $\mathcal{R}_q^{\text{red}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ (4.42), por. [109, Algorithm 3.9].

Algorytm 4.43. **WEJŚCIE** Niesymetryczna macierz Grama $\check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ spójnego głównego jednolitego funkcjonatu kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

WYNIK Redukt $\mathcal{R}_q^{\text{red}} \subseteq \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$, tj. skończony zbiór spełniający $\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_q^{\text{red}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$.

KROK 1° Obliczamy wektor $\mathbf{h}_q \in \mathbb{Z}^n$ generujący jądro

$$\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$$

(np. przy pomocy algorytmu 4.36 zastosowanego do macierzy $\check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$).

KROK 2° Znajdujemy indeks $s \in \{1, \dots, n\}$ spełniający $\mathbf{h}_s = \pm 1$.

KROK 3° Obliczamy zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{q^{(s)}} := \{w \in \mathbb{Z}^{n-1}; q^{(s)}(w) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$ dodatniego funkcjonału kwadratowego $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $q^{(s)}(w) = w \cdot \check{G}_q^{(s)} \cdot w^{tr}$, gdzie $\check{G}_q^{(s)} \in \mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ jest macierzą powstałą z $\check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przez usunięcie s -tego wiersza oraz s -tej kolumny (np. przy pomocy algorytmu 2.21).

KROK 4° Zwracamy zbiór $\mathcal{R}_q^{red} := \{w^{[s]}; w \in \mathcal{R}_{q^{(s)}}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie

$$w^{[s]} := [w_1, \dots, w_{s-1}, 0, w_s, \dots, w_{n-1}] \in \mathbb{Z}^n$$

dla każdego $w = [w_1, \dots, w_{n-1}] \in \mathcal{R}_{q^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$.

Przedstawimy teraz algorytm 4.44, który umożliwi znalezienie \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność pomiędzy spójnymi głównymi m -elementowymi zbiorami częściowo uporządkowanymi I oraz J , tj. spełniającej równość $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$. Przedstawiony (heurystyczny) algorytm jest rozwinięciem algorytmu 3.58 (patrz [56, Algorithm 3.5], [53, Algorithm 5.2], [52, Procedure 3.13]).

Algorytm 4.44. WEJŚCIE Macierze incydencji $C_I, C_J \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych I, J , wielkości $|I| = |J| = n \geq 2$ oraz redukt $\mathcal{R}_I^{red} \subseteq \mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ (4.42).

WYNIK \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ spełniająca równość $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$ lub NULL, jeśli takiej macierzy nie znaleziono.

KROK 1° Obliczamy macierze Coxetera $\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr}$ oraz $\text{Cox}_J := -C_J \cdot C_J^{-tr}$.

KROK 2° Konstruujemy macierz kwadratową

$$S := [s_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

złożoną z n^2 zmiennych symbolicznych s_{ij} , gdzie $i, j \in \{1, \dots, n\}$, i obliczamy macierz

$$\tilde{S} = [\tilde{s}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} := \text{Cox}_I \cdot S - S \cdot \text{Cox}_J.$$

KROK 3° Rozwiązujemy układ n^2 równań liniowych $\tilde{s}_{ij} = 0$, dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, i wstawiamy obliczone wartości do macierzy S .

KROK 4° Zwracamy wynik działania funkcji rekurencyjnej `wstaw_w` uruchomionej z parametrami `start := 1` oraz `B := S`.

Funkcja rekurencyjna `wstaw_w(start, B)`

KROK 1° Szukamy najmniejszego $k \in \{\text{start}, \dots, n\}$ takiego, że wiersz b_k w macierzy B zawiera jakąkolwiek zmienną s_{ij} . Jeśli takie k **nie** istnieje, przechodzimy do kroku 2°, w przeciwnym wypadku przechodzimy do kroku 3°.

KROK 2° Jeśli $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det B = \pm 1$ oraz $C_I = B \cdot C_J \cdot B^{tr}$, kończymy działanie funkcji i zwracamy macierz $B^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jako wynik. W przeciwnym wypadku jako wynik funkcji zwracamy NULL.

KROK 3° Dla kolejnych pierwiastków $w = [w_1, \dots, w_n] \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^n$:

KROK 3.1° sprawdzamy, czy w k -ty wiersz macierzy B można wstawić wektor

$w \in \mathbb{Z}^n$, tj. rozwiązujemy układ n równań liniowych (*).

$$\begin{cases} b_{k1} - w_1 = 0 \\ \vdots \\ b_{kn} - w_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Możliwe są następujące sytuacje:

KROK 3.1.1° Układ (*) jest sprzeczny. Wtedy przerywamy pętlę i przechodzimy do analizy kolejnego pierwiastka $w \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

KROK 3.1.2° Układ (*) nie jest sprzeczny. Wtedy konstruujemy macierz B' jako macierz B , do której wstawione zostało rozwiązanie równania (*).

KROK 3.2° Obliczamy B'' jako wynik działania funkcji rekurencyjnej wstaw_w uruchomionej z parametrami $start := start + 1$ oraz $B := B'$.

KROK 3.3° Jeśli wartością B'' nie jest NULL, to kończymy funkcję i zwracamy B'' jako wynik. W przeciwnym wypadku przechodzimy do analizy kolejnego pierwiastka $w \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^n$

KROK 4° Kończymy działanie i zwracamy NULL jako wynik funkcji.

Uwaga 4.45. (a) Algorytm 4.44 stanowi częściowe rozwiązanie problemu 3 dla przypadku nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych.

(b) Algorytm 4.44 ma charakter ogólny i można go zastosować do wyszukiwania macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej silną \mathbb{Z} -kongruencję Grama pomiędzy nieujemnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi (patrz definicja A.3(b)) oraz macierzowymi morsyfikacjami tych bigrafów (patrz definicja A.6).

(c) Algorytm 4.44 opiera się na klasycznej metodzie przeszukiwania z nawrotami (ang. *backtracking*), patrz [121, Section 7.1]. Kolejne wywołania funkcji rekurencyjnej wstaw_w odpowiadają za „wstawienie” pierwiastków $w \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^n$ w kolejne wiersze szukanej macierzy $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Algorytm 4.44 ma charakter heurystyczny i w przeciwieństwie do algorytmu 3.58, który w sposób wyczerpujący sprawdza wszystkie możliwości, nie gwarantuje znalezienia szukanej macierzy. Co więcej, w przypadku tego algorytmu:

- nie ma gwarancji znalezienia szukanej macierzy, nawet jeśli wiadomo, że taka istnieje;
- wynik działania zależy od wyboru reduktu $\mathcal{R}_q^{red} \subseteq \mathbb{Z}^n$, który nie jest zdefiniowany jednoznacznie (postać wektorów należących do reduktu zależy od wyboru indeksu $s \in \{1, \dots, n\}$, dla którego $\mathbf{h}_s^J = \pm 1$);
- wynik działania zależy od kolejności argumentów wywołania: w niektórych przypadkach algorytm nie znajduje macierzy definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$, ale znajduje macierz definiującą dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $J \approx_{\mathbb{Z}} I$.

(d) Z konstrukcji algorytmu wynika, że w pesymistycznym wypadku ma on wykładniczą złożoność obliczeniową. Niemniej, w rozważanych wypadkach, znajduje szukaną macierz w czasie kilku minut, patrz uwaga 4.48(c).

Przykład 4.46. Rozważmy następujące dwa główne pięcioelementowe zbiory częściowo-

wo uporządkowane.

$$\mathcal{H}(I) = \begin{array}{c} \bullet_1 \longrightarrow \bullet_3 \\ \bullet_2 \longrightarrow \bullet_4 \\ \bullet_1 \longrightarrow \bullet_4 \\ \bullet_2 \longrightarrow \bullet_3 \\ \bullet_3 \longrightarrow \bullet_5 \\ \bullet_4 \longrightarrow \bullet_5 \end{array} \quad C_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$$

$$\mathcal{H}(J) = \begin{array}{c} \bullet_1 \longrightarrow \bullet_5 \\ \bullet_2 \longrightarrow \bullet_5 \\ \bullet_3 \longrightarrow \bullet_5 \\ \bullet_4 \longrightarrow \bullet_5 \end{array} \quad C_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$$

Pokażemy, przy pomocy algorytmu 4.44, że porządki I oraz J są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne, tj. $C_I = B^{tr} \cdot C_J \cdot B$, gdzie $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$.

Łatwo pokazać, np. przy pomocy algorytmu 4.43, że redukt $\mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^5$, gdzie

$$\mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^5; q_J(v) = 1\} = \mathcal{R}_J^{red} + \text{Ker } q_J \subseteq \mathbb{Z}^5,$$

jest zbiorem złożonym z następujących 24 pierwiastków:

$$\mathcal{R}_J = \left\{ \begin{array}{l} [0, 1, 0, 0, \hat{1}], [0, 0, 0, 0, \hat{1}], [0, 0, 1, 0, \hat{1}], [0, 0, \hat{1}, 0, 1], [0, 0, 0, \hat{1}, 1], [0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1, \hat{1}], [0, \hat{1}, 0, 0, 0], \\ [0, 1, 1, 1, \hat{2}], [0, \hat{1}, 0, \hat{1}, 1], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 1, 0, \hat{1}], [0, 1, 1, 1, \hat{1}], [0, 0, 0, \hat{1}, 0], [0, 1, 0, 1, \hat{1}], [0, 0, 0, 1, \hat{1}], \\ [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, \hat{1}, 0, 0], [0, 0, 0, \hat{1}, 1], [0, \hat{1}, 0, 0, 1], [0, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 1], [0, \hat{1}, \hat{1}, \hat{1}, 2], [0, 0, 0, 0, 1], [0, \hat{1}, \hat{1}, 0, 1] \end{array} \right\},$$

gdzie $\hat{a} := -a$ dla każdego $a \in \mathbb{N}$.

KROK 1° Obliczamy macierze Coxetera $\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr}$ oraz $\text{Cox}_J := -C_J \cdot C_J^{-tr}$:

$$\text{Cox}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}), \quad \text{Cox}_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

KROK 2° Konstruujemy macierz kwadratową

$$S := [s_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 5} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$

złożoną z $5^2 = 25$ zmiennych symbolicznych s_{ij} , gdzie $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, i obliczamy macierz

$$\tilde{S} = [\tilde{s}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 5} := \text{Cox}_I \cdot S - S \cdot \text{Cox}_J.$$

KROK 3° Rozwiązujemy układ 25 równań liniowych $\tilde{s}_{ij} = 0$, dla $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, tj.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{11} - s_{22} - s_{23} - s_{24} - s_{25} - s_{51} = 0; \quad -s_{11} - s_{13} - s_{14} - s_{15} + s_{22} - s_{52} = 0; \quad s_{31} + s_{32} + s_{33} + s_{34} + s_{35} + s_{45} - s_{55} = 0; \\ s_{12} - s_{21} - s_{23} - s_{24} - s_{25} - s_{52} = 0; \quad -s_{11} - s_{12} - s_{14} - s_{15} + s_{23} - s_{53} = 0; \quad s_{35} + s_{41} + s_{42} + s_{43} + s_{44} + s_{45} - s_{55} = 0; \\ s_{13} - s_{21} - s_{22} - s_{24} - s_{25} - s_{53} = 0; \quad -s_{11} - s_{12} - s_{13} - s_{15} + s_{24} - s_{54} = 0; \quad -s_{15} - s_{25} + s_{35} + s_{45} + s_{51} + s_{52} + s_{53} + s_{54} = 0; \\ s_{14} - s_{21} - s_{22} - s_{23} - s_{25} - s_{54} = 0; \quad -s_{32} - s_{33} - s_{34} - s_{35} + s_{41} - s_{51} = 0; \quad -s_{11} - s_{21} + s_{31} + s_{41} - s_{51} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - s_{55} = 0; \\ s_{31} - s_{42} - s_{43} - s_{44} - s_{45} - s_{51} = 0; \quad -s_{31} - s_{33} - s_{34} - s_{35} + s_{42} - s_{52} = 0; \quad -s_{12} - s_{22} + s_{32} + s_{42} - s_{51} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - s_{55} = 0; \\ s_{32} - s_{41} - s_{43} - s_{44} - s_{45} - s_{52} = 0; \quad -s_{31} - s_{32} - s_{34} - s_{35} + s_{43} - s_{53} = 0; \quad -s_{13} - s_{23} + s_{33} + s_{43} - s_{51} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - s_{55} = 0; \\ s_{33} - s_{41} - s_{42} - s_{44} - s_{45} - s_{53} = 0; \quad -s_{31} - s_{32} - s_{33} - s_{35} + s_{44} - s_{54} = 0; \quad -s_{14} - s_{24} + s_{34} + s_{44} - s_{51} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - s_{55} = 0; \\ s_{34} - s_{41} - s_{42} - s_{43} - s_{45} - s_{54} = 0; \quad s_{11} + s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{15} + s_{25} - s_{55} = 0; \\ -s_{12} - s_{13} - s_{14} - s_{15} + s_{21} - s_{51} = 0; \quad s_{15} + s_{21} + s_{22} + s_{23} + s_{24} + s_{25} - s_{55} = 0; \end{array} \right.$$

i otrzymujemy:

$$\begin{cases} s_{25} = s_{45} - s_{55}; & s_{32} = -s_{42} - s_{45} + s_{52} + s_{55}; & s_{12} = -s_{22} - s_{45} + s_{52} + 2s_{55}; & s_{13} = -s_{23} - s_{45} + s_{53} + 2s_{55}; \\ s_{15} = s_{45} - s_{55}; & s_{51} = -s_{52} - s_{53} - s_{54} - 2s_{55}; & s_{33} = -s_{43} - s_{45} + s_{53} + s_{55}; & s_{41} = -s_{42} - s_{43} - s_{44} - 2s_{45} + s_{55}; \\ s_{35} = s_{45}; & s_{34} = -s_{44} - s_{45} + s_{54} + s_{55}; & s_{14} = -s_{24} - s_{45} + s_{54} + 2s_{55}; & s_{21} = -s_{22} - s_{23} - s_{24} - 2s_{45} + 3s_{55}; \\ s_{31} = s_{42} + s_{43} + s_{44} + s_{45} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - 2s_{55}; & & s_{11} = s_{22} + s_{23} + s_{24} + s_{45} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - 3s_{55}; & \end{cases}$$

Obliczone wartości wstawiamy do macierzy S .

$$S = \begin{bmatrix} s_{22} + s_{23} + s_{24} + s_{45} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - 3s_{55} & -s_{22} - s_{45} + s_{52} + 2s_{55} & -s_{23} - s_{45} + s_{53} + 2s_{55} & -s_{24} - s_{45} + s_{54} + 2s_{55} & s_{45} - s_{55} \\ -s_{22} - s_{23} - s_{24} - 2s_{45} + 3s_{55} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{45} - s_{55} \\ s_{42} + s_{43} + s_{44} + s_{45} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - 2s_{55} & -s_{42} - s_{45} + s_{52} + s_{55} & -s_{43} - s_{45} + s_{53} + s_{55} & -s_{44} - s_{45} + s_{54} + s_{55} & s_{45} \\ -s_{42} - s_{43} - s_{44} - 2s_{45} + s_{55} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ -s_{52} - s_{53} - s_{54} - 2s_{55} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix}$$

KROK 4° Wstawiamy do macierzy S kolejne pierwiastki $w \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^5$ zgodnie z procedurą opisaną przez funkcję rekurencyjnej `wstaw_w`.

Ustalamy $B := S$ oraz $start := 1$.

KROK 1° Szukamy najmniejszego $k \in \{start, \dots, n\} = \{1, \dots, 5\}$ takiego, że wiersz b_k w macierzy B zawiera jakąkolwiek zmienną s_{ij} . Wybieramy $k = 1$ i przechodzimy do kroku 3°.

KROK 3° Wybieramy $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^5$, np. $w := [0, 1, 0, 0, -1] \in \mathbb{Z}^5$.

KROK 3.1° sprawdzamy, czy w pierwszy ($k = 1$) wiersz macierzy B można wstawić wektor $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [0, 1, 0, 0, -1]$, tj. rozwiązujemy układ pięciu równań liniowych:

$$\begin{cases} b_{11} - w_1 = 0 \\ b_{12} - w_2 = 0 \\ b_{13} - w_3 = 0 \\ b_{14} - w_4 = 0 \\ b_{15} - w_5 = 0 \end{cases} = \begin{cases} s_{22} + s_{23} + s_{24} + s_{45} - s_{52} - s_{53} - s_{54} - 3s_{55} = 0 \\ -s_{22} - s_{45} + s_{52} + 2s_{55} - 1 = 0 \\ -s_{23} - s_{45} + s_{53} + 2s_{55} = 0 \\ -s_{24} - s_{45} + s_{54} + 2s_{55} = 0 \\ s_{45} - s_{55} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{24} = s_{54} \\ s_{55} = -1 \\ s_{45} = -2 \\ s_{22} = s_{52} - 1 \\ s_{23} = s_{53} \end{cases} \quad (*)$$

KROK 3.1.2° Układ $(*)$ nie jest sprzeczny: konstruujemy macierz B' , wstawiając do macierzy B rozwiązanie układu równań $(*)$.

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -s_{52} - s_{53} - s_{54} + 2 & s_{52} - 1 & s_{53} & s_{54} & -1 \\ s_{42} + s_{43} + s_{44} - s_{52} - s_{53} - s_{54} & -s_{42} + s_{52} + 1 & -s_{43} + s_{53} + 1 & -s_{44} + s_{54} + 1 & -2 \\ -s_{42} - s_{43} - s_{44} + 3 & s_{42} & s_{43} & s_{44} & -2 \\ -s_{52} - s_{53} - s_{54} + 2 & s_{52} & s_{53} & s_{54} & -1 \end{bmatrix}$$

KROK 3.2° Obliczamy B'' jako wynik działania funkcji rekurencyjnej `wstaw_w` uruchomionej z parametrami $start := start + 1 = 2$ oraz $B := B'$.

Ustalamy $B := B'$ oraz $start := 2$.

KROK 1° Szukamy najmniejszego $k \in \{start, \dots, n\} = \{2, \dots, 5\}$ takiego, że wiersz b_k w macierzy B zawiera jakąkolwiek zmienną s_{ij} . Wybieramy $k = 2$ i przechodzimy do kroku 3°.

KROK 3° Wybieramy $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] \in \mathcal{R}_J^{red} \subseteq \mathbb{Z}^5$, np. $w := [0, 0, 0, 0, -1] \in \mathbb{Z}^5$.

KROK 3.1° sprawdzamy, czy w drugi ($k = 2$) wiersz macierzy B można wstawić wektor $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [0, 0, 0, 0, -1]$, tj. rozwiązujemy układ pięciu równań liniowych:

$$\begin{cases} b_{21} - w_1 = 0 \\ b_{22} - w_2 = 0 \\ b_{23} - w_3 = 0 \\ b_{24} - w_4 = 0 \\ b_{25} - w_5 = 0 \end{cases} = \begin{cases} -s_{52} - s_{53} - s_{54} + 2 = 0 \\ s_{52} - 1 = 0 \\ s_{53} = 0 \\ s_{54} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (+)$$

KROK 3.1.1° Układ (+) jest sprzeczny: przerywamy pętlę i przechodzimy do analizy kolejnego pierwiastka $w \in \mathcal{R}_f^{red} \subseteq \mathbb{Z}^5$.

KROK 3.1° Wybieramy $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] \in \mathcal{R}_f^{red} \subseteq \mathbb{Z}^5$, np. $w := [0, 0, 1, 0, -1] \in \mathbb{Z}^5$.

KROK 3.1.1° sprawdzamy, czy w drugi ($k = 2$) wiersz macierzy B można wstawić wektor $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [0, 0, 1, 0, -1]$, tj. rozwiązujemy układ pięciu równań liniowych:

$$\begin{cases} b_{21} - w_1 = 0 \\ b_{22} - w_2 = 0 \\ b_{23} - w_3 = 0 \\ b_{24} - w_4 = 0 \\ b_{25} - w_5 = 0 \end{cases} = \begin{cases} -s_{52} - s_{53} - s_{54} + 2 = 0 \\ s_{52} - 1 = 0 \\ s_{53} - 1 = 0 \\ s_{54} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{54} = 0 \\ s_{52} = 1 \\ s_{53} = 1 \end{cases} . \quad (\ddagger)$$

KROK 3.1.2° Układ (+) nie jest sprzeczny: konstruujemy macierz B' , wstawiając do macierzy B rozwiązanie układu równań (+).

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ s_{42} + s_{43} + s_{44} - 2 & -s_{42} + 2 & -s_{43} + 2 & -s_{44} + 1 & -2 \\ -s_{42} - s_{43} - s_{44} + 3 & s_{42} & s_{43} & s_{44} & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

KROK 3.2° Obliczamy B'' jako wynik działania funkcji rekurencyjnej `wstaw_w` uruchomionej z parametrami `start := start + 1 = 3` oraz `B := B'`.

Ustalamy $B := B'$ oraz `start := 3`.

KROK 1° Szukamy najmniejszego $k \in \{\text{start}, \dots, n\} = \{3, 4, 5\}$ takiego, że wiersz b_k w macierzy B zawiera jakąkolwiek zmienną s_{ij} . Wybieramy $k = 3$ i przechodzimy do kroku 3°.

KROK 3° Wybieramy $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] \in \mathcal{R}_f^{red} \subseteq \mathbb{Z}^5$, np. $w := [1, 1, 1, 0, -2] \in \mathbb{Z}^5$.

KROK 3.1° sprawdzamy, czy w trzeci ($k = 3$) wiersz macierzy B można wstawić wektor $w = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [1, 1, 1, 0, -2]$, tj. rozwiązujemy układ pięciu równań liniowych:

$$\begin{cases} b_{31} - w_1 = 0 \\ b_{32} - w_2 = 0 \\ b_{33} - w_3 = 0 \\ b_{34} - w_4 = 0 \\ b_{35} - w_5 = 0 \end{cases} = \begin{cases} s_{42} + s_{43} + s_{44} - 3 = 0 \\ -s_{42} + 1 = 0 \\ -s_{43} + 1 = 0 \\ -s_{44} + 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{43} = 1 \\ s_{42} = 1 \\ s_{44} = 1 \end{cases} . \quad (+)$$

KROK 3.1.2° Układ (+) nie jest sprzeczny: konstruujemy macierz B' , wstawiając do macierzy B rozwiązanie układu równań (+).

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

KROK 3.2° Obliczamy B'' jako wynik działania funkcji rekurencyjnej `wstaw_w` uruchomionej z parametrami `start := start + 1 = 4` oraz `B := B'`.

Ustalamy $B := B'$ oraz `start := 4`.

KROK 1° Szukamy najmniejszego $k \in \{\text{start}, \dots, n\} = \{4, 5\}$ takiego, że wiersz b_k w macierzy B zawiera jakąkolwiek zmienną s_{ij} . Ponieważ takie k nie istnieje, przechodzimy do kroku 2°.

KROK 2° Weryfikujemy, że $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det B = 1$ oraz $C_I = B \cdot C_J \cdot B^{tr}$, tj. znaleźliśmy szukaną macierz $B \in \text{Gl}(5; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$ definiującą dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}}^B J$.

Używając przedstawionych w niniejszym podrozdziale algorytmów, udowodnimy następujące twierdzenie klasyfikacyjne.

Twierdzenie 4.47. *Jeśli I, J są spójnymi głównymi zbiorami częściowo uporządkowanymi wielkości $|I|, |J| \leq 15$, to $I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{CDtype}_I = \mathbf{CDtype}_J$.*

Dowód. Ponieważ implikacja „ \Rightarrow ” wynika z lematu 4.22(a), wystarczy pokazać implikację „ \Leftarrow ”. Dowód ma charakter obliczeniowy.

Etap 1° Przy pomocy algorytmu 4.28, generujemy wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, główne zbiory częściowo uporządkowane I wielkości $|I| \leq 15$ (jest ich 2 469 738).

Etap 2° Wybieramy porządki spójne (spójność porządku I weryfikujemy np. przy pomocy algorytmu przeszukiwania grafu wszerek zastosowanego do kołczanu Hasse $\mathcal{H}(I)$) - jest ich 158 458, por. tabela 4.33.

Etap 3° Używając algorytmu 4.38 oraz standardowych obliczeń algebry komputerowej dzielimy zbiór wszystkich spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I według typu Coxetera-Dynkina $\mathbf{CDtype}_I = (\mathbf{specc}_I, \mathbf{Dyn}_I)$. W wyniku otrzymujemy 119 zbiorów $\mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$, por. fakt 4.39 oraz tabela 4.40.

Etap 4° Dla każdego ze 119 zbiorów $\mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.1° losujemy $J \in \mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.2° przy pomocy heurystycznego algorytmu 4.44 (oraz algorytmu 4.43) dla każdego $J \neq I \in \mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.2.1° szukamy \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy $B \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}}^B J$; jeśli algorytm 4.44 znalazł żadaną macierz $B \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$, zapisujemy wynik i przechodzimy do etapu 4.2°, tj. analizujemy kolejny porządek $J \neq I \in \mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.2.2° szukamy macierzy $B' \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$ definiującej równoważność $J \approx_{\mathbb{Z}}^{B'} I$ i zapamiętujemy macierz $B := B'^{-1}$ jako wynik. Jeśli algorytm 4.44 nie znajdzie macierzy B , zapisujemy porządek J na liście $\mathbf{dospr}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.3° dla każdego $I \in \mathbf{dospr}_{\mathbf{CDtype}}$:

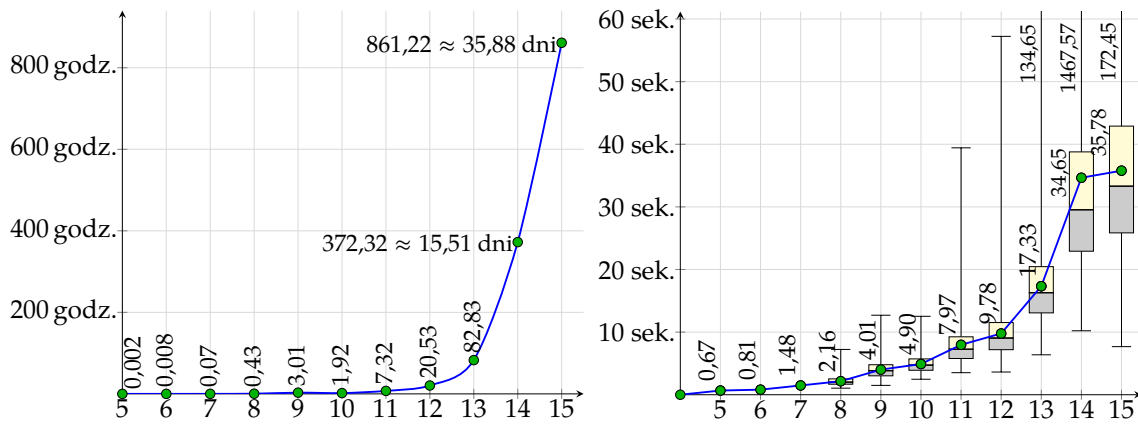
Etap 4.3.1° przy pomocy algorytmu 4.44 znajdujemy macierz $B'' \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$ definiującą równoważność $J' \approx_{\mathbb{Z}}^{B''} I$ między porządkiem I a rozważanym wcześniej porządkiem J' , który spełnia $J' \approx_{\mathbb{Z}}^{B'} J$. Jako wynik zapamiętujemy $B := B' \cdot B''^{-1}$ (korzystamy z przechodniości relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$).

Listę obliczonych macierzy incydencji spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I , podzieloną względem typu Coxetera-Dynkina $\mathbf{CDtype}_I = (\mathbf{specc}_I, \mathbf{Dyn}_I)$, wraz z macierzami definiującymi dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność, można znaleźć w [42]. \square

Uwaga 4.48. (a) Algorytm 4.44 ma charakter heurystyczny i nie gwarantuje znalezienia macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$. W przeprowadzonych przez nas obliczeniach w etapie 4.2.1° algorytm znalazł macierz B w 157 970 przypadkach, w etapie 4.2.2° w 349 przypadkach a pozostałe 20 macierzy zostało znalezione w etapie 4.3.1°.

(b) Aby przyspieszyć obliczenia, w naszej implementacji zastosowaliśmy buforowanie wywołań algorytmu 4.43 (obliczającego redukt $\mathcal{R}_J^{\text{red}} \subseteq \mathbb{Z}^{|J|}$).

(c) Na wykresach przedstawiono informacje o czasie pracy algorytmu 4.44, w przypadku znalezienia szukanej macierzy $B \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$: na pierwszym wykresie sumaryczny czas działania jednego procesora; na drugim: czas znalezienia pojedynczej macierzy.

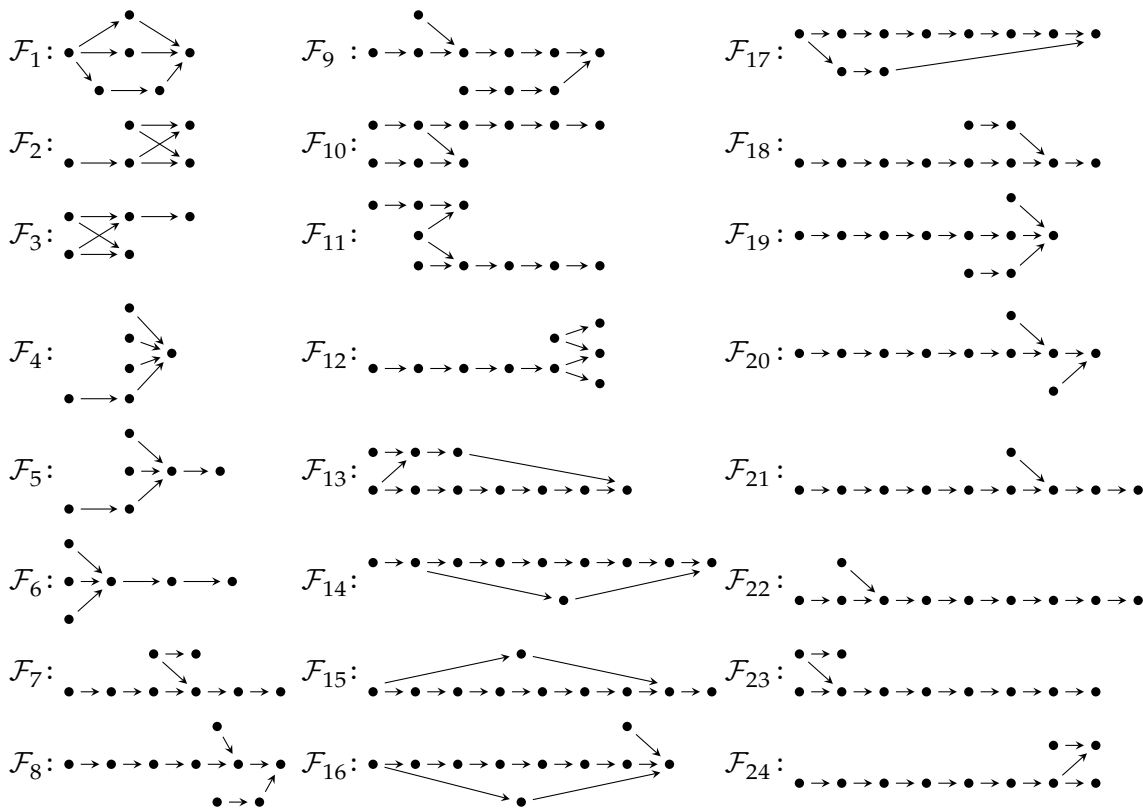


4.3. Serie jednopikowe: lematy techniczne

W dowodzie twierdzeń 3.17(g) oraz 4.26, które zawierają opis wszystkich (z dokładnością do izomorfizmu) jednopikowych porządków dodatnich oraz głównych, będziemy używać dwóch ważnych lematów technicznych: lematu 4.53 oraz lematu 4.57. Pierwszy z nich zawiera opis porządków powstałych przez dodanie do jednopikowego porządku dodatniego (o $m + 1 \geq 14$ elementach), nowego elementu minimalnego. Lemat 4.57 orzeka, że jednopikowe zbiory częściowo uporządkowane I przedstawione w tabeli 4.25 są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne z diagramem Euklidesa $\tilde{\mathbb{D}}_{|I|-1}$.

W dowodzie lematu 4.53 będziemy powoływać się na następującą listę porządków nieokreślonych.

TABELA 4.49. PORZĄDKI NIEOKREŚLONE

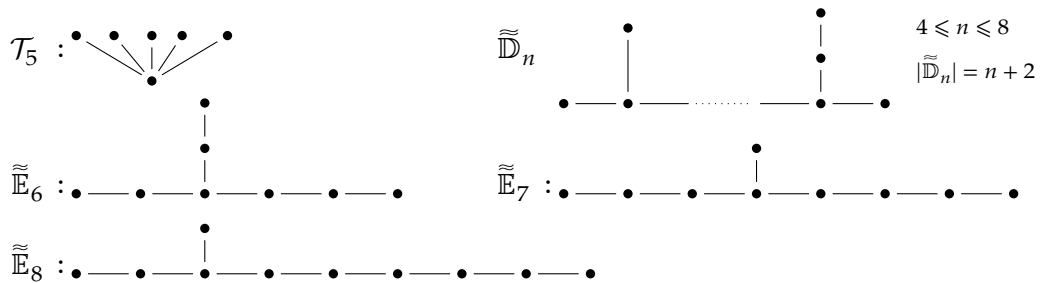


Lemat 4.50. Porządki przedstawione w tabeli 4.49 są nieokreślone, tzn. dla każdego $I \in \{F_1, \dots, F_{24}\}$ i dla każdej numeracji elementów porządku I istnieje taki wektor $v^{(i)} \in \mathbb{Z}^I$, że $q_I(v^{(i)}) < 0$.

Dowód. Ponieważ zmiana numeracji elementów porządku I nie wpływa na określoność (por. fakt 1.44 oraz fakt 1.55), aby udowodnić lemat, wystarczy zastosować algorytm 2.13 do 24 porządków $I \in \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{24}\}$ (dla dowolnej numeracji elementów I). \square

Uwaga 4.51. Alternatywny dowód lematu 4.50, dla przypadku porządków $I \in \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{24}\}$, $n := |I|$, których kołczan Hasse $\mathcal{H}(I)$ jest drzewem, jest następujący. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że wierzchołki kołczanu $\mathcal{H}(I)$ zostały ponumerowane zgodnie z porządkiem topologicznym, patrz uwaga 1.45. Łatwo sprawdzić, że $\bar{C}_I^{tr} \cdot G_I \cdot \bar{C}_I = \bar{G}_I$, gdzie $\bar{C}_I := C_I^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (tzw. macierz Eulera porządku I , patrz [108]) oraz $\bar{G}_I := \frac{1}{2} \cdot (\bar{C}_I + \bar{C}_I^{tr}) \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$. Z drugiej strony, macierz $\bar{C}_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ równa jest niesymetrycznej macierzy Grama $\check{G}_{\bar{\Delta}_I} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ grafu $\bar{\Delta}_I$, powstałego z $\mathcal{H}(I)$ przez pominięcie orientacji krawędzi (patrz [107, Proposition 2.12] oraz definicja A.1(d)). Aby zakończyć dowód, zauważmy, że $\bar{\Delta}_I \in \{\mathcal{T}_5; \tilde{\mathbb{D}}_n, 4 \leq n \leq 8; \tilde{\mathbb{E}}_6; \tilde{\mathbb{E}}_7; \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ jest grafem hiperkrytycznym (nazywanym też *hiperbolicznym*, patrz [68, Section 1]), który jest nieokreślony (patrz [68, 97]).

TABELA 4.52. DRZEWIA HIPERKRYTYCZNE



Lemat 4.53. Niech $I = \{1, 2, \dots, m\}$ będzie dodatnim skończonym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego kołczan Hasse przedstawiony jest w tabeli 3.18. Jeśli $|J| = m + 1 \geq 14$ jest porządkiem jednopikowym powstałym z I przez dodanie jednego wierzchołka minimalnego, to zachodzi dokładnie jedna z możliwości:

- (a) J jest izomorficzny z jednym z porządków ${}_p\mathbb{A}_{m'}^*, \mathbb{D}_{m'}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}$ przedstawionych w tabeli 3.18 i jest dodatnio określony,
- (b) J jest izomorficzny z jednym z porządków $\tilde{\mathfrak{D}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathfrak{D}}^{(7)}$ przedstawionych w tabeli 4.25 i jest główny,
- (c) J zawiera podzbiór częściowo uporządkowany izomorficzny z jednym z porządków przedstawionych w tabeli 4.49 i jest nieokreślony.

Dowód. Lemat udowodnimy rozważając kolejno wszystkie przypadki rozszerzenia porządków ${}_p\mathbb{A}_{m-1}^*, \mathbb{D}_{m-1}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}$ o wierzchołek minimalny a . Będziemy posługiwali się następującą notacją:

- będziemy pisać $a \rightarrow \{i_1, \dots, i_k\}$, jeśli w kołczanie Hasse porządku $J = I \cup \{a\}$ istnieją strzałki $a \rightarrow i_1, \dots, a \rightarrow i_k$,
- podporządki nieokreślone zaznaczać będziemy kolorem czerwonym, dodając na rysunku kołczanu strzałki wynikające z przechodniości relacji (jeśli nie będzie prowadziło to do niejednoznaczności).

Przypomnijmy, że zbiór częściowo uporządkowany I , który zawiera podporządek nieokreślony, też jest nieokreślony (patrz fakt 3.27(b)).

A. $I \equiv {}_p\mathbb{A}_{m-1}^*$, gdzie $0 \leq p \leq \frac{m}{2}$.

1) Rozważmy przypadek $p = 0$.

$$I = J \setminus \{a\} \simeq {}_0\mathbb{A}_{m-1}^* \simeq \begin{matrix} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{*} & m \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & m-2 & & m-1 & & \end{matrix}$$

Z przyjętych założeń wynika, że $a \rightarrow \{i\}$, tj. w kołczanie Hasse $\mathcal{H}(J)$ istnieje dokładnie jedna strzałka wychodząca z punktu a . Stąd porządek J :

(a) jest izomorficzny z:

- ${}_0\mathbb{A}_m^*$ jeśli $i = 1$,
- ${}_0\mathbb{D}_m^* \diamond \mathbb{A}_0$ jeśli $i = 2$
- \mathbb{D}_m^* jeśli $i = m - 1$,
- ${}_1\mathbb{A}_m^*$ jeśli $i = m$;

(b) nie jest izomorficzny z żadnym z porządków $\tilde{\mathfrak{D}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathfrak{D}}^{(7)}$;

(c) zawiera podporządek izomorficzny z \mathcal{F}_{22} , jeśli $i = 3, 4, 5$, lub \mathcal{F}_{21} , jeśli $5 < i < m - 1$.

2) Rozważmy teraz przypadek $0 < p \leq \frac{m}{2}$.

$$I = J \setminus \{a\} \simeq {}_p\mathbb{A}_{m-1}^* \simeq \begin{matrix} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{*} & m \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & p-1 & & p & & \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{*} & \\ p+1 & & p+2 & & p+3 & & & & m-2 & & m-1 & & \end{matrix}$$

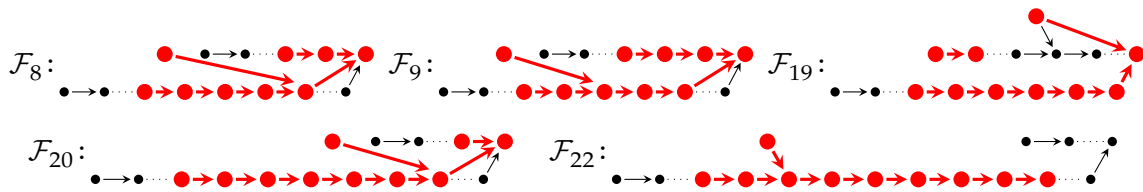
Z przyjętych założeń wynika, że $a \rightarrow \{i\}$ lub $a \rightarrow \{i, j\}$. Jeśli $a \rightarrow \{i\}$, to porządek J :

(a) jest izomorficzny z:

- ${}_p\mathbb{A}_m^*$ jeśli $i = p + 1$,
- ${}_{p+1}\mathbb{A}_m^*$ dla $p \neq \frac{m+1}{2}$ lub ${}_p\mathbb{A}_m^*$ dla $p = \frac{m+1}{2}$, jeśli $i = 1$,
- ${}_0\mathbb{D}_{m-p}^* \diamond \mathbb{A}_p$ jeśli $i = p + 2$,
- ${}_0\mathbb{D}_{p+1}^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}$ jeśli $i = 2$ oraz $p > 1$ lub $i = m$ oraz $p = 1$;

(b) nie jest izomorficzny z żadnym z porządków $\tilde{\mathfrak{D}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathfrak{D}}^{(7)}$;

(c) zawiera podporządek izomorficzny z $\mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{20}$ lub \mathcal{F}_{22} :



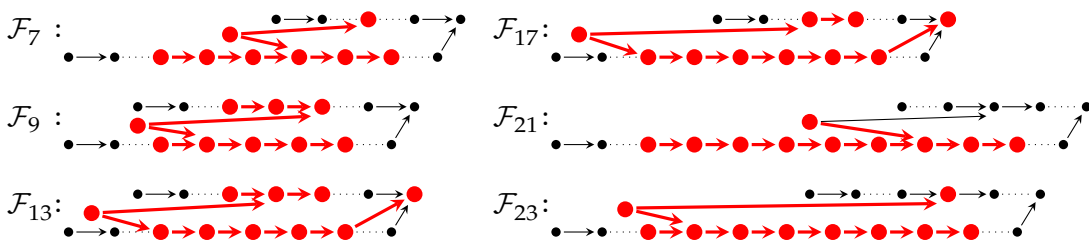
Jeśli $a \rightarrow \{i, j\}$, to porządek J :

(a') jest izomorficzny z:

- $\widehat{\mathbb{D}}_{p+1}^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}$ jeśli $(i, j) = (1, m - 1)$,
- $\widehat{\mathbb{D}}_{m-p}^* \diamond \mathbb{A}_p$ jeśli $(i, j) = (p, p + 1)$;

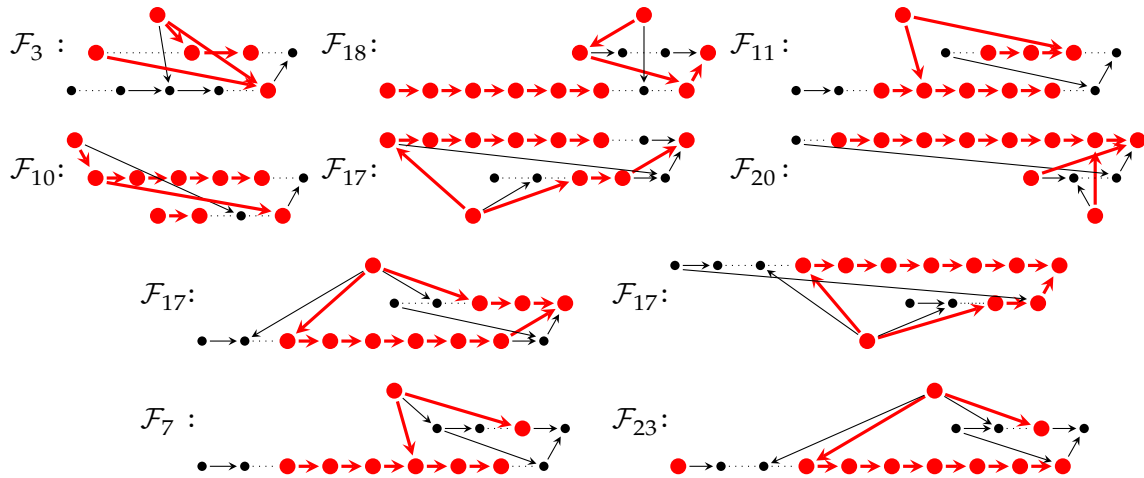
(b') nie jest izomorficzny z żadnym z porządków $\tilde{\mathfrak{D}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathfrak{D}}^{(7)}$;

(c') zawiera podporządek izomorficzny z $\mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{20}$, tak jak w przypadku (c), lub $\mathcal{F}_7, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{21}, \mathcal{F}_{23}$:



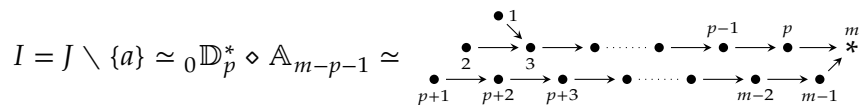
(b') jest izomorficzny z $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,p}^{(7)}$, jeśli $p \leq \frac{m}{2}$ lub $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,m-p}^{(7)}$, jeśli $p > \frac{m}{2}$, dla $(i, j) = (p, p + 1)$;

(c') zawiera podporządek izomorficzny z \mathcal{F}_5 , tak jak w przypadku (c), lub $\mathcal{F}_3, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{F}_{23}$:



$\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}$, gdzie $3 \leq m - 1$ oraz $0 \leq s \leq p - 1 \leq m - 1$. Zauważmy, iż z przyjętych założeń wynika, że $a \rightarrow \{i\}, a \rightarrow \{i, j\}$ lub $a \rightarrow \{i, j, k\}$.

1) Rozważmy przypadek $s = 0$.



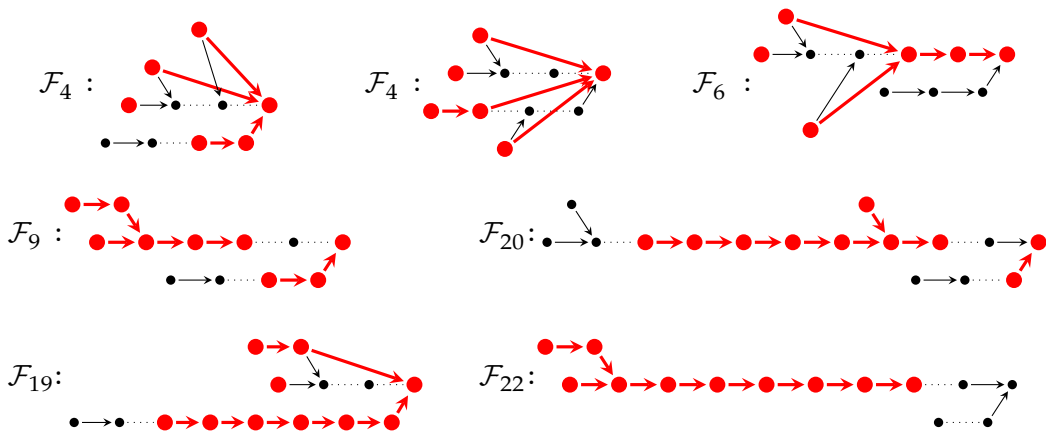
Jeśli $a \rightarrow \{i\}$, to porządek J :

(a) jest izomorficzny z $0\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}$, jeśli $i = p + 1$;

(b) jest izomorficzny z:

- $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,0,m-p+2,2}^{(6)}$ dla $i = p + 2$ oraz $p \leq \frac{m-1}{2}$,
- $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,0}^{(2)}$ dla $p = m - 1$,
- $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,0,p+2,2}^{(6)}$ dla $i = p + 2$ oraz $\frac{m-1}{2} < p < m - 1$;

(c) zawiera podporządek izomorficzny z $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{20}$ lub \mathcal{F}_{22} .

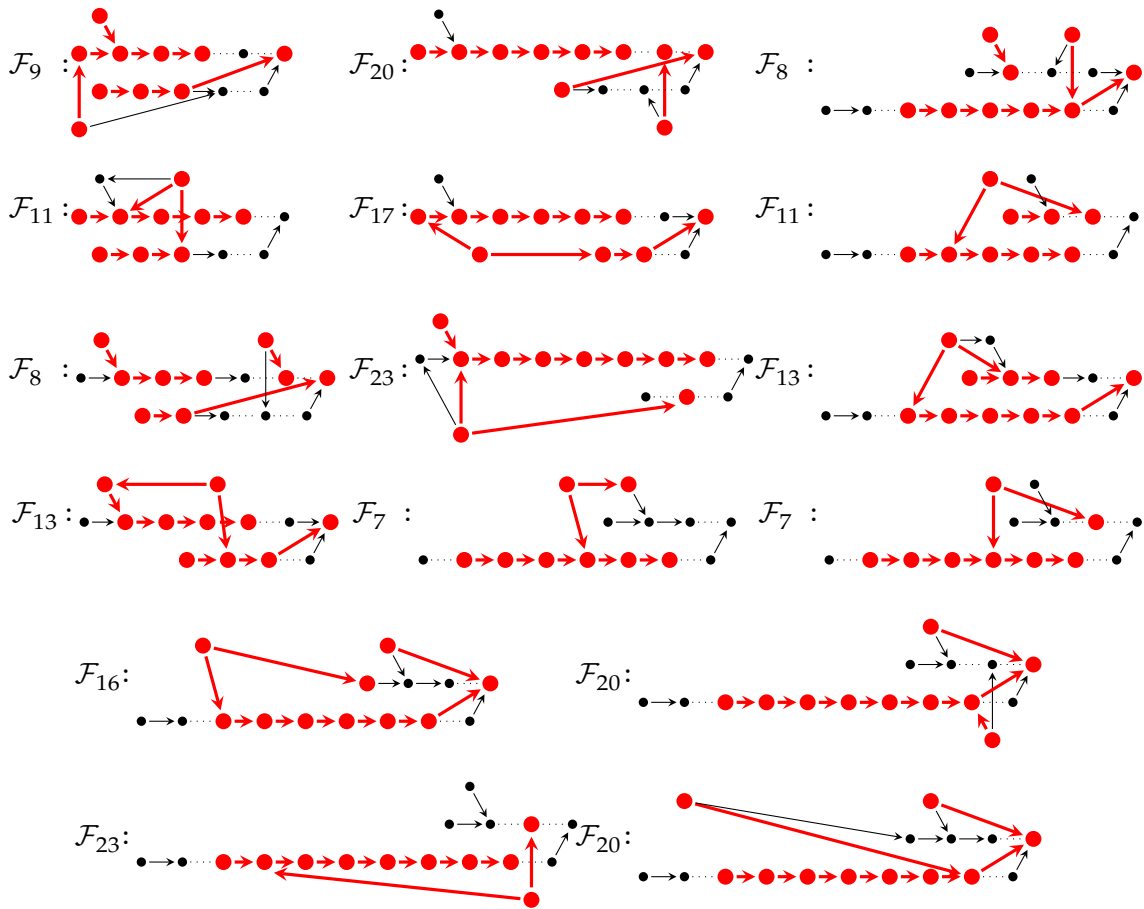


Jeśli $a \rightarrow \{i, j\}$, to porządek J :

(a') jest izomorficzny z $1\mathbb{D}_{p+1}^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}$ jeśli $(i, j) = (1, 2)$;

(b') nie jest izomorficzny z żadnym z porządków $\widetilde{\mathfrak{D}}^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathfrak{D}}^{(7)}$;

(c') zawiera podporządek izomorficzny z \mathcal{F}_6 , tak jak w przypadku (c), lub $\mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{F}_{23}$:

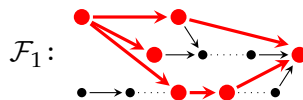


Jeśli $a \rightarrow \{i, j, k\}$, to porządek J :

(a'') nie jest izomorficzny z żadnym z porządków ${}_p\mathbb{A}_m^*, \mathbb{D}_m^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}$;

(b'') jest izomorficzny z $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,1,m+2-p}^{(4)}$, jeśli $(i, j, k) = (1, 2, m - 1)$ oraz $p < m - 1$;

(c'') zawiera podporządek izomorficzny z \mathcal{F}_1 :



2) Rozważmy przypadek $s > 0$.

$$I = J \setminus \{a\} \simeq {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1} \simeq$$

Jeśli $a \rightarrow \{i\}$, to porządek J :

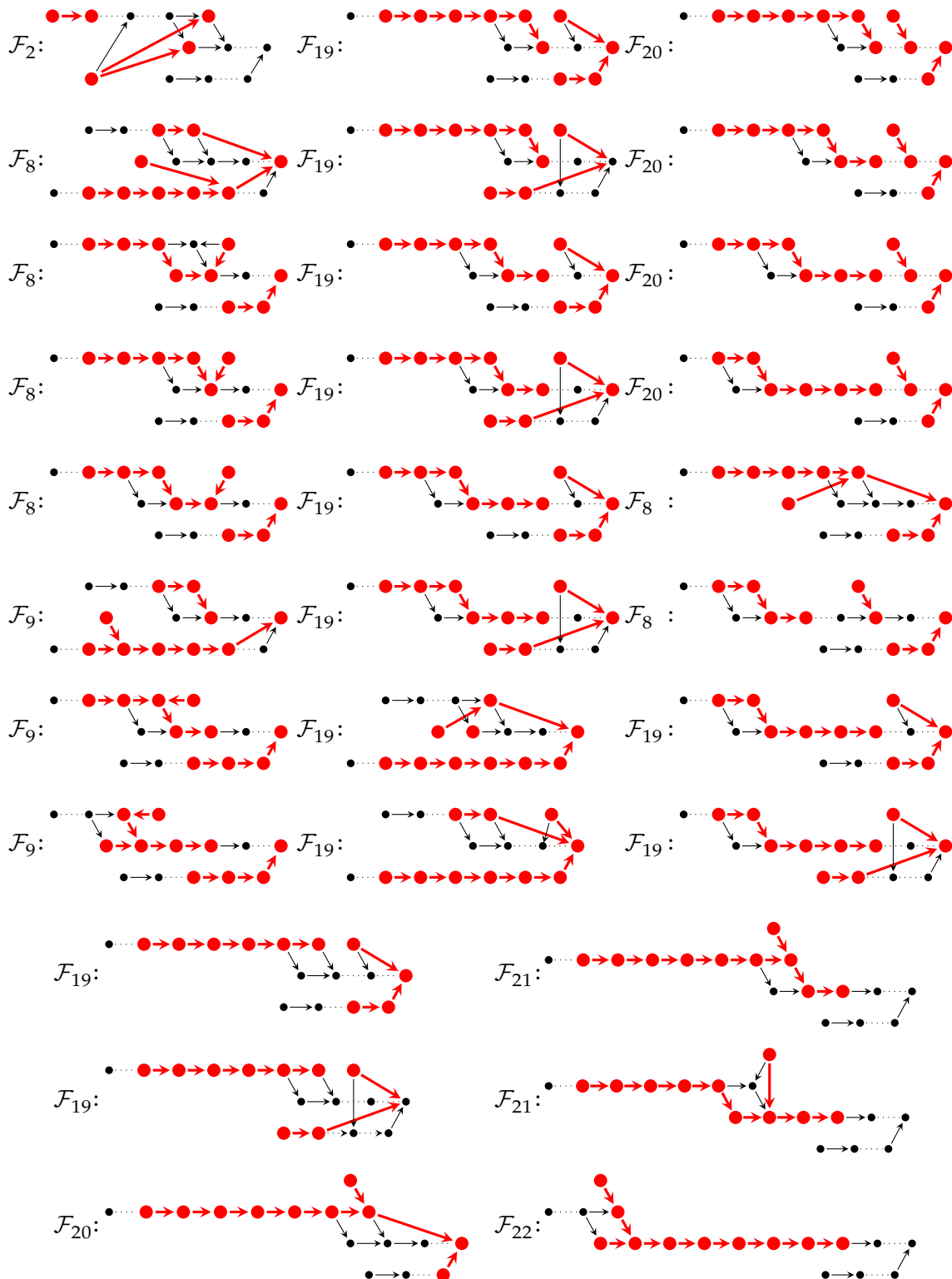
(a) jest izomorficzny z:

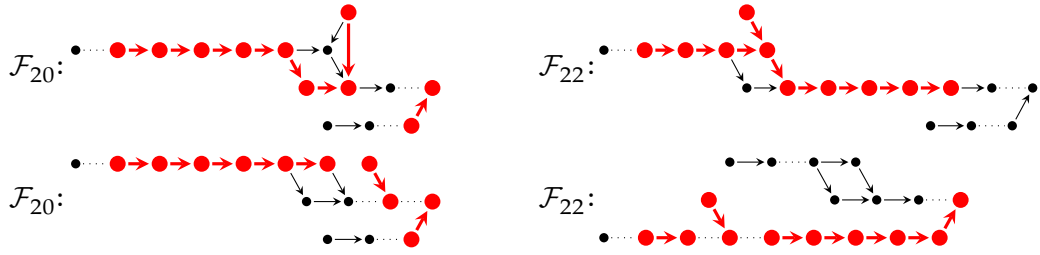
- ${}_{s+1}\mathbb{D}_{p+1}^* \diamond \mathbb{A}_{m-p-1}$ dla $i = 1$,
- ${}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}$ dla $i = p + 1$;

(b) jest izomorficzny z:

- $\tilde{\mathfrak{D}}_{m,1,m-p+2,3}^{(6)}$ dla $i=p+2, m-p < \frac{m}{2}, p < m,$
- $\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s}^{(2)}$ dla $i=p, m=p+1;$
- $\tilde{\mathfrak{D}}_{m,0,p+2,3}^{(6)}$ dla $i=p+2, m-p > \frac{m}{2}, p < m,$
- $\tilde{\mathfrak{D}}_{m,0,s+1,m-p+s+3}^{(5)}$ dla $i=2, s > 1;$

(c) zawiera podporządek izomorficzny z \mathcal{F}_6 tak jak w przypadku (c) dla $s = 0$ lub $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{F}_{21}, \mathcal{F}_{22}, \mathcal{F}_{24}$:





Jeśli $a \rightarrow \{i, j\}$, to porządek J :

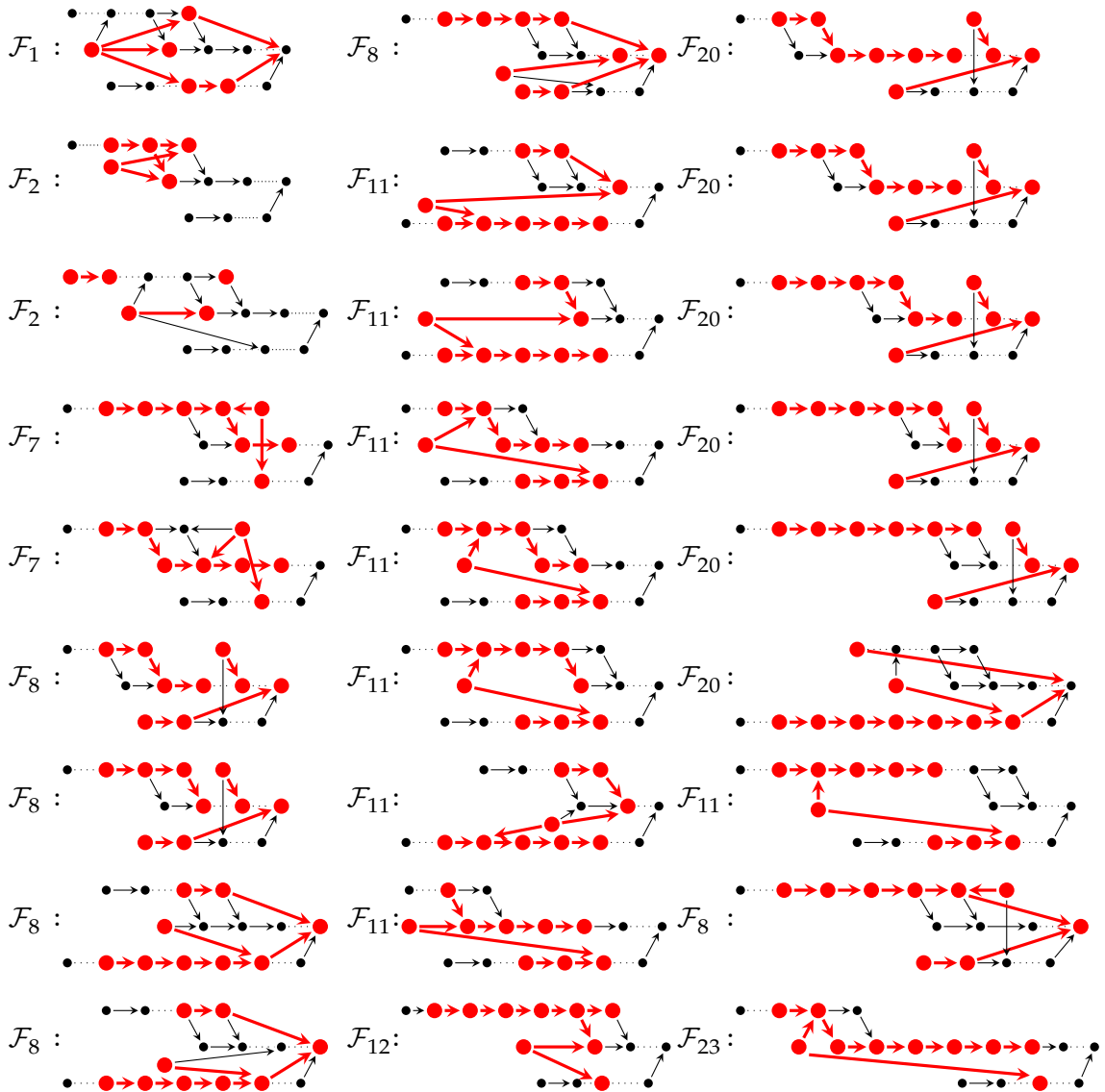
(a') nie jest izomorficzny z żadnym z porządków ${}_p A_m^*, \mathbb{D}_m^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond A_{m-p}, {}_s \mathbb{D}_p^* \diamond A_{m-p}$;

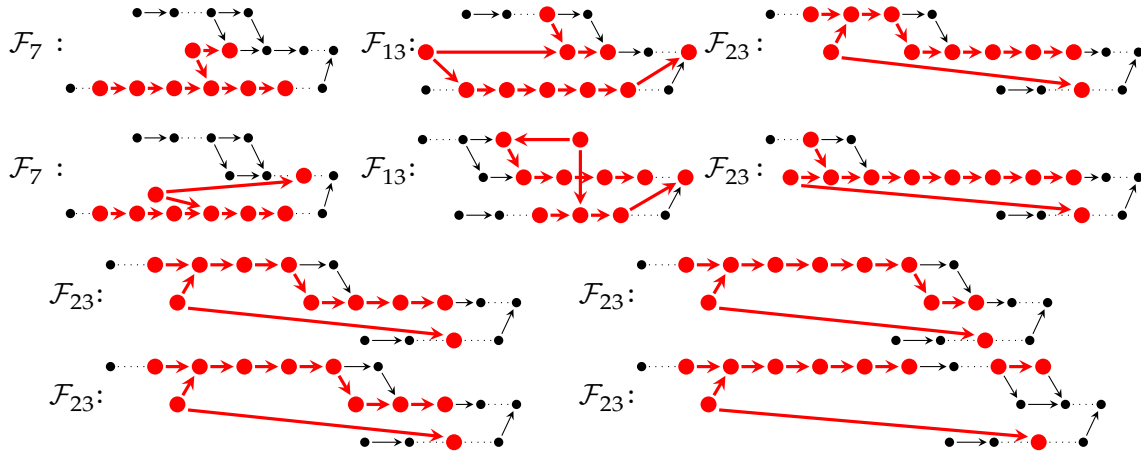
(b') jest izomorficzny z:

- $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,0,m-p+4}^{(1)}$ dla $(i, j) = (2, 3), s = 1$, • $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,s+1,m-p+s+2}^{(4)}$ dla $(i, j) = (1, m-1), p < m-1$,
- $\widetilde{\mathfrak{D}}_{m,m-p+s,m-p}^{(3)}$ dla $(i, j) = (p, p+1), s+3 \leq p \leq m-2$;

(c') zawiera podporządek izomorficzny z:

- \mathcal{F}_6 tak jak w przypadku (c) dla $s = 0$, • $\mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{17}$ tak jak w przypadku (c') dla $s = 0$,
- $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{20}, \mathcal{F}_{23}$:





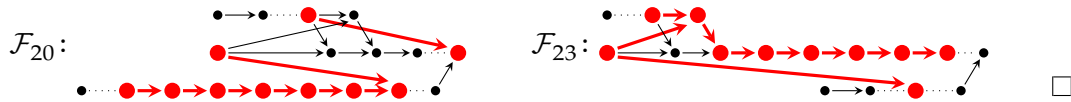
Jeśli $a \rightarrow \{i, j, k\}$, to porządek J :

(a'') nie jest izomorficzny z żadnym z porządków ${}_p\mathbb{A}_m^*, \mathbb{D}_m^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{m-p}$;

(b'') nie jest izomorficzny z żadnym z porządków $\widetilde{\mathfrak{D}}^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathfrak{D}}^{(7)}$;

(c'') zawiera podporządek izomorficzny z:

- \mathcal{F}_1 tak jak w przypadku (c') dla $s = 0$,
- $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_{11}$ tak jak w przypadku (c'),
- $\mathcal{F}_{20}, \mathcal{F}_{23}$:



Uwaga 4.54. Idea dowodu lematu 4.53 jest analogiczna do argumentacji użytej w dowodzie [46, Theorem 5.2(e)], natomiast nie odwołujemy się tu do diagramów Euklidesa oraz listy zbiorów częściowo uporządkowanych, które nie są Titsowo-dodatnie, przedstawionych przez Bondarenkę oraz Steepochkinę w pracach [11, 14, 15]. Ponadto pokazujemy, jak w naturalny sposób jednopikowe porządki główne uzyskuje się poprzez rozszerzenie jednopikowych porządków dodatnich (innych kształtów nie ma, patrz twierdzenie 4.26).

Pokażemy teraz, że lista porządków nieokreślonych przedstawiona w tabeli 4.49 i użyta w dowodzie lematu 4.53 jest *minimalna*. Symbolem $\mathcal{N}(I)$ oznaczamy będziemy zbiór wszystkich nieokreślonych podporządków porządku I .

Fakt 4.55. Niech $\mathcal{P}_{15} := \{I \cup \{a_{min}\}; I \in \{{}_p\mathbb{A}_{13}^*, \mathbb{D}_{13}^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{13-p}, {}_s\mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{13-p}\}\}$ oznacza zbiór wszystkich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych wielkości 15, które powstają przez rozszerzenie jednopikowego porządku dodatniego I , $|I| = 14$, o element minimalny a_{min} ,

$$\mathcal{N}_{15} := \{J \in \mathcal{P}_{15}; J \text{ jest nieokreślony}\}, \quad \mathcal{L}_{15} := \bigcup_{J \in \mathcal{P}_{15}} \mathcal{N}(J).$$

- (a) Zbiór \mathcal{N}_{15} składa się z $|\mathcal{N}_{15}| = 2826$ porządków, które zawierają $|\mathcal{L}_{15}| = 12339$ nieizomorficznych podporządków nieokreślonych.
- (b) Wystarczy znajomość 24 nieizomorficznych porządków $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{15}$ aby zweryfikować, że do zbioru \mathcal{N}_{15} należą wyłącznie porządki nieokreślone. Innymi słowy, jeśli $\check{\mathcal{L}}_{15} \subseteq \mathcal{L}_{15}$ spełnia

$$\forall J \in \mathcal{N}_{15} \exists \mathcal{F} \in \check{\mathcal{L}}_{15} \mathcal{F} \subseteq J, \quad (*)$$

to $|\check{\mathcal{L}}_{15}| \geq 24$. Ponadto, jeśli $|\check{\mathcal{L}}_{15}| = 24$, to liczba porządków $\mathcal{F} \in \check{\mathcal{L}}_{15}$, których bigraf $\bar{\Delta}_{\mathcal{F}}$ (powstały z kołczanu Hasse $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ przez pominięcie orientacji krawędzi) nie jest drzewem, wynosi co najmniej 8.

Lemat 4.58. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym głównym jednolitym funkcjonałem kwadratowym oraz $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Jeśli $\mathbf{h}_s = \pm 1$, to dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi równość

$$q(x) = q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot \mathbf{h}_s \cdot x_s,$$

gdzie $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $q^{(s)} := q|_{x_s=0}$, jest spójnym dodatnio określonym funkcjonałem kwadratowym, $b_{q^{(s)}}: \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $b_{q^{(s)}}(x, y) := \frac{1}{2}[q^{(s)}(x+y) - q^{(s)}(x) - q^{(s)}(y)]$, polaryzacją funkcjonału $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x^{(s)} := [x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^{n-1}$ dla dowolnego $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\mathbf{h}^{(s)} \in \mathcal{R}_{q^{(s)}} := \{v \in \mathbb{Z}^{n-1}; q^{(s)}(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$.

Dowód. Dla dowolnego $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$ symbolem $\tilde{x}^{(s)} := x|_{x_s=0} \in \mathbb{Z}^n$ oznaczajmy wektor $\tilde{x}^{(s)} := [x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$. Zauważmy, że spójność i dodatniość funkcjonału $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ wynika z lematu 4.11 (zastosowanego do bigrafu Δ_q , patrz definicja A.8(b)), natomiast równość $q^{(s)}(\mathbf{h}^{(s)}) = 1$ wynika z lematu 4.3(a), ponieważ

$$1 = q(-e_s) = q(-e_s + \mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}) = q(\tilde{\mathbf{h}}^{(s)}) = q^{(s)}(\mathbf{h}^{(s)}).$$

Z definicji polaryzacji funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q(x) &= q(\tilde{x}^{(s)} + x_s \cdot e_s) = q(\tilde{x}^{(s)}) + q(x_s \cdot e_s) + 2 \cdot b_q(\tilde{x}^{(s)}, x_s \cdot e_s) = \\ &= q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 + 2 \cdot x_s \cdot b_q(\tilde{x}^{(s)}, e_s). \end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód, pokażemy, że $b_q(\tilde{x}^{(s)}, e_s) = -\mathbf{h}_s \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)})$. Zauważmy, że

$$0 = b_q(e_i, \mathbf{h}) = b_q(e_i, (\mathbf{h} - \mathbf{h}_s \cdot e_s) + \mathbf{h}_s \cdot e_s) = b_{q^{(s)}}(e_i^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) + \mathbf{h}_s \cdot b_q(e_i, e_s),$$

na podstawie założeń oraz lematu A.15. Stąd $b_q(e_i, e_s) = -\mathbf{h}_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_i^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)})$ oraz

$$\begin{aligned} b_q(\tilde{x}^{(s)}, e_s) &= b_q\left(\sum_{i \neq s} x_i \cdot e_i, e_s\right) = \sum_{i \neq s} x_i \cdot b_q(e_i, e_s) = -\sum_{i \neq s} x_i \cdot \mathbf{h}_s \cdot b_{q^{(s)}}(e_i^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \\ &= -\mathbf{h}_s \cdot b_{q^{(s)}}\left(\sum_{i \neq s} x_i \cdot e_i^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}\right) = -\mathbf{h}_s \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}). \quad \square \end{aligned}$$

Uwaga 4.59. Lemat 4.58 sugeruje alternatywną do algorytmu 4.28 metodę generowania spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I : każdy taki I można skonstruować na podstawie porządku dodatniego J , $|J| = |I| - 1$, pierwiastka $v \in \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^J$ oraz indeksu $s \in \{1, \dots, |I|\}$ (por. [99, Algorithm 4.8]. W rozprawie posługujemy się algorytmem 4.28, ponieważ umożliwia on generowanie porządków dowolnej korangi i nie wymaga kosztownego obliczania zbioru pierwiastków, por. uwaga 2.22(a).

Założmy, że I jest spójnym głównym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego jądro ma postać $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^m$. Na podstawie faktu 4.3(b) wiemy, że istnieje co najmniej jeden indeks $i \in \{1, \dots, m\}$, dla którego $\mathbf{h}_i^I = \pm 1$. Wskażemy teraz oszacowanie minimalnej liczby takich indeksów w zależności od typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (definicja 4.14). W szczególności pokażemy, że istnieją co najmniej cztery takie indeksy, jeśli $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}\}$.

Lemat 4.60. Niech I będzie m -elementowym spójnym głównym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego jądro ma postać $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^m$, gdzie $0 \neq \mathbf{h}^I = [\mathbf{h}_1^I, \dots, \mathbf{h}_m^I] \in \mathbb{Z}^m$. Jeśli $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-1}, \mathcal{D}_{m-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jest typem Dynkina porządku I a $\text{idx}_\perp := \{j; \mathbf{h}_j^I = \pm 1\}$ jest zbiorem indeksów, dla których współrzędne wektora $\mathbf{h}^I = [\mathbf{h}_1^I, \dots, \mathbf{h}_m^I] \in \mathbb{Z}^m$ równe są ± 1 , to: (i) $|\mathbf{h}_i^I| \leq r_{\text{Dyn}_I}$ oraz (ii) $|\text{idx}_\perp| \geq s_{\text{Dyn}_I} \geq 1$, gdzie

$$r_{\text{Dyn}_I} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{A}_{m-1}, \\ 2, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{D}_{m-1}, \\ 3, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_6, \\ 4, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_7, \\ 6, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_8, \end{cases} \quad s_{\text{Dyn}_I} = \begin{cases} 4, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{A}_{m-1} \text{ lub } \text{Dyn}_I = \mathcal{D}_{m-1}, \\ 3, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_6, \\ 2, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_7, \\ 1, & \text{jeśli } \text{Dyn}_I = \mathcal{E}_8. \end{cases}$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że elementy porządku I ponumerowane są topologicznie (patrz uwaga 1.45) i stąd I możemy utożsamiać z bigrafem Δ_I (1.41), gdzie $\tilde{C}_{\Delta_I} := C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$. Ponadto będziemy stosować następujące oznaczenia: dla $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$ przez $|v| \in \mathbb{N}^m$ rozumieć będziemy wektor $|v| := [|v_1|, \dots, |v_m|] \in \mathbb{N}^m$; będziemy pisać $u \leq v$ dla $u, v \in \mathbb{Z}^m$, jeśli $u_i \leq v_i$ dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$.

Lemat udowodnimy przy pomocy argumentów analogicznych do użytych w dowodzie twierdzenia A.30. Załóżmy, że Δ jest spójnym głównym grafem krawędziowo-dwudzielnym (bez pętli) oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \mathbb{Z}^m$, gdzie $0 \neq \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^m$. Przypomnijmy, że inflacja (definicja A.23) jest operacją, która przeprowadza spójny główny bigraf Δ w słabo z nim \mathbb{Z} -kongruentny spójny główny bigraf Δ' (bez pętli), patrz lemat A.26. Z definicji inflacji $\Delta \mapsto \Delta'$ wynika, że wektor $\mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^m$ generujący jądro $\text{Ker } q'_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^m$ bigrafu Δ' ma postać:

- (a) $\mathbf{h}' = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{a-1}, \quad -\mathbf{h}_a \quad , \mathbf{h}_{a+1}, \dots, \mathbf{h}_m]$, jeśli $\Delta \xrightarrow{\bar{t}_a} \Delta'$ oraz
 (b) $\mathbf{h}' = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{a-1}, \mathbf{h}_a + d_{ab}^\Delta \cdot \mathbf{h}_b, \mathbf{h}_{a+1}, \dots, \mathbf{h}_m]$, jeśli $\Delta \xrightarrow{\bar{t}_{ab}} \Delta'$,

gdzie $\check{G}_\Delta = [d_{ab}^\Delta] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama (definicja A.1(d)).

Na podstawie dowodu twierdzenia A.30 (patrz też algorytm inflacyjny A.33, [111, Algorithm 3.1] oraz [81, Algorithm 4.3]), istnieje skończona seria inflacji, która przeprowadza bigraf $\Delta := \Delta_I$ w graf Euklidesa $\Delta^k \simeq \tilde{D} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_{m-1}, \tilde{\mathbb{D}}_{m-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (patrz tabela 4.4),

$$\Delta_I = \Delta \xrightarrow{\bar{t}_{a_0}} \Delta^1 \xrightarrow{\bar{t}_{a_1}} \Delta^2 \cdots \Delta^{s-1} \xrightarrow{\bar{t}_{a_{s-1}}} \Delta^s \xrightarrow{\bar{t}_{a_s b_s}} \Delta^{s+1} \cdots \Delta^{k-1} \xrightarrow{\bar{t}_{a_{k-1} b_{k-1}}} \Delta^k \simeq \tilde{D},$$

taka że $0 \leq \mathbf{h}^s = |\mathbf{h}|$, gdzie $\text{Ker } q_\Delta^s = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^s \subseteq \mathbb{Z}^m$ oraz $s \leq m$. Stąd, na podstawie własności (a) oraz (b), otrzymujemy:

$$|\mathbf{h}^I| = |\mathbf{h}| = |\mathbf{h}^1| = |\mathbf{h}^2| = \cdots = |\mathbf{h}^s| \leq |\mathbf{h}^{s+1}| \leq \cdots \leq |\mathbf{h}^{k-1}| \leq |\mathbf{h}^k| = |\mathbf{h}^{\tilde{D}}|, \quad (*)$$

gdzie $\text{Ker } q_\Delta^i = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^i \subseteq \mathbb{Z}^m$. Łatwo sprawdzić, że $\text{Dyn}_I = [D]_\simeq$, gdzie $D := \tilde{D}^{(m)} = \tilde{D} \setminus \{m\}$ i stąd, na podstawie analizy wektorów $\mathbf{h}^{\tilde{D}} \in \mathbb{Z}^m$ opisanych w lemacie 4.5(a), wnioskujemy że prawdziwa jest nierówność (i): $|\mathbf{h}_i^I| \leq r_{\text{Dyn}_I}$.

Zauważmy, że nierówność (*) podaje górne ograniczenie na liczbę współrzędnych wektora $\mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^m$ równych ± 1 , tj. $|\text{id}x_{\mathbb{1}}| \leq \bar{s}_{\text{Dyn}_I}$, gdzie $\bar{s}_{\text{Dyn}_I} \in \{m, 4, 3, 2, 1\}$ dla $\text{Dyn}_I \in \{\mathbb{A}_{m-1}, \mathbb{D}_{m-1}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, odpowiednio. Aby wykazać, że ograniczenie dolne wynosi $1 \leq s_{\text{Dyn}_I} \leq |\text{id}x_{\mathbb{1}}|$, rozważmy dwa przypadki, gdzie symbolem $\text{Euc}_I := \tilde{D}$ oznaczamy diagram Euklidesa kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z I . Zauważmy, że $\text{Dyn}_I = [D]_\simeq \Leftrightarrow \text{Euc}_I = \tilde{D}$, gdzie $D := \tilde{D} \setminus \{m\}$.

Przypadek 1° Załóżmy, że wektor $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1 \dots, \mathbf{h}_m] := \mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^m$ jest wierny (tj. $\mathbf{h}_i \neq 0$ dla każdego $1 \leq i \leq m$). Z nierówności (*) wynika, że $0 \neq \mathbf{h}_i \leq \mathbf{h}_i^{\tilde{D}}$ dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$. Stąd równość $\mathbf{h}_i^{\tilde{D}} = 1$ implikuje, że $\mathbf{h}_i = 1$ i w konsekwencji $|\text{id}x_{\mathbb{1}}| = \bar{s}_{\text{Dyn}_I} \geq s_{\text{Dyn}_I} \geq 1$, tj. prawdziwa jest nierówność (ii).

Przypadek 2° Załóżmy teraz, że wektor $\mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^m$ nie jest wierny. Definiujemy podzbiór częściowo uporządkowany $J := I|_{\text{supp } \mathbf{h}^I} = I \setminus \mathcal{I} \subseteq I$, gdzie $\mathcal{I} := \{j; \mathbf{h}_j^I = 0\}$. Porządek J jest główny oraz $\text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^J \subseteq \mathbb{Z}^J$, gdzie $\mathbf{h}^J := (\mathbf{h}^I)^{(\mathcal{I})} \in \mathbb{Z}^J$. Innymi słowy, $\mathbf{h}^J \in \mathbb{Z}^J$ jest wektorem wiernym, który powstaje z $\mathbf{h}^I \in \mathbb{Z}^I$ przez opuszczenie współrzędnych, dla których $\mathbf{h}_i^I = 0$. Zauważmy, że porządek J jest spójny. Gdyby $J = J_1 \cup J_2$, gdzie $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ oraz $J_1, J_2 \neq \emptyset$, to wektor $0 \neq \check{\mathbf{h}} := \mathbf{h}^J|_{J_1=0} \in \mathbb{Z}^J$ spełniałby $\check{\mathbf{h}} \in \text{Ker } q_J = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^J \subseteq \mathbb{Z}^J$, co nie jest możliwe (ponieważ wektor $\mathbf{h}^J \in \mathbb{Z}^J$ jest wierny a $\check{\mathbf{h}}_i = 0$ dla $i \in J_1$). Stosując do porządku J rozumowanie przedstawione w przypadku 1° pokazujemy prawdziwość

nierówności (ii) dla $J \subseteq I$. W szczególności, z tabeli 4.40 otrzymujemy, że $|\text{idx}_\perp| \geq 4$ jeśli typem Dynkina porządku J jest diagram $\mathcal{A}_{|J|-1}$.

Aby zakończyć dowód, pokażemy, że $s_{\text{Dyn}_J} \geq s_{\text{Dyn}_{J'}}$, tj. wektor $\mathbf{h}^J \subseteq \mathbf{h}^{J'}$ zawiera co najmniej $s_{\text{Dyn}_{J'}}$ współrzędnych, dla których $\mathbf{h}_i^J = \pm 1$. Precyzyjniej: udowodnimy, że zawieranie $J \subseteq I$ implikuje, że $\text{Dyn}_J \subseteq \text{Dyn}_I$ a stąd $\text{Euc}_J \subseteq \text{Euc}_I$. Rozważmy, jakie są możliwe postaci grafów Euc_J oraz Euc_I . Analiza diagramów Euklidesa (tabela 4.4) pokazuje, że możliwe są następujące zawierania: $\tilde{\mathbb{A}}_* \subset \tilde{\mathbb{D}}_* \subset \tilde{\mathbb{E}}_6 \subset \tilde{\mathbb{E}}_7 \subset \tilde{\mathbb{E}}_8$. Przykładowo: $\text{Euc}_I = \tilde{\mathbb{E}}_6$ implikuje $\text{Euc}_J \in \{\tilde{\mathbb{A}}_{|J|-1}, \tilde{\mathbb{D}}_{|J|-1}, \tilde{\mathbb{E}}_6\}$ oraz $\text{Euc}_J \notin \{\tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$. Ponieważ $s_{\mathcal{A}_*} \geq s_{\mathcal{D}_*} > s_{\mathcal{E}_6} > s_{\mathcal{E}_7} > s_{\mathcal{E}_8}$, wektor $\mathbf{h}^J \subseteq \mathbf{h}^I$ zawiera co najmniej $s_{\text{Dyn}_J} \geq s_{\text{Dyn}_I}$ współrzędnych, dla których $\mathbf{h}_i^J = \pm 1$.

Na podstawie twierdzenia A.30, istnieje indeks $s \in I$, taki że $\mathbf{h}_s^I = \mathbf{h}_s^J = \pm 1$. Rozważmy spójne, dodatnie porządki $J^{(s)} \subseteq I^{(s)}$ (lemat 4.11). Zauważmy, że zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} \text{Euc}_I &= \tilde{D}_I \sim_{\mathbb{Z}} I \supseteq I^{(s)} \sim_{\mathbb{Z}} D\Delta_{I^{(s)}} \equiv \text{Dyn}_I \\ &\quad \cup \quad \cup \quad \cup \quad \cup \\ \text{Euc}_J &= \tilde{D}_J \sim_{\mathbb{Z}} J \supseteq J^{(s)} \sim_{\mathbb{Z}} D\Delta_{J^{(s)}} \equiv \text{Dyn}_J \end{aligned}$$

Zbiory pierwiastków $\mathcal{R}_{I^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^{m-1}$ oraz $\mathcal{R}_{J^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^{|J|-1}$ są zredukowanymi nieprzywiedlnymi systemami pierwiastków (patrz lemat B.8 oraz fakt 2.16) w sensie Bourbaki (definicja B.3). Ponadto

$$\mathcal{R}_{J^{(s)}} = \{w^{(\mathcal{Z})}; w \in \tilde{\mathcal{R}}_{I^{(s)}}\} \subseteq \mathbb{Z}^{J^{(s)}} \equiv \mathbb{Z}^{m-|\mathcal{Z}|-1},$$

gdzie $\tilde{\mathcal{R}}_{I^{(s)}} = \{w \in \mathcal{R}_{I^{(s)}}; \forall_{i \in \mathcal{Z}} w_i = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^{I^{(s)}} \equiv \mathbb{Z}^{m-1}$ oraz $w^{(\mathcal{Z})} \in \mathbb{Z}^{m-|\mathcal{Z}|-1}$ jest wektorem, który powstaje z wektora $w \in \mathbb{Z}^{m-1}$ przez opuszczenie współrzędnych o indeksach należących do zbioru \mathcal{Z} . Stąd wnioskujemy, że jednorodny diagram Dynkina (definicja B.12(c)) $D_{\mathcal{R}_{J^{(s)}}} = \text{Dyn}_{J^{(s)}} = \text{Dyn}_J$ stowarzyszony z systemem pierwiastków $\mathcal{R}_{J^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^{J^{(s)}}$ jest podgrafem diagramu $D_{\mathcal{R}_{I^{(s)}}} = \text{Dyn}_{I^{(s)}} = \text{Dyn}_I$, co kończy dowód. \square

Dowód twierdzenia 4.26

Twierdzenie 4.26 można udowodnić przy pomocy argumentów analogicznych do użytych w dowodzie lematu 4.53. Dowód taki byłby bardzo długi i żmudny, ponieważ rozszerzenie jednopikowych spójnych porządków głównych prowadzi do porządków głównych, nieokreślonych oraz 14 serii jednopikowych porządków korangi 2 (por. tabela 5.44). Dlatego w dysertacji przedstawiamy dowód oparty o opis struktury spójnych głównych jednolitych funkcjonałów kwadratowych (lemat 4.58).

Dowód twierdzenia 4.26. Ponieważ typy Euklidesa $\tilde{DI} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_{I_m}, \tilde{\mathbb{D}}_{I_m}, \tilde{\mathbb{E}}_{I_6}, \tilde{\mathbb{E}}_{I_7}, \tilde{\mathbb{E}}_{I_8}\}$ oraz Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego głównego $(m+1)$ -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I są równoważne (patrz lemat 4.17(b)), bez zmniejszenia ogólności rozważań, w dowodzie będziemy rozważać tylko typ Dynkina.

Założmy, że $I = (\{1, \dots, m+1\}, \leq_I)$ jest jednopikowym głównym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego jedynym elementem maksymalnym jest $m+1$. Zauważmy, że porządek I jest spójny (ponieważ $i \leq_I m+1$ dla każdego $i \in I$) oraz $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz definicja 4.14 oraz lemat 4.17(a)).

(c), (d), (e) Dowód ma charakter obliczeniowy. Przy pomocy algorytmu 4.28 wyznaczamy wszystkie porządki główne I spełniające $7 \leq |I| \leq 9$. Jest ich dokładnie 5 405, w tym 3 600 spójnych oraz 754 jednopikowych.

m	$\#I$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(1)}$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s}^{(2)}$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(3)}$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(4)}$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(6)}$	$\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s}^{(7)}$	$\tilde{\mathfrak{E}}I_6$	$\tilde{\mathfrak{E}}I_7$	$\tilde{\mathfrak{E}}I_8$
7	61	6	3	3	6	4	6	2	31	0	0
8	184	10	4	6	10	10	10	2	0	132	0
9	509	15	5	10	15	20	19	3	0	0	422

Następnie weryfikujemy, że liczba porządków jednopikowych I typu $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ wynosi 31, 132 i 422 odpowiednio, oraz że są to porządki izomorficzne z przedstawionymi w [52, Table 4.1], [52, Table 4.2] oraz [51].

(a), (b) Załóżmy, że $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m\}$ oraz $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \subseteq \mathbb{Z}^{m+1}$. Na podstawie lematu 4.60, istnieje indeks $s \in \{1, \dots, m\}$ spełniający $\mathbf{h}_s^I = \pm 1$. Ponieważ $I^{(s)} := I \setminus \{s\}$ jest spójnym dodatnim porządkiem (wniosek 4.12), który jest jednopikowy (gdyż $s \neq m+1$), więc porządek $I^{(s)} \subseteq I$ jest izomorficzny z jednym z czterech typów porządków przedstawionych w tabeli 3.18: ${}_p\mathbb{A}_n^*$, jeśli $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_m$; lub $\mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p',s} \mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p'}$, jeśli $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_m$, gdzie $n := m-1$ (patrz twierdzenie 3.17(g)).

Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że elementy porządku I zostały ponumerowane w taki sposób, że macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{m+1}(\mathbb{Z})$ jest górnotrójkątna a macierz incydencji $C_J \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ podporządku $J := I^{(s)} \subseteq I$ równa jest macierzy incydencji jednego z czterech typów porządków ${}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p',s} \mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p'}$, których elementy ponumerowano tak jak w tabeli 3.18. Zauważmy, że przy takich założeniach porządek I jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcjonal kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^{m+1} \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$q_I(x) := x \cdot C_I \cdot x^{tr} = q_J(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q_J}(x^{(s)}, u) \cdot u_s \cdot x_s, \quad (*)$$

gdzie $u \in \mathcal{R}_{q_J} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z}^m$, $u_s = \pm 1$ oraz $b_{q_J}: \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest polaryzacją funkcjonu $q_J: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, patrz lemat 4.58. Ponieważ $q_J(u) = q_J(-u) = 1$ dla każdego $u \in \mathcal{R}_{q_J} \subseteq \mathbb{Z}^m$ oraz $b_{q_J}: \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonalem dwuliniowym symetrycznym, który można przedstawić w postaci $b_{q_J}(x, y) = x \cdot G_J \cdot y^{tr}$ (A.13), równość (*) można zapisać jako

$$q_I(x) = q_J(x^{(s)}) + x_s^2 + (u \cdot \widehat{G}_J \cdot x^{(s)tr}) \cdot x_s, \quad \text{gdzie } \widehat{G}_J := C_J + C_J^{tr}. \quad (**)$$

Podsumowując, porządek I można skonstruować z dodatniego porządku jednopikowego J przedstawionego w tabeli 3.18, zgodnie z opisem (**), tj. $I := J(u, s)$, gdzie $u \in \mathcal{R}_{q_J} \subseteq \mathbb{Z}^m$ oraz $s \in \{1, \dots, n\}$. Aby udowodnić stwierdzenia (a) oraz (b) rozważamy możliwe rozszerzenia dodatniego porządku $J \in \{{}_p\mathbb{A}_n^*, \mathbb{D}_n^*, \widehat{\mathbb{D}}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p',s} \mathbb{D}_p^* \diamond \mathbb{A}_{n-p'}\}$ do jednopikowego spójnego porządku głównego $I := J(u, s)$. Zauważmy, że założenie $I = J(u, s)$ implikuje, iż współrzędne wektora $\hat{u} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n] := u \cdot \widehat{G}_J$ spełniają warunki: $\hat{u}_i \in \{0, 1\}$ oraz $\hat{u}_n = 1$.

(i) Załóżmy, że $J = {}_p\mathbb{A}_n^* \cong$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & p-1 & \rightarrow & p & \rightarrow & n+1 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ p+1 & & p+2 & & p+3 & & & & n-1 & & n & & \end{array},$$

$$\mathcal{R}'_J := \{e_i, 1 \leq i \leq n+1\} \cup$$

$$\cup \{e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq p\} \cup$$

$$\cup \{e_i - e_{n+1}, 1 \leq i \leq p\} \cup$$

$$\cup \{e_i - e_j, p+1 \leq i < j \leq n+1\} \cup$$

$$\cup \{e_i + e_j - e_{n+1}, 1 \leq i \leq p < j \leq n\},$$

$$\widehat{G}_J := \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & & & & & 1 \\ 2 & 1 & \dots & 1 & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ 1 & \dots & & 1 & & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & & & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 2 & & & \dots \\ \hline & & & & 2 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & 1 & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots & 1 & \dots \\ & & & & 1 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ \dots \\ p \\ p+1 \\ \dots \\ n \\ n+1 \end{array}.$$

Pokażemy, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; q_J(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ ma postać $\mathcal{R}_J =$

- $\tilde{\mathcal{D}}_{n+1,s',p',u'}^{(6)}$ jeśli $u \in \{e_{s+1} + e_{s+2} + e_i - 2 \cdot e_{n+1}, p+1 \leq i \leq n\}$;
- $\tilde{\mathcal{D}}_{n+1,s',p'}^{(1)} \tilde{\mathcal{D}}_{n+1,s',p',u'}^{(5)}$ jeśli $u \in \{e_{s+1} + e_{s+2} - e_i, s+3 \leq i \leq p; e_i - e_{s+1} - e_{s+2}, 1 \leq i \leq s\}$.

(h),(g) Na podstawie (a) wiemy, że $\mathbf{Dyn}_I \neq \mathcal{A}_n$. Z lematu 4.57 (dla $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_m$) oraz twierdzenia 4.47 (dla $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$) wynika, że $I \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{\mathcal{D}}_n, \tilde{\mathcal{E}}_6, \tilde{\mathcal{E}}_7, \tilde{\mathcal{E}}_8\}$ a stąd $I \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}I$ na podstawie faktu 4.9.

(f) Teza jest konsekwencją (g) oraz faktu 1.55 (podpunkty (a), (c)) i stąd dowód twierdzenia 4.26 jest zakończony. \square

Zauważmy, że twierdzenie 4.26(a) zawiera następujące rozwiązanie problemu [52, Problem 1.6].

Wniosek 4.61. *Jeśli J jest głównym m -elementowym jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym, to $J \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}_{m-1}$, tzn. $\mathbf{Dyn}_J \neq \mathcal{A}_{m-1}$.*

Dowód twierdzenia 4.24

Możemy teraz udowodnić główny wynik niniejszego rozdziału: twierdzenie 4.24, które podsumowuje własności spektralne spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I , które są jednopikowe lub mają co najwyżej $|I| \leq 15$ elementów.

Dowód twierdzenia 4.24. Załóżmy, że I, J są spójnymi głównymi zbiorami częściowo uporządkowanymi. Implikacja (a) \Rightarrow (b) oraz równoważność (b) \Leftrightarrow (c) wynikają z lematu 4.22 (podpunkty (a) oraz (b)).

(ii) Załóżmy, że $|I| \leq 15$ oraz $|J| \leq 15$. Implikacja (b) \Rightarrow (a), wynika z twierdzenia 4.47.

(i) Załóżmy, że porządki I oraz J są jednopikowe. Zauważmy, że równoważności (d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) wynikają z twierdzenia 4.18, implikacja (c) \Rightarrow (d) wynika wprost z definicji typu Coxetera-Euklidesa (patrz definicja 4.20(b)), a (f) \Rightarrow (g) z twierdzenia 4.26(f).

(g) \Rightarrow (a) Z lematu 4.17 oraz twierdzenia 4.26 (podpunkty (f) oraz (h)) wynika, że $\tilde{D}I = \tilde{D}J$ oraz $C_I \sim_{\mathbb{Z}}^{B_I} \check{G}_{\tilde{D}I} = \check{G}_{\tilde{D}J} \sim_{\mathbb{Z}}^{B_J} C_J$ a stąd prawdziwe są równości

$$B_I^{-tr} \cdot C_I \cdot B_I^{-1} = \check{G}_{\tilde{D}I} = \check{G}_{\tilde{D}J} = B_J^{-tr} \cdot C_J \cdot B_J^{-1},$$

tzn. $I \approx_{\mathbb{Z}}^{B_J^{-1} \cdot B_I} J$. \square

4.5. Klasyfikacja porządków prawie TP-krytycznych

Głównym celem niniejszego podrozdziału jest prezentacja jednego z zastosowań przedstawionej w trzecim rozdziale rozprawy klasyfikacji jednopikowych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych (twierdzenie 3.17 oraz fakt 3.31), której podstawą jest lemat 4.53. Podamy alternatywne rozwiązanie problemu klasyfikacji porządków prawie TP-krytycznych, omówionego w rozprawie doktorskiej [98] oraz pracy [101] (patrz też [87, 99, 100]). Geneza tego zagadnienia przedstawiona została w [101, Introduction].

Definicja 4.62. [87, Definition 1.2] *Jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy P-krytycznym, jeśli $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest dodatnio określony, natomiast funkcjonały $q^{(j)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $q^{(j)}(v_1, \dots, v_n) := q(v_1, \dots, v_{j-1}, 0, v_j, \dots, v_n)$ oraz $1 \leq j \leq n$, są dodatnio określone.*

Zauważmy, że definicja 4.62 stanowi analog wprowadzonej przez Ovsienkę definicji krytycznych funkcjonałów kwadratowych [96, 102], tj. jednolitych funkcjonałów kwadratowych $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, których obciążenia $q^{(i)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $q^{(i)}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) := q(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n)$ są słabo dodatnie (tzn. $q^{(i)}(v) > 0$ dla każdego $0 \neq v \in \mathbb{N}^{n-1}$), natomiast funkcjonal $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest słabo dodatni.

Definicja 4.63. [101, Definition 3.2] Niech $I = (\{1, \dots, n, n+1 = *\}, \leq)$ będzie jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym z elementem maksymalnym $*$, oraz niech $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$\hat{q}(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_*^2 + \sum_{i \leq j \neq *} x_i \cdot x_j - x_*(x_1 + \dots + x_n),$$

będzie funkcjonałem kwadratowym Titsa stowarzyszonym z I , patrz definicja 3.3.

- (a) Porządek I nazywamy **TP-krytycznym** (Titsowo P-krytycznym), jeśli jednolity funkcjonal kwadratowy $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest P-krytyczny.
- (b) Porządek I nazywamy **prawie TP-krytycznym** (Titsowo prawie P-krytycznym), jeśli funkcjonal $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest dodatnio określony, natomiast funkcjonały $\hat{q}_I^{(j)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\hat{q}_I^{(j)} := \hat{q}_I|_{x_j=0}$, gdzie $1 \leq j \leq n$, są dodatnio określone.

Przytoczmy teraz przydatną w praktyce charakteryzację porządków TP-krytycznych oraz prawie TP-krytycznych, udowodnioną w pracy [101, Theorem 3.4] (patrz też [98, Twierdzenie 3.2.1] oraz [87, Theorem 2.3]).

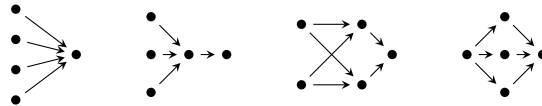
Twierdzenie 4.64. Załóżmy, że $I = (\{1, \dots, n, n+1 = *\}, \leq)$ jest jednopikowym prawie TP-krytycznym zbiorem częściowo uporządkowanym, którego elementem maksymalnym jest $*$.

- (a) Funkcjonał Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest główny.
- (b) Wektor $\hat{\mathbf{h}}^I \in \mathbb{Z}^I$ generujący jądro $\text{Ker } \hat{q}_I := \{v \in \mathbb{Z}^{n+1}; \hat{q}_I(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \hat{\mathbf{h}}^I \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ jest prawie wierny, tj. $\hat{\mathbf{h}}_j^I \neq 0$ dla $j \neq *$.
- (c) Porządek I jest TP-krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{\mathbf{h}}_*^I \neq 0$.

Dowodzi się, że istnieje tylko skończona liczba prawie TP-krytycznych porządków jednopikowych, patrz [98, Twierdzenie 3.2.6] oraz [101, Theorem 3.6]. W dysertacji przedstawimy proste uzasadnienie tego faktu, oparty o lemat 4.60 oraz lemat 3.31(b).

Twierdzenie 4.65. Jeśli I jest jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym, który jest prawie TP-krytyczny, to $5 \leq |I| \leq 9$.

Dowód. Załóżmy, że $I = T \cup \{*\}$ jest prawie TP-krytycznym zbiorem częściowo uporządkowanym. Nierówność $4 < |I|$ łatwo zweryfikować algorytmicznie, rozważając wszystkie możliwe przypadki porządków jednopikowych (funkcjonał Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ kodujemy w postaci macierzy symetrycznej $\hat{G}_I := \frac{1}{2} \cdot (\hat{C}_I + \hat{C}_I^{tr}) \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$, patrz definicja 3.3(a); dodatniość macierzy weryfikujemy przy pomocy algorytmu 2.7). W szczególności pokazujemy w ten sposób, że istnieją dokładnie 4 jednopikowe porządki prawie TP-krytyczne wielkości 5:



Załóżmy, przez sprzeczność, że istnieje prawie TP-krytyczny jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany I , spełniający $|I| = n+1 \geq 10$. Z twierdzenia 4.64 (patrz też [98, Twierdzenie 3.2.1] oraz [101, Theorem 3.4]) wynika, że funkcjonal kwadratowy Titsa $\hat{q}_I: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ stowarzyszony z I jest główny oraz $\text{Ker } \hat{q}_I = \mathbb{Z} \cdot \hat{\mathbf{h}}^I \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$, gdzie $\hat{\mathbf{h}}_1^I \neq 0, \dots, \hat{\mathbf{h}}_n^I \neq 0$. Z lematu 4.60 wiemy, że istnieje indeks $i \in \{1, \dots, n\}$, dla którego $\hat{\mathbf{h}}_i^I = \pm 1$. Stąd $\check{r} := e_i - \hat{\mathbf{h}}_i^I \cdot \hat{\mathbf{h}}^I \in \mathbb{Z}^{n+1}$ jest pierwiastkiem funkcjonału \hat{q}_I (patrz fakt 4.3(a)), dla którego $\check{r}_i = 0$. Rozważmy jednopikowy podporządek $I^{(i)} \subseteq I$, $|I^{(i)}| = n$, powstały z I przez usunięcie i -tego elementu. Zauważmy, że porządek $I^{(i)} \subseteq I$ jest dodatni (wniosek 4.12), a $\check{r}^{(i)} \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem funkcjonału Titsa $\hat{q}_{I^{(i)}}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, który jest prawie wierny (tj. $\check{r}_j \neq 0$ dla $j \neq *$), co jest sprzeczne z lematem 3.31(b). \square

Podsumowując, każdy jednopikowy porządek prawie TP-krytyczny I jest główny i składa się z co najwyżej 9 elementów. Przy pomocy standardowych obliczeń algorytmicznych (algorytm 4.28, algorytm 2.7) dowodzimy następującej charakteryzacji (por. [101, Theorem 3.7, Theorem 3.9]).

Wniosek 4.66. *Niech I będzie jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym.*

- (a) *Jeśli I jest prawie TP-krytyczny to $5 \leq |I| \leq 9$. Co więcej, I jest izomorficzny z jednym z porządków $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawionych w [101, Tables 4.2-4.3].*
- (b) *Jeśli I jest prawie TP-krytyczny i nie jest TP-krytyczny, to I jest izomorficzny z jednym z porządków $\mathbb{L}_{116}, \dots, \mathbb{L}_{132}$ przedstawionych w [101, Table 4.3].*

4.6. Zastosowania: izomorfizm grafów skierowanych

Niniejszy podrozdział poświęcony jest omówieniu problemu izomorfizmu grafów skierowanych (digrafów). Pokażemy w nim, że problem izomorfizmu nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych można rozwiązać w czasie wielomianowym (patrz wniosek 4.70).

Zacniemy od przedstawienia podstawowych definicji oraz faktów.

Definicja 4.67. [28] (a) *Grafem skierowanym nazywamy czwórkę $\vec{\Delta} = (\Delta_0, \Delta_1, \text{init}, \text{ter})$, gdzie Δ_0 jest zbiorem wierzchołków, $\Delta_1 \subseteq \Delta_0 \times \Delta_0$, $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$, zbiorem krawędzi, $\text{init}: \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ oraz $\text{ter}: \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ są funkcjami przyporządkowującymi każdej krawędzi $e \in \Delta_1$ wierzchołek początkowy $\text{init}(e) \in \Delta_0$ oraz końcowy $\text{ter}(e) \in \Delta_0$.*

(b) *Grafy skierowane $\vec{\Delta} = (\Delta_0, \Delta_1, \text{init}, \text{ter})$ oraz $\vec{\Delta}' = (\Delta'_0, \Delta'_1, \text{init}', \text{ter}')$ nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje bijekcja $\sigma: \Delta_0 \rightarrow \Delta'_0$ spełniająca warunki:*

- $\Delta'_1 = \{\sigma(e); e \in \Delta_1\} \subseteq \Delta'_0 \times \Delta'_0$, gdzie dla dowolnej krawędzi $e := (x_e, y_e) \in \Delta_1$ definiujemy $\sigma(e) = \sigma((x_e, y_e)) := (\sigma(x_e), \sigma(y_e)) \in \Delta'_1$,
- $\text{init}'(\sigma(e)) = \sigma(\text{init}(e))$ oraz $\text{ter}'(\sigma(e)) = \sigma(\text{ter}(e))$ dla dowolnej krawędzi $e \in \Delta_1$.

Problem izomorfizmu grafów skierowanych wielkości n należy do tej samej klasy złożoności obliczeniowej co problem izomorfizmu grafów *nieskierowanych* (patrz [90, 128]). Najlepsze znane algorytmy, które go rozwiązują, mają wykładniczą złożoność obliczeniową, ale nie wiadomo czy jest to problem NP-zupełny, patrz [88] (z drugiej strony, problem podgrafu izomorficznego jest NP-zupełny, patrz [39, A1.4: GT48, str. 202]). Najlepsze teoretyczne oszacowanie złożoności tego problemu to $2^{O(\sqrt{n \log n})}$ uzyskane przez Babaiego i Luksa w 1983 roku, patrz [5, 88].

Uwaga 4.68. W grudniu 2015 r. Babai opublikował preprint [5], w którym przedstawiono teoretyczny algorytm sprawdzający izomorfizm grafów w czasie $2^{O((\log n)^c)}$, dla pewnej stałej $c > 0$, tj. o złożoności quasi-wielomianowej.

Zauważmy, że problem izomorfizmu grafów można rozwiązać w czasie wielomianowym w wielu przypadkach szczególnych, np. w przypadku drzew, grafów z zakazanym minorem, czy grafów, których stopień wierzchołka jest ograniczony z góry, patrz [88].

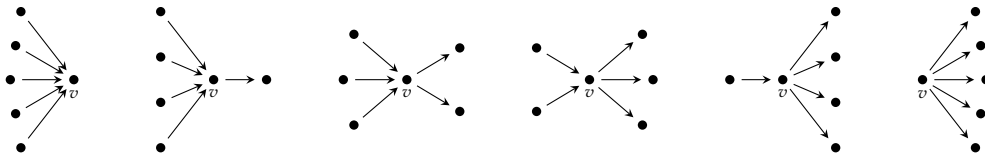
Fakt 4.69. *Założmy, że Δ, Δ' są n -wierzchołkowymi grafami skończonymi, których stopnie wierzchołków są ograniczone przez stałą $t \geq 1$. Problem istnienia izomorfizmu $\Delta \simeq \Delta'$ można rozwiązać w czasie wielomianowym [86], tj. $O(n^k)$, gdzie $k > 0$ jest pewną stałą. W szczególności, jeśli $t = 3$, to rozwiązywanie można znaleźć w czasie $O(n^3 \cdot \log n)$ [38].*

Algorytmy wielomianowe przedstawione w pracach [38, 86] mają charakter teoretyczny i nie są wykorzystywane w praktyce, patrz [88, 121].

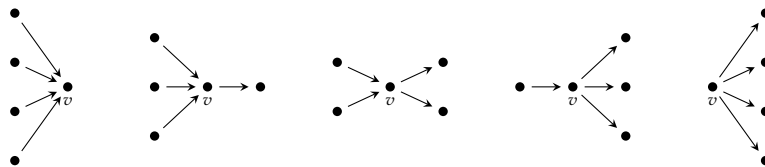
Wniosek 4.70. *Problem izomorfizmu nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych wielkości n można rozwiązać w czasie wielomianowym. W szczególności, problem izomorfizmu porządków dodatnich można rozwiązać w czasie $O(n^3 \cdot \log n)$.*

Dowód. Zauważmy, że macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ dowolnego porządku I można przekształcić w macierz sąsiedztwa kołczanu (digrafu) Hasse $\mathcal{H}(I)$ usuwając „krawędzie zakodowane przez przechodność”, co można wykonać w czasie wielomianowym (patrz [2]). Co więcej, kołczan $\mathcal{H}(I)$ koduje porządek I jednoznacznie. W dalszej części będziemy zakładać, że porządki zakodowane są w postaci kołczanów Hasse.

Niech I będzie porządkiem nieujemnym. Pokażemy, że maksymalny stopień wierzchołków w kołczanie $\mathcal{H}(I)$ wynosi 3, jeśli I jest dodatni oraz 4 w przeciwnym przypadku. Załóżmy, przez sprzeczność, że $\mathcal{H}(I)$ zawiera wierzchołek v stopnia $\deg v > 4$. Wtedy I zawiera podporządek $J \subseteq I$, którego kołczan Hasse $\mathcal{H}(J)$ ma jedną z następujących 6 postaci.

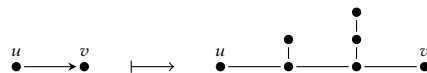


Łatwo sprawdzić (np. przy pomocy algorytmu 2.13, patrz też uwaga 4.51), że $J \subseteq I$ nie jest nieujemny, co jest sprzeczne z założeniem (patrz fakt 3.27(b)). Analogicznie, jeśli I zawiera wierzchołek v stopnia $\deg v = 4$, to I zawiera podporządek $L \subseteq I$, którego kołczan Hasse $\mathcal{H}(L)$ ma jedną z następujących 5 postaci.

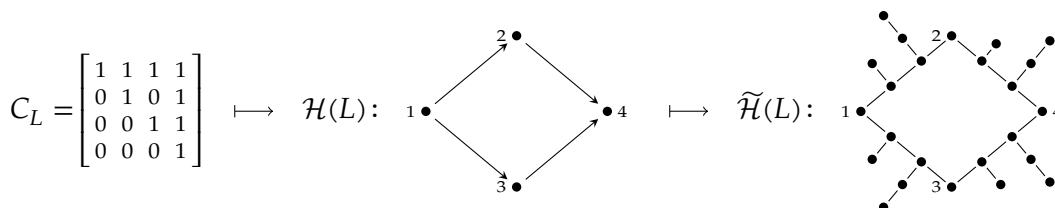


Ponieważ L jest nieujemny (algorytm 2.13), to $J \supseteq L$ nie jest dodatni (patrz fakt 3.27(b)). W konsekwencji dodatni porządek I ma wierzchołki stopnia co najwyżej 3.

Założmy, że I, J są nieujemnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi. Zauważmy, że izomorfizm $I \simeq J$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}(I) \simeq \mathcal{H}(J)$. Problem izomorfizmu kołczanów (digrafów) sprowadzimy do problemu izomorfizmu grafów, stosując argumentację użytą w dowodzie [90, Theorem 1]. Kołczan H kodujemy w postaci grafu \tilde{H} , zamieniając każdą strzałkę (krawędź skierowaną) na graf złożony z pięciu nowych wierzchołków, zgodnie z następującym opisem:



Przykładowo, dla porządku $L = (\{1, 2, 3, 4\}, \{1 \leq 2; 1 \leq 3; 1 \leq 4; 2 \leq 4; 3 \leq 4\})$:



Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych kołczanów H_1, H_2 izomorfizm grafów $\tilde{H}_1 \simeq \tilde{H}_2$ implikuje izomorfizm $H_1 \simeq H_2$ (patrz [90, Lemma, str. 130]).

Zauważmy, że kołczan $\mathcal{H}(I)$ (odpowiednio $\mathcal{H}(J)$) ma co najwyżej $2 \cdot n$ strzałek (ponieważ posiada wierzchołki stopnia co najwyżej 4) i stąd graf $\tilde{\mathcal{H}}(I)$ ma co najwyżej $11 \cdot n$ wierzchołków. Podsumowując, aby rozwiązać problem izomorfizmu porządków nieujemnych I, J wielkości n , wystarczy sprawdzić, czy grafy $\tilde{\mathcal{H}}(I), \tilde{\mathcal{H}}(J)$ wielkości $11 \cdot n$ są izomorficzne. Z faktu 4.69 wynika, że można to zrobić w czasie $O((11 \cdot n)^3 \log(11 \cdot n)) = O(n^3 \log n)$ w przypadku porządków dodatnich oraz w czasie $O((11 \cdot n)^k) = O(n^k)$, gdzie $k > 0$ jest pewną stałą, w ogólnym przypadku porządków nieujemnych. \square

Jak pokazuje wniosek 4.70, izomorfizm porządków nieujemnych można sprawdzać w czasie wielomianowym. Niestety jest to wynik o charakterze teoretycznym i nie przekłada się na praktyczny algorytm.

Twierdzenia 3.17 oraz 4.24 przedstawiają dokładny opis kształtów kołczanów Hasse jednopikowych porządków dodatnich oraz głównych. Bazując na nim, można przygotować wielomianowy algorytm sprawdzający izomorfizm specjalnej klasy grafów skierowanych, tj. digrafów typu porządkowego w następującym sensie.

Definicja 4.71. [48, Definition 9.1] *Digraf $D = (V_D, E_D)$ nazywamy digrafem typu porządkowego, jeśli D nie zawiera cykli ani wielokrotnych krawędzi oraz ma następującą własność: jeśli wierzchołki $i, j \in V_D$ połączone są ścieżką skierowaną zawierającą co najmniej dwie krawędzie, to $(i \rightarrow j) \notin E_D$.*

Zagadnienie to zostało szerzej omówione w pracy [48].

Rozdział 5

Klasyfikacja spektralna Coxetera porządków nieujemnych korangi dwa

Piąty rozdział rozprawy poświęcony jest spektralnej klasyfikacji Coxetera spójnych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa, czyli takich, których symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_I(\mathbb{Q})$ (1.39) jest dodatnio półokreślona rzędu $|I| - 2$. W sposób naturalny większość twierdzeń i algorytmów przedstawionych w tym rozdziale stanowi rozwinięcie analogicznych wyników dla porządków dodatnich oraz głównych, które omówione są w trzecim oraz czwartym rozdziale rozprawy, odpowiednio. Do najważniejszych wyników tego rozdziału należą:

- klasyfikacyjne twierdzenie 5.15, które stanowi rozwiązanie sformułowanego we wstępie problemu 1 dla przypadku spójnych porządków korangi dwa i pokazuje, że z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ wszystkie takie porządki klasyfikuje się przy pomocy porządków Euklidesa korangi dwa przedstawionych w tabeli 5.4;
- klasyfikacyjne twierdzenie 5.20, które stanowi rozwiązanie problemu 2 dla przypadku spójnych porządków I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$ i zawiera pełną ich klasyfikację Coxetera;
- twierdzenie 5.33 zawierające opis struktury spójnych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa i pokazuje, że każdy taki I wyznaczony jest jednoznacznie przez czwórkę: (J, u, v, s, t) , gdzie $1 \leq s < t \leq |I|$, $J := I \setminus \{s, t\}$ jest spójnym porządkiem dodatnim oraz $u, v \in \mathcal{R}_J = \{w \in \mathbb{Z}^J; q_J(w) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^J$ (definicja 1.46(e)) są pierwiastkami porządku J ,
- spektralne twierdzenie 5.51, w którym pokazujemy, że każdy jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$ wyznaczony jest jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności, przez porządek Euklidesa korangi dwa (tabela 5.4) oraz, równoważnie, przez spektrum grafu krawędziowo-dwudzielnego $\mathcal{P}\tilde{D} \in \{\mathcal{P}\tilde{D}_{|I|-2}^2, \mathcal{P}\tilde{E}_6^2, \mathcal{P}\tilde{E}_7^2, \mathcal{P}\tilde{E}_8^2\}$ (patrz tabela 5.47), co stanowi rozwiązanie sformułowanych we wstępie problemów 1a oraz 2 dla przypadku jednopikowych porządków I korangi dwa, gdzie $|I| \leq 15$.

Podobnie jak w przypadku spójnych głównych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych I , w pracach [53, 54, 56] z każdym spójnym skończonym porządkiem I korangi dwa, stowarzyszono typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-2}, \mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$. Ponadto, z każdym takim zbiorem częściowo uporządkowanym I , który zawiera co najwyżej $|I| \leq 15$ elementów, stowarzyszamy w definicji 5.13 kwadratowo z nim \mathbb{Z} -równoważny porządek Euklidesa korangi dwa $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{|I|-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$ przedstawiony w tabeli 5.4. W twierdzeniu 5.15 pokazujemy, że porządki Euklidesa opisują wszystkie porządki korangi dwa,

z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ a każda klasa równoważności relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ opisana jest jednoznacznie przez typ Dynkina \mathbf{Dyn}_I .

Używając tych dwóch niezmienników relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ definiujemy typ Coxetera-Dynkina oraz typ Euklidesa-Dynkina spójnych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa i w twierdzeniu 5.20 pokazujemy, że wyznaczają one takie porządki jednoznacznie, z dokładnością do relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$, jeśli $|I| \leq 15$.

Ważną rolę w prezentowanej w rozprawie spektralnej analizie Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych odgrywają obliczenia algorytmiczne. Najistotniejszym, z punktu widzenia naszej analizy spójnych skończonych porządków I korangi dwa, algorytmem prezentowanym w tym rozdziale jest algorytm 5.21, który pozwala na obliczanie (i, i') -specjalnej \mathbb{Z} -bazy (definicja 5.7) jądra $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z}\mathbf{h}_I \oplus \mathbb{Z}\mathbf{h}'_I \subseteq \mathbb{Z}^I$. Stąd stanowi niezbędny element w konstrukcji algorytmów 5.22 oraz 5.28, służących do wyznaczania typu Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-2}, \mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ oraz reduktu $\mathcal{R}_I^{\text{red}} \subseteq \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^I$ (5.25), odpowiednio. Znajomość reduktu $\mathcal{R}_I^{\text{red}} \subseteq \mathbb{Z}^I$ umożliwi użycie heurystycznego algorytmu 4.44 do wyszukiwania macierzy $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność między m -elementowymi spójnym porządkami korangi dwa.

Część z prezentowanych wyników opublikowana została w pracach [54, 56] (patrz też [50, 55]). Do wyników, które nie były wcześniej publikowane, należą:

- definicja typu Euklidesa spójnego porządku I korangi dwa, który zawiera co najwyżej $|I| \leq 15$ elementów, patrz definicja 5.13,
- prosty dowód istnienia (i, i') -specjalnej \mathbb{Z} -bazy jądra $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z}\mathbf{h}_{\Delta} \oplus \mathbb{Z}\mathbf{h}'_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^m$ m -wierzchołkowego grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ (lemat 5.8), który umożliwia konstrukcję efektywnego algorytmu służącego do jej obliczania (algorytm 5.21),
- twierdzenie 5.45, które pokazuje, że nie istnieją skończone jednopikowe porządki I korangi dwa typu Dynkina $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_{|I|-2}$,
- twierdzenie 5.51 zawierające rozwiązanie sformułowanego we wstępie problemu 2, dla przypadku spójnych jednopikowych porządków I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$. Ponadto twierdzenie to zawiera pełną ich spektralną klasyfikację Coxetera; w szczególności pokazujemy, że:
 - ◊ każdy jednopikowy porządek I korangi dwa typu $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_{|I|-2}$ wielkości co najwyżej $|I| \leq 15$, jest izomorficzny z jednym z czternastu typów porządków przedstawionych w tabeli 5.43,
 - ◊ jednopikowe porządki I korangi dwa nie są wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności) przez spektrum Coxetera rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa, tylko przez spektrum grafów krawędziowo-dwudzielnych $\widetilde{\mathbb{D}}_{|I|-2}^2, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2$ przedstawionych w tabeli 5.47.

Zacniemy od przedstawienia niezbędnych definicji i faktów.

5.1. Wprowadzenie

Piąty rozdział rozprawy poświęcony jest spektralnej analizie Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa, które definiuje się następująco.

Definicja 5.1. [54] Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolitym funkcjonałem kwadratowym (definicja A.8), I jest n -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym (definicja 1.37), a Δ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym o n wierzchołkach, który nie ma pętli (definicja A.1).

- (a) Funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy funkcjonałem **korangi dwa**, jeśli $q(v) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ oraz jądro $\text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą \mathbb{Z} -wolną rangi dwa (tj. $\text{Ker } q := \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $0 \neq \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\mathbf{h} \neq \mathbf{h}'$).
- (b) Porządek I nazywamy **porządkiem korangi dwa**, jeśli funkcjonal kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) jest funkcjonałem korangi dwa.
- (c) Bigraf Δ nazywamy **bigrafem korangi dwa**, jeśli funkcjonal kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11) jest funkcjonałem korangi dwa.

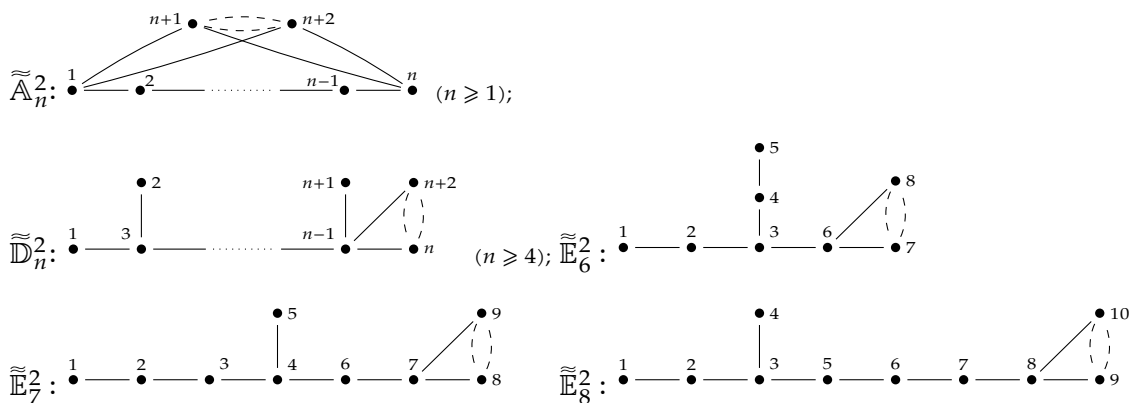
Pokażemy, że zbiór częściowo uporządkowany I (graf krawędziowo-dwudzielny Δ) jest porządkiem korangi dwa (bigrafem korangi dwa) w sensie definicji 5.1(a) (definicji 5.1(b)) wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieujemny korangi 2 w sensie definicji 1.51 (definicji 1.29(c)). Innymi słowy, definicja 5.1(b) jest równoważna z definicją porządku korangi dwa wprowadzoną w pracy [54].

Fakt 5.2. Skończony n -elementowy zbiór częściowo uporządkowany I (n -wierzchołkowy graf krawędziowo-dwudzielny Δ) jest porządkiem korangi dwa (bigrafem korangi dwa) wtedy i tylko wtedy, gdy symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ ($G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$) jest dodatnio półokreślona rzędu $n - 2$.

Dowód. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolitym funkcjonałem kwadratowym (w szczególności $q := q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) lub $q := q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11)), z którym stowarzyszone są: jądro $\text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, oraz symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ (definicja A.8(a)). Ponieważ założenie nieujemności funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest równoważne założeniu dodatniej półokreśloności macierzy $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (patrz definicja 1.29(b) oraz fakt A.12(b)), teza wynika z lematu A.15, który orzeka, że jądro $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą \mathbb{Z} -wolną rangi $\text{rank}(\text{Ker } q) = n - \text{rz}_{\mathbb{Q}} G_q$. \square

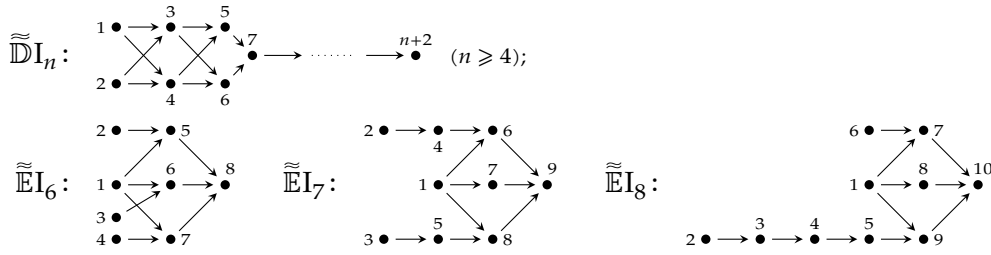
W klasyfikacji spójnych skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa używamy *rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa* zdefiniowanych w [50, Definition 3.1] i przedstawionych w następującej tabeli.

TABELA 5.3. ROZSZERZONE DIAGRAMY EUKLIDESA KORANGI DWA



Jednym z głównych wyników tego rozdziału jest następująca charakteryzacja spójnych porządków korangi dwa, z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$.

TABELA 5.4. PORZĄDKI EUKLIDESA KORANGI DWA



Twierdzenie 5.5. Niech I będzie spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym, $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (1.39) będzie symetryczną macierzą Grama a $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) jednolitym funkcjonalem kwadratowym. Następujące warunki są równoważne.

- I jest porządkiem korangi dwa w sensie definicji 5.1(b).
- Symetryczna macierz Grama $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest nieujemna korangi dwa.
- Porządek I jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z jednym z rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-2}^2, \tilde{D}_{m-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ przedstawionych w tabeli 5.3 (patrz definicja 3.15(a)).
- Istnieją rozszerzony diagram Euklidesa korangi dwa $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-2}^2, \tilde{D}_{m-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ oraz automorfizm $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ grupy \mathbb{Z}^m takie, że $q_I \circ h = q_{\tilde{D}I}$, gdzie $q_{\tilde{D}I}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.11) jest funkcjonalem kwadratowym stowarzyszonym z \tilde{D} .

Jeśli dodatkowo $|I| = m \leq 15$, to warunki (a)-(d) są równoważne następującemu:

- $I \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}I$, gdzie $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{m-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$ jest porządkiem Euklidesa korangi dwa przedstawionym w tabeli 5.4.

Dowód twierdzenia 5.5 przedstawiamy na stronie 173.

5.2. Klasyfikacja kwadratowa i dwuliniowa: typ Dynkina, typ Euklidesa

Z każdym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym I korangi dwa stowarzyszymy jednoznacznie **typ Dynkina** $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-2}, \mathcal{D}_{m-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ oraz, przy pewnych dodatkowych założeniach, **typ Euklidesa** $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{m-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$. Pokażemy, że analogicznie jak w przypadku głównym (twierdzenie 4.6) dwa porządki korangi dwa, są kwadratowo \mathbb{Z} -równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam typ Dynkina lub Euklidesa, patrz twierdzenie 5.15. Zaczniemy od niezbędnych lematów i definicji.

Lemat 5.6. Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$, będzie bigrafem korangi dwa (bez pętli), którego jądro $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma postać $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$. Jeśli $\mathbf{h}_s = 1$, gdzie $s \in \{1, \dots, n\}$, to bigraf $\Delta' = \Delta^{(s)} := \Delta \setminus \{s\}$ jest główny oraz $\text{Ker } \Delta' = \mathbb{Z} \cdot \pi^{(s)}(\mathbf{h}' - \mathbf{h}'_s \cdot \mathbf{h}) \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, gdzie $\pi^{(s)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$ jest standardowym rzutowaniem zdefiniowanym wzorem $\pi^{(s)}([v_1, \dots, v_n]) := [v_1, \dots, v_{s-1}, v_{s+1}, \dots, v_n]$. W szczególności: jeśli $\mathbf{h}'_s = 0$, to $\text{Ker } \Delta' = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(s)} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, gdzie $\mathbf{h}^{(s)} := \pi^{(s)}(\mathbf{h}') \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy analogicznie do dowodu pierwszej części lematu 4.11. Zauważmy, że $q_{\Delta'} = q_{\Delta} \circ \tau^{(s)}$, gdzie $\tau^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest zanurzeniem

$$\mathbb{Z}^{n-1} \ni w = [w_1, \dots, w_{n-1}] \xrightarrow{\tau^{(s)}} [w_1, \dots, w_{s-1}, 0, w_s, \dots, w_{n-1}] \in \mathbb{Z}^n.$$

Stąd bigraf $\Delta' \subseteq \Delta$ jest nieujemny i wystarczy pokazać, że $\text{Ker } \Delta' = \{w \in \mathbb{Z}^{n-1}; q_{\Delta'} = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$ ma postać $\text{Ker } \Delta' = \mathbb{Z} \cdot \pi^{(s)}(\mathbf{h}' - \mathbf{h}'_s \cdot \mathbf{h}) \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$.

Rozważmy funkcję $t_{\mathbf{h}}^s: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, t_{\mathbf{h}}^s(v) := v - v_s \cdot \mathbf{h}$ oraz funkcjonal kwadratowy $\check{q}_{\Delta}: \mathbb{Z}^n|_{s=0} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\check{q}_{\Delta}(v) = q_{\Delta}(v)$ dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n|_{s=0} := \{v \in \mathbb{Z}^n; v_s = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Ponieważ $q_{\Delta}(v + k \cdot \mathbf{h}) = q_{\Delta}(v)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ (patrz fakt 4.3(a)), łatwo sprawdzić, że przemienny jest następujący diagram.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xleftarrow{q_{\Delta}} & \mathbb{Z}^n & \supseteq & \text{Ker } q_{\Delta} \\ & \uparrow q_{\Delta'} & \swarrow \check{q}_{\Delta} & & \downarrow t_{\mathbf{h}}^s \\ \text{Ker } q_{\Delta'} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1} & \xleftarrow{\pi^{(s)}} & \mathbb{Z}^n|_{s=0} & \supseteq & \text{Ker } \check{q}_{\Delta} \end{array}$$

Ponadto, wprost z definicji, $\check{q}_{\Delta}(v) = (q_{\Delta} \circ t_{\mathbf{h}}^s)(v)$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n|_{s=0}$ i stąd:

$$\begin{aligned} \text{Ker } q_{\Delta'} &= \pi^{(s)}(\text{Ker } \check{q}_{\Delta}) = \pi^{(s)}(\text{Ker}(q_{\Delta} \circ t_{\mathbf{h}}^s)) = \pi^{(s)}(t_{\mathbf{h}}^s(\text{Ker } q_{\Delta})) = \\ &= \pi^{(s)}(\mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_s \cdot \mathbf{h}) + \mathbb{Z} \cdot (\mathbf{h}' - \mathbf{h}'_s \cdot \mathbf{h})) = \mathbb{Z} \cdot \pi^{(s)}(\mathbf{h}' - \mathbf{h}'_s \cdot \mathbf{h}). \end{aligned}$$

W szczególności, jeśli $\mathbf{h}'_s = 0$, to $\pi^{(s)}(\mathbf{h}' - \mathbf{h}'_s \cdot \mathbf{h}) = \pi^{(s)}(\mathbf{h}') = \mathbf{h}'^{(s)} \in \mathbb{Z}^{n-1}$. □

Jednym z głównych wyników niniejszego podrozdziału jest przedstawienie definicji typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-2}, \mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego porządku I korangi dwa, wprowadzonej w [54, Definition 3.3] (patrz też [7, 50, 55, 56]), która jest naturalnym uogólnieniem definicji typu Dynkina spójnych porządków głównych (patrz definicja 4.14).

Będziemy posługiwać się następującą definicją, wprowadzoną w pracy [53] (por. [109, Theorem 3.2(c)]).

Definicja 5.7. [53] Niech $H \subseteq \mathbb{Z}^n$ będzie grupą wolną rangi dwa. Bazę $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in H$ nazywamy (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazą grupy H , jeśli spełnione są następujące trzy warunki:

- $1 \leq i < i' \leq n$,
- $\mathbf{h}_i = 1$ oraz $\mathbf{h}'_i = 0$,
- $\mathbf{h}_{i'} = 0$ oraz $\mathbf{h}'_{i'} = 1$.

Innymi słowy, wektory $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in H \subseteq \mathbb{Z}^n$ nazywamy (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazą grupy $H \subseteq \mathbb{Z}^n$, jeśli $H = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{i-1}, \overset{i}{\mathbf{1}}, \mathbf{h}_{i+1}, \dots, \mathbf{h}_{i'-1}, \overset{i'}{\mathbf{0}}, \mathbf{h}_{i'+1}, \dots, \mathbf{h}_n] \in H \subseteq \mathbb{Z}^n, \\ \mathbf{h}' &= [\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_{i-1}, \overset{i}{\mathbf{0}}, \mathbf{h}'_{i+1}, \dots, \mathbf{h}'_{i'-1}, \overset{i'}{\mathbf{1}}, \mathbf{h}'_{i'+1}, \dots, \mathbf{h}'_n] \in H \subseteq \mathbb{Z}^n, \end{aligned}$$

dla $i, i' \in \{1, \dots, n\}$ spełniających $i < i'$.

Założmy, że Δ jest spójnym n -wierzchołkowym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa (bez pętli), z którym stowarzyszony jest jednolity funkcjonal kwadratowy $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.28). Na podstawie faktu A.20 wiemy, że jądro $\text{Ker } q_{\Delta} := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{\Delta}(v) = 1\} = \text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą \mathbb{Z} -wolną. Prawdziwy jest silniejszy rezultat: grupa $\text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę. Wynik ten pochodzi z pracy [55, Theorem 3.2.] (patrz też [50, Proposition 4.1(a)]). W rozprawie przedstawiamy inny dowód tego faktu, który nie wymaga odwoływania się do własności bigrafów P-krytycznych i w naturalny sposób wyznacza konstrukcję wielomianowego algorytmu, przy pomocy którego można wyznaczyć (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ (patrz algorytm 5.21).

Lemat 5.8. *Jeśli $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$, jest bigrafem korangi dwa (bez pętli), to istnieją wektory $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ stanowiące (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_\Delta = \{q_\Delta(v) = 0; v \in \mathbb{Z}^n\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, tj. wektory spełniające $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}'_{i'} = 1$ oraz $\mathbf{h}_{i'} = \mathbf{h}_i = 0$, gdzie $1 \leq i < i' \leq n$.*

Dowód. Symbolem $\text{crk } M \in \mathbb{Z}$ oznaczajmy będziemy korangę macierzy kwadratowej $M \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$, tj. $\text{crk } M := m - \text{rz}_{\mathbb{Q}} M \in \{0, \dots, m - 1\}$. Dodatkowo stosować będziemy oznaczenia: $\text{crk } \Delta := \text{crk } G_\Delta$, gdzie $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest symetryczną macierzą Grama stowarzyszoną z bigrafem Δ (definicja A.1(d)), oraz $\Delta^{(0)} := \Delta$.

Niech $\Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(1,2)} \supseteq \dots \supseteq \Delta^{(1,\dots,z)} \supseteq \dots \supseteq \Delta^{(1,\dots,n-1)}$, będą bigrafami powstałymi z Δ przez usunięcie wierzchołków $1, \dots, z$ gdzie $z \in \{1, \dots, n - 1\}$. Zauważmy, że

$$2 = \text{crk } \Delta^{(0)} \geq \text{crk } \Delta^{(1)} \geq \text{crk } \Delta^{(1,2)} \geq \dots \geq \text{crk } \Delta^{(1,\dots,n-1)} = 0,$$

gdzie $\text{crk } \Delta^{(1,\dots,z-1,z)}$ jest równe $\text{crk } \Delta^{(1,\dots,z-1)}$ lub $\text{crk } \Delta^{(1,\dots,z-1)} - 1$. Stąd istnieje takie $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, że $\text{crk } \Delta^{(1,\dots,k)} = n - k - \text{rz } G_{\Delta^{(1,\dots,k)}} = 1$.

Ponieważ $\Delta^{(1,\dots,k)} \subseteq \Delta$ jest bigrafem głównym (patrz lemat 4.2), istnieje taki wektor $\check{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^{n-k}$, że jądro $\text{Ker } q_{\Delta^{(1,\dots,k)}} = \{v \in \mathbb{Z}^{n-k}; q_{\Delta^{(1,\dots,k)}}(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-k}$ ma postać $\text{Ker } q_{\Delta^{(1,\dots,k)}} = \mathbb{Z} \cdot \check{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{Z}^{n-k}$ oraz $\check{\mathbf{h}}_s = \pm 1$ dla pewnego $s \in \{1, \dots, n - k\}$ (wystarczy zastosować twierdzenie A.30 do dowolnej spójnej składowej $\check{\Delta} \subseteq \Delta^{(1,\dots,k)}$, która jest główna). Definiujemy wektor $\bar{\mathbf{h}} := \check{\mathbf{h}}_s \cdot [0, \dots, 0, \check{\mathbf{h}}_1, \dots, \check{\mathbf{h}}_{n-k}] \in \mathbb{Z}^n$ oraz indeks $i := s + k \in \{1, \dots, n\}$. Łatwo sprawdzić, że $\bar{\mathbf{h}} \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\bar{\mathbf{h}}_i = 1$ oraz istnieje taki wektor $\bar{\mathbf{h}}' \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$, że $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}}' \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Rozważmy bigraf $\Delta^{(i)} := \Delta \setminus \{i\} \subseteq \Delta$ powstały z Δ przez usunięcie wierzchołka i . Ponieważ $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}}' \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz $\bar{\mathbf{h}}'_i = 1$, z lematu 5.6 wiemy, że bigraf $\Delta^{(i)}$ jest główny i stąd, rozumując analogicznie jak w przypadku bigrafu $\Delta^{(1,\dots,k)}$, otrzymujemy równość $\text{Ker } \Delta^{(i)} = \mathbb{Z} \cdot \check{\mathbf{h}}' \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, gdzie $\check{\mathbf{h}}'_j = \pm 1$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Definiujemy wektor $\mathbf{h}' := \check{\mathbf{h}}'_j \cdot [\check{\mathbf{h}}'_1, \dots, \check{\mathbf{h}}'_{i-1}, 0, \check{\mathbf{h}}_i, \dots, \check{\mathbf{h}}_{n-1}] \in \mathbb{Z}^n$ oraz indeks $i' \in \{1, \dots, n\}$ równy j jeśli $j < i$ lub $j + 1$, w przeciwnym przypadku. Z konstrukcji wektora $\mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ otrzymujemy $\mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta$, $\mathbf{h}'_{i'} = 1$ oraz $\mathbf{h} := \bar{\mathbf{h}} - \bar{\mathbf{h}}_i \cdot \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$. Ponadto $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}'_{i'} = 1$ oraz $\mathbf{h}_{i'} = \mathbf{h}_i = 0$ i stąd wektory \mathbf{h}, \mathbf{h}' są \mathbb{Z} -liniowo niezależne.

Pokażemy, że wektory $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ stanowią \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$. Załóżmy, że $y = [y_1, \dots, y_n] \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest dowolnym, lecz ustalonym wektorem. Zauważmy, że $\check{y} := y - y_i \cdot \mathbf{h} - y_{i'} \cdot \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ (ponieważ $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą). Gdyby $\check{y} \neq 0$, to ranga grupy $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ byłaby większa niż dwa, co jest sprzeczne z założeniem. Ponieważ $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}'_{i'} = 1$ oraz $\mathbf{h}_{i'} = \mathbf{h}_i = 0$, każdy wektor $y \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację \mathbb{Z} -liniową wektorów $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$. Stąd wektory $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ stanowią (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę grupy $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$. \square

Wniosek 5.9. (a) *Jeśli I jest skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, to istnieją wektory $\mathbf{h}_I, \mathbf{h}'_I \in \text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^I$ stanowiące (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^I$.*

(b) *Jeśli $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest jednolitym funkcjonalem kwadratowym korangi dwa, to istnieją wektory $\mathbf{h}_q, \mathbf{h}'_q \in \text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ stanowiące (j, j') -specjalną \mathbb{Z} -bazę grupy $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$.*

Dowód. Prawdziwość stwierdzeń (a) oraz (b) wynika z lematu 5.8 zastosowanego do bigrafów Δ_q (definicja A.8(b)) oraz Δ_I (1.41), odpowiednio. \square

Następujący lemat stanowi rezultat analogiczny do lematu 4.13: pokazuje, że dwa bigrafy korangi dwa są kwadratowo \mathbb{Z} -równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy równoważne są ich podbigrafy dodatnie (główne), wyznaczone przez specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra.

Lemat 5.10. [55, Theorem 3.2] *Niech $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$, będzie spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa (bez pętli), którego jądro ma postać $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ stanowią (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę.*

(a) Bigrafy $\Delta^{(i)}, \Delta^{(i')} \subseteq \Delta$, gdzie $\Delta^{(i)} := \Delta \setminus \{i\}$, $\Delta^{(i')} := \Delta \setminus \{i'\}$ są główne i spójne, $\text{Ker } \Delta^{(i)} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(i)} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$ oraz $\text{Ker } \Delta^{(i')} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(i')} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$.

(b) Bigraf $\Delta^{(i,i')} := \Delta \setminus \{i, i'\}$ jest spójny i dodatni.

Załóżmy ponadto, że $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_0 = \{1, \dots, n\}, \tilde{\Delta}_1)$ jest spójnym bigrafem korangi dwa (bez pętli) oraz $\text{Ker } \tilde{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}} \oplus \mathbb{Z} \cdot \tilde{\mathbf{h}}' \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{h}}') \subseteq \text{Ker } \tilde{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ stanowią (j, j') -specjalną \mathbb{Z} -bazę.

(c) $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta} \Leftrightarrow \Delta^{(i,i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j,j')}$.

(d) $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta} \Leftrightarrow \Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j)} \Leftrightarrow \Delta^{(i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j')} \Leftrightarrow \Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j')} \Leftrightarrow \Delta^{(i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j)}$.

Dowód. (a) Bez zmniejszenia ogólności rozważań, będziemy rozważać tylko bigraf $\check{\Delta} := \Delta^{(i)} = \Delta \setminus \{i\} \subseteq \Delta$. Z lematu 5.6 wynika, że $\check{\Delta}$ jest bigrafem głównym oraz $\text{Ker } \check{\Delta} := \mathbb{Z} \cdot \check{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, gdzie $\check{\mathbf{h}} := \mathbf{h}^{(i)} = [\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_{i-1}, \mathbf{h}'_{i+1}, \dots, \mathbf{h}'_n] \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Stąd wystarczy pokazać, że bigraf $\check{\Delta}$ jest spójny. W dowodzie będziemy posługiwać się argumentami analogicznymi do użytych w dowodzie lematu 4.11.

Załóżmy, przez sprzeczność, że $\check{\Delta} = \check{\Delta}_{(1)} \cup \check{\Delta}_{(2)}$ oraz wierzchołki $u \in \check{\Delta}_{(1)}$, $w \in \check{\Delta}_{(2)}$ nie są połączone ścieżką w $\check{\Delta}$. Zauważmy, że $q_{\check{\Delta}}(v) = q_{\check{\Delta}_{(1)}}(v|_{\check{\Delta}_{(1)}}) + q_{\check{\Delta}_{(2)}}(v|_{\check{\Delta}_{(2)}})$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^{n-1}$, gdzie $q_{\check{\Delta}_{(1)}} : \mathbb{Z}^{\check{\Delta}_{(1)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz $q_{\check{\Delta}_{(2)}} : \mathbb{Z}^{\check{\Delta}_{(2)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ są nieujemnymi funkcjami kwadratowymi. Z założenia, w bigrafie Δ istnieje ścieżka l_u^{wv} łącząca u oraz w , przechodząca przez wierzchołek i . Możemy założyć, że $l_u^{wv} := x_0 \dots, x_k \in \{1, \dots, n\}^{k+1}$, gdzie $x_0 := u$ oraz $x_k := w$, jest najkrótszą taką ścieżką. Definiujemy wektor $r_u^{wv} = [r_j]_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{Z}^n$:

$$r_i := \begin{cases} 0, & \text{jeśli } j \notin l_u^{wv}; \\ r_{j'}, & \text{jeśli } x_j \text{---} x_{j'} \in \Delta_1; \\ 1, & \text{jeśli } j = i; \\ -r_{j'}, & \text{jeśli } x_j \text{---} x_{j'} \in \Delta_1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić (patrz dowód twierdzenia 1.34), że $r_u^{wv} \in \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem funkcjonału kwadratowego $q_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Definiujemy wektory $\bar{\mathbf{h}} := \mathbf{h} + r_{i'} \cdot \mathbf{h}' \in \text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz $x := r_u^{wv} - \bar{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^n$. Zauważmy, że x jest pierwiastkiem bigrafu Δ (patrz fakt 4.3(a)), $x_i = x_{i'} = 0$ oraz $\check{x} := x^{(i)} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest pierwiastkiem bigrafu $\check{\Delta}$, tj.

$$1 = q_{\check{\Delta}}(\check{x}) = q_{\check{\Delta}_{(1)}}(\check{x}|_{\check{\Delta}_{(1)}}) + q_{\check{\Delta}_{(2)}}(\check{x}|_{\check{\Delta}_{(2)}}).$$

Ponieważ funkcjonały kwadratowe $q_{\check{\Delta}_{(1)}} : \mathbb{Z}^{\check{\Delta}_{(1)}} \rightarrow \mathbb{Z}$, $q_{\check{\Delta}_{(2)}} : \mathbb{Z}^{\check{\Delta}_{(2)}} \rightarrow \mathbb{Z}$ są nieujemne, $\check{x}|_{\check{\Delta}_{(1)}} \in \text{Ker } q_{\check{\Delta}_{(1)}} \subseteq \mathbb{Z}^{\check{\Delta}_{(1)}}$ lub $\check{x}|_{\check{\Delta}_{(2)}} \in \text{Ker } q_{\check{\Delta}_{(2)}} \subseteq \mathbb{Z}^{\check{\Delta}_{(2)}}$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań załóżmy, że zachodzi pierwsza z możliwości. Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że wektor $\hat{x} := \check{x}|_{\check{\Delta}_{(1)}} + 0|_{\check{\Delta}_{(2)}} \in \text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$ spełnia $\hat{x}_i = \hat{x}_{i'} = 0$. Stąd $\hat{x} = 0$ i w konsekwencji $\check{x}|_{\check{\Delta}_{(1)}} = 0$ oraz $\bar{\mathbf{h}}|_{\check{\Delta}_{(1)}} = r_u^{wv}|_{\check{\Delta}_{(1)}}$.

Z konstrukcji pierwiastka $r_u^{wv} \in \mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wynika, że wektor $z := r_u^{wv}|_{\Delta_{(1)}=0}$ również jest pierwiastkiem funkcjonału $q_{\Delta} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Stąd $y := z - \bar{\mathbf{h}} \in \mathcal{R}_{\Delta}$ oraz $\check{y} := y^{(i)} \in \mathcal{R}_{\check{\Delta}} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, tj.

$$1 = q_{\check{\Delta}}(\check{y}) = q_{\check{\Delta}_{(1)}}(\check{y}|_{\check{\Delta}_{(1)}}) + q_{\check{\Delta}_{(2)}}(\check{y}|_{\check{\Delta}_{(2)}}).$$

Z konstrukcji wektora $y \in \mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ otrzymujemy równości $\check{y}|_{\check{\Delta}_{(1)}} = -\bar{\mathbf{h}}|_{\check{\Delta}_{(1)}} = -r_u^{wv}|_{\check{\Delta}_{(1)}}$ i stąd $q_{\check{\Delta}_{(1)}}(\check{y}|_{\check{\Delta}_{(1)}}) = 1$ oraz $q_{\check{\Delta}_{(2)}}(\check{y}|_{\check{\Delta}_{(2)}}) = 0$. Rozumując analogicznie jak w poprzednim przypadku, otrzymujemy $\bar{\mathbf{h}}|_{\check{\Delta}_{(2)}} = r_u^{wv}|_{\check{\Delta}_{(2)}}$ i w konsekwencji:

$$\bar{\mathbf{h}} = r_u^{wv} \Rightarrow 0 = q_{\Delta}(\bar{\mathbf{h}}) = q_{\Delta}(r_u^{wv}) = 1.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód stwierdzenia (a).

(b) Na podstawie stwierdzenia (a),

$$\Delta^{(i)} = (\Delta_0 = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}, \Delta_1) = \Delta \setminus \{i\} \subseteq \Delta$$

jest spójnym głównym grafem krawędziowo-dwudzielnym, którego jądro ma postać $\text{Ker } \Delta^{(i)} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'^{(i)} \subseteq \mathbb{Z}^{\Delta_0}$. Ponieważ $\Delta^{(i,i')} = \Delta^{(i)} \setminus \{i'\} \subseteq \Delta^{(i)}$ oraz $\mathbf{h}'_{i'} = \mathbf{h}'_{i'} = 1$, teza wynika z lematu 4.11.

(c) Dowód przeprowadzamy analogicznie do dowodu lematu 4.13(b). Definiujemy \mathbb{Z} -odwracalne macierze:

$$P_{s,k} := [e_s^{tr}, e_k^{tr}, e_1^{tr}, \dots, e_{s-1}^{tr}, e_{s+1}^{tr}, \dots, e_{k-1}^{tr}, e_{k+1}^{tr}, \dots, e_n^{tr}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}) \text{ oraz}$$

$$B_{s,k}^{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2} := [P_{s,k}^{-1} \cdot \mathbf{h}_1^{tr}, P_{s,k}^{-1} \cdot \mathbf{h}_2^{tr}, e_3^{tr}, \dots, e_n^{tr}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}).$$

Zauważmy, że:

$$\tilde{G}_{\Delta}^{(i,i')} := \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & G_{\Delta^{(i,i')}} \end{array} \right] = (B_{i,i'}^{\mathbf{h}, \mathbf{h}'})^{tr} \cdot P_{i,i'}^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot P_{i,i'} \cdot B_{i,i'}^{\mathbf{h}, \mathbf{h}'}. \quad (*)$$

„ \Rightarrow ” Z założenia istnieje macierz $\bar{B} \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ spełniająca równość $G_{\Delta} = \bar{B}^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot \bar{B}$ i stąd, na podstawie (*), prawdziwa jest równość:

$$\tilde{G}_{\Delta}^{(i)} = B^{tr} \cdot \tilde{G}_{\Delta'}^{(j)} \cdot B, \quad \text{gdzie } B := (B_{j,j'}^{\mathbf{h}, \mathbf{h}'})^{-1} \cdot P_{j,j'}^{-1} \cdot \bar{B} \cdot P_{i,i'} \cdot B_{i,i'}^{\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{h}'}}. \quad (**)$$

Łatwo sprawdzić, że (**) implikuje równość $G_{\Delta^{(i,j)}} = B^{(1,2)tr} \cdot G_{\Delta^{(j,j')}} \cdot B^{(1,2)}$, gdzie $B^{(1,2)} \in \mathbb{M}_{n-2}(\mathbb{Z})$ jest macierzą powstałą z $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przez usunięcie dwóch pierwszych wierszy oraz kolumn. Rozumując analogicznie jak w dowodzie lematu 4.13(b), pokazujemy że $\det B^{(1,2)} = \pm 1$, tj. $B^{(1,2)} \in \text{Gl}(n-2; \mathbb{Z})$.

„ \Leftarrow ” Z założenia istnieje macierz $\tilde{B} \in \text{Gl}(n-1; \mathbb{Z})$ spełniająca $G_{\Delta^{(i)}} = \tilde{B}^{tr} \cdot G_{\Delta^{(j)}} \cdot \tilde{B}$. Łatwo sprawdzić, że $G_{\Delta} = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B$, gdzie:

$$\tilde{B}^{[1,2]} := \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & \tilde{B} \end{array} \right] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}) \quad \text{oraz} \quad B := P_{j,j'} \cdot B_{j,j'}^{\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{h}'}} \cdot \tilde{B}^{[1,2]} \cdot (B_{i,i'}^{\mathbf{h}, \mathbf{h}'})^{-1} \cdot P_{i,i'}^{-1}.$$

Zauważmy, że $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$, ponieważ $\det B = \det \tilde{B} = \pm 1$.

(d) Pokażemy, że $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta} \Leftrightarrow \Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j)}$. Dowód pozostałych równoważności jest analogiczny. Z podpunktu (c) wynika, że $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta} \Leftrightarrow \Delta^{(i,i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j,j')}$, gdzie bigrafy $\Delta^{(i,i')} = \Delta^{(i)} \setminus \{i'\} \subseteq \Delta^{(i)}$ oraz $\tilde{\Delta}^{(j,j')} = \tilde{\Delta}^{(j)} \setminus \{j'\} \subseteq \tilde{\Delta}^{(j)}$ są spójne i dodatnie. Ponieważ $\text{Ker } \Delta^{(i)} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'^{(i)} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$, $\text{Ker } \tilde{\Delta}^{(j)} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}''^{(j)} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$ (patrz (a)) oraz $\mathbf{h}'_{i'} = \tilde{\mathbf{h}}''_{j'} = 1$, z lematu 4.13(b) wynika, że $\Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j)} \Leftrightarrow \Delta^{(i,i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j,j')}$. Podsumowując, prawdziwe są równoważności:

$$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta} \Leftrightarrow \Delta^{(i,i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j,j')} \Leftrightarrow \Delta^{(i)} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}^{(j)}. \quad \square$$

Twierdzenie 5.11. [50, Theorem 4.5.],[55, Theorem 1.10] Niech $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ będzie spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym który nie posiada pętli. Bigraf Δ jest bigrafem korangi dwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-2}^2, \tilde{D}_{m-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ jest jednym z rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa przedstawionych w tabeli 5.3.

Dowód. Załóżmy, że $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_n^2, \tilde{D}_n^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ jest jednym z rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa przedstawionych w tabeli 5.3, który ma $m = n + 2$ wierzchołki. Łatwo pokazać, analizując postać kanoniczną funkcjonału kwadratowego $q_{\tilde{D}}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$, że \tilde{D} jest bigrafem korangi dwa, którego jądro $\text{Ker } \tilde{D} = \{v \in \mathbb{Z}^{n+2}; q_{\tilde{D}}(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$ ma $(n + 1, n + 2)$ -specjalną \mathbb{Z} -bazę, patrz [55, Proposition 2.2] (por. dowód lematu B.18(a)).

Dla przykładu załóżmy, że $\tilde{D} := \tilde{A}_n^2$. Standardowe obliczenia pokazują, że:

$$\begin{aligned} q_{\tilde{A}_n^2}(x) &= \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1} - x_1 x_{n+1} - x_1 x_{n+2} - x_n x_{n+1} + 2x_{n+1} x_{n+2} = \\ &= \frac{1}{2} (x_1 - x_{n+1} - x_{n+2})^2 + \frac{1}{2} (x_n - x_{n+1} - x_{n+2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

i w konsekwencji \tilde{A}_n^2 jest bigrafem nieujemnym. Ponadto:

$$\mathbb{Z}^{n+2} \ni x \in \text{Ker } q_{\tilde{A}_n^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_{n+1} - x_{n+2} = 0 \\ x_n - x_{n+1} - x_{n+2} = 0 \\ x_i - x_{i+1} = 0, \text{ dla } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases},$$

gdzie $\text{Ker } q_{\tilde{A}_n^2} = \{v \in \mathbb{Z}^{n+2}; q_{\tilde{A}_n^2}(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$. Stąd łatwo pokazać, że $\text{Ker } q_{\tilde{A}_n^2} = \mathbb{Z} \mathbf{h}_{\tilde{A}_n^2} \oplus \mathbb{Z} \mathbf{h}'_{\tilde{A}_n^2} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$, gdzie: $\mathbf{h}_{\tilde{A}_n^2} = [1, \dots, 1, 1, 0] \in \mathbb{Z}^{n+2}$ oraz $\mathbf{h}'_{\tilde{A}_n^2} = [1, \dots, 1, 0, 1] \in \mathbb{Z}^{n+2}$.

„ \Leftarrow ” Jest konsekwencją własności kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności, por. fakt 1.55(e).

„ \Rightarrow ” Z lematu 5.8 wynika, że Δ posiada (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^m$, gdzie $1 \leq i < i' \leq m$. Ponieważ bigraf $\Delta^{(i, i')} := \Delta \setminus \{i, i'\}$ jest spójny i dodatni (patrz lemat 5.10(b)), z twierdzenia 1.56 wynika, że $\Delta^{(i, i')} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}^{(m-1, m)}$, gdzie $\tilde{D}^{(m-1, m)} := \tilde{D} \setminus \{m-1, m\} \subseteq \tilde{D}$ oraz $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-2}^2, \tilde{D}_{m-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ jest jednym z rozszerzonych diagramów Euklidesa. Stąd teza jest konsekwencją lematu 5.10(c). \square

Załóżmy, że I jest spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa. Analogicznie jak w przypadku dodatnich oraz głównych zbiorów częściowo uporządkowanych (patrz definicja 3.9 oraz definicja 4.14) definiuje się **typ Dynkina** $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-2}, \mathcal{D}_{m-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz [54, Definition 3.3] oraz [7, 50, 55, 56]), który jest niezmiennikiem relacji kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$.

Definicja 5.12. Załóżmy, że I jest spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa a wektory $\mathbf{h}_I, \mathbf{h}'_I \in \text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (definicja 1.46(f)) są (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazą jądra $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^I \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (patrz wniosek 5.9(a)). **Typem Dynkina** $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-2}, \mathcal{D}_{m-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz tabela 1.32) porządku I nazywamy typ Coxetera-Dynkina (definicja 3.9) dodatniego podporządku spójnego $I^{(i, i')} \subseteq I$.

Zauważmy, że definicja typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-2}, \mathcal{D}_{m-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ spójnego m -elementowego porządku I korangi dwa jest poprawna, gdyż:

- wniosek 5.9(a) gwarantuje istnienie (i, i') -specjalnej \mathbb{Z} -bazy jądra $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^I$,
- lemat 5.10(c) zastosowany do bigrafu Δ_I (1.41) pokazuje, że podporządek $I^{(i, i')} \subseteq I$ wyznaczony jest jednoznacznie, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności, co jest równoznaczne z jednoznacznością typu Coxetera-Dynkina porządku $I^{(i, i')}$, patrz twierdzenie 3.12.

W przypadku spójnych głównych zbiorów częściowo uporządkowanych I , oprócz typu Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-1}, \mathcal{D}_{|I|-1}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ rozważa się równoważny z nim typ Euklidesa $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}_{|I|-1}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$ (patrz definicja 4.9 oraz twierdzenie 4.17). Analogicznie, w przypadku spójnych porządków korangi dwa, definiujemy typ Euklidesa korangi dwa.

Definicja 5.13. Załóżmy, że I jest spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa oraz $|I| = m \leq 15$ **Typem Euklidesa** porządku I , nazywamy porządek Euklidesa korangi dwa $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{m-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$, przedstawiony w tabeli 5.4, który jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z porządkiem I .

Poprawność definicji 5.13 wynika z równoważności (a) \Leftrightarrow (e) w twierdzeniu 5.5, natomiast następujący lemat pokazuje, że typ Euklidesa porządku korangi dwa jest równoważny typowi Dynkina.

Lemat 5.14. Załóżmy, że I jest spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa oraz $|I| = m \leq 15$ Typ Dynkina oraz typ Euklidesa porządku I są równoważne, tj.

$$\text{Dyn}_I = [D_{m-2}]_{\approx} \Leftrightarrow \tilde{D}I = \tilde{D}I_{m-2},$$

gdzie $D \in \{\mathbb{D}_{m-2}, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ oraz $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{m-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$, odpowiednio.

Przykładowo: $\text{Dyn}_I = [\mathbb{D}_{m-2}]_{\approx} = \mathcal{D}_{m-2} \Leftrightarrow \tilde{D}I = \tilde{D}I_{m-2}$.

Dowód. Teza wynika z lematu 5.10(c) oraz argumentów analogicznych do użytych w dowodzie lematu 4.17(b). \square

Następujące twierdzenie pokazuje, że spójne skończone zbiory częściowo uporządkowane I , które mają co najwyżej $|I| = m \leq 15$ elementów wyznaczone są przez typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ oraz typ Euklidesa $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{m-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$ jednoznacznie, z dokładnością do kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności (por. twierdzenie 3.12 oraz twierdzenie 4.18).

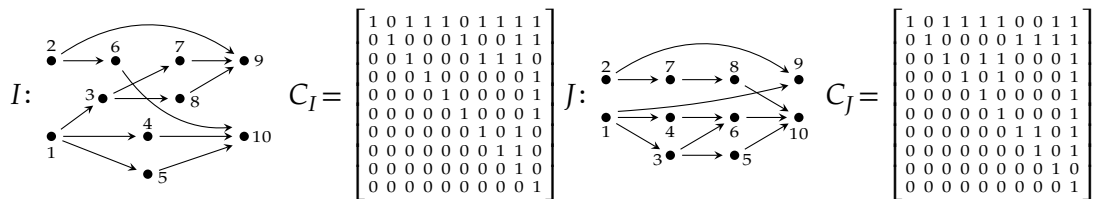
Twierdzenie 5.15. Załóżmy, że I, J są spójnymi skończonymi zbiorami częściowo uporządkowanymi korangi dwa oraz $|I| \leq 15, |J| \leq 15$. Następujące warunki są równoważne:

- (a) $I \sim_{\mathbb{Z}} J$,
- (b) $\text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J$,
- (c) $\tilde{D}I = \tilde{D}J$.

Dowód. Równoważność (b) \Leftrightarrow (c) wynika z lematu 5.14, natomiast równoważność (a) \Leftrightarrow (c) jest konsekwencją twierdzenia 5.5(e) oraz przechodniości relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$. \square

Następujący przykład dwóch zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa pokazuje, że podobnie jak w przypadku spójnych porządków głównych, typ Dynkina pozwala odróżnić porządki, które mają to samo spektrum Coxetera, ale nie są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne, por. przykład 4.19.

Przykład 5.16. Rozważmy dwa porządki korangi dwa.



Łatwo sprawdzić następujące fakty.

- I oraz J są porządkami korangi dwa (algorytm 2.13).

- Wektory generujące jądro $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^{10}$ oraz $\text{Ker } q_J \subseteq \mathbb{Z}^{10}$ mają postać (algorytm 5.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_I &= [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1], & \mathbf{h}_J &= [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1], \\ \mathbf{h}'_I &= [0, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 1, -2, -2], & \mathbf{h}'_J &= [0, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, -1, -5]. \end{aligned}$$

- Wektory $\mathbf{h}_I, \mathbf{h}'_I$ stanowią $(1, 4)$ -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^{10}$.
- Wektory $\mathbf{h}_J, \mathbf{h}'_J$ stanowią $(1, 3)$ -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_J \subseteq \mathbb{Z}^{10}$.
- $\text{Dyn}_I = \mathcal{D}_8, \tilde{D}I = \tilde{D}I_8, \quad \text{Dyn}_J = \mathcal{E}_8, \tilde{D}J = \tilde{E}I_8.$
- $\text{spec}_I = \text{spec}_J$, ponieważ $\text{cox}_I(t) = \text{cox}_J(t) = t^{10} - t^8 - t^2 + 1.$

Porządki I oraz J mają to samo spektrum Coxetera, ale nie są dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważne, ponieważ implikowałoby to kwadratową \mathbb{Z} -równoważność (fakt 1.55(a)), a stąd otrzymalibyśmy równość $\text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J$ (patrz twierdzenie 5.15).

Jednym z głównych celów niniejszego rozdziału jest prezentacja spektralnej klasyfikacji Coxetera spójnych porządków korangi dwa, tj. dowód twierdzenia 5.20. Będziemy posługiwać się następującą definicją, analogiczną do definicji 4.24.

Definicja 5.17. Niech I będzie spójnym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, który ma co najwyżej $|I| = m \leq 15$ elementów. Wtedy:

(a) typem Coxetera-Dynkina porządku I nazywamy parę $\text{CDtype}_I := (\text{spec}_I, \text{Dyn}_I),$

(b) typem Coxetera-Euklidesa porządku I nazywamy parę $\text{CType}_I := (\text{spec}_I, \tilde{D}I),$

gdzie:

- $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$ jest zespolonym spektrum Coxetera (definicja 1.46(c)),
- $\text{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jest typem Dynkina (definicja 5.12),
- $\tilde{D}I \in \{\tilde{D}I_{|I|-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$ jest typem Euklidesa (definicja 5.13).

Uwaga 5.18. Typ Coxetera-Dynkina spójnego zbioru częściowo uporządkowanego I korangi dwa postaci $\text{CDtype}_I := (\text{spec}_I, \text{Dyn}_I)$ został wprowadzony w pracy [56, (1.2)] (zastosowano tam oznaczenie $\text{CType}_I := (\text{spec}_I, \text{Dyn}_I)$) oraz, w innej formie, w pracy [53, (3.1)], por. uwaga 4.21.

Lemat 5.19. Załóżmy, że I, J są spójnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi korangi dwa oraz $|I| \leq 15$ i $|J| \leq 15.$

(a) Jeśli $I \approx_{\mathbb{Z}} J$, to $\text{CDtype}_I = \text{CDtype}_J$ oraz $\text{CType}_I = \text{CType}_J.$

(b) $\text{CDtype}_I = \text{CDtype}_J \Leftrightarrow \text{CType}_I = \text{CType}_J.$

Dowód. (a) Z założenia $I \approx_{\mathbb{Z}} J$ wynika, że $\text{spec}_I = \text{spec}_J$ (fakt 1.55(c)) oraz $I \sim_{\mathbb{Z}} J$ (fakt 1.55(a)) i stąd teza jest konsekwencją twierdzenia 5.15.

(b) Wynika z twierdzenia 5.15. □

Następujące twierdzenie (por. [56, Theorem 1.3]) stanowi rozwiązanie sformułowanego we wstępie problemu 2 dla przypadku spójnych porządków I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$ i pokazuje, że typ Coxetera-Dynkina oraz typ Coxetera-Euklidesa wyznaczają takie porządki jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności. Jest to wynik analogiczny do wniosku 3.23 dla przypadku spójnych porządków dodatnich oraz twierdzenia 4.24 dla spójnych porządków głównych.

Twierdzenie 5.20. *Załóżmy, że I oraz J są spójnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi korangi dwa, które mają co najwyżej 15 elementów. Następujące warunki są równoważne.*

- (a) $I \approx_{\mathbb{Z}} J$,
- (b) $\mathbf{CDtype}_I = \mathbf{CDtype}_J$,
- (c) $\mathbf{CEtype}_I = \mathbf{CEtype}_J$.

Jeśli dodatkowo $|I| \notin \{9, 10\} \not\equiv |J|$, to powyższe warunki są równoważne następującemu:

- (d) $\mathbf{spec}c_I = \mathbf{spec}c_J$,

Dowód. Implikacja (a) \Rightarrow (b) oraz równoważności (b) \Leftrightarrow (c) wynikają z lematu 5.19, natomiast implikacja (b) \Rightarrow (a) oraz równoważność (a) \Leftrightarrow (d) (dla $|I| \notin \{9, 10\} \not\equiv |J|$) są konsekwencją twierdzenia 5.30. \square

5.3. Algorytmy i wyniki eksperymentalne

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy algorytmy oraz wyniki obliczeniowe, które odgrywają kluczową rolę w prezentowanej w rozprawie analizie spektralnej Coxetera m -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa. Najważniejszym wynikiem jest tu twierdzenie 5.30, które pokazuje, że spójne m -elementowe zbiory częściowo uporządkowane I korangi dwa, gdzie $|I| = m \leq 15$, są wyznaczone przez typ Coxetera-Dynkina $\mathbf{CDtype}_I = (\mathbf{spec}c_I, \mathbf{Dyn}_I)$ jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności.

Zacniemy od algorytmu wyznaczającego wektory $\mathbf{h}_I, \mathbf{h}'_I \in \mathbb{Z}^m$ stanowiące (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę (definicja 5.7) jądra spójnego zbioru częściowo uporządkowanego I korangi dwa

$$\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} = \mathbb{Z}\mathbf{h}_I \oplus \mathbb{Z}\mathbf{h}'_I \subseteq \mathbb{Z}^m,$$

gdzie $q_I: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) jest jednolitym funkcjonałem kwadratowym stowarzyszonym z I .

Następujący algorytm, który w pesymistycznym przypadku wykonuje $O(n^4)$ operacji, stanowi bezpośrednią implementację dowodu lematu 5.8.

Algorytm 5.21. **WEJŚCIE** Macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ porządku I korangi dwa.

WYNIK Indeksy $1 \leq i < i' \leq m$ oraz wektory $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^m$ stanowiące (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = v \cdot C_I \cdot v^{tr} = 0\} = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \mathbb{Z}\mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^m$.

KROK 1° Inicjalizujemy macierz symetryczną $M = [m_{ij}] := C_I + C_I^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$.

KROK 2° Dla kolejnych wartości $k \in \{1, 2, \dots\}$:

KROK 2.1° usuwamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę macierzy $M \in \mathbb{M}_{m-k+1}(\mathbb{Z})$,

KROK 2.2° jeśli rząd $\text{rz } M \in \mathbb{N}$ macierzy $M \in \mathbb{M}_{m-k}(\mathbb{Z})$ równy jest $m - k - 1$, przerywamy pętlę i przechodzimy do kroku 3° (rzęd macierzy można obliczyć np. przy pomocy eliminacji Gaussa [6] lub przy pomocy algorytmu 2.13).

KROK 3° Obliczamy wektor $\check{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^{m-k}$ generujący jądro $\text{Ker } \check{q}_I^k = \mathbb{Z} \cdot \check{\mathbf{h}} \subset \mathbb{Z}^{m-k}$ głównego funkcjonału kwadratowego $\check{q}_I^k: \mathbb{Z}^{m-k} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\check{q}_I^k(v) := q_I(0, \dots, 0, v_1, \dots, v_{m-k}) = v \cdot M \cdot v^{tr}$ (np. przy pomocy algorytmu 4.36, zastosowanego do macierzy $M \in \mathbb{M}_{m-k}(\mathbb{Z})$).

KROK 4° Znajdujemy indeks $i' \in \{1, \dots, m - k\}$ spełniający $\check{h}_i = \pm 1$, inicjujemy wektor $\mathbf{h} := \check{\mathbf{h}}_i \cdot [0, \dots, 0, \check{\mathbf{h}}_1, \check{\mathbf{h}}_2, \dots, \check{\mathbf{h}}_{m-k}] \in \mathbb{Z}^m$ i ustalamy $i := i' + k$.

KROK 5° Obliczamy wektor $\check{\mathbf{h}}' \in \mathbb{Z}^{m-1}$ generujący jądro głównego funkcjonału kwadratowego $q_I^{(i)} : \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, $q_I^{(i)}(v) := v \cdot C_I^{(i)} \cdot v^{tr}$, gdzie $C_I^{(i)} \in \mathbb{M}_{m-1}(\mathbb{Z})$ jest macierzą powstałą z macierzy $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ przez usunięcie i -tego wiersza oraz i -tej kolumny (np. przy pomocy algorytmu 4.36 zastosowanego do macierzy $C_I^{(i)} \in \mathbb{M}_{m-1}(\mathbb{Z})$).

KROK 6° Znajdujemy indeks $j' \in \{1, \dots, m-1\}$ spełniający $\check{\mathbf{h}}_{j'} = \pm 1$, inicjujemy wektor $\mathbf{h}' := \check{\mathbf{h}}_{j'} \cdot [\check{\mathbf{h}}'_1, \dots, \check{\mathbf{h}}'_{i-1}, 0, \check{\mathbf{h}}'_i, \dots, \check{\mathbf{h}}'_{m-1}] \in \mathbb{Z}^m$ i ustalamy $j := j'$ jeśli $j' < i$ lub $j := j' + 1$ w przeciwnym wypadku.

KROK 7° Obliczamy $\mathbf{h} := \bar{\mathbf{h}} - \bar{\mathbf{h}}_j \cdot \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^m$ i zwracamy jako wynik: indeksy (i, j) oraz wektory \mathbf{h}, \mathbf{h}' jeśli $j > i$; indeksy (j, i) oraz wektory \mathbf{h}', \mathbf{h} w przeciwnym przypadku.

Z każdym spójnym m -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym I korangi dwa stowarzysza się jednoznacznie typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-2}, m \geq 3; \mathcal{D}_{m-2}, m \geq 6; \mathcal{E}_6; \mathcal{E}_7; \mathcal{E}_8\}$, patrz definicja 5.12. Typ ten można wyznaczyć przy pomocy następującego algorytmu, analogicznego do algorytmu 4.38.

Algorytm 5.22. **WEJŚCIE** Macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ spójnego zbioru częściowo uporządkowanego I korangi dwa.

WYNIK Typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{m-2}, m \geq 3; \mathcal{D}_{n-2}, n \geq 6; \mathcal{E}_6; \mathcal{E}_7; \mathcal{E}_8\}$ (tabela 1.32).

KROK 1° Obliczamy (i, j) -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ (np. przy pomocy algorytmu 5.21).

KROK 2° Zwracamy jako wynik typ Coxetera-Dynkina dodatniego spójnego porządku $I^{(i,j)} := I \setminus \{i, j\}$ (obliczony np. przy pomocy algorytmu B.24 zastosowanego do jednolitego funkcjonału kwadratowego $q_{I^{(i,j)}} : \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40)).

Algorytm 4.28 oraz algorytm 5.22 umożliwiają uzyskanie następującej charakteryzacji spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa (por. fakt 4.39).

Fakt 5.23. Wszystkie spójne zbiory częściowo uporządkowane I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$ można podzielić na 62 klasy, z dokładnością do typu Coxetera-Dynkina (definicja 5.17(a)):

$ I $	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\#I$	1	14	108	479	2293	2038	5482	14 127	35 605	87 698
$\# \text{klas } \mathbf{CDtype}_I$	1	1	5	7	11	5	7	7	9	9

patrz tabela 5.24.

Dowód. Dowód ma charakter obliczeniowy i jest analogiczny do dowodu faktu 4.39:

Etap 1° przy pomocy algorytmu 4.28 generujemy wszystkie nieujemne zbiory częściowo uporządkowane I wielkości $|I| \leq 15$ i korangi $\mathbf{crk}_I \leq 2$,

Etap 2° wybieramy spójne porządki I korangi $\mathbf{crk}_I = 2$ (spójność weryfikujemy przy pomocy algorytmu przeszukiwania grafu wszecz zastosowanego do kołczanu Hasse \mathcal{H}_I),

Etap 3° wyznaczamy typ Coxetera-Dynkina

$$\mathbf{CDtype}_I = (\mathbf{Dyn}_I, \mathbf{specc}_I) \equiv (\mathbf{Dyn}_I, \mathbf{cox}_I(t)),$$

każdego z wyznaczonych wcześniej porządków:

- typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-2}, \mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ obliczamy używając algorytmu 5.22,
- wielomian Coxetera $\mathbf{cox}_I(t) \in \mathbb{Z}[t]$ obliczamy przy pomocy standardowych algorytmów algebry komputerowej. \square

TABELA 5.24. LICZBA SPÓJNYCH PORZĄDKÓW I KORANGI DWA WIELKOŚCI $|I| \leq 15$,
POGRUPOWANYCH WZGLĘDEM TYPU COXETERA-DYNKINA

$\text{cox}_I(t)$	Dyn_I	$\#I$	$\text{cox}_I(t)$	Dyn_I	$\#I$
$t^6+2t^5-t^4-4t^3-t^2+2t+1$	\mathcal{D}_4	1			
$t^7+t^6-t^5-t^4-t^3-t^2+t+1$	\mathcal{D}_5	14			
t^8-2t^4+1	\mathcal{D}_6	2	$t^8+t^7+t^6-2t^5-2t^4-2t^3+t^2+t+1$	\mathcal{E}_6	39
$t^8-t^6-t^2+1$	\mathcal{E}_6	1	$t^8+t^7-2t^6-t^5+2t^4-t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_6	64
$t^8-4t^6+6t^4-4t^2+1$	\mathcal{D}_6	2			
$t^9-t^6-t^3+1$	\mathcal{E}_7	2	$t^9-3t^7-t^6+3t^5+3t^4-t^3-3t^2+1$	\mathcal{E}_7	1
$t^9-2t^7+t^5+t^4-2t^2+1$	\mathcal{E}_7	5	$t^9+t^8-2t^5-2t^4+t+1$	\mathcal{E}_7	236
$t^9-3t^7-t^6+3t^5+3t^4-t^3-3t^2+1$	\mathcal{D}_7	9	$t^9+t^8-2t^7-2t^6+2t^5+2t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_7	220
$t^9-t^7+t^6-t^5-t^4+t^3-t^2+1$	\mathcal{D}_7	6			
$t^{10}-2t^5+1$	\mathcal{E}_8	4	$t^{10}-2t^8+2t^7+t^6-4t^5+t^4+2t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_8	15
$t^{10}-t^8-t^2+1$	\mathcal{D}_8	12	$t^{10}-t^8-2t^7+t^6+2t^5+t^4-2t^3-t^2+1$	\mathcal{E}_8	27
$t^{10}-t^8-t^2+1$	\mathcal{E}_8	16	$t^{10}-2t^8-t^7+t^6+2t^5+t^4-t^3-2t^2+1$	\mathcal{E}_8	27
$t^{10}-3t^8+2t^6+2t^4-3t^2+1$	\mathcal{D}_8	21	$t^{10}+t^9-t^7-t^6-t^4-t^3+t+1$	\mathcal{E}_8	1485
$t^{10}-2t^8-2t^7+t^6+4t^5+t^4-2t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_8	14	$t^{10}+t^9-2t^8-2t^7+t^6+2t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_8	665
$t^{10}-2t^8-2t^7+t^6+4t^5+t^4-2t^3-2t^2+1$	\mathcal{E}_8	7			
$t^{11}-3t^9+3t^7-t^6-t^5+3t^4-3t^2+1$	\mathcal{D}_9	36	$t^{11}-2t^9+t^8+2t^7-2t^6-2t^5+2t^4+t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_9	48
$t^{11}-t^9-t^7+t^6+t^5-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_9	20	$t^{11}+t^{10}-2t^9-2t^8+t^7+t^6+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_9	1870
$t^{11}-2t^9-t^8+2t^6+2t^5-t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_9	64			
$t^{12}-2t^{10}+3t^8-4t^6+3t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	76	$t^{12}-2t^{10}+t^9+t^8-t^7-t^5+t^4+t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	90
$t^{12}-2t^{10}-t^8+4t^6-t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	79	$t^{12}-2t^{10}-t^9+t^8+t^7+t^5+t^4-t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	126
$t^{12}-3t^{10}+3t^8-2t^6+3t^4-3t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	62	$t^{12}+t^{11}-2t^{10}-2t^9+t^8+t^7+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_{10}	5019
$t^{12}-t^{10}-t^8+2t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{10}	30			
$t^{13}-2t^{11}-t^8+2t^7+2t^6-t^5-2t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	325	$t^{13}-2t^{11}+t^{10}+t^9-2t^8+t^7+t^6-2t^5+t^4+t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	150
$t^{13}-3t^{11}+3t^9-t^7-t^6+3t^4-3t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	93	$t^{13}-2t^{11}-t^{10}+t^9+2t^8-t^7-t^6+2t^5+t^4-t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	225
$t^{13}-t^{11}-t^9+t^7+t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	42	$t^{13}+t^{12}-2t^{11}-2t^{10}+t^9+t^8+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_{11}	13 032
$t^{13}-2t^{11}+2t^9+t^8-2t^7-2t^6+t^5+2t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{11}	260			
$t^{14}-2t^{12}+t^8+t^6-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	625	$t^{14}-2t^{12}+t^{10}+2t^9-4t^7+2t^5+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	340
$t^{14}-3t^{12}+3t^{10}-t^8-t^6+3t^4-3t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	139	$t^{14}-2t^{12}-t^{11}+t^{10}+2t^9-2t^7+2t^5+t^4-t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	374
$t^{14}-2t^{12}+2t^{10}-t^8-t^6+2t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	480	$t^{14}-2t^{12}+t^{11}+t^{10}-2t^9+2t^7-2t^5+t^4+t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	231
$t^{14}-t^{12}-t^{10}+t^8+t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	56	$t^{14}+t^{13}-2t^{12}-2t^{11}+t^{10}+t^9+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_{12}	32 997
$t^{14}-2t^{12}+t^{10}-2t^9+4t^7-2t^5+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{12}	363			
$t^{15}-2t^{13}+2t^9-t^8-t^7+2t^6-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	1102	$t^{15}-2t^{13}+t^{11}+t^{10}+t^9-2t^8-2t^7+t^6+t^5+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	1230
$t^{15}-3t^{13}+3t^{11}-t^9-t^6+3t^4-3t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	192	$t^{15}-2t^{13}-t^{12}+t^{11}+2t^{10}-t^8-t^7+2t^5+t^4-t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	588
$t^{15}-t^{13}-t^{11}+t^9+t^6-t^4-t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	72	$t^{15}-2t^{13}+t^{12}+t^{11}-2t^{10}+t^8+t^7-2t^5+t^4+t^3-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	336
$t^{15}-2t^{13}+2t^{11}-2t^9+t^8+t^7-2t^6+2t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	812	$t^{15}+t^{14}-2t^{13}-2t^{12}+t^{11}+t^{10}+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	\mathcal{D}_{13}	81 890
$t^{15}-2t^{13}+t^{11}-t^{10}-t^9+2t^8+2t^7-t^6-t^5+t^4-2t^2+1$	\mathcal{D}_{13}	1476			

Głównym wynikiem niniejszego podrozdziału jest twierdzenie 5.30, które pokazuje, że spójne m -elementowe zbiory częściowo uporządkowane I , gdzie $|I| = m \leq 15$, korangi dwa są wyznaczone przez typ Coxetera-Dynkina $\text{CDtype}_I = (\text{spec}_I, \text{Dyn}_I)$ jednoznacz-

nie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności (rezultat ten stanowi podstawę twierdzenia 5.20). Dowód twierdzenia 5.30 ma charakter obliczeniowy i, analogicznie jak dowód twierdzenia 4.47, oparty jest o heurystyczny algorytm 4.44.

Algorytm 4.44 wymaga znajomości reduktu $\mathcal{R}_I^{red} \subseteq \mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m$ (patrz [109, Definition 3.6]), tj. skończonego podzbioru zbioru pierwiastków spójnego nieujemnego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I , który spełnia równość

$$\mathcal{R}_I = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_I(v) = 1\} = \mathcal{R}_I^{red} + \text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^m. \quad (5.25)$$

Fakt 5.26. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym korangi dwa, a wektory $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ stanowią (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$. Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ można przedstawić w postaci

$$\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} + \text{Ker } q = \mathcal{R}_q^{red} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n, \quad (5.27)$$

gdzie $\mathcal{R}_q^{red} := \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończonym zbiorem pierwiastków dodatniego funkcjonału kwadratowego $\tilde{q}^{(i, i')}: \mathbb{Z}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{i'-i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-i'} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\tilde{q}^{(i, i')}(v) = q^{(i, i')}(v^{(i, i')}) = q(v)$.

Dowód. Tezę dowodzimy przy pomocy argumentów analogicznych do użytych w dowodzie faktu 4.41. Definiujemy funkcje

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \ni v &\mapsto \tilde{v}^{(i, i')} := [v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_{i'-1}, 0, v_{i'+1}, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n, \\ \mathbb{Z}^{n-2} \ni w &\mapsto w^{[i, i']} := [w_1, \dots, w_{i-1}, 0, w_i, \dots, w_{i'-2}, 0, w_{i'-1}, \dots, w_{n-2}] \in \mathbb{Z}^n \text{ oraz} \end{aligned}$$

jednolity funkcjonał kwadratowy $\tilde{q}^{(i, i')}: \mathbb{Z}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{i'-i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-i'} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\tilde{q}^{(i, i')}(v) := q(v^{(i, i')})$. Wykażemy prawdziwość równości (5.27).

„ \subseteq ” Załóżmy, że $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_q = \{u \in \mathbb{Z}^n; q(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Z lematu 4.3(a) otrzymujemy równość

$$1 = q(v) = q((v - v_i \cdot \mathbf{h} - v_{i'} \cdot \mathbf{h}') + v_i \cdot \mathbf{h} + v_{i'} \cdot \mathbf{h}') = q(\bar{v} + v_i \cdot \mathbf{h} + v_{i'} \cdot \mathbf{h}') = q(\bar{v}) = \tilde{q}^{(i, i')}(\bar{v}),$$

gdzie wektor $\bar{v} = [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] := v - v_i \cdot \mathbf{h} - v_{i'} \cdot \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ spełnia $\bar{v}_i = \bar{v}_{i'} = 0$. Ponieważ $v = \bar{v} + v_i \cdot \mathbf{h} + v_{i'} \cdot \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$ oraz $\bar{v} \in \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wnioskujemy, że $\mathcal{R}_q \subseteq \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$.

„ \supseteq ” Załóżmy, że $v \in \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathbb{Z}^n$, tj. $v = \bar{v} + k \cdot \mathbf{h} + k' \cdot \mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $\bar{v} \in \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} \subseteq \mathbb{Z}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{i'-i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-i'}$ oraz $k, k' \in \mathbb{Z}$. Na podstawie założeń oraz lematu 4.3(a) wnioskujemy, że

$$1 = \tilde{q}^{(i, i')}(\bar{v}) = q(\bar{v}) = q(\bar{v} + k \cdot \mathbf{h} + k' \cdot \mathbf{h}') = q(v),$$

a stąd $\mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} + \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}' \subseteq \mathcal{R}_q$.

Aby zakończyć dowód, należy jeszcze pokazać, że zbiór $\mathcal{R}_q^{red} := \mathcal{R}_{\tilde{q}^{(i, i')}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony. Zauważmy, że jednolity funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ możemy utożsamiać z grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ_q (patrz definicja A.8(b)) i dlatego, na podstawie lematu 5.10(b), funkcjonał kwadratowy $q^{(i, i')}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $q^{(i, i')}(w) := q(w^{[i, i']})$, jest dodatni. Stąd funkcjonał $\tilde{q}^{(i, i')}: \mathbb{Z}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{i'-i-1} \times \{0\} \times \mathbb{Z}^{n-i'} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie $\tilde{q}^{(i, i')}(v) = q(v^{(i, i')}) = q^{(i, i')}(v^{(i, i')})$, jest dodatni. W konsekwencji zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{\tilde{q}^{(s)}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony, patrz fakt 2.16. \square

Następujący algorytm, analogiczny do algorytmu 4.43, umożliwia obliczenie reduktu $\mathcal{R}_I^{red} \subseteq \mathcal{R}_I \subseteq \mathbb{Z}^m$ (5.25) wyznaczającego zbiór pierwiastków spójnego m -elementowego zbioru częściowo uporządkowanego I korangi dwa.

Algorytm 5.28. **WEJŚCIE** Skończony spójny n -elementowy zbiór częściowo uporządkowany I korangi dwa zakodowany w postaci macierzy incydencji $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

WYNIK Redukt $\mathcal{R}_I^{red} \subseteq \mathcal{R}_I$, tj. skończony zbiór spełniający $\mathcal{R}_I = \mathcal{R}_I^{red} + \text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^n$.

KROK 1° Obliczamy (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_I \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'_I \subseteq \mathbb{Z}^n$ (np. przy pomocy algorytmu 5.21).

KROK 2° Obliczamy zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{I(i,i')} := \{w \in \mathbb{Z}^{n-2}; q_{I(i,i')}(w) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$ dodatniego funkcjonału kwadratowego $q_{I(i,i')} : \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, $q_{I(i,i')}(w) = w \cdot C_I^{(i,i')} \cdot w^{tr}$, gdzie $C_I^{(i,i')} \in \mathbb{M}_{n-2}(\mathbb{Z})$ jest macierzą powstałą z macierzy $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przez usunięcie wierszy i kolumn o indeksach i oraz i' (np. przy pomocy algorytmu 2.21).

KROK 3° Zwracamy zbiór $\mathcal{R}_I^{red} := \{w^{[i,i']}; w \in \mathcal{R}_{I(i,i')}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie:

$$w^{[i,i']} := [w_1, \dots, w_{i-1}, 0, w_i, \dots, w_{i'-2}, 0, w_{i'-1}, \dots, w_{n-2}] \in \mathbb{Z}^n$$

dla każdego $w = [w_1, \dots, w_{n-2}] \in \mathbb{Z}^{n-2}$.

Uwaga 5.29. Złożoność obliczeniowa algorytmu 5.28 zależy od algorytmów użytych do implementacji kroku 2° oraz kroku 3°. W naszej implementacji:

- do implementacji kroku 3° używamy algorytmu 5.21, którego (asymptotyczna) pesymistyczna złożoność obliczeniowa wynosi $O(n^4)$,
- krok 4° implementujemy przy użyciu algorytmu 2.21, który ma wykładniczą złożoność obliczeniową, patrz uwaga 2.22(a).

Podsumowując, nasza implementacja algorytmu 5.28 ma wykładniczą złożoność obliczeniową.

Następujące twierdzenie stanowi podstawę dowodu twierdzenia 5.20 i jest głównym wynikiem niniejszego podrozdziału.

Twierdzenie 5.30. *Jeśli I, J są spójnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi korangi dwa wielkości $|I|, |J| \leq 15$, to $I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{CDtype}_I = \mathbf{CDtype}_J$. Jeśli dodatkowo $|I| \notin \{9, 10\} \nexists |J|$, to $I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{spec}_I = \mathbf{spec}_J$*

Dowód. Załóżmy, że I, J są spójnymi zbiorami częściowo uporządkowanymi korangi dwa wielkości $|I|, |J| \leq 15$. Pokażemy, że $I \approx_{\mathbb{Z}} J \Leftrightarrow \mathbf{CDtype}_I = \mathbf{CDtype}_J$.

„ \Rightarrow ” Wynika z lematu 5.19(a).

„ \Leftarrow ” Dowód ma charakter obliczeniowy i jest analogiczny do dowodu twierdzenia 4.47.

Etap 1° Przy pomocy algorytmu 4.28, generujemy wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu (patrz fakt 1.44(a)), zbiory częściowo uporządkowane I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$ (jest ich 1 198 672).

Etap 2° Wybieramy porządki spójne (spójność porządku I weryfikujemy np. przy pomocy algorytmu przeszukiwania grafu wszerz zastosowanego do kołczanu Hasse \mathcal{H}_I) - jest ich 147 845, por. tabela 4.33.

Etap 3° Używając algorytmu 5.22 oraz standardowych obliczeń algebry komputerowej dzielimy zbiór wszystkich spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa według typu Coxetera-Dynkina $\mathbf{CDtype}_I = (\mathbf{spec}_I, \mathbf{Dyn}_I)$. W wyniku otrzymujemy 62 zbiory $\mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$, por. fakt 5.23 oraz tabela 5.24.

Etap 4° Dla każdego z 62 zbiorów $\mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.1° losujemy $J \in \mathbf{CDT}_{\mathbf{CDtype}}$:

Etap 4.2° przy pomocy heurystycznego algorytmu 4.44 (oraz algorytmu 5.28) dla każdego $J \neq I \in \text{CDT}_{\text{CDtype}}$:

Etap 4.2.1° szukamy \mathbb{Z} -odwracalnej macierzy B definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \stackrel{B}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$; jeśli algorytm 4.44 znalazł żadaną macierz $B \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$, zapisujemy wynik i przechodzimy do etapu 4.2°, tj. analizujemy kolejny porządek $J \neq I \in \text{CDT}_{\text{CDtype}}$:

Etap 4.2.2° szukamy macierzy $B' \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$ definiującej równoważność $J \stackrel{B'}{\approx}_{\mathbb{Z}} I$ i zapamiętujemy macierz $B := B'^{-1}$ jako wynik. Jeśli algorytm 4.44 nie znajdzie macierzy B , zapisujemy porządek J na liście **dospr**_{CDtype}:

Etap 4.3° dla każdego $I \in \text{dospr}_{\text{CDtype}}$:

Etap 4.3.1° przy pomocy algorytmu 4.44 znajdujemy macierz $B'' \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$ definiującą równoważność $J' \stackrel{B''}{\approx}_{\mathbb{Z}} I$ między porządkiem I a rozważanym wcześniej porządkiem J' , który spełnia $J' \stackrel{B'}{\approx}_{\mathbb{Z}} J$. Jako wynik zapamiętujemy $B := B' \cdot B''^{-1}$ (korzystamy z przechodniości relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$).

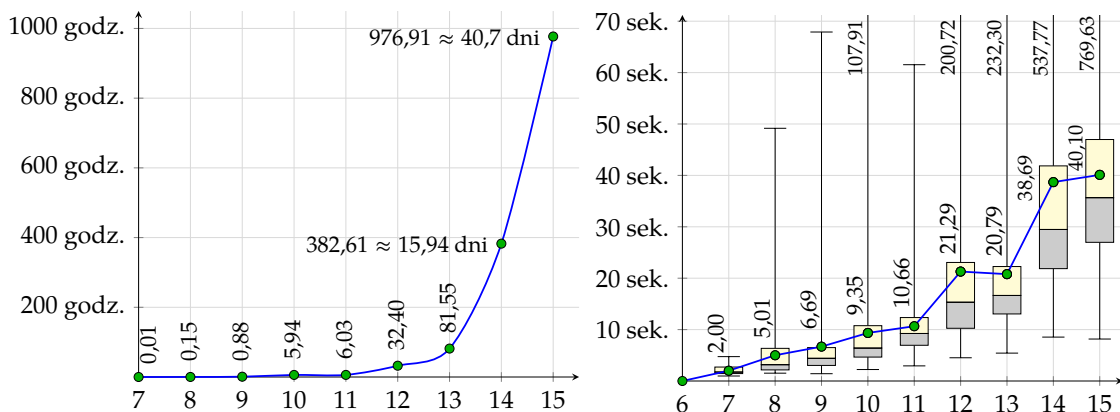
Listę obliczonych macierzy incydencji spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa, podzieloną względem typu Coxetera-Dynkina $\text{CDtype}_I = (\text{spec}_I, \text{Dyn}_I)$, wraz z macierzami definiującymi dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność, można znaleźć w [43].

Zauważmy, że w przypadku porządków I spełniających $|I| = n \notin \{9, 10\}$ spektrum Coxetera $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$ jednoznacznie wyznacza typ Dynkina $\text{Dyn}_I \in \{\mathbb{A}_{n-2}, n \geq 3; \mathbb{D}_{n-2}, n \geq 6; \mathbb{E}_6; \mathbb{E}_7; \mathbb{E}_8\}$, patrz tabela 5.24. Stąd, dla $|I|, |J| \notin \{9, 10\}$ otrzymujemy $\text{spec}_I = \text{spec}_J \Leftrightarrow \text{CDtype}_I = \text{CDtype}_J \Leftrightarrow I \approx_{\mathbb{Z}} J$. \square

Uwaga 5.31. (a) Aby przyspieszyć obliczenia, w naszej implementacji zastosowaliśmy buforowanie wywołań algorytmu 5.28 (obliczającego reduct $\mathcal{R}_J^{\text{red}} \subseteq \mathbb{Z}^J$).

(b) Algorytm 4.44 ma charakter heurystyczny i nie gwarantuje znalezienia macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} J$. W przeprowadzonych przez nas obliczeniach w etapie 4.2.1° algorytm znalazł macierz B w 112 050 przypadkach, w etapie 4.2.2° w 28 640 przypadkach a pozostałe 7 093 macierzy zostało znalezione w etapie 4.3.1°.

(c) Następujące wykresy przedstawiają informacje o czasie pracy algorytmu 4.44, w przypadku znalezienia szukanej macierzy $B \in \text{Gl}(|J|; \mathbb{Z})$ definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność między porządkami korangi dwa I oraz J wielkości $|I| = |J| = n \leq 15$: na pierwszym wykresie sumaryczny czas działania jednego procesora; na drugim: czas znalezienia pojedynczej macierzy, por. uwaga 4.48(c).



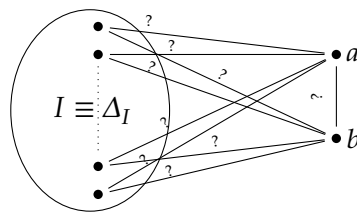
(d) Algorytm 4.44 sprawdza się zarówno w przypadku wyszukiwania równoważności pomiędzy porządkami głównymi (patrz dowód twierdzenia 4.47), jak i porządkami korangi dwa (patrz dowód twierdzenia 5.30). Niemniej, w drugim przypadku odsetek par

porządków, dla których algorytm nie znalazł macierzy definiującej dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność, jest znacząco większy: 24,18% w porównaniu do 0,23%. Powód tej różnicy nie jest znany i będzie przedmiotem dalszych badań.

5.4. Twierdzenie o strukturze porządków nieujemnych korangi dwa

Niniejszy podrozdział poświęcony jest udowodnieniu twierdzenia 5.33, które zawiera opis struktury spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa, por. [54]. Twierdzenie to stanowi ważne narzędzie w spektralnej analizie Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa: przy jego pomocy, w następnym podrozdziale dowodzimy lemat 5.44, który zawiera opis jednopikowych porządków korangi dwa oraz równoważność (a) \Leftrightarrow (e) w twierdzeniu 5.5, która dowodzi, że definicja typu Euklidesa (definicja 5.13) jest poprawna, patrz strona 167 oraz 173, odpowiednio. Twierdzenie 5.33 zawiera opis algorytmu, który można użyć do konstrukcji porządków korangi dwa, ale złożoność obliczeniowa tego algorytmu wyklucza jego użycie na potrzeby obliczeń, których wyniki prezentowane są w dysertacji, patrz uwaga 5.37.

Przypomnijmy, że algorytmy 3.52 oraz 4.28 opisują proces konstrukcji *większych* porządków z *mniejszych* metodą dołączania elementu minimalnego. Twierdzenie 5.33 opisuje konstrukcję *spójnych* nieujemnych porządków korangi dwa metodą dodania *dwóch* nowych elementów (niekoniecznie minimalnych) do *spójnych* porządków dodatnich. Idea jest następująca: założmy, że I jest skończonym spójnym dodatnim zbiorem częściowo uporządkowanym oraz $a, b \notin I$.



Konstruujemy bigraf Δ_J rozszerzając bigraf Δ_I o wierzchołki a oraz b łącząc je z istniejącymi wierzchołkami w bigrafie Δ_I w sposób opisany w twierdzeniu 5.33.

W twierdzeniu pokazujemy, że każdy spójny porządek J korangi dwa można skonstruować taką metodą. Przejdziemy teraz do precyzyjniejszego opisu.

Porządek $I = (\{1, \dots, n\}, \leq_I)$ nazywamy *uporządkowanym topologicznie*, jeśli dla wszystkich $i, j \in I$ spełniających $i \leq_I j$ zachodzi $i < j$. Przypomnijmy, że każdy skończony zbiór częściowo uporządkowany jest izomorficzny (a stąd również dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny) ze zbiorem uporządkowanym topologicznie, patrz uwaga 1.45. Twierdzenie 5.33 pokazuje, że zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość:

$$I \leftrightarrow (J, u, v, s, t), \text{ gdzie } u, v \in \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^{n-2} \text{ oraz } 1 \leq s < t \leq n, \quad (5.32)$$

między n -elementowymi topologicznie uporządkowanymi zbiorami częściowo uporządkowanymi I korangi dwa a $n - 2$ elementowymi porządkami dodatnimi, dla których ustalono dwa pierwiastki $u, v \in \mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$ oraz dwa indeksy $1 \leq s < t \leq n$. Innymi słowy, każdy spójny porządek I korangi dwa można skonstruować ze spójnego dodatniego porządku J oraz czwórki ustalonych parametrów (5.32).

Twierdzenie 5.33. Niech $I = (\{1, \dots, n\}, \leq_I)$ będzie uporządkowanym topologicznie zbiorem

Przykład 5.35. Rozważmy następujący 4-elementowy topologicznie uporządkowany zbiór częściowo uporządkowany I .

$$\mathcal{H}(J): \begin{array}{c} \bullet 3 \\ \nearrow \\ 1 \bullet \rightarrow \bullet 2 \\ \searrow \\ \bullet 4 \end{array} \quad \check{G}_{\Delta_J} = \check{G}_{q_J} = C_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad q_J(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \\ + x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + \\ + x_3^2 + \\ + x_4^2$$

$$\Delta_J: \begin{array}{c} \bullet 3 \\ \nearrow \\ 1 \bullet \rightarrow \bullet 2 \\ \searrow \\ \bullet 4 \end{array}$$

Funkcjonał kwadratowy $q_J: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$, stowarzyszony z porządkiem J , można przedstawić w następującej postaci kanonicznej (patrz twierdzenie 2.17).

$$q_J(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{1}{2}x_4^2 \quad (*)$$

Zauważmy, że $q_J(v) \geq 0$ dla każdego $v \in \mathbb{Z}^4$ oraz $q_J(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ a stąd J jest porządkiem dodatnim. Standardowa analiza równania $q_J(v) = 1$, gdzie $q_J(v)$ zapisane jest w postaci kanonicznej (*), dowodzi, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_J = \{v \in \mathbb{Z}^4; q_J(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^4$ złożony jest z 24 wektorów (patrz też algorytm 2.21).

$$\mathcal{R}_J = \left\{ \begin{array}{l} [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [1, -1, 0, 0], [1, 0, -1, 0], \\ [-1, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 0], [0, 0, -1, 0], [0, 0, 0, -1], [-1, 1, 0, 0], [-1, 0, 1, 0], \\ [1, 0, 0, -1], [1, 0, -1, -1], [0, 1, -1, 0], [0, 1, 0, -1], [0, 1, -1, -1], [1, 1, -1, -1], \\ [-1, 0, 0, 1], [-1, 0, 1, 1], [0, -1, 1, 0], [0, -1, 0, 1], [0, -1, 1, 1], [-1, -1, 1, 1] \end{array} \right\}$$

(a) Załóżmy, że $s := 1, t := 2, u := [1, 0, 0, 0]$ oraz $v := [0, 1, 0, 0]$. Wtedy, zgodnie z opisem macierzy $C_I = \check{G}_{\Delta_I} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ przedstawionym w twierdzeniu 5.33, mamy:

$$C_I = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_I: \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 5 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \vdots \\ 3 \quad 4 \quad 6 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

tj. $C_I \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ nie jest macierzą incydencji zbioru częściowo uporządkowanego.

(b) Załóżmy, że $s := 1, t := 2, u := [1, 0, -1, -1]$ oraz $v := [0, 1, -1, -1]$. Wtedy, zgodnie z opisem macierzy $C_I = \check{G}_{\Delta_I} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ przedstawionym w twierdzeniu 5.33, mamy:

$$C_I = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_I: \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 5 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \vdots \\ 3 \quad 4 \quad 6 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

oraz $C_I \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ nie jest macierzą incydencji zbioru częściowo uporządkowanego, ponieważ $c_{12} = 1, c_{23} = 1$ oraz $c_{13} = 0$ (tj. macierz $C_I \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ nie koduje relacji przechodniej).

(c) Załóżmy, że $s := 1, t := 3, u := [1, 0, -1, -1]$ oraz $v := [0, 1, -1, -1]$. Wtedy, zgodnie z opisem macierzy $C_I = \check{G}_{\Delta_I} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$ przedstawionym w twierdzeniu 5.33,

$$C_I = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_I: \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 5 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \vdots \\ 2 \quad 4 \quad 6 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \equiv \mathcal{H}(I): \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 5 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \vdots \\ 2 \quad 4 \quad 6 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}, \quad (5.36)$$

tj. $C_I \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ jest macierzą incydencji sześcioelementowego zbioru częściowo uporządkowanego I . Ponadto, wektory $\bar{u} := [1, 1, 0, 0, -1, -1] \in \mathbb{Z}^6$ oraz $\bar{v} := [0, 0, 1, 1, -1, -1] \in \mathbb{Z}^6$ stanowią $(1, 3)$ -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } I = \mathbb{Z} \cdot \bar{u} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{v} \subseteq \mathbb{Z}^6$.

Uwaga 5.37. (a) Zauważmy, że w przykładzie 5.35 istnieją dokładnie 8 640 sposoby wyboru parametrów s, t, u, v . Standardowe obliczenia pokazują, że tylko 4 spośród nich (dla $u := [1, 0, -1, -1] \in \mathbb{Z}^4$, $v := [0, 1, -1, -1] \in \mathbb{Z}^4$ oraz $(s, t) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$) kodują porządek. Co więcej, jest to dokładnie ten sam porządek I (5.36).

(b) W praktyce, algorytm implementujący konstrukcję opisaną w twierdzeniu 5.33 jest wolniejszy od algorytmu 4.28, gdyż:

- wymaga użycia kosztownego (wykładniczego) algorytmu obliczania zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{Z}^m$ (algorytm 2.21, patrz też uwaga 2.22),
- dla każdego dodatniego n -elementowego porządku J wymaga rozważenia $O(n^6)$ bigrafów $\Delta_{J(s,t,u,v)}$, ponieważ $|\mathcal{R}_J| \approx n^2$ (patrz twierdzenie 1.56(d), fakt 1.55(b) oraz tabela B.27), $|\{(s, t); 1 \leq s < t \leq n\}| = \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2)$,
- ponieważ sprawdzenie, czy macierz $\check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą incydencji, ma złożoność $O(n^3)$, pesymistyczna złożoność takiego algorytmu, to $O(13^n) + O(n^9) = O(2^n)$.

Udowodnimy teraz lematy, z których korzystamy w dowodzie twierdzenia 5.33. Przypomnijmy, że jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.9), zdefiniowany wzorem $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$, gdzie $q_{ij} \in \mathbb{Z}$, nazywamy spójnym, jeśli stowarzyszony z nim graf krawędziowo-dwudzielny Δ_q (definicja A.8(b)) jest spójny. Innymi słowy, jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy spójnym, jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ istnieje takie $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, że $q_{ij} \neq 0$.

Lemat 5.38. Jeśli $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym jednolitym funkcjonalem kwadratowym (A.9) korangi dwa, a wektory $(\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}) \subseteq \mathbb{Z}^n$ stanowią (s, t) -specjalną \mathbb{Z} -bazę (definicja 5.7) jądra $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{Z}^n$, to:

$$q(x) = q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) + x_s^2 + x_t^2 + 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(\mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_s \cdot x_t + \\ - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \mathbf{h}^{(s,t)}) \cdot x_s - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t, \quad (5.39)$$

gdzie:

- $\mathbb{Z}^n \ni [x_1, \dots, x_n] = x \mapsto x^{(s,t)} := [x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^{n-2}$;
- $q^{(s,t)}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}, q^{(s,t)} := q|_{x_s=x_t=0}$, jest spójnym dodatnim funkcjonalem kwadratowym, zdefiniowanym wzorem $q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) = q^{(s,t)}([x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n]) := q([x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots, x_{t-1}, 0, x_{t+1}, \dots, x_n])$;
- funkcjonal dwuliniowy $b_{q^{(s,t)}}: \mathbb{Z}^{n-2} \times \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest polaryzacją funkcjonala $q^{(s,t)}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.13), tj. $b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, y^{(s,t)}) := \frac{1}{2}[q^{(s,t)}(x^{(s,t)} + y^{(s,t)}) - q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) - q^{(s,t)}(y^{(s,t)})]$;
- wektory $\mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}^{n-2}$ są pierwiastkami funkcjonala kwadratowego $q^{(s,t)}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, tj. $\mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)} \in \mathcal{R}_{q^{(s,t)}} = \{v \in \mathbb{Z}^{n-2}; q^{(s,t)}(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$.

Dowód. Stosując do funkcjonala $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz wektora $\mathbf{h} \in \text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ argumenty użyte w dowodzie lematu 4.58, łatwo pokazać, że

$$q(x) = q^{(s)}(x^{(s)}) + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot x_s,$$

gdzie $x^{(s)} := [x_1, \dots, x_{s-1}, x_s, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^{n-1}$, funkcjonal kwadratowy $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany jest wzorem $q^{(s)}(x^{(s)}) := q([x_1, \dots, x_{s-1}, 0, x_s, \dots, x_n])$ a $b_{q^{(s)}}: \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^{n-1}$

jest polaryzacją funkcjonału $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$. Z lematu 5.10(a), zastosowanego do bigrafu $\Delta_{q^{(s)}}$ (definicja A.8(b)), wynika, że funkcjonał $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójny i główny. Dlatego, na podstawie lematu 4.58, prawdziwa jest równość

$$q^{(s)}(x^{(s)}) = q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) + x_t^2 - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t, \quad (*)$$

gdzie $q^{(s,t)}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym dodatnim funkcjonałem kwadratowym i stąd:

$$q(x) = q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) + x_t^2 - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t + x_s^2 - 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot x_s.$$

Zauważmy, że z (*) oraz definicji polaryzacji funkcjonału $q^{(s)}: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2 \cdot b_{q^{(s)}}(x^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) &= q^{(s)}(x^{(s)} + \mathbf{h}^{(s)}) - q^{(s)}(x^{(s)}) - q^{(s)}(\mathbf{h}^{(s)}) = \\ &= q^{(s,t)}(x^{(s,t)} + \mathbf{h}^{(s,t)}) + x_t^2 - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)} + \mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t + \\ &\quad - q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) - x_t^2 + 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t - 1 = \\ &= 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \mathbf{h}^{(s,t)}) + q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) + q^{(s,t)}(\mathbf{h}^{(s,t)}) + \\ &\quad - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(\mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t + \\ &\quad - q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) + 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t - 1 = \\ &= 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \mathbf{h}^{(s,t)}) - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(\mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t, \end{aligned}$$

ponieważ $q^{(s)}(\mathbf{h}^{(s)}) = q(-e_s + \mathbf{h}) = 1$ oraz $q^{(s,t)}(\mathbf{h}^{(s,t)}) = q(-e_t + \mathbf{h}) = 1$ (patrz fakt A.22). Podsumowując, prawdziwa jest równość:

$$\begin{aligned} q(x) &= q^{(s,t)}(x^{(s,t)}) + x_s^2 + x_t^2 + 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(\mathbf{h}^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_s \cdot x_t + \\ &\quad - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \mathbf{h}^{(s,t)}) \cdot x_s - 2 \cdot b_{q^{(s,t)}}(x^{(s,t)}, \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)}) \cdot x_t. \quad \square \end{aligned}$$

Założmy, że $n \geq 3$ oraz $1 \leq s < t \leq n$ są ustalonymi liczbami naturalnymi i rozważmy formę kwadratową $q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n]$, która definiuje dodatni jednolity funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$ (por. definicja 1.19 oraz uwaga 1.21). Innymi słowy, rozważmy dodatnio określony funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, który będziemy traktować (formalnie) jako całkowitoliczbowy wielomian stopnia 2, zmiennych $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_s, x_t\}$. Symbolem $x^{(s,t)} := [x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n]$ oznaczamy będziemy wektor powstały z wektora $x := [x_1, \dots, x_n]$ przez usunięcie elementów na współrzędnych s oraz t . Dodatkowo, dla uproszczenia notacji, będziemy pisać $\mathbb{Z}[x]$ zamiast $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Pokażemy, że forma kwadratowa $q_{u,v}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}[x] \equiv \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, zdefiniowana wzorem

$$q_{u,v}^{(s,t)}(x) := q(x^{(s,t)}) + x_s^2 + x_t^2 + 2 \cdot b_q(u, v) \cdot x_s \cdot x_t - 2 \cdot b_q(x^{(s,t)}, u) \cdot x_s - 2 \cdot b_q(x^{(s,t)}, v) \cdot x_t,$$

gdzie $u, v \in \mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$ są pierwiastkami formy $q \in \mathbb{Z}[x^{(s,t)}]$, definiuje jednolity nieujemny funkcjonał kwadratowy $q_{u,v}^{(s,t)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ korangi dwa.

Lemat 5.40. *Założmy, że $n \geq 3$ oraz $1 \leq s < t \leq n$ są ustalonymi liczbami naturalnymi, $q \in \mathbb{Z}[x^{(s,t)}]$ jest formą kwadratową (wielomianem jednorodnym stopnia 2 zmiennych $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_s, x_t\}$), która definiuje dodatni jednolity funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, oraz $u, v \in \mathcal{R}_q := \{r \in \mathbb{Z}^{n-2}; q(r) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$. Forma kwadratowa $q_{u,v}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}[x]$, zdefiniowana wzorem*

$$q_{u,v}^{(s,t)}(x) := q(x^{(s,t)}) + x_s^2 + x_t^2 + 2 \cdot b_q(u, v) \cdot x_s \cdot x_t - 2 \cdot b_q(x^{(s,t)}, u) \cdot x_s - 2 \cdot b_q(x^{(s,t)}, v) \cdot x_t, \quad (5.41)$$

wyznacza spójny nieujemny funkcjonał kwadratowy $q_{u,v}^{(s,t)}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ korangi dwa, którego jądro ma postać $\text{Ker } q_{u,v}^{(s,t)} = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{u,v}^{(s,t)}(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \bar{u} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{v} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie

$$\begin{aligned} \bar{u} &:= [u_1, \dots, u_{s-1}, 1, u_{s+1}, \dots, u_{t-1}, 0, u_{t+1}, \dots, u_n], \\ \bar{v} &:= [v_1, \dots, v_{s-1}, 0, v_{s+1}, \dots, v_{t-1}, 1, v_{t+1}, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy, że każdy wektor $y \in \mathbb{Z}^n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $y = \tilde{y} + y_s \cdot \bar{u} + y_t \cdot \bar{v}$, gdzie $\tilde{y} := y - y_s \cdot \bar{u} - y_t \cdot \bar{v}$ oraz $\tilde{y}_s = \tilde{y}_t = 0$. Na podstawie definicji (5.41) oraz własności polaryzacji (A.13) prawdziwa jest równość

$$\begin{aligned} q_{u,v}^{[s,t]}(x) &= q_{u,v}^{[s,t]}(\tilde{x} + x_s u + x_t v) = \\ &= q(\tilde{x}^{(s,t)} + x_s u + x_t v) + x_s^2 + x_t^2 + 2b_q(u, v)x_s x_t + \\ &\quad - 2b_q(\tilde{x}^{(s,t)} + x_s u + x_t v, u)x_s - 2b_q(\tilde{x}^{(s,t)} + x_s u + x_t v, v)x_t = \\ &= q(\tilde{x}^{(s,t)}) + x_s^2 + x_t^2 + 2b_q(\tilde{x}^{(s,t)}, u)x_s + 2b_q(\tilde{x}^{(s,t)}, v)x_t + 2b_q(u, v)x_s x_t + x_s^2 + x_t^2 + \\ &\quad + 2b_q(u, v)x_s x_t - 2b_q(\tilde{x}^{(s,t)}, u)x_s - 2x_s^2 - 2b_q(v, u)x_s x_t + \\ &\quad - 2b_q(\tilde{x}^{(s,t)}, v)x_t - 2b_q(u, v)x_s x_t - 2x_t^2 = \\ &= q(\tilde{x}^{(s,t)}). \end{aligned}$$

Stąd łatwo sprawdzić, że $q_{u,v}^{[s,t]}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemnym funkcjonałem kwadratowym, a wektory \bar{u}, \bar{v} stanowią (s, t) -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_{u,v}^{[s,t]} \subseteq \mathbb{Z}^n$, tj. $q_{u,v}^{[s,t]}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem korangi dwa.

Należy jeszcze pokazać, że funkcjonał $q_{u,v}^{[s,t]}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójny. Załóżmy, przez sprzeczność, że bigraf $\Delta_{q_{u,v}^{[s,t]}}$ jest niespójny. Oznacza to, że jeden z wierzchołków x_s, x_t jest izolowany. Bez zmniejszenia ogólności rozważań załóżmy, że zachodzi pierwsza z możliwości, tj. $x_i \cdot x_s = 0$ dla każdego $i \neq s$. Stąd, oraz z definicji (5.41) otrzymujemy, iż:

$$2 \cdot b_q(x^{(s,t)}, u) \cdot x_s = 0 \Rightarrow b_q(x^{(s,t)}, u) = 0 \Rightarrow 0 = b_q(u, u) \quad (*)$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $u \in \mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^{n-2}; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$ jest pierwiastkiem funkcjonału $q: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, ponieważ z (*) oraz własności polaryzacji (A.13) otrzymujemy $1 = q(u) = b_q(u, u) = 0$. \square

Fakt 5.42. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.9) jest spójnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym korangi dwa. Jeśli wektory $\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^n$ stanowią (s, t) -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{Z}^n$, to funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ma postać $q = \bar{q}_{u,v}^{[s,t]}$ (5.41), gdzie:

- $\bar{q}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\bar{q} := q|_{x_s=x_t=0}$ jest spójnym dodatnim funkcjonałem kwadratowym,
- wektory $u := \mathbf{h}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}^{n-2}$, $v := \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}^{n-2}$ są pierwiastkami funkcjonału $\bar{q}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Dowód. Załóżmy, że wektory $\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^n$ stanowią (s, t) -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jednolitego spójnego funkcjonału kwadratowym korangi dwa $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Zauważmy, że funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ można utożsamiać z grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ_q (patrz definicja A.8(b)). Z lematu 5.38 wynika, że funkcjonał $\bar{q} := q|_{x_s=x_t=0}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony a wektory $u := \mathbf{h}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}^{n-2}$ oraz $v := \bar{\mathbf{h}}^{(s,t)} \in \mathbb{Z}^{n-2}$ są pierwiastkami funkcjonału $\bar{q}: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$. Z drugiej strony, na podstawie lematu 5.40, funkcjonał $\bar{q}_{u,v}^{[s,t]}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem (5.41) jest funkcjonałem korangi dwa, którego jądro $\text{Ker } \bar{q}_{u,v}^{[s,t]} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma postać $\text{Ker } \bar{q}_{u,v}^{[s,t]} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Łatwo sprawdzić, że zbiory pierwiastków $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz $\mathcal{R}_{\bar{q}_{u,v}^{[s,t]}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ są równe i stąd, na podstawie twierdzenia 1.34, $q = \bar{q}_{u,v}^{[s,t]}$. \square

Dowód twierdzenia 5.33

Udowodnimy teraz główny wynik niniejszego podrozdziału.

Dowód twierdzenia 5.33. Załóżmy, że $I = (\{1, \dots, n\}, \leq_I)$ jest spójnym uporządkowanym topologicznym zbiorem częściowo uporządkowanym a $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)) macierzą

incydencji I . Z założenia wynika, że macierz $C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest górnotrójką i stąd porządek I możemy utożsamiać z jednolitym funkcjonałem kwadratowym $q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40), gdzie $\check{G}_{q_I} := C_I \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama funkcjonału $q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (definicja A.8(a)).

(a) \Rightarrow (b) Z założenia I jest spójnym porządkiem korangi dwa, a stąd $q_I: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym korangi dwa (definicja 5.1(a)) i w konsekwencji teza wynika z lematu 5.38.

(b) \Rightarrow (a) Teza wynika z lematu 5.40, zastosowanego do formy kwadratowej

$$q_J = q_{I(s,t)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_n],$$

która definiuje funkcjonał kwadratowy $q_J: \mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \mathbb{Z}$, pierwiastków $\mathbf{h}^{(s,t)}, \mathbf{h}'^{(s,t)} \in \mathcal{R}_J = \{w \in \mathbb{Z}^{n-2}; q_J(w) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-2}$ oraz indeksów $s, t \in \{1, \dots, n\}$, gdzie $s < t$. \square

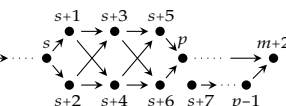
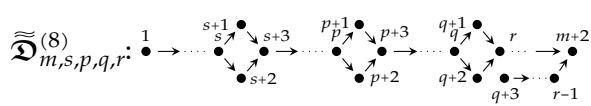
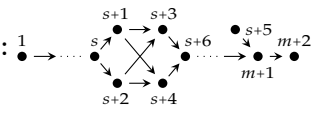
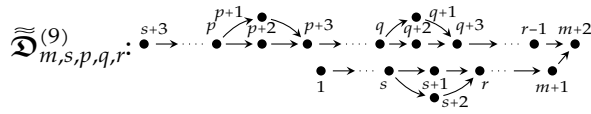
5.5. Serie jednopikowe

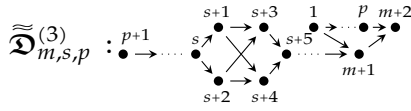
Głównym celem niniejszego podrozdziału jest przedstawienie wyników analogicznych do zawartych w twierdzeniach 3.17 oraz 4.26, dla przypadku jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa. W szczególności pokazujemy, że jeśli I jest n -elementowym jednopikowym porządkiem korangi dwa, gdzie $n \leq 15$, to:

- I jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z jednym z rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa $\tilde{D} \in \{\tilde{D}_{n-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ przedstawionych w tabeli 5.3. Ponadto:
 - jeśli $I \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_{n-2}^2$, to I jest izomorficzny z jednym z czternastu typów $\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(1)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(2)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(3)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(4)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(6)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(7)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(8)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(9)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(10)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(11)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(12)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(13)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(14)}$ porządków przedstawionych w tabeli 5.43;
 - jeśli $I \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$, to I jest izomorficzny z jednym 426 jednopikowych porządków I typu $\tilde{D}I \in \{\tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8\}$.
- I nie jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z rozszerzonym diagramem Euklidesa korangi dwa \tilde{A}_{n-1}^2 .
- I nie jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny z rozszerzonym diagramem Euklidesa korangi dwa $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{n-1}^2, \tilde{D}_{n-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$.

Na zakończenie podrozdziału przedstawiamy dowód twierdzenia 5.5, pokazującego, że spójne porządki korangi dwa, z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$, można sklasyfikować przy pomocy porządków Euklidesa korangi dwa $\tilde{A}I_{m-2}, \tilde{D}I_{m-2}, \tilde{E}I_6, \tilde{E}I_7, \tilde{E}I_8$ (tabela 5.4).

TABELA 5.43. JEDNOPIKOWE PORZĄDKI KORANGI DWA

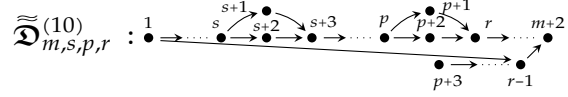
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(1)} : 1 \rightarrow \dots$  <p> $0 \leq s \leq p-7 \leq m-5; m \geq 5$ $\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{s+3} + e_{s+4}$ $\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{s+5} + e_{s+6}$ </p>	$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(8)} : 1 \rightarrow \dots$  <p> $0 \leq s \leq p-3 \leq q-6 \leq r-9 \leq m-7; m \geq 7$ $\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{p+1} + e_{p+2}$ $\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{q+1} + e_{q+2}$ </p>
$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(2)} : 1 \rightarrow \dots$  <p> $0 \leq s \leq m-5; m \geq 5$ $\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{s+3} + e_{s+4}$ $\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} - e_{s+5} + e_{m+1} + e_{m+2}$ </p>	$\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(9)} : 1 \rightarrow \dots$  <p> $0 \leq s \leq p-2 \leq q-5 \leq r-8 \leq m-6; m \geq 6$ $\mathbf{h}_1 = -e_{p+1} - e_{p+2} + e_{q+1} + e_{q+2}$ $\mathbf{h}_2 = -e_{p+1} - e_{p+2} - e_{s+1} - e_{s+2} + 2 \cdot e_{m+2}$ </p>



$$2 \leq p \leq s \leq m-4; m \geq 6$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{s+3} + e_{s+4}$$

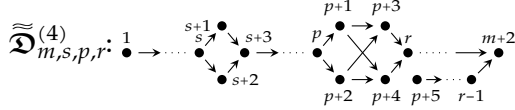
$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} - e_1 + e_{m+1} + e_{m+2}$$



$$1 \leq s \leq p-3 \leq r-7 \leq m-5; m \geq 6$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{p+1} + e_{p+2}$$

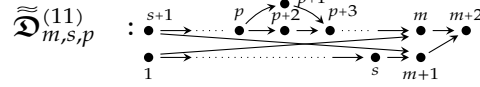
$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} - e_{r-1} + e_1 + e_{m+2}$$



$$0 \leq s \leq p-3 \leq r-8 \leq m-6; m \geq 5$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{p+1} + e_{p+2}$$

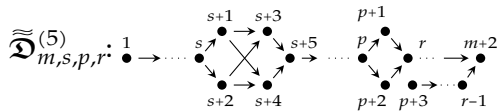
$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{p+3} + e_{p+4}$$



$$1 \leq s \leq p-1 \leq m-4; m \geq 5$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_1 - e_{s+1} + e_m + e_{m+1}$$

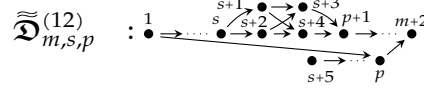
$$\mathbf{h}_2 = -e_1 - e_{p+1} - e_{p+2} + e_m + e_{m+2}$$



$$0 \leq s \leq p-5 \leq r-8 \leq m-6; m \geq 5$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{s+3} + e_{s+4}$$

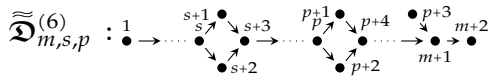
$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{p+1} + e_{p+2}$$



$$1 \leq s \leq p-5 \leq m-4; m \geq 5$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{s+3} + e_{s+4}$$

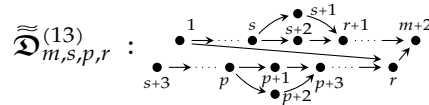
$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} - e_p + e_1 + e_{m+2}$$



$$0 \leq s \leq p-3 \leq m-6; m \geq 6$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{p+1} + e_{p+2}$$

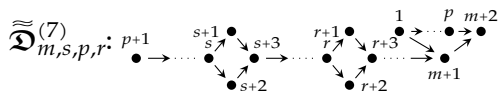
$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} - e_{p+3} + e_{m+1} + e_{m+2}$$



$$1 \leq s \leq p-2 \leq r-5 \leq m-4; m \geq 5$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{p+1} - e_{p+2} - 2 \cdot e_1 + e_{s+1} + e_{s+2} + 2 \cdot e_r$$

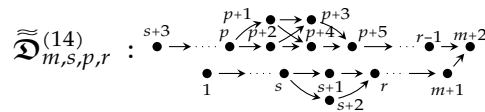
$$\mathbf{h}_2 = -e_{p+1} - e_{p+2} - e_{s+1} - e_{s+2} + 2 \cdot e_{m+2}$$



$$2 \leq p \leq s \leq r-3 \leq m-5; m \geq 7$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{s+1} - e_{s+2} + e_{r+1} + e_{r+2}$$

$$\mathbf{h}_2 = -e_{s+1} - e_{s+2} - e_1 + e_{m+1} + e_{m+2}$$



$$0 \leq s \leq p-2 \leq r-7 \leq m-5; m \geq 5$$

$$\mathbf{h}_1 = -e_{p+1} - e_{p+2} + e_{p+3} + e_{p+4}$$

$$\mathbf{h}_2 = -e_{p+1} - e_{p+2} - e_{s+1} - e_{s+2} + 2 \cdot e_{m+2}$$

Lemat 5.44. Jeśli $I \in \{\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(1)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(2)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(3)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(4)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(6)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(7)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(8)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(9)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(10)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(11)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(12)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(13)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(14)}\}$ jest jednym z czternastu zbiorów częściowo uporządkowanych przedstawionych w tabeli 5.43, to:

- (a) I jest porządkiem korangi dwa, którego jądro $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_2 \subseteq \mathbb{Z}^{m+2}$ generowane jest przez wektory $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{Z}^{m+2}$ przedstawione w tabeli 5.43,
- (b) I jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z rozszerzonym diagramem Euklidesa korangi dwa $\tilde{\mathbb{D}}_m^2$,
- (c) $\text{Dyn}_I = \mathcal{D}_m$ oraz $\tilde{\mathbb{D}}I = \tilde{\mathbb{D}}I_m$.

Twierdzenie 5.45. *Jeśli I jest $m + 2$ elementowym jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, to $\mathbf{Dyn}_I \neq \mathcal{A}_m$.*

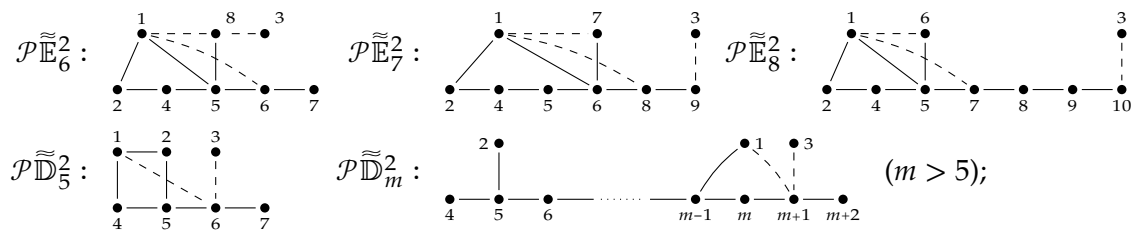
Dowód. Niech $I = (\{1, \dots, m + 2\}, \leq_I)$ będzie jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, którego jedynym elementem maksymalnym jest $m + 2$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_{m+2}(\mathbb{Z})$ (fakt 1.38(b)) porządku I jest górnotrójkątna, patrz uwaga 1.45 i stąd I możemy utożsamiać z bigrafem Δ_I (1.41), gdzie $\tilde{G}_{\Delta_I} := C_I \in \mathbb{M}_{m+2}(\mathbb{Z})$.

Założmy, przez sprzeczność, że $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{A}_m$. Na podstawie wniosku 5.9(a) wiemy, że istnieją wektory $\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_{i'} \in \text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^{m+2}$ stanowiące (i, i') -specjalną \mathbb{Z} -bazę jądra $\text{Ker } q_I \subseteq \mathbb{Z}^{m+2}$, gdzie $1 \leq i < i' \leq m + 2$. Z lematu 5.10(a), zastosowanego do bigrafu Δ_I , wynika, że $I^{(i)} := I \setminus \{i\} \subseteq I$ jest jednopikowym porządkiem głównym typu $\mathbf{Dyn}_{I^{(i)}} = \mathcal{A}_m$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 4.26(a). \square

Uwaga 5.46. Wyniki eksperymentalne sugerują, że prawdziwe jest silniejsze twierdzenie: jeśli I jest $m + 2$ elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, to $\mathbf{Dyn}_I \neq \mathcal{A}_m$. Dowód w przypadku porządków I wielkości $|I| \leq 15$ można przeprowadzić obliczeniowo (patrz tabela 5.24), natomiast przypadek $|I| > 15$ pozostaje otwartym problemem. Jednym z możliwych sposobów na jego rozwiązanie jest przygotowanie opisu wszystkich (wielopikowych) porządków głównych J typu $\mathbf{Dyn}_J = \mathcal{A}_{|J|-1}$ i przeprowadzenie rozumowania analogicznego do użytego w dowodzie twierdzenia 4.26.

Przypomnijmy, że w przypadku jednopikowych dodatnich n -elementowych zbiorów częściowo uporządkowanych I , kwadratowa \mathbb{Z} -równoważność $I \sim_{\mathbb{Z}} D$, gdzie $D \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ (tabela B.17), implikuje dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} DI$, patrz twierdzenie 3.17. Podobnie, w przypadku głównych n -elementowych jednopikowych porządków I , kwadratowa \mathbb{Z} -równoważność $I \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (tabela 4.4), implikuje dwuliniową \mathbb{Z} -równoważność $I \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, patrz twierdzenie 4.24. Lemat 5.48 dowodzi, że taka implikacja nie zachodzi w przypadku jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa.

TABELA 5.47. BIGRAFY KORANGI DWA DWULINIOWO \mathbb{Z} -RÓWNOWAŻNE Z JEDNOMPIKOWYMI ZBIORAMI CZĘŚCIOWO UPORZĄDKOWANYMI KORANGI DWA



Lemat 5.48. *Założmy, że I jest jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, złożonym z co najwyżej $m + 2 = |I| \leq 15$ elementów.*

(a) $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{A}}_m^2$.

(b) Jeśli $\tilde{DI} = \tilde{\mathbb{D}}I_m$, to:

- I jest jednym z 4224 porządków (z dokładnością do izomorfizmu), które należą do 14 serii przedstawionych w tabeli 5.43,

\tilde{DI}	$\tilde{\mathbb{D}}I_5$	$\tilde{\mathbb{D}}I_6$	$\tilde{\mathbb{D}}I_7$	$\tilde{\mathbb{D}}I_8$	$\tilde{\mathbb{D}}I_9$	$\tilde{\mathbb{D}}I_{10}$	$\tilde{\mathbb{D}}I_{11}$	$\tilde{\mathbb{D}}I_{12}$	$\tilde{\mathbb{D}}I_{13}$
#I	6	25	66	140	260	441	700	1056	1530

- $\text{cox}_I(t) = t^{m+2} + t^{m+1} - 2t^m - 2t^{m-1} + t^{m-2} + t^{m-3} + t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$,
- $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{D}}_m^2$ oraz $I \approx_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}}$, gdzie $\mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}} := \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}}_m^2$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym, który przedstawiono w tabeli 5.47.

(c) Jeśli $\widetilde{\mathbb{D}}I = \widetilde{\mathbb{E}}I_6$, to:

- I jest izomorficzny z jednym z 18 porządków zwartych w [43] i przedstawionych w tabeli 5.49,
- $\text{cox}_I(t) = t^8 + t^7 + t^6 - 2t^5 - 2t^4 - 2t^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$,
- $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{E}}_6^2$ oraz $I \approx_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}}$, gdzie $\mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}} := \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{E}}_6^2$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym, który przedstawiono w tabeli 5.47.

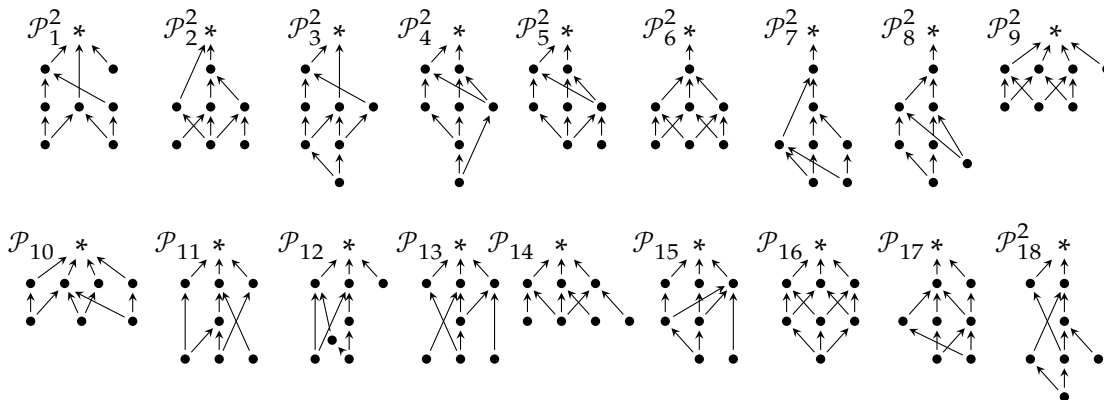
(d) Jeśli $\widetilde{\mathbb{D}}I = \widetilde{\mathbb{E}}I_7$, to:

- z dokładnością do izomorfizmu, I jest jednym z 79 porządków zwartych w [43],
- $\text{cox}_I(t) = t^9 + t^8 - 2t^5 - 2t^4 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$,
- $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{E}}_7^2$ oraz $I \approx_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}}$, gdzie $\mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}} := \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{E}}_7^2$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym, który przedstawiono w tabeli 5.47.

(e) Jeśli $\widetilde{\mathbb{D}}I = \widetilde{\mathbb{E}}I_8$, to:

- z dokładnością do izomorfizmu, I jest jednym z 329 porządków zwartych w [43],
- $\text{cox}_I(t) = t^{10} + t^9 - t^7 - t^6 - t^4 - t^3 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$,
- $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{E}}_8^2$ oraz $I \approx_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}}$, gdzie $\mathcal{P}\widetilde{\mathbb{D}} := \mathcal{P}\widetilde{\mathbb{E}}_8^2$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym, który przedstawiono w tabeli 5.47.

TABELA 5.49. JEDNOPIKOWE PORZĄDKI KORANGI DWA TYPU DYNKINA \mathcal{E}_6



Dowód. (a) Wynika z twierdzenia 5.45 oraz lematu 5.14.

Dowód stwierdzeń (b) oraz (c) ma charakter obliczeniowy.

Etap 1° Przy pomocy algorytmu 4.28 generujemy górnotrójkątne macierze incydencji $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$ wszystkich (z dokładnością do izomorfizmu) zbiorów częściowo uporządkowanych I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$. Jest ich dokładnie 1 198 672.

Etap 2° Wybieramy macierze incydencji porządków jednopikowych (tj. macierze $C_I \in \mathbb{M}_I(\mathbb{Z})$, których ostatnia kolumna składa się z samych jedynek). Jest ich dokładnie 4 650, por. tabela 4.33.

Etap 3° Przy pomocy algorytmu 5.22 i standardowych obliczeń algebry komputerowej dzielimy uzyskany zbiór według typów Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{A}_{|I|-2}, \mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ oraz wielomianów Coxetera $\text{cox}_I(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

TABELA 5.50. LICZBA JEDNAPIKOWYCH PORZĄDKÓW I KORANGI DWA WIELKOŚCI $|I| \leq 15$ POGRUPOWANYCH WZGLĘDEM TYPU COXETERA-DYNKINA

n	\mathbf{Dyn}_I	$\text{cox}_I(t)$	$\#I$	n	\mathbf{Dyn}_I	$\text{cox}_I(t)$	$\#I$
7	\mathcal{D}_5	$t^7+t^6-t^5-t^4-t^3-t^2+t+1$	6	10	\mathcal{E}_8	$t^{10}+t^9-t^7-t^6-t^4-t^3+t+1$	329
8	\mathcal{D}_6	$t^8+t^7-2t^6-t^5+2t^4-t^3-2t^2+t+1$	25	11	\mathcal{D}_9	$t^{11}+t^{10}-2t^9-2t^8+t^7+t^6+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	260
8	\mathcal{E}_6	$t^8+t^7+t^6-2t^5-2t^4-2t^3+t^2+t+1$	18	12	\mathcal{D}_{10}	$t^{12}+t^{11}-2t^{10}-2t^9+t^8+t^7+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	441
9	\mathcal{D}_7	$t^9+t^8-2t^7-2t^6+2t^5+2t^4-2t^3-2t^2+t+1$	66	13	\mathcal{D}_{11}	$t^{13}+t^{12}-2t^{11}-2t^{10}+t^9+t^8+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	700
9	\mathcal{E}_7	$t^9+t^8-2t^5-2t^4+t+1$	79	14	\mathcal{D}_{12}	$t^{14}+t^{13}-2t^{12}-2t^{11}+t^{10}+t^9+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	1056
10	\mathcal{D}_8	$t^{10}+t^9-2t^8-2t^7+t^6+2t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	140	15	\mathcal{D}_{13}	$t^{15}+t^{14}-2t^{13}-2t^{12}+t^{11}+t^{10}+t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$	1530

Stąd, na podstawie lematu 5.14 oraz definicji 5.13, $I \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, dla $\tilde{D} \in \{\tilde{\mathbb{D}}_{|I|-2}^2, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ gdzie $\tilde{D}I \in \{\tilde{\mathbb{D}}I_{|I|-2}, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8\}$, odpowiednio. Ponadto:

- pokazujemy, że $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, ponieważ

$$I \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D} \Rightarrow \text{cox}_I(t) = \text{cox}_{\tilde{D}}(t),$$

patrz fakt 1.55(c), natomiast

$$\begin{aligned} \text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_m^2}(t) &= t^{m+2} - t^{m+1} - t^m + t^{m-1} + t^3 - t^2 - t + 1, & \text{cox}_{\tilde{\mathbb{E}}_6^2}(t) &= t^8 - t^7 - t^6 + 2t^4 - t^2 - t + 1, \\ \text{cox}_{\tilde{\mathbb{E}}_7^2}(t) &= t^9 - t^8 - t^7 + t^5 + t^4 - t^2 - t + 1, & \text{cox}_{\tilde{\mathbb{E}}_8^2}(t) &= t^{10} - t^9 - t^8 + t^6 + t^4 - t^2 - t + 1, \end{aligned}$$

patrz [55, Proposition 2.2];

- pokazujemy, że każdy I spełniający $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_{|I|-2}$ jest izomorficzny z jednym z 14 typów porządków jednopikowych przedstawionych w tabeli 5.43,
- pokazujemy, że porządki I typu $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ zawarte są w [43], w szczególności, porządki I typu $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_6$ są izomorficzne z porządkami $\mathcal{P}_1^2, \dots, \mathcal{P}_{18}^2$, których kołczan Hasse przedstawiony jest w tabeli 5.49.

Etap 4° Przy pomocy algorytmu 4.44 (oraz algorytmu 5.28) pokazujemy, że

$$I \approx_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}\tilde{D}, \text{ gdzie } \mathcal{P}\tilde{D} \in \{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{D}}_{|I|-2}^2, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}, \text{ jeśli } \mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_{|I|-2}, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\},$$

odpowiednio. To jest, stosując algorytm 4.44 do macierzy górnotrójkątnych $C_I \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ oraz $\check{G}_{\mathcal{P}\tilde{D}} \in \mathbb{M}_{|I|}(\mathbb{Z})$ (por. uwaga 4.45(b)), obliczamy \mathbb{Z} -odwracalną macierz $B \in \text{Gl}(|I|, \mathbb{Z})$, która spełnia równość $C_I = B^{tr} \cdot \check{G}_{\mathcal{P}\tilde{D}} \cdot B$. Przykładowo, w przypadku następującego zbioru częściowo uporządkowanego I korangi dwa typu $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{E}_6$:

$$\mathcal{H}(I): \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & 2 & & & & 5 \\ & & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \\ & & & \searrow & & & \\ 1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 8 \\ & & & \swarrow & & & \\ & & 4 & \rightarrow & 7 & & \end{array} \\ C_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \check{G}_{\mathcal{P}\tilde{\mathbb{E}}_6^2} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{1} & 0 & 0 & \hat{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \hat{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{1} & \hat{1} & 0 & \hat{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{1} & 0 & \hat{1} & \hat{1} & 0 & 0 & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \hat{1} \end{bmatrix}.$$

□

Twierdzenie 5.51. Niech I będzie $|I| = m + 2$ elementowym jednopikowym zbiorem częściowo uporządkowanym korangi dwa, którego typem Euklidesa jest $\tilde{DI} \in \{\tilde{DI}_m, \tilde{EI}_6, \tilde{EI}_7, \tilde{EI}_8\}$ (definicja 5.13). Jeśli $|I| \leq 15$, to:

- (a) $I \not\approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$, gdzie $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-2}^2, \tilde{D}_{m-2}^2, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$,
- (b) $I \approx_{\mathbb{Z}} \mathcal{P}\tilde{D}$, gdzie $\mathcal{P}\tilde{D} \in \{\mathcal{P}\tilde{D}_{|I|-2}^2, \mathcal{P}\tilde{E}_6^2, \mathcal{P}\tilde{E}_7^2, \mathcal{P}\tilde{E}_8^2\}$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa przedstawionym w tabeli 5.47,
- (c) $I \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{DI}$, gdzie $\tilde{DI} \in \{\tilde{DI}_m, \tilde{EI}_6, \tilde{EI}_7, \tilde{EI}_8\}$ jest porządkiem Euklidesa korangi dwa przedstawionym w tabeli 5.4,
- (d) I jest izomorficzny z jednym z czternastu typów porządków $\tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(1)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s}^{(2)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(3)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(4)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(6)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(7)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(8)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,q,r}^{(9)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(10)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(11)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p}^{(12)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(13)}, \tilde{\mathcal{D}}_{m,s,p,r}^{(14)}$ przedstawionych w tabeli 5.43 (jeśli $\mathbf{Dyn}_I = \mathcal{D}_m$) lub I jest izomorficzny z jednym 426 jednopikowych porządków I typu $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

Jeśli J jest jednopikowym porządkiem korangi dwa, to następujące warunki są równoważne.

- (e) $I \sim_{\mathbb{Z}} J$,
- (f) $I \approx_{\mathbb{Z}} J$,
- (g) $\mathbf{spec}c_I = \mathbf{spec}c_J$,
- (h) $\mathbf{Dyn}_I = \mathbf{Dyn}_J \Leftrightarrow \tilde{DI} = \tilde{DJ}$.

W szczególności, każdy $m + 2 = |I| \leq 15$ elementowy jednopikowy zbiór częściowo uporządkowany I korangi dwa, jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności, przez:

- spektrum Coxetera $\mathbf{spec}c_I \subseteq \mathbb{C}$,
- typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

Dowód. Stwierdzenia (a)–(d) oraz równoważność (e) \Leftrightarrow (f) są konsekwencją lematu 5.48 oraz przechodniości relacji dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$.

(f) \Rightarrow (g) Wynika z faktu 1.55(c).

(g) \Rightarrow (h) Jest konsekwencją lematu 5.48, który pokazuje, iż spektrum Coxetera $\mathbf{spec}c_I \subseteq \mathbb{C}$ jednoznacznie wyznacza typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_I \in \{\mathcal{D}_m, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jednopikowego porządku I korangi dwa wielkości $|I| \leq 15$, por. tabela 5.50.

(h) \Rightarrow (f) Wynika z (b) oraz przechodniości relacji dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności $\approx_{\mathbb{Z}}$:

$$I \approx_{\mathbb{Z}}^{B_I} \tilde{DI}_m^2 = \tilde{DJ}_m^2 \approx_{\mathbb{Z}}^{B_J} J$$

implikuje $I \approx_{\mathbb{Z}}^{B_I \cdot B_I} J$. □

Uwaga 5.52. Wyniki eksperymentalne przedstawione w lemacie 5.48 (patrz też tabela 5.24) sugerują, że twierdzenie 5.51 ma ogólny charakter i jest prawdziwe dla wszystkich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych korangi dwa, por. twierdzenie 4.24 oraz twierdzenie 4.26. Jednym z możliwych sposobów na udowodnienie tej hipotezy jest zastosowanie rozumowania analogicznego do użytego w dowodzie twierdzenia 4.26.

Etap 1° Pokazujemy, że 14 serii jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych przedstawionych w tabeli 5.43 opisuje w pełni wszystkie porządki jednopikowe I korangi dwa. Dowód tego faktu można przeprowadzić w oparciu o opis struktury spójnych porządków korangi dwa (twierdzenie 5.33) oraz opis jednopikowych porządków dodatnich (twierdzenie 3.17), analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.26.

Etap 2° Dowodzimy silniejszą wersję lematu 5.44, tj. pokazujemy, że każdy $I \in \{\tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(1)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s}^{(2)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(3)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(4)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(5)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(6)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(7)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,q,r}^{(8)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,q,r}^{(9)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(10)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(11)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p}^{(12)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(13)}, \tilde{\mathfrak{D}}_{m,s,p,r}^{(14)}\}$ przedstawiony w tabeli 5.43 jest dwuliniowo \mathbb{Z} -równoważny z grafem krawędziowo-dwudzielnym $\mathcal{P}\tilde{\mathbb{D}}_m^2$, który przedstawiono w tabeli 5.43, np. wskazując jawnie macierze definiujące \mathbb{Z} -równoważność, por. lemat 3.19 oraz lemat 4.57.

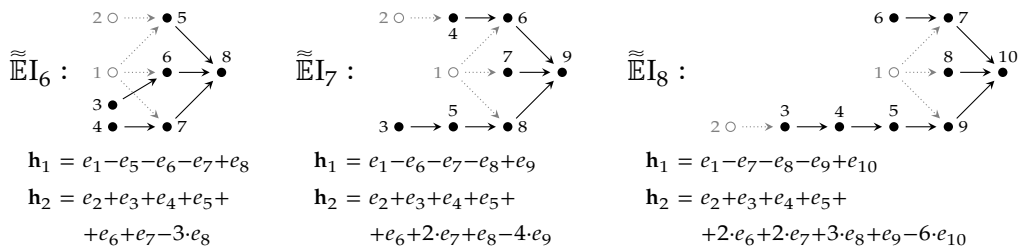
Ze względu na złożoność oraz techniczny charakter proponowanych rozumowań, nie przedstawiamy omawianych dowodów w dysertacji.

Dowód twierdzenia 5.5

Podrozdział kończymy dowodem twierdzenia 5.5, które analogicznie do twierdzenia 1.56 oraz twierdzenia 4.6, opisuje *wszystkie*, z dokładnością do relacji kwadratowej \mathbb{Z} -równoważności $\sim_{\mathbb{Z}}$, spójne porządki I korangi dwa (definicja 5.1(b)). Mówiąc precyzyjniej, pokażemy że każdy spójny zbiór częściowo uporządkowany I korangi dwa jest kwadratowo \mathbb{Z} -równoważny z jednym z rozszerzonych diagramów Euklidesa korangi dwa $\tilde{D} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_{|I|-2}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{|I|-2}^2, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ przedstawionych w tabeli 5.3. Ponadto pokażemy, że porządki I korangi dwa, składające się z co najwyżej $|I| = n \leq 15$ elementów, z dokładnością do relacji $\sim_{\mathbb{Z}}$ klasyfikuje się przy pomocy porządków Euklidesa korangi dwa $\tilde{D}I \in \{\tilde{\mathbb{D}}I_n, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8\}$, które przedstawione są w tabeli 5.5.

Dowód twierdzenia 5.5. Równoważność (a) \Leftrightarrow (b) wynika z faktu 5.2.

Aby udowodnić równoważność (c) \Leftrightarrow (e) wystarczy pokazać, że każdy $\tilde{D}I \in \{\tilde{\mathbb{D}}I_{m-2}, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8\}$ jest porządkiem korangi dwa, ponieważ w takim przypadku teza jest konsekwencją lematu 5.48, przechodności relacji $\approx_{\mathbb{Z}}$ oraz faktu, iż $\approx_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \sim_{\mathbb{Z}}$ (patrz fakt 1.55(a)). Do wykazania, iż $\tilde{D}I \in \{\tilde{\mathbb{D}}I_{m-2}, \tilde{\mathbb{E}}I_6, \tilde{\mathbb{E}}I_7, \tilde{\mathbb{E}}I_8\}$ jest porządkiem korangi dwa wystarczy zastosować argumenty użyte w dowodzie lematu 5.44(a), gdyż:



oraz $\tilde{\mathbb{D}}I_m = \tilde{\mathfrak{D}}_{m,0,7}^{(1)}$.

(b) \Leftrightarrow (c) Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że macierz incydencji $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ stowarzyszona ze zbiorem częściowo uporządkowanym I (fakt 1.38(b)) jest górnotrójkątna, patrz uwaga 1.45. Stąd porządek I możemy utożsamiać z bigrafem Δ_I (1.41), gdzie $\check{G}_{\Delta_I} := C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, i teza wynika z twierdzenia 5.11.

(d) \Rightarrow (a) Diagram $\tilde{D}I \in \{\tilde{\mathbb{A}}_{m-2}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{m-2}^2, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ jest bigrafem korangi dwa, którego jądro ma postać $\text{Ker } \tilde{D}I = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\tilde{D}I} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'_{\tilde{D}I} \subseteq \mathbb{Z}^m$ (patrz [55, Proposition 2.2] oraz dowód twierdzenia 5.11). Zauważmy, że porządek I jest nieujemny, ponieważ $q_I(v) = q_{\tilde{D}I} \circ h^{-1}(v) =$

$q_{\tilde{D}_I}(h^{-1}(v)) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^m$. Ponadto, $\text{Ker } q_I = \mathbb{Z} \cdot h^{-1}(\mathbf{h}_{\tilde{D}_I}) \oplus \mathbb{Z} \cdot h^{-1}(\mathbf{h}'_{\tilde{D}_I}) \subseteq \mathbb{Z}^m$, co pokazuje, że I jest porządkiem korangi dwa.

(c) \Rightarrow (d) Z założenia istnieje macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ spełniająca równość $G_{\tilde{D}_I} = B^{tr} \cdot G_I \cdot B$. Łatwo sprawdzić, że automorfizm $h: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ zdefiniowany wzorem $h(x) := x \cdot B^{tr}$ spełnia równość $q_I \circ h = q_{\tilde{D}_I}$, co kończy dowód. \square

Dodatek A

Grafy krawędziowo-dwudzielne oraz formy kwadratowe

Niniejszy dodatek zawiera podstawowe informacje na temat grafów krawędziowo-dwudzielnych (ang. *edge-bipartite graphs*) w sensie [111] oraz ich związku z jednolitymi funkcjonalami kwadratowymi (ang. *unit quadratic forms*). Przedstawimy najważniejsze twierdzenia oraz fakty używane w rozprawie. Dodatek został przygotowany na podstawie prac [8, 81, 97, 111, 113, 119] oraz monografii [4, 28, 102].

Grafy oznakowane (ang. *signed graphs*) zostały zdefiniowane przez Harary'ego [64] (patrz też [126]) jako grafy posiadające jeden z dwóch rodzajów krawędzi: krawędzie dodatnie L^+ oraz ujemne L^- . Innymi słowy, są to grafy, których krawędzie zostały pokolorowane dwoma kolorami. **Grafy krawędziowo-dwudzielne** (*bigrafy*) zostały wprowadzone w [111] jako klasa grafów oznakowanych, w której żąda się, aby dowolne dwa wierzchołki łączył tylko jeden rodzaj krawędzi.

Definicja A.1. [111, Definition 2.1] *Grafem krawędziowo-dwudzielnym (w skrócie: bigrafem) nazywamy parę $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, gdzie $\Delta_0 = \{1, \dots, m\} \neq \emptyset$ jest skończonym zbiorem wierzchołków, natomiast $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^- \subseteq \{\{i, j\}; i, j \in \Delta_0\}$ jest multizbiorem krawędzi (w tym pętli) spełniającym warunek $\Delta_1^+ \cap \Delta_1^- = \emptyset$. Przez $\Delta_1(i, j)$ oznaczamy multizbiór krawędzi łączących wierzchołki i oraz j . Ponadto:*

- (a) Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-)$, który nie zawiera pętli (tj. $\Delta_1(i, i) = \emptyset$ dla dowolnego $i \in \Delta_0$) oraz wielokrotnych krawędzi nazywamy **prostym** (jednorodnym).
- (b) Dowolny bigraf $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-)$ przedstawiamy graficznie w przestrzeni euklidesowej zgodnie z następującą konwencją: elementy multizbiorów Δ_1^-, Δ_1^+ przedstawiamy w postaci krawędzi ciągłych $i \text{---} j$ oraz przerywanych $i \text{- - -} j$.
- (c) Dowolny graf $\Delta' = (\Delta_0, \Delta_1)$ utożsamiamy z bigrafem $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, w którym $\Delta_1^- = \Delta_1$, tj. zbiór krawędzi przerywanych Δ_1^+ jest pusty.
- (d) Każdy bigraf $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-)$ bez pętli, kodujemy w postaci niesymetrycznej macierzy Grama $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_\Delta(\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$,

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & d_{13}^\Delta & \cdots & d_{1m}^\Delta \\ & 1 & d_{23}^\Delta & \cdots & d_{2m}^\Delta \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & d_{m-1m}^\Delta \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } d_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j, \\ 0, & \text{jeśli } i > j, \\ |\Delta_1^+(i, j)|, & \text{jeśli } (i, j) \in \Delta_1^+, \\ -|\Delta_1^-(i, j)|, & \text{jeśli } (i, j) \in \Delta_1^- \end{cases}$$

oraz symetrycznej macierzy Grama $G_\Delta := \frac{1}{2} (\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}) \in \mathbb{M}_\Delta(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$.

- (e) Bigraf $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy **spójnym**, jeśli graf $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$ powstały z Δ przez zamianę krawędzi przerywanych $i \dashrightarrow j$ na ciągłe $i \longrightarrow j$ (tj. $\Delta_1^- := \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$ oraz $\Delta_1'^+ := \emptyset$) jest spójny. Równoważnie: $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ nazywamy spójnym, jeśli dla dowolnych wierzchołków $u, w \in \Delta_0$ istnieje taki ciąg wierzchołków $(v_1, \dots, v_s) \in (\Delta_0)^s$, że $v_1 := u$, $v_s := w$ oraz $(v_i, v_j) \in \Delta_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j = i + 1$, por. [28].

Izomorfizm grafów krawędziowo-dwudzielnych definiuje się analogicznie do izomorfizmu grafów prostych, por. definicja 1.5.

Definicja A.2. Grafy krawędziowo-dwudzielne $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ oraz $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$, gdzie $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$, $\Delta_1^+ \cap \Delta_1^- = \emptyset$ oraz $\Delta'_1 = \Delta_1'^+ \cup \Delta_1'^-$, $\Delta_1'^+ \cap \Delta_1'^- = \emptyset$ nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje taka bijekcja $f: \Delta_0 \rightarrow \Delta'_0$, że dla dowolnych $i, j \in \Delta_0$ zachodzi:

- $|\Delta_1^+(i, j)| = |\Delta_1'^+(f(i), f(j))|$ oraz
- $|\Delta_1^-(i, j)| = |\Delta_1'^-(f(i), f(j))|$,

gdzie symbolami $\Delta_1^+(i, j) \subseteq \Delta_1^+$ oraz $\Delta_1^-(i, j) \subseteq \Delta_1^-$ oznaczamy multizbiory krawędzi łączących wierzchołki i oraz j .

W rozprawie analizujemy skończone zbiory częściowo uporządkowane z dokładnością do kwadratowej oraz dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności (definicja 1.53). Są to równoważności analogiczne do słabej $\sim_{\mathbb{Z}}$ oraz silnej $\approx_{\mathbb{Z}}$ \mathbb{Z} -kongruencji Grama bigrafów, zdefiniowanych w pracy [111] (patrz też [115]).

Definicja A.3. Niech Δ, Δ' będą grafami krawędziowo-dwudzielnymi, które mają m wierzchołków, a $\check{G}_\Delta, \check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ oraz $G_\Delta, G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ stowarzyszonymi z nimi niesymetrycznymi oraz symetrycznymi macierzami Grama. Bigrafy Δ oraz Δ' nazywamy:

- (a) słabo \mathbb{Z} -kongruentnymi (oznaczenie $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$), jeśli $G_\Delta \sim_{\mathbb{Z}} G_{\Delta'}$, tzn. istnieje taka \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, że $G_\Delta = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B$;
- (b) silnie \mathbb{Z} -kongruentnymi (oznaczenie $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$), jeśli $\check{G}_\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \check{G}_{\Delta'}$, tzn. istnieje taka \mathbb{Z} -odwracalna macierz $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, że $\check{G}_\Delta = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B$.

W rozprawie używamy notacji „ $\sim_{\mathbb{Z}}^B$ ” oraz „ $\approx_{\mathbb{Z}}^B$ ”, aby wskazać macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ definiującą kongruencję Grama.

Definicja A.4. [111] Załóżmy, że $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli a $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama (definicja A.1(d)).

- (a) **Macierzą Coxetera** $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ nazywamy całkowitoliczbową macierz kwadratową

$$\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } \check{G}_\Delta^{-tr} := (\check{G}_\Delta^{-1})^{tr} = (\check{G}_\Delta^{tr})^{-1}.$$

- (b) **Transformacją Coxetera** $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ bigrafu Δ nazywamy funkcję liniową zdefiniowaną wzorem $\Phi_\Delta(v) := v \cdot \text{Cox}_\Delta$, dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n$.
- (c) **Wielomianem Coxetera** $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$ nazywamy wielomian charakterystyczny macierzy $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, tj.

$$\text{cox}_\Delta(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t].$$

- (d) **Spektrum Coxetera** $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$ nazywamy multizbiór wszystkich n wartości własnych macierzy Coxetera Cox_Δ lub, równoważnie, wszystkich n rozwiązań równania $\text{cox}_\Delta(t) = 0$.
- (e) **Zbiorem pierwiastków** bigrafu Δ nazywamy zbiór $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

(f) *Jądrem* bigrafu Δ nazywamy zbiór $\text{Ker } q_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Pokażemy teraz, że transformacja Coxetera $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ (bez pętli) jest nietrywialnym automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n , który przeprowadza pierwiastki Δ w pierwiastki Δ .

Lemat A.5. *Założmy, że $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ jest skończonym bigrafem (bez pętli) oraz $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\Phi_\Delta(v) = v \cdot \text{Cox}_\Delta$ jest transformacją Coxetera Δ .*

(a) Funkcja $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest automorfizmem grupy wolnej \mathbb{Z}^n oraz $\Phi_\Delta \neq \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$.

(b) $q_\Delta(\Phi_\Delta(v)) = q_\Delta(v)$ dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n$.

(c) $\Phi_\Delta(\mathcal{R}_\Delta) = \mathcal{R}_\Delta$, gdzie $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Dowód. Założmy, że $\check{G}_\Delta = [d_{ij}^\Delta]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama stowarzyszoną z bigrafem Δ (definicja A.1(d)).

(a) Zauważmy, że funkcja $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest homomorfizmem, ponieważ dla dowolnych $u, w \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi $\Phi_\Delta(u+w) = (u+w) \cdot \text{Cox}_\Delta = u \cdot \text{Cox}_\Delta + w \cdot \text{Cox}_\Delta = \Phi_\Delta(u) + \Phi_\Delta(w)$. Ponadto, funkcja $\Phi_\Delta^{-1}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\Phi_\Delta^{-1}(v) := v \cdot \text{Cox}_\Delta^{-1}$ jest dobrze zdefiniowana, ponieważ

$$\det(\text{Cox}_\Delta) = \det(-\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr}) = \det(-\check{G}_\Delta) \cdot \det((\check{G}_\Delta^{-1})^{tr}) = (-1)^n \cdot \frac{\det(\check{G}_\Delta)}{\det(\check{G}_\Delta)} = (-1)^n.$$

Łatwo sprawdzić, że $\Phi_\Delta \circ \Phi_\Delta^{-1} = \Phi_\Delta^{-1} \circ \Phi_\Delta = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$ a stąd Φ_Δ jest bijekcją i w konsekwencji automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n .

Pokażemy, przez sprzeczność, że $\Phi_\Delta \neq \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$. Założmy, że $\Phi_\Delta(v) = v$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$. Stąd $\Phi_\Delta(e_i) = e_i \cdot \text{Cox}_\Delta = e_i$ dla $1 \leq i \leq n$ i w konsekwencji $\text{Cox}_\Delta = E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą identycznościową. Z definicji macierzy Coxetera (definicja A.4(a)) otrzymujemy:

$$\text{Cox}_\Delta = E \Leftrightarrow -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} = E \Leftrightarrow -\check{G}_\Delta = \check{G}_\Delta^{tr}$$

a stąd $-d_{ii}^\Delta = d_{ii}^\Delta \Rightarrow d_{ii}^\Delta = 0$ dla każdego $1 \leq i \leq n$. Podsumowując, założenie równości $\Phi_\Delta = \text{id}_{\mathbb{Z}^n}$ prowadzi do sprzeczności, ponieważ $d_{ii}^\Delta = 1$ z definicji niesymetrycznej macierzy Grama (definicja A.1(d)).

(b) Wprost z definicji, dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q_\Delta(\Phi_\Delta(v)) &= q_\Delta(v \cdot \text{Cox}_\Delta) = (-v \cdot \check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr}) \cdot \check{G}_\Delta \cdot (-v \cdot \check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr})^{tr} = \\ &= v \cdot \check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-1} \cdot \check{G}_\Delta^{tr} \cdot v^{tr} = v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = q_\Delta(v). \end{aligned}$$

(c) Wynika z (a) oraz (b). □

Macierzowe morsyfikacje grafów krawędziowo-dwudzielnych

Ważną rolę w spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych Δ (w tym porządków) odgrywają *macierzowe morsyfikacje* stowarzyszone z Δ , wprowadzone w pracy [110] (patrz też [111–113]). Odwołujemy się do nich w twierdzeniu 3.41, które stanowi podstawę algorytmu 3.47 stanowiącego rozwiązanie problemu 3 (sformułowanego we wstępie) dla przypadku spójnych dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych I , które mają co najwyżej $|I| \leq 14$ elementów lub dokładnie jeden element maksymalny.

Definicja A.6. [113, Definition 2.3] *Niech $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ będzie skończonym spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym, który nie ma pętli. Niesobliwą macierz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ nazywamy macierzową morsyfikacją bigrafu Δ , jeśli:*

(a) $A + A^{tr} = 2 \cdot G_\Delta$,

(b) $\text{Cox}_A := -A \cdot A^{-tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Innymi słowy, macierzową morsyfikacją Δ nazywamy nieosobliwą macierz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$, która: (a) dla każdego $v \in \mathbb{Z}^n$ spełnia $v \cdot A \cdot v^{tr} = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr}$; (b) wyznacza macierz Coxetera $\text{Cox}_A := -A \cdot A^{-tr}$ o współczynnikach całkowitych. Z definicji, macierze morsyfikacji bigrafu Δ wyznaczają ten sam zbiór pierwiastków \mathcal{R}_Δ , ale (potencjalnie) różne transformacje Coxetera $\Phi_A: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $\Phi_A(v) := v \cdot \text{Cox}_A$. Co za tym idzie, wyznaczają różne geometrie Φ_A -oczkowe $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_A)$ (patrz definicja 3.38 oraz uwaga 3.39). Przykłady różnych geometrii oczkowych tego samego bigrafu, można znaleźć np. w pracy [114].

Na podstawie [113, Theorem 3.3] dowolna morsyfikacja $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$ dodatniego grafu krawędziowo-dwudzielnego Δ jest wyznaczona jednoznacznie przez macierz Coxetera $\text{Cox}_A = -A \cdot A^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$. Innymi słowy, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie A.7. Niech $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ będzie symetryczną macierzą Grama stowarzyszoną z dodatnim bigrafem $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ bez pętli. Załóżmy, że $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest macierzową morsyfikacją Δ oraz $\text{Cox}_A := -A \cdot A^{-tr}$. Jeśli $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ jest macierzową morsyfikacją Δ spełniającą równość $\text{Cox}_B = \text{Cox}_A$, to $B = A$.

Dowód. Ponieważ $\text{Cox}_A = \text{Cox}_B = -B \cdot B^{-tr} \Leftrightarrow \text{Cox}_A \cdot B^{tr} + B = 0$ oraz $B = 2 \cdot G_\Delta - B^{tr}$ na podstawie definicji macierzy morsyfikacji, to:

$$0 = \text{Cox}_A \cdot B^{tr} + B = \text{Cox}_A \cdot B^{tr} + 2 \cdot G_\Delta - B^{tr} = (\text{Cox}_A - E) \cdot B^{tr} + 2 \cdot G_\Delta.$$

Z założenia, bigraf Δ jest dodatni i w konsekwencji 1 nie jest wartością własną macierzy Cox_A (patrz [111, Lemma 2.1(b)]). Stąd macierz $\text{Cox}_A - E$ jest odwracalna. Podsumowując:

$$B^{tr} = -(\text{Cox}_A - E)^{-1} \cdot 2 \cdot G_\Delta \Leftrightarrow B = -2 \cdot G_\Delta \cdot (\text{Cox}_A - E)^{-tr} = 2 \cdot G_\Delta \cdot (E - \text{Cox}_A)^{-tr}.$$

Stąd każda macierz B morsyfikacji bigrafu Δ spełniająca $\text{Cox}_B = -B \cdot B^{-tr} = \text{Cox}_A$ jest jednoznacznie wyznaczona przez macierz Cox_A . W szczególności $B = A$. \square

Funkcjonały kwadratowe

Każdy graf krawędziowo-dwudzielny, który nie zawiera pętli, można utożsamiać z jednolitym funkcjonalem kwadratowym (patrz [8, 97, 102, 111]).

Definicja A.8. Jednolitym funkcjonalem kwadratowym nazywamy funkcję $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowaną przez **formę kwadratową** (jednorodny wielomian stopnia dwa), tj. określoną wzorem

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \text{ gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.9})$$

(a) Niesymetryczna oraz symetryczna macierz Grama funkcjonala $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ mają postać

$$\check{G}_q = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & 1 & q_{n-1n} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}) \text{ oraz } G_q := \frac{1}{2}(\check{G}_q + \check{G}_q^{tr}) \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Zauważmy, że $q(x)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $q(x) = x \cdot G_q \cdot x^{tr} = x \cdot \check{G}_q \cdot x^{tr}$.

(b) Grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ_q funkcjonala $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest bigraf wyznaczony przez niesymetryczną macierz Grama $\check{G}_{\Delta_q} := \check{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

(c) Jednolity funkcjonal kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^{\Delta_0} \rightarrow \mathbb{Z}$, zdefiniowany wzorem

$$q_\Delta(x) = x \cdot \check{G}_\Delta \cdot x^{tr} = x \cdot G_\Delta \cdot x^{tr},$$

gdzie $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz $\mathbb{Z}^{\Delta_0} \equiv \mathbb{Z}^m$, nazywamy funkcjonalem Grama bigrafu Δ .

(d) Funkcjonał $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy **spójnym**, jeśli bigraf Δ_q jest spójny.

(e) Zbiorem pierwiastków funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy zbiór $\mathcal{R}_q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Uwaga A.10. Funkcjonał kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (definicja A.8(c)), wyznaczony przez bigraf $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ bez pętli, można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2 + \sum_{x_i \text{---} x_j} x_i \cdot x_j - \sum_{x_i \text{---} x_j} x_i \cdot x_j, \quad (\text{A.11})$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich krawędziach ze zbioru Δ_1 . Ponadto:

- dla dowolnego funkcjonału jednolitego $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.8) zachodzi:

$$q(v) = q_{\Delta_q}(v) \text{ dla każdego } v \in \mathbb{Z}^m \text{ (ponieważ } \check{G}_q = \check{G}_{\Delta_q}\text{),}$$

- dla dowolnego bigrafu Δ (bez pętli) o m wierzchołkach prawdziwa jest równość:

$$\Delta = \Delta_{q_\Delta} \text{ (ponieważ } \check{G}_\Delta = \check{G}_{q_\Delta}\text{)}.$$

Dlatego utożsamiamy funkcjonal $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ z bigrafem Δ_q a bigraf Δ z funkcjonalem $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień.

W rozprawie analizujemy jednolite funkcjonały kwadratowe $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$, które są dodatnie [nieujemne], tj. dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^m$ spełniają $q(v) > 0$ [$q(v) \geq 0$] (jest to definicja używana powszechnie w teorii reprezentacji algebr, patrz np. [4, Definition VII.3.1]). Ponieważ każdy jednolity funkcjonal $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez symetryczną macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ (definicja A.8(a)), naturalne jest pytanie o związek dodatniości [nieujemności] funkcjonału $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ z dodatnią określonością [półokreślonością] macierzy $G_q \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$. Następujący fakt pokazuje, że są to pojęcia równoważne i, w szczególności, dowodzi poprawności definicji 1.29.

Fakt A.12. Niech $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ będzie symetryczną macierzą kwadratową.

- (a) Macierz A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $q_A(v) = v \cdot A \cdot v^{tr} > 0$ dla dowolnego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^m$.
- (b) Macierz A jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $q_A(v) = v \cdot A \cdot v^{tr} \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^m$.

Dowód. Zauważmy, że $q_A(v) > 0$ ($q_A(\tilde{v}) \geq 0$) dla $0 \neq v \in \mathbb{Z}^m$ ($\tilde{v} \in \mathbb{Z}^m$) wtedy i tylko wtedy, gdy $q_A(w) > 0$ ($q_A(\tilde{w}) \geq 0$) dla $0 \neq w \in \mathbb{Q}^m$ ($\tilde{w} \in \mathbb{Q}^m$), ponieważ

$$q_A(w) = q_A\left(\frac{w'}{w''}\right) = \frac{1}{(w'')^2} q_A(w'), \text{ gdzie } w' \in \mathbb{Z} \text{ oraz } 0 \neq w'' \in \mathbb{Z}.$$

Dlatego, bez zmniejszenia ogólności rozważań, udowodnimy, że macierz $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ jest dodatnio określona (półokreślona) wtedy i tylko wtedy, gdy $q_A(w) > 0$ ($q_A(\tilde{w}) \geq 0$) dla dowolnego $0 \neq w \in \mathbb{Q}^m$ ($\tilde{w} \in \mathbb{Q}^m$).

Ponieważ implikacja „ \Rightarrow ” wynika wprost z definicji dodatniej określoności (półokreśloności), wystarczy pokazać „ \Leftarrow ”.

(a) Załóżmy, że $q_A(w) > 0$ dla każdego $0 \neq w \in \mathbb{Q}$. Stosując argumenty użyte w indukcyjnym dowodzie kryterium Sylwestera przedstawionym w [91, Twierdzenie 7, str. 349], łatwo pokazać, że każdy (wymierny) wiodący minor główny macierzy $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$ jest dodatni. Stąd macierz $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ spełnia warunki kryterium Sylwestera (twierdzenie 2.4(a)) i w konsekwencji jest dodatnio określona.

(b) Zauważmy, że funkcja $\bar{q}_A: \mathbb{Q}^m \rightarrow \mathbb{Q}$, gdzie $\bar{q}_A(w) := w \cdot A \cdot w^{tr}$ dla każdego $w \in \mathbb{Q}^m$ jest ciągła oraz, z założenia, $\bar{q}_A(v) \geq 0$ dla dowolnego $v \in \mathbb{Q}^m$. Ponieważ zbiór \mathbb{Q}^m jest gęsty w \mathbb{R}^m , każdy wektor $u \in \mathbb{R}^m$ może zostać przedstawiony jako granica ciągu $r = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i^u$ elementów $w_i^u \in \mathbb{Q}^m$ i w konsekwencji

$$q(u) = q\left(\lim_{i \rightarrow \infty} w_i^u\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} q(w_i^u) \geq 0. \quad \square$$

Założmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem kwadratowym zdefiniowanym wzorem (A.9)

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = x \cdot G_q \cdot x^{tr}, \text{ gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z},$$

gdzie $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest symetryczną macierzą Grama (definicja A.8(a)). Z funkcjonałem $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ stowarzyszymy \mathbb{Z} -dwuliniowy funkcjonał symetryczny (tzw. polaryzację) $b_q: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowany wzorem

$$b_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] = x \cdot G_q \cdot y^{tr} \quad (\text{A.13})$$

oraz pochodne cząstkowe $D_k q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$D_k q(x) = \frac{\partial q}{\partial x_k}(x) := 2 \cdot x_k + \sum_{i < k} q_{ik} \cdot x_k + \sum_{k < i} q_{ki} \cdot x_k. \quad (\text{A.14})$$

Lemat A.15. Jeśli $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieujemnym funkcjonałem kwadratowym zdefiniowanym wzorem (A.9), to:

(a) dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}^n$ prawdziwe są równoważności:

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow G_q \cdot x^{tr} = 0 \Leftrightarrow b_q(-, x) = b_q(x, -) = 0, \quad (\text{A.16})$$

(b) jądro $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}^n postaci

$$\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(\widehat{G}_q) = \{v \in \mathbb{Z}^n; \widehat{G}_q \cdot v^{tr} = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n, \quad (\text{A.17})$$

gdzie $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest symetryczną macierzą Grama (definicja A.8(a)), a $b_q: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.13) jest polaryzacją funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Dowód. (a) Przedstawiony dowód opiera się na ideach zawartych w [4, str. 261-262].

Z funkcjonałem $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ stowarzyszymy jego rozszerzenie do przestrzeni \mathbb{R}^n , tj. funkcjonał $\bar{q}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\bar{q}(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j = \bar{x} \cdot G_q \cdot \bar{x}^{tr}$, gdzie $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n] \in \mathbb{R}^n$, polaryzację $b_{\bar{q}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem (A.13) oraz pochodne cząstkowe $D_k \bar{q}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem (A.14). Pokażemy, że

$$\bar{q}(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall_{k \in \{1, \dots, n\}} D_k \bar{q}(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow G_q \cdot \bar{x}^{tr} = 0 \Leftrightarrow b_{\bar{q}}(-, \bar{x}) = b_{\bar{q}}(\bar{x}, -) = 0 \quad (\text{A.18})$$

dla dowolnego $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Dowód składa się z trzech kroków.

Krok 1° Prawdziwa jest równość

$$D_k \bar{q}(\bar{x}) = 2 \cdot b_{\bar{q}}(e_k, \bar{x}), \quad (\text{A.19})$$

gdzie $1 \leq k \leq n$ oraz $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n] \in \mathbb{R}^n$. Z definicji (A.13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2 \cdot b_{\bar{q}}(e_k, \bar{x}) &= \bar{q}(e_k + \bar{x}) - \bar{q}(e_k) - \bar{q}(\bar{x}) = \\ &= \bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_{k-1}^2 + (\bar{x}_k + 1)^2 + \bar{x}_{k+1}^2 + \dots + \bar{x}_n^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i < j < k} q_{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \sum_{k < i < j} q_{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \sum_{i < k < j} q_{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \\
 & + \sum_{i < k} q_{ik} \cdot \bar{x}_i \cdot (\bar{x}_k + 1) + \sum_{k < i} q_{ki} \cdot (\bar{x}_k + 1) \cdot \bar{x}_i - 1 - \bar{q}(\bar{x}) = \\
 & = \bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + 2 \cdot \bar{x}_k + 1 + \\
 & + \sum_{i < k} q_{ik} \cdot \bar{x}_k + \sum_{k < i} q_{ki} \cdot \bar{x}_k - 1 - \bar{q}(\bar{x}) = \\
 & = \bar{q}(\bar{x}) + D_k \bar{q}(\bar{x}) + 1 - 1 - \bar{q}(\bar{x}) = D_k \bar{q}(\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Krok 2° Równoważność $\bar{q}(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall_{k \in \{1, \dots, n\}} D_k \bar{q}(\bar{x}) = 0$.

„ \Rightarrow ” Ponieważ $\bar{q}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $q(\bar{v}) \geq 0$ dla dowolnego $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ (fakt A.12(a)), to warunek $\bar{q}(\bar{x}) = 0$ implikuje istnienie minimum globalnego w punkcie $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. W konsekwencji $D_k \bar{q}(\bar{x}) = 0$ dla każdego $1 \leq k \leq n$.

„ \Leftarrow ” Jeśli $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n] \in \mathbb{R}^n$ oraz $D_k \bar{q}(\bar{x}) = 0$ dla $1 \leq k \leq n$, to:

$$\bar{q}(\bar{x}) = b_{\bar{q}}(\bar{x}, \bar{x}) = b_{\bar{q}}(e_1 \cdot \bar{x}_1 + \dots + e_n \cdot \bar{x}_n, \bar{x}) = \bar{x}_1 \cdot b_{\bar{q}}(e_1, \bar{x}) + \dots + \bar{x}_n \cdot b_{\bar{q}}(e_n, \bar{x}) = 0,$$

ponieważ $b_{\bar{q}}(e_i, \bar{x}) = \frac{1}{2} D_i \bar{q}(\bar{x}) = 0$, patrz (A.19).

Krok 3° Prawdziwość równoważności $G_q \cdot \bar{x}^{tr} = 0 \Leftrightarrow b_{\bar{q}}(-, \bar{x}) = b_{\bar{q}}(\bar{x}, -) = 0$ wynika z definicji polaryzacji (A.13), natomiast równoważność $\forall_{k \in \{1, \dots, n\}} D_k \bar{q}(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow b_{\bar{q}}(-, \bar{x}) = 0$ jest konsekwencją równości (A.19).

Zauważmy, że dla dowolnych $1 \leq k \leq n$ oraz $x \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mamy $D_k \bar{q}(x) = D_k q(x)$ oraz $\bar{q}(x) = q(x)$ i stąd równoważności (A.18) implikują (A.16).

(b) Na podstawie (a) zachodzi równość (A.17). Stąd wynika (b), gdyż $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(\widehat{G}_q) \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}^n . \square

Następujący fakt (wersja twierdzenia Kroneckera-Capellego) pokazuje, że jądro $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ nieujemnego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (definicja 1.29(b)) jest grupą wolną, której ranga równa jest rzędowi symetrycznej macierzy Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$.

Fakt A.20. Niech $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym nieujemnym funkcjonałem kwadratowym a $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ symetryczną macierzą Grama (definicja A.8(a)).

(a) Jądro $\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest grupą \mathbb{Z} -wolną rangi

$$\text{rank}(\text{Ker } q) = n - \text{rz}_{\mathbb{Q}} G_q,$$

(b) $\text{rank}(\text{Ker } q) = |\{\lambda; 0 \neq \lambda \text{ jest wartością własną macierzy } G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})\}|$.

Dowód. (a) Na podstawie lematu A.15(b), $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}^n , więc jest grupą \mathbb{Z} -wolną rangi $\text{rank}(\text{Ker } q) = s$, gdzie $s \leq n$, patrz [103, Theorem 10.17]. Załóżmy, że wektory h_1, \dots, h_s tworzą \mathbb{Z} -bazę grupy $\text{Ker } q \subseteq \mathbb{Z}^n$. Zauważmy, że $\text{Ker } q = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(G_q)$ jest podgrupą przestrzeni liniowej

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(G_q) = \{u \in \mathbb{Q}^n; G_q \cdot u^{tr} = 0\} \subseteq \mathbb{Q}^n.$$

Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(G_q) = n - r$, gdzie $r = \text{rz}_{\mathbb{Q}} G_q$. Ponieważ wektory $h_1, \dots, h_s \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(G_q) = \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(G_q) \cap \mathbb{Z}^n$ są \mathbb{Z} -liniowo niezależne,

więc są również \mathbb{Q} -liniowo niezależne i na podstawie twierdzenia Steinitza zachodzi nierówność $s \leq n - r$.

Aby zakończyć dowód (a) wystarczy udowodnić, że $n - r \leq s$. W tym celu założmy, że $u_1, \dots, u_{n-r} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(G_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$ jest \mathbb{Q} -bazą przestrzeni $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(G_q) \subseteq \mathbb{Q}^n$. Ponieważ współrzędne wektorów u_1, \dots, u_{n-r} są liczbami wymiernymi, więc istnieje taka liczba $c \in \mathbb{Z}$, że wektory $\bar{u}_1 := c \cdot u_1, \dots, \bar{u}_{n-r} := c \cdot u_{n-r}$ należą do \mathbb{Z}^n , a tym samym należą do $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(G_q) = \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(G_q) \cap \mathbb{Z}^n$. Łatwo sprawdzić, że wektory $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-r}$ są \mathbb{Z} -liniowo niezależne. Zatem tworzą one \mathbb{Z} -bazę grupy $M := \mathbb{Z} \cdot \bar{u}_1 + \dots + \mathbb{Z} \cdot \bar{u}_{n-r} \subseteq \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(G_q)$ generowanej przez $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-r}$. Stąd wynika nierówność $n - r = \text{rank}(M) \leq \text{rank} \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}(G_q) = s$, co kończy dowód stwierdzenia (a).

(b) Symetryczną macierz $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ można przedstawić w postaci $G_q = P_q \cdot D_q \cdot P_q^{-1}$, gdzie P_q jest macierzą ortogonalną, a $D_q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ jest macierzą, na której przekątnej znajdują się wartości własne macierzy G_q (patrz [70, Corollary 2.5.11(a)]). Ponieważ mnożenie przez macierz nieosobliwą nie zmienia rzędu macierzy (patrz [70, 0.4.6(b)]) otrzymujemy $\text{rk}_{\mathbb{Q}} G_q = \text{rk}_{\mathbb{Q}}(P_q \cdot D_q \cdot P_q^{-1}) = \text{rk}_{\mathbb{Q}} D_q$ i stąd $\text{rank}(\text{Ker } q) = \text{rk}_{\mathbb{Q}} G_q = |\{\lambda; 0 \neq \lambda \text{ jest wartością własną macierzy } G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})\}|$. \square

Uwaga A.21. Zauważmy, że dowód faktu A.20 nie przedstawia metody znajdowania wektorów generujących jądro

$$\text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{Z}^n; \widehat{G}_q \cdot v^{tr} = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n,$$

ale pozwala na wyznaczenie ich liczby. Rozwiązywanie systemu liniowych równań Diofantycznych postaci $\widehat{G}_q \cdot v^{tr} = 0$ jest złożonym zagadnieniem, patrz [21].

Przypomnijmy, że dodatnie jednolite funkcjonały kwadratowe mają skończony zbiór pierwiastków, patrz fakt 2.16. W przypadku jednolitych funkcjonałów nieujemnych, które nie są dodatnie, zbiór pierwiastków jest nieskończony.

Fakt A.22. [109, Theorem 3.2(a)] Niech $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie jednolitym nieujemnym funkcjonałem kwadratowym. Jeśli $h \in \text{Ker } q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, to $q(v + k \cdot h) = q(v)$ dla dowolnych $v \in \mathbb{Z}^n$ oraz $k \in \mathbb{Z}$. W szczególności, zbiór $\mathcal{R}_q := \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastków funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest nieskończony, jeśli $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nie jest dodatni.

Dowód. Niech $b_q: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ będzie polaryzacją funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, tj. $b_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$, patrz (A.13). Ponieważ $q(x) = b_q(x, x)$ oraz $q(x) = 0 \Leftrightarrow b_q(-, x) = 0 \Leftrightarrow b_q(x, -) = 0$ (lemat A.15), dla dowolnych $v \in \mathbb{Z}^n$ oraz $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwa jest równość

$$\begin{aligned} q(v + k \cdot h) &= b_q(v + k \cdot h, v + k \cdot h) = \\ &= b_q(v, v) + k \cdot b_q(v, h) + k \cdot b_q(h, v) + k^2 \cdot b_q(h, h) = b_q(v, v) = q(v). \end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód, zauważmy że $q(e_1) = 1$ (ponieważ funkcjonał q jest jednolity). Stąd istnienie wektora $0 \neq h \in \text{Ker } q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ implikuje nieskończoność zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_q \supseteq \{e_1 + k \cdot h; k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. \square

Inflacje grafów krawędziowo-dwudzielnych

Przedstawimy teraz definicję operacji *inflacji* grafu krawędziowo-dwudzielnego (bez pętli i wielokrotnych krawędzi) w sensie [111] (patrz też [81]). Jest to ważne narzędzie w spektralnej analizie Coxetera skończonych bigrafów oraz zbiorów częściowo uporządkowanych, którego używamy w dowodzie lematu 4.60.

Definicja A.23. [111, Definition 3.1] Załóżmy, że $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ jest grafem krawędziowo-dwudzielnym (definicja A.1) bez pętli oraz $d_{ab}^{\Delta} := |\Delta_1^+(a, b)| - |\Delta_1^-(a, b)|$.

- (a) Inflacją Δ w punkcie $a \in \Delta_0$ nazywamy bigraf $\mathbf{t}_a^- \Delta$ uzyskany z Δ przez zmianę wszystkich krawędzi przerywanych $a \dashdash b$ na ciągłe oraz ciągłych $a \text{---} b$ na przerywane.
- (b) Inflacją Δ względem niepustego zbioru krawędzi przerywanych $\Delta_1^+(a, b)$ nazywamy bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ powstały z Δ następująco:

(b1) zamieniamy wszystkie krawędzie przerywane $\Delta_1^+(a, b)$ na ciągłe;

(b2) dla każdego wierzchołka $c \neq b$ spełniającego $\Delta_1(a, c) \neq \emptyset$ ustalamy: $d_{bc}^{\Delta'} := d_{bc}^\Delta - d_{ac}^\Delta \cdot d_{ab}^\Delta$,

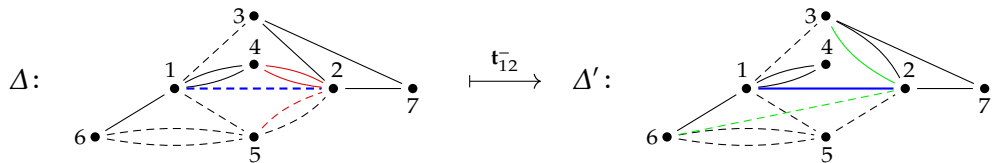
$$\Delta'_1(a, c) := \Delta_1(a, c) \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} |\Delta_1^{+'}(b, c)| := |d_{bc}^{\Delta'}|, & \text{jeśli } d_{bc}^{\Delta'} > 0, \\ |\Delta_1^{-'}(b, c)| := |d_{bc}^{\Delta'}|, & \text{jeśli } d_{bc}^{\Delta'} < 0; \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

(b3) pozostałe krawędzie bigrafu Δ stają się krawędziami Δ' .

Definicja A.23 to wyrażona w języku bigrafów definicja inflacji jednolitego funkcjonau kwadratowego (wprowadzona w [96], patrz też [69, Section 1.2],[8, Section 2.7], [7, Section 1.2]), znana też pod nazwą *transformacji Gabrielova* [102, str. 15].

Następujący przykład ilustruje działanie operacji inflacji \mathbf{t}_{ab}^- .

Przykład A.25. Rozważmy graf krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\{1, \dots, 7\}, \Delta_1)$ przedstawiony na następującym rysunku. Bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_{12}^- \Delta$, który powstaje z Δ po zastosowaniu operacji inflacji \mathbf{t}_{12}^- ma postać:



Zgodnie z definicją operacji inflacji, zbiór wierzchołków Δ'_0 bigrafu $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1) := \mathbf{t}_{12}^- \Delta$ równy jest Δ_0 , natomiast zbiór krawędzi Δ'_1 konstruujemy następująco:

- $\Delta'_1(1, 2) := \Delta_1^{+'}(1, 2) = \{\{1, 2\}\}$ (zamieniamy krawędź przerywaną $1 \dashdash 2$ na ciągłą);
- $\Delta'_1(7, -) := \Delta_1(7, -)$, ponieważ $\Delta_1(7, 1) = \emptyset$ (wierzchołki, które nie są połączone z wierzchołkiem 1 zachowują wszystkie krawędzie bez zmian);
- pozostałe krawędzie wyznaczmy zgodnie ze wzorem A.24, przykładowo:

$$\Delta'_1(4, 2) := \emptyset, \text{ ponieważ } d_{24}^{\Delta'} = d_{24}^\Delta - d_{12}^\Delta \cdot d_{14}^\Delta = 2 - 1 \cdot 2 = 0,$$

$$\Delta'_1(2, 6) := \Delta_1^{+'}(2, 6) = \{\{2, 6\}\}, \text{ ponieważ } d_{26}^{\Delta'} = d_{26}^\Delta - d_{12}^\Delta \cdot d_{16}^\Delta = 0 - 1 \cdot (-1) = 1,$$

$$\Delta'_1(2, 3) := \Delta_1^{-'}(2, 3) = \{\{2, 3\}, \{2, 3\}\}, \text{ ponieważ } d_{23}^{\Delta'} = d_{23}^\Delta - d_{12}^\Delta \cdot d_{13}^\Delta = -2.$$

Łatwo pokazać, że inflacja przeprowadza spójny bigraf Δ w spójny bigraf Δ' , który jest słabo \mathbb{Z} -kongruentny z Δ ([111, Lemma 3.1]).

Lemat A.26. Załóżmy, że $\Delta = (\{1, \dots, n\}, \Delta_1)$ jest spójnym bigrafem, który ma $n \geq 3$ wierzchołków, $a \in \Delta_0$ jest ustalonym wierzchołkiem Δ oraz $\Delta_1^+(a, b)$ jest ustalonym, niepustym, zbiorem krawędzi przerywanych.

- (a) Bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_a^- \Delta$ jest spójny oraz $G_{\Delta'} = E_a^{-tr} \cdot G_\Delta \cdot E_a^-$, gdzie

$$E_a^- := \text{diag}(1, \dots, 1, -1_a, 1, \dots, 1) \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}), \quad (\text{A.27})$$

jest macierzą diagonalną, która powstaje z macierzy jednostkowej $E = [e_{ij}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ przez zamianę elementu e_{aa} na -1 .

(b) Bigraf $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ jest spójny oraz $G_{\Delta'} = E_{ab}^{-tr} \cdot G_{\Delta} \cdot E_{ab}^-$

$$E_{ab}^- = [e_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } e_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j, \\ -|\Delta_1^+(a, b)|, & \text{jeśli } (i, j) = (a, b), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W szczególności, inflacje \mathbf{t}_a^- oraz \mathbf{t}_{ab}^- przeprowadzają bigrafy spójne bez pętli i wielokrotnych krawędzi w bigrafy spójne bez pętli i wielokrotnych krawędzi. Ponadto inflacje zachowują dodatniość i nieujemność.

Dowód. Ponieważ każdy bigraf bez pętli Δ można utożsamiać z symetryczną macierzą Grama $G_{\Delta} \in \mathbb{M}_{\Delta}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (patrz definicja A.1(d)), lemat wynika z definicji inflacji (definicja A.23) oraz standardowych obliczeń. W szczególności, zauważmy że definicja A.23(b2) gwarantuje spójność bigrafu $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$. Inflacja \mathbf{t}_{ab}^- może usunąć krawędź $\{b, c\} \in \Delta_1$, ale tylko wtedy, gdy $\{a, c\} \in \Delta_1$. Ponieważ $\Delta_1'(a, c) := \Delta_1(a, c)$, usunięcie krawędzi $\{b, c\}$ nie rozspójnia bigrafu Δ' , por. przykład A.25. \square

Przykład A.28. Rozważmy następujący bigraf:

$$\Delta: \begin{array}{c} \bullet_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet_1 \text{---} \bullet_2 \quad \bullet_5 \quad \bullet_6 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet_4 \end{array}, \check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}), G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Pokażemy, przy pomocy inflacji, że $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{E}_6$:

$$\Delta \xrightarrow{\mathbf{t}_4^-} \begin{array}{c} \bullet_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet_1 \text{---} \bullet_2 \quad \bullet_5 \quad \bullet_6 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet_4 \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{56}^-} \begin{array}{c} \bullet_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet_1 \text{---} \bullet_2 \quad \bullet_5 \quad \bullet_6 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet_4 \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{34}^-} \begin{array}{c} \bullet_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet_1 \text{---} \bullet_2 \quad \bullet_5 \quad \bullet_6 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet_4 \end{array} \equiv \mathbb{E}_6.$$

Równoważnie $G_{\mathbb{E}_6} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B$, gdzie $B := E_4^- \cdot E_{56}^- \cdot E_{34}^- =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że, macierz $B \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ nie definiuje dwuliniowej \mathbb{Z} -równoważności pomiędzy bigrafem Δ a diagramem \mathbb{E}_6 , natomiast macierz $A := B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_6(\mathbb{Q})$ jest macierzą morsyfikacji bigrafu \mathbb{E}_6 w sensie definicji A.6, ponieważ $A + A^{tr} = 2 \cdot G_{\mathbb{E}_6}$ oraz $\text{Cox}_A := -A \cdot A^{-tr} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$:

$$A := B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq G_{\mathbb{E}_6}, \quad \text{Cox}_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}).$$

Twierdzenie A.30 przedstawia klasyfikację głównych spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych (definicja 4.1(c)), z dokładnością do słabej \mathbb{Z} -kongruencji Grama. Twierdzenie pochodzi z pracy [69] (patrz też [96] oraz [81, 111]), gdzie zostało przedstawione w języku jednolitych funkcjonałów kwadratowych. Będziemy jeszcze potrzebować następującej definicji.

Definicja A.29. Całkowitoliczbowy wektor $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ nazywamy *wiernym*, jeśli $v_i \neq 0$ dla wszystkich $1 \leq i \leq n$.

Twierdzenie A.30. [69, Remark 2] Jeśli $\Delta = (\{1, \dots, m\}, \Delta_1)$ jest spójnym głównym grafem krawędziowo-dwudzielnym, który nie ma pętli ani wielokrotnych krawędzi, oraz $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^\Delta \subseteq \mathbb{Z}^m$, to $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}\Delta$ dla pewnego $\tilde{D}\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_m, m \geq 1; \tilde{\mathbb{D}}_m, m \geq 4; \tilde{\mathbb{E}}_6; \tilde{\mathbb{E}}_7; \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ oraz $|\mathbf{h}_i^\Delta| \leq \mathbf{h}_i^{\tilde{D}\Delta}$ (dla pewnej numeracji wierzchołków grafu $\tilde{D}\Delta$), gdzie $\text{Ker } \tilde{D}\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{\tilde{D}\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^m$. W szczególności, dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$, zachodzi $|\mathbf{h}_i^\Delta| \leq 6$ oraz istnieje taki indeks $1 \leq s \leq m$, że $\mathbf{h}_s^\Delta = \pm 1$.

Dowód. Załóżmy, że $\Delta = (\Delta_0 = \{1, \dots, m\}, \Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-)$ jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym, $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^\Delta \subseteq \mathbb{Z}^m$, oraz $q^\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcjonałem kwadratowym wyznaczonym przez Δ (A.11).

Definiujemy $\bar{B} := \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{B}_m$, gdzie $\bar{B}_i = E_i^-$ (A.27) jeśli $\mathbf{h}_i^\Delta < 0$ oraz $\bar{B}_i = E$ w przeciwnym przypadku. Bigraf $\bar{\Delta}$, zdefiniowany wzorem $G_{\bar{\Delta}} := \bar{B}^{tr} \cdot G_\Delta \cdot \bar{B}$, jest główny, $\text{Ker } \bar{\Delta} = \mathbf{h}^{\bar{\Delta}} \cdot \mathbb{Z}$, $\mathbf{h}^{\bar{\Delta}} \geq 0$ oraz $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \bar{\Delta}$ (por. fakt 1.55(e)).

Rozważmy maksymalną serię inflacji

$$\bar{\Delta} =: \Delta^1 \mapsto \mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta^1 =: \Delta^2 \mapsto \mathbf{t}_{a_2 b_2}^- \Delta^2 =: \Delta^3 \mapsto \dots \mapsto \Delta^r \tag{A.31}$$

takich, że $\mathbf{h}_{b_i}^{\Delta^i} > 0$. Wtedy:

- dla każdego $i + 1 \leq r$, bigraf Δ^{i+1} jest spójny, główny oraz

$$\mathbf{h}^{\Delta^{i+1}} = \mathbf{h}^{\Delta^i} \cdot (E_{a_i b_i}^-)^{-tr} = [\mathbf{h}_1^{\Delta^i}, \dots, \mathbf{h}_{a_i-1}^{\Delta^i}, \mathbf{h}_{a_i}^{\Delta^i} + \mathbf{h}_{b_i}^{\Delta^i}, \mathbf{h}_{a_i+1}^{\Delta^i}, \dots, \mathbf{h}_m^{\Delta^i}] > \mathbf{h}^{\Delta^i}; \tag{A.32}$$

- seria (A.31) jest skończona: ponieważ istnieje skończona liczba bigrafów wielkości m , które nie posiadają pętli oraz wielokrotnych krawędzi, oraz $\Delta^i \neq \Delta^j$ dla $i \neq j$ (ponieważ $\mathbf{h}^{\Delta^i} \neq \mathbf{h}^{\Delta^j}$);
- wektor $\mathbf{h} := \mathbf{h}^{\Delta^r}$ jest wierny (w przeciwnym wypadku istniałyby $a, b \in \{1, \dots, m\}$ takie, że $\mathbf{h}_a = 0, \mathbf{h}_b > 0, q_{ab}^{\Delta^r} = -1$ oraz $e_b \cdot G_{\Delta^r} \cdot \mathbf{h}^{tr} = \sum_{i=1}^m q_{ib}^{\Delta^r} \cdot \mathbf{h}_i = \sum_{\mathbf{h}_i > 0} q_{ib}^{\Delta^r} \cdot \mathbf{h}_i < 0$ co jest sprzeczne z lematem A.15).

Wnioskujemy, że bigraf Δ^r jest grafem prostym i z lematu 4.5(b) otrzymujemy $\Delta^r \simeq \tilde{D}\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, n \geq 1; \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4; \tilde{\mathbb{E}}_6; \tilde{\mathbb{E}}_7; \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ (tabela 4.4) i stąd $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}\Delta$ (zmiana numeracji wierzchołków grafu zachowuje kwadratową \mathbb{Z} -równoważność, por. fakt 1.44(a)). Ponadto, wektor $\mathbf{h}^\Delta \in \mathbb{Z}^m$ można przeprowadzić w wektor $\mathbf{h}^{\tilde{D}\Delta} \in \mathbb{Z}^m$ przy pomocy operacji zmiany znaku, zwiększenia wartości współrzędnej (A.32) oraz permutacji i stąd $|\mathbf{h}_i^\Delta| \leq \mathbf{h}_i^{\tilde{D}\Delta}$ (dla pewnej numeracji wierzchołków grafu $\tilde{D}\Delta$). Ponieważ postać wektorów $\mathbf{h}^{\tilde{D}\Delta} \in \mathbb{Z}^m$ jest znana (patrz lemat 4.5(a)), otrzymujemy: $|\mathbf{h}_i^\Delta| \leq 6$ oraz istnieje takie $s \in \{1, \dots, m\}$, że $\mathbf{h}_s^\Delta = \pm 1$. \square

Dowód twierdzenia A.30 zawiera schemat algorytmu konstruującego macierz $B \in \text{Gl}(|\Delta_0|; \mathbb{Z})$ definiującą słabą \mathbb{Z} -kongruencję Grama pomiędzy głównym grafem krawędziowo-dwudzielnym Δ a grafem Euklidesa $\tilde{D}\Delta \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, n \geq 1; \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4; \tilde{\mathbb{E}}_6; \tilde{\mathbb{E}}_7; \tilde{\mathbb{E}}_8\}$, patrz [111, Algorithm 3.1] oraz [81, Algorithm 4.3, Algorithm 5.4]. Algorytm jest prawidłowy (w szczególności posiada własność stopu) i ma liniową złożoność obliczeniową względem liczby operacji inflacji ([92, Remark 4.9(a)]) oraz wielomianową względem operacji arytmetycznych.

Algorytm A.33. **WEJŚCIE** Dodatni (główny) spójny graf krawędziowo-dwudzielny $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, $|\Delta_0| = m \geq 3$, bez pętli, zakodowany w postaci symetrycznej macierzy Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ oraz pierwiastek $0 \neq v \in \mathbb{Z}^m$ (wektor $0 \neq v \in \mathbb{Z}^m$ generujący jądro $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot v \subseteq \mathbb{Z}^m$).

WYNIK Symetryczna macierz Grama $G_{\Delta'} \in \mathbb{M}_{\Delta'}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ spójnego grafu Δ' słabo \mathbb{Z} -kongruentnego z bigrafem Δ oraz macierz $B \in \text{Gl}(m; \mathbb{Z})$ definiująca tę kongruencję.

KROK 1° Inicjalizujemy macierze $A = [a_{ij}] := G_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ oraz $B := E \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$.

KROK 2° Dla $i \in \{1, \dots, m\}$: jeśli $v_i < 0$ wykonujemy:

$$v_i := -v_i; \quad A := A * E_i^- := (E_i^-)^{tr} \cdot A \cdot E_i^-; \quad B := B \cdot E_i^-.$$

KROK 3° Dopóki istnieje $i \in \{1, \dots, m\}$ spełniająca $v_i = 0$:

KROK 3.1° Szukamy $j \in \{1, \dots, m\}$ spełniająca $v_j = 0$ oraz $a_{ij} \neq 0$.

KROK 3.2° Jeśli takie j nie istnieje, wybieramy kolejne $i \in \{1, \dots, m\}$ spełniająca $v_i = 0$ i wracamy do kroku 3.1°.

KROK 3.3° Jeśli $a_{ij} < 0$ wykonujemy: $A := A * E_i^-$; $B := B \cdot E_i^-$.

KROK 3.4° Obliczamy: $v_i := 2 \cdot a_{ij} \cdot v_j$; $A := A * E_{ij}^-$; $B := B \cdot E_{ij}^-$.

KROK 4° Dopóki istnieją $i, j \in \{1, \dots, m\}$ spełniające $a_{ij} > 0$:

KROK 4.1° Obliczamy: $A := A * E_{ij}^-$; $B := B \cdot E_{ij}^-$.

KROK 5° Zwracamy macierze A oraz B jako wynik.

Uwaga A.34. (a) Algorytm A.33 ma wielomianową złożoność obliczeniową względem operacji arytmetycznych. Operacją dominującą jest tu mnożenie macierzy, mające złożoność $O(n^3)$ (ze względu na niski stopień rozważanych macierzy nie używamy asymptotycznie szybszych algorytmów mnożenia macierzy). W pesymistycznym wypadku wymaga on wykonania $21m$ mnożeń:

- $3m$ mnożeń w kroku 2° oraz $3m$ mnożeń w kroku 3°,
- $15m$ mnożeń w kroku 4° (na każdą z m współrzędnych wykonujemy co najwyżej pięć razy trzy mnożenia).

Podsumowując, pesymistyczna złożoność obliczeniowa wynosi $21m \cdot O(m^3) = O(m^4)$.

(b) Graf Δ' o n wierzchołkach jest dodatni (nieujemny) wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta' \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ ($\Delta' \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$), patrz [111, Proposition 2.4] oraz [4, Proposition VII.4.5]. Dlatego algorytm inflacyjny może zostać użyty do obliczenia typu Coxetera-Dynkina (definicja 3.9) bigrafu dodatniego oraz typu Euklidesa (definicja 4.9) i typu Dynkina (definicja 4.14) bigrafu głównego.

Wierne funkcjonały kwadratowe

Na zakończenie dodatku przedstawiamy dowód lematu A.35, który jest ważnym narzędziem w dowodzie lematu 3.30 a stąd twierdzenia 3.32. Przypomnijmy, że jednolity funkcjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy **wiernym**, jeśli istnieje taki wektor wierny $v \in \mathbb{Z}^n$ (definicja A.29), że $q(v) = 1$ (tj. istnieje wierny pierwiastek $v \in \mathcal{R}_q = \{u \in \mathbb{Z}^n; q(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$). W rozdziale 3 rozprawy pokazujemy, że istnieje skończenie wiele dodatnich jednopikowych zbiorów częściowo uporządkowanych, których funkcjonał kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ (1.40) jest wierny. Rezultat ten używamy później, aby pokazać, że $|v_i| \leq 6$ dla dowolnego pierwiastka $v \in \mathcal{R}_I = \{u \in \mathbb{Z}^I; q_I(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie I jest jednopikowym porządkiem dodatnim (bez powoływania się na twierdzenie Ovsienki, por. fakt 2.16).

Graf krawędziowo-dwudzielny (bez pętli) o n wierzchołkach nazywamy **wiernym**, jeśli funkcjonał kwadratowy $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (definicja A.8(c)) jest wierny. Następujący lemat pokazuje, że każdy wierny bigraf (bez pętli) o n wierzchołkach zawiera indukowany podgraf o $n - 1$ wierzchołkach, który też jest wierny. Jego idea pochodzi z pracy [80, Section 4], natomiast przedstawiony dowód pochodzi z [45, Section 3].

Lemat A.35. Niech $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, będzie jednolitym dodatnim funkcjonałem kwadratowym, $v = [v_1, \dots, v_n] \in \{u \in \mathbb{Z}^n; q(u) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ pierwiastkiem funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $D_k q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $D_k q(x) = \frac{\partial q}{\partial x_k}(x)$ k -tą pochodną (A.14) funkcjonału $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ a $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}^n$ standardową \mathbb{Z} -bazą grupy wolnej \mathbb{Z}^n .

(a) Jeśli $v \neq \pm e_j$, gdzie $j \in \{1, \dots, n\}$, to:

$$(a1) \quad -1 \leq \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) \leq 1,$$

$$(a2) \quad q(v - e_j) = 1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = 1,$$

$$(a3) \quad q(v + e_j) = 1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = -1.$$

(b) Jeśli $v \notin \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$, to istnieje taki indeks $j \in \{1, \dots, n\}$, że $v_j \neq 0$ oraz

$$\frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = \begin{cases} -1, & \text{jeśli } v_j < 0, \\ 1, & \text{jeśli } v_j > 0. \end{cases}$$

(c) Jeśli $v \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem wiernym, to istnieje taki pierwiastek wierny $v' = [v'_1, \dots, v'_n] \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$, że $v'_j \in \{-1, 1\}$ oraz $\frac{\partial q}{\partial x_j}(v') = v'_j$, dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\}$.

(d) Jeśli $v \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem wiernym, to istnieje taki pierwiastek wierny $w = [w_1, \dots, w_n] \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz indeks $j \in \{1, \dots, n\}$, że wektor

$$w^{(j)} = [w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_n] \in \mathcal{R}_{q^{(j)}} = \{r \in \mathbb{Z}^{n-1}; q^{(j)}(r) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-1}$$

jest pierwiastkiem wiernym funkcjonału $q^{(j)} : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}$, gdzie

$$q^{(j)}([u_1, \dots, u_{n-1}]) = q(u_1, \dots, u_{j-1}, 0, u_j, \dots, u_{n-1}), \text{ dla dowolnego } u \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Dowód. Przypomnijmy, że polaryzacja $b_q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowana jest wzorem $b_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ (A.13) oraz $2 \cdot b_q(v, e_j) = \frac{\partial q}{\partial x_j}(v)$, patrz (A.19).

(a1) Z definicji polaryzacji otrzymujemy $q(x + y) = 2 \cdot b_q(x, y) + q(x) + q(y)$. Ponieważ funkcjonał $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni oraz $v \neq \pm e_j$, to

$$0 < q(v + e_j) = q(v) + q(e_j) + 2 \cdot b_q(v, e_j) = 2 + \frac{\partial q}{\partial x_j}(v),$$

$$0 < q(v - e_j) = q(v) + q(-e_j) + 2 \cdot b_q(v, -e_j) = 2 - 2 \cdot b_q(v, e_j) = 2 - \frac{\partial q}{\partial x_j}(v).$$

W konsekwencji otrzymujemy nierówności $-1 \leq \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) \leq 1$.

(a2),(a3) Z równości

$$q(v + (\pm e_j)) = q(v) + q(\pm e_j) + 2 \cdot b_q(v, \pm e_j) = 2 \pm \frac{\partial q}{\partial x_j}(v)$$

otrzymujemy $q(v + e_j) = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = -1$ oraz $q(v - e_j) = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = 1$.

(b) Załóżmy, że $v \notin \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$, jest pierwiastkiem dodatniego funkcjonału kwadratowego $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Z wektorem $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ stowarzyszymy wektor $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $\varepsilon_i = 1$ jeśli $v_i \geq 0$ oraz $\varepsilon_i = -1$ jeśli $v_i < 0$. Wtedy $w := v^\varepsilon = [\varepsilon_1 \cdot v_1, \dots, \varepsilon_n \cdot v_n] \in \mathbb{N}^n$ jest pierwiastkiem dodatniego funkcjonału kwadratowego $q^\varepsilon : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$q^\varepsilon(x) := q([\varepsilon_1 \cdot x_1, \dots, \varepsilon_n \cdot x_n]).$$

Zauważmy, że $w \notin \{\pm e_1, \dots, \pm e_m\}$ oraz

$$2 = 2q^\varepsilon(w) = 2 \cdot b_{q^\varepsilon}(w, w) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot 2 \cdot b_{q^\varepsilon}(w, e_i) = w_1 \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_1}(w) + \dots + w_n \cdot \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_n}(w).$$

Na podstawie podpunktu (a) zastosowanego do funkcjonału $q^\varepsilon: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz wektora $w \in \mathbb{N}^n$ otrzymujemy nierówności $-1 \leq \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_j}(w) \leq 1$. Stąd istnieje taki indeks $j \in \{1, \dots, n\}$, że $w_j > 0$ oraz $\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_j}(w) = 1$ (dlatego też $v_j = \pm w_j \neq 0$). Ponadto, z definicji funkcjonału $q^\varepsilon: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ wynikają równości

$$\begin{aligned} D_j q^\varepsilon(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \cdot x_i^2 + \sum_{i < k} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_k \cdot q_{ik} \cdot x_i \cdot x_k \right) = \\ &= 2 \cdot x_j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \cdot q_{ij} \cdot x_i + \sum_{j < i} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i \cdot q_{ji} \cdot x_i, \end{aligned}$$

które implikują

$$\begin{aligned} D_j q^\varepsilon(w) &= 2 \cdot \varepsilon_j \cdot v_j + \sum_{i < j} \varepsilon_i^2 \cdot \varepsilon_j \cdot q_{ij} \cdot v_i + \sum_{j < i} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i^2 \cdot q_{ji} \cdot v_i = \\ &= \varepsilon_j \cdot \left(2 \cdot v_j + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot v_i + \sum_{j < i} q_{ji} \cdot v_i \right) = \varepsilon_j \cdot D_j q(w) = \varepsilon_j \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(v) \end{aligned}$$

i w konsekwencji $\frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = -1$, jeśli $v_j < 0$, oraz $\frac{\partial q}{\partial x_j}(v) = 1$, jeśli $v_j > 0$.

(c) Załóżmy, że $v \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem wiernym funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Analogicznie jak w dowodzie podpunktu (b) definiujemy wektor $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] \in \mathbb{Z}^n$, gdzie $\varepsilon_i = 1$ jeśli $v_i \geq 0$ oraz $\varepsilon_i = -1$ jeśli $v_i < 0$. Zauważmy, że $w := v^\varepsilon = [\varepsilon_1 \cdot v_1, \dots, \varepsilon_n \cdot v_n] \in \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest dodatnim wiernym pierwiastkiem funkcjonału jednolitego $q^\varepsilon: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $q^\varepsilon(x) := q([\varepsilon_1 \cdot x_1, \dots, \varepsilon_n \cdot x_n])$.

Pokażemy jak w skończonej liczbie kroków skonstruować taki pierwiastek wierny $w' \in \mathbb{Z}^n$ funkcjonału $q^\varepsilon: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, że $w'_j = 1$ oraz $\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_j}(w') = 1$ dla pewnego $1 \leq j \leq n$.

- (i) Ponieważ $w \in \mathcal{R}_{q^\varepsilon} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest pierwiastkiem wiernym, to $w \notin \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ i na podstawie (b) istnieje taki indeks $i \in \{1, \dots, n\}$, że $w_i > 0$ oraz $\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_i}(w) = 1$.
- (ii) Jeśli $w_i = 1$, to znaleźliśmy szukany wektor $w' := w$ oraz indeks $j := i \in \{1, \dots, n\}$.
- (iii) W przeciwnym przypadku $w_i \geq 2$ i na podstawie (a2) wektor $w'' := w - e_i$ jest pierwiastkiem (wiernym) funkcjonału $q^\varepsilon: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, dla którego $0 < w''_i < w_i$. Ustalamy $w := w''$ i wracamy do (i).

Łatwo sprawdzić, że wektor $v' := [\varepsilon_1 \cdot w'_1, \dots, \varepsilon_n \cdot w'_n] \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ spełnia równość $v'_j = w'_j \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_j = \pm 1$ i w konsekwencji:

$$1 = \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_j}(w') = \varepsilon_j \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(v') \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x_j}(v') = \varepsilon_j = v'_j.$$

(d) Na podstawie (c) istnieje taki pierwiastek wierny $w \in \mathbb{Z}^n$, że $w_j = \pm 1$ oraz $\frac{\partial q}{\partial x_j}(w) = w_j = \pm 1$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\}$. W konsekwencji

$$w' := w + w_j \cdot e_j = w \pm e_j = [w_1, \dots, w_{j-1}, 0, w_{j+1}, \dots, w_n] \in \mathbb{Z}^n$$

jest pierwiastkiem funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, patrz (a). Aby zakończyć dowód, zauważmy, że $w^{(j)} = w'^{(j)} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ jest wektorem wiernym oraz $q^{(j)}(w^{(j)}) = q(w') = 1$. \square

Dodatek B

Systemy pierwiastków

W niniejszym dodatku przedstawione są podstawowe informacje dotyczące systemów pierwiastków (w sensie Bourbaki [17]). Szczególny nacisk został położony na pokazanie związku systemów pierwiastków z klasyfikacją dodatnich jednolitych funkcyjonałów kwadratowych $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, postaci

$$q(x) := x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{i < j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = x \cdot G_q \cdot x^{tr}, \text{ gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.1})$$

Zauważmy, że funkcyjonał kwadratowy $q_I: \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}$ stowarzyszony z dowolnym zbiorem częściowo uporządkowanym I ma postać (B.1), gdzie $G_q := G_I \in \mathbb{M}_I(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$. W związku z tym przedstawione tu wyniki mają (w szczególności) zastosowanie do klasyfikacji Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych.

Głównym wynikiem omawianym w niniejszym dodatku jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie B.2. *Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym jednolitym funkcyjonałem kwadratowym, którego zbiorem pierwiastków jest $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne.*

- (a) *Funkcyjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony.*
- (b) *Zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony.*
- (c) *Zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zredukowanym, nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki, typu $\mathbf{Dyn}_q \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.*
- (d) *Symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ funkcyjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest \mathbb{Z} -kongruentna z symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jednorodnego diagramu Dynkina $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, przedstawionego w tabeli B.17. Ponadto, graf Dynkina Δ jest diagramem $\mathbf{Dyn}_\mathcal{R} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (tabela B.15) z ponumerowanymi wierzchołkami.*
- (e) *Istnieje automorfizm $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, taki że $q \circ h = q_\Delta$, gdzie $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.*

Przedstawimy teraz niezbędne definicje i twierdzenia dotyczące systemów pierwiastków oraz jednolitych funkcyjonałów kwadratowych. Głównymi źródłami informacji są tu monografie [4, 17, 60, 73, 105] oraz artykuły [108, 110, 111].

Definicja B.3. [17, str. 142],[73, str. 42] *Niech $V = \mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią liniową nad \mathbb{R} . Zbiór $\mathcal{R} \subseteq V$ nazywamy systemem pierwiastków, jeśli spełnia następujące warunki.*

- 1° \mathcal{R} jest skończony, $0 \notin \mathcal{R}$, \mathcal{R} generuje przestrzeń V .

2° Dla każdego $v \in \mathcal{R}$ istnieje taki funkcjonal \mathbb{R} -liniowy $v^\vee: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, że $v^\vee(v) = 2$, oraz \mathcal{R} jest podzbiorem niezmienniczym ze względu na odbicie $s_v: V \rightarrow V$, $s_v(x) = x - v^\vee(x) \cdot v$, tzn. $s_v(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{s_v} & V \\ \cup & s_v|_{\mathcal{R}} & \cup \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{R} \end{array}$$

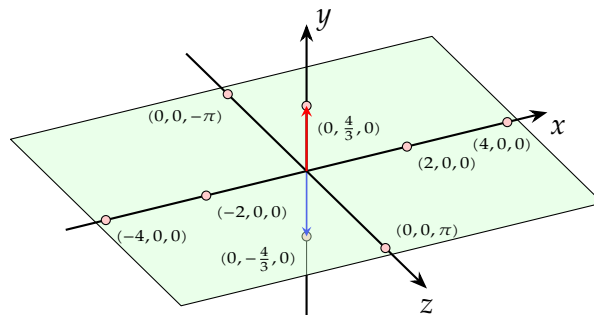
3° Dla każdego $v \in \mathcal{R}$ zachodzi $v^\vee(\mathcal{R}) \in \mathbb{Z}$.

System \mathcal{R} nazywamy zredukowanym (ang. reduced), jeśli dla dowolnych $v \in \mathcal{R}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot v \in \mathcal{R} \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Systemy pierwiastków $\mathcal{R}_1 \subseteq V_1$ oraz $\mathcal{R}_2 \subseteq V_2$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje taki izomorfizm przestrzeni liniowych $f: V_1 \rightarrow V_2$, że $f(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ oraz $(f(v))^\vee(f(w)) = v^\vee(w)$ dla dowolnych $v, w \in \mathcal{R}_1$.

Przykład B.4. Podamy teraz przykłady systemów pierwiastków.

- (a) Zbiór $\mathcal{R}_a = \{-3, 3\} \subseteq \mathbb{R}$ jest zredukowanym systemem pierwiastków w $V = \mathbb{R}$, gdzie $3^\vee(x) = \frac{2}{3} \cdot x$ oraz $(-3)^\vee(x) = -\frac{2}{3} \cdot x$.
- (b) Analogicznie, zbiór $\mathcal{R}_b = \{-6, -3, 3, 6\} \subseteq \mathbb{R}$ jest systemem pierwiastków w $V = \mathbb{R}$, gdzie dla każdego $r \in \mathcal{R}_b$ definiujemy $r^\vee(x) := \frac{2}{r} \cdot x$. Zauważmy, że \mathcal{R}_b nie jest zredukowany.
- (c) Zbiór $\mathcal{R}_c = \{\pm(2, 0, 0), \pm(4, 0, 0), \pm(0, \frac{4}{3}, 0), \pm(0, 0, \pi)\} \subset V = \mathbb{R}^3$ jest systemem pierwiastków w V , gdzie dla każdego $r = [r_1, r_2, r_3] \in \mathcal{R}_c$ oraz $x = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ definiujemy $r^\vee(x) := [w_1, w_2, w_3] \in \mathbb{R}^3$, gdzie $w_i := \frac{2}{r_i} \cdot x_i$ jeśli $r_i \neq 0$ oraz $w_i := 0$ w przeciwnym wypadku. Przykładowo, odbicie $s_r(x) = x - r^\vee(x) \cdot r$ dla $r = (0, \frac{4}{3}, 0) \in \mathcal{R}_c$ ma postać



i jest niezmiennicze na tych wektorach $v \in \mathcal{R}_c$, dla których $v_2 = 0$.

Ostatni przykład pokazuje, w jaki sposób można tworzyć nowe „większe” systemy pierwiastków z „mniejszych”.

Definicja B.5. [17, str. 146] Niech $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie sumą prostą przestrzeni liniowych a $\mathcal{R}_i \subseteq V_i$, dla $1 \leq i \leq m$, systemem pierwiastków. Wtedy $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_m$ jest systemem pierwiastków w $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (gdzie funkcjonal \mathbb{R} -liniowy $v^\vee: V_i \rightarrow \mathbb{R}$ utożsamiamy z funkcjonalem \mathbb{R} -liniowym $v^\vee: V \rightarrow \mathbb{R}$ równym zero na V_j dla $i \neq j$), który nazywamy sumą prostą systemów $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m$.

Przykładowo, system pierwiastków $\mathcal{R}_c = \{\pm(2, 0, 0), \pm(4, 0, 0), \pm(0, \frac{4}{3}, 0), \pm(0, 0, \pi)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, przedstawiony w przykładzie B.4(c), jest sumą prostą systemów $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \subseteq \mathbb{R}$, tj. $\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_3$, gdzie $\mathcal{R}_1 = \{\pm 2, \pm 4\} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_2 = \{\pm \frac{4}{3}\} \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{R}_3 = \{\pm \pi\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definicja B.6. [17, str. 146] System pierwiastków $\mathcal{R} \subseteq V$ nazywamy nieprzywiedlnym (nierozkładalnym, ang. irreducible), jeśli \mathcal{R} nie jest sumą prostą dwóch niepustych systemów pierwiastków, tj. $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}'' \Rightarrow (\mathcal{R}' = \emptyset \text{ lub } \mathcal{R}'' = \emptyset)$.

Następujące twierdzenie pokazuje, że klasyfikację systemów pierwiastków można ograniczyć do systemów nierozkładalnych.

Twierdzenie B.7. [17, str. 146, Proposition 6] Każdy system pierwiastków $\mathcal{R} \subseteq V$ jest sumą prostą skończonej liczby systemów nierozkładalnych, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_n$. Rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności składników.

Pokażemy teraz, że zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\}$ dodatnio określonego jednolitego funkcyjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, jest zredukowanym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki (przypomnijmy, że funkcyjonał kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ nazywamy spójnym, jeśli bigraf Δ_q wyznaczony przez niesymetryczną macierz Grama \tilde{G}_q jest spójny, patrz definicja A.8(d)).

Lemat B.8. Niech $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$, będzie jednolitym funkcyjonałem kwadratowym, którego zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony.

- (a) Zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zredukowanym systemem pierwiastków w przestrzeni liniowej \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} .
- (b) System \mathcal{R}_q jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcyjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójny w sensie definicji A.8(d).

Dowód. Rozważmy rozszerzenie funkcyjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ do przestrzeni \mathbb{R}^n , tj. funkcyjonał $\bar{q}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\bar{q}(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{i<j} q_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ oraz jego polaryzację

$$b_{\bar{q}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \frac{1}{2}(\bar{q}(v+w) - \bar{q}(v) - \bar{q}(w)). \quad (\text{B.9})$$

(a) Pokażemy, że $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ spełnia aksjomaty zredukowanego systemu pierwiastków w sensie Bourbaki (definicja B.3):

- 1° Z założenia zbiór \mathcal{R}_q jest skończony. Ponadto $\text{span}(\mathcal{R}_q) = \mathbb{R}^n$, ponieważ $q(e_i) = 1$ i stąd $e_i \in \mathcal{R}_q$ dla $1 \leq i \leq n$.
- 2° Dla każdego $v \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{R}^n$ definiujemy funkcyjonał \mathbb{R} -liniowy $v^\vee: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wzorem $v^\vee(w) := 2 \cdot b_{\bar{q}}(v, w)$. Dla każdego $v \in \mathcal{R}_q$ prawdziwa jest równość:

$$v^\vee(v) = 2 \cdot b_{\bar{q}}(v, v) = \bar{q}(2 \cdot v) - \bar{q}(v) - \bar{q}(v) = 4 \cdot \bar{q}(v) - 2 = 2.$$

Pokażemy teraz, że zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest s_v -niezmienniczy, gdzie $s_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest odbiciem zdefiniowanym wzorem $s_v(w) = w - v^\vee(w) \cdot v$. W tym celu zauważmy, że

$$2 \cdot b_{\bar{q}}(x, y) = \bar{q}(x+y) - \bar{q}(x) - \bar{q}(y) \quad \text{oraz} \quad \bar{q}(x+y) = 2 \cdot b_{\bar{q}}(x, y) + \bar{q}(x) + \bar{q}(y)$$

z definicji polaryzacji $b_{\bar{q}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{q}(s_v(w)) &= \bar{q}(w - v^\vee(w) \cdot v) = \bar{q}(w + [(2 - \bar{q}(v+w)) \cdot v]) = \\ &= 2 \cdot b_{\bar{q}}(w, [(2 - \bar{q}(v+w)) \cdot v]) + \bar{q}(w) + \bar{q}([(2 - \bar{q}(v+w)) \cdot v]) = \\ &= (2 - \bar{q}(v+w)) \cdot 2 \cdot b_{\bar{q}}(w, v) + 1 + (2 - \bar{q}(v+w))^2 \cdot \bar{q}(v) = \\ &= (2 - \bar{q}(v+w)) \cdot (\bar{q}(w+v) - \bar{q}(w) - \bar{q}(v)) + 1 + (2 - \bar{q}(v+w))^2 = \\ &= -(2 - \bar{q}(v+w))^2 + 1 + (2 - \bar{q}(v+w))^2 = 1. \end{aligned}$$

- 3° Dla dowolnych $v, w \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mamy $v^\vee(w) = q(v+w) - q(v) - q(w) \in \mathbb{Z}$.

(b) Udowodnimy równoważne stwierdzenie: system \mathcal{R}_q jest rozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest niespójny.

„ \Rightarrow ” Załóżmy, że $\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_q^{(1)} \oplus \mathcal{R}_q^{(2)}$. Definiujemy zbiory $I_1 := \{1 \leq i \leq n; e_i \in \mathcal{R}_q^{(1)}\}$ oraz $I_2 := \{1 \leq i \leq n; e_i \in \mathcal{R}_q^{(2)}\}$. Zauważmy, że zbiory te są niepuste (w przeciwnym wypadku $\text{span}(\mathcal{R}_q^{(1)}) = \mathbb{R}^n$ lub $\text{span}(\mathcal{R}_q^{(2)}) = \mathbb{R}^n$, co jest sprzeczne z założeniem) oraz $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy założyć, że $i < j$ dla każdego $i \in I_1$ oraz $j \in I_2$. Z definicji sumy prostej systemu pierwiastków otrzymujemy

$$0 = e_i^\vee(e_j) = \bar{q}(e_i + e_j) - \bar{q}(e_i) - \bar{q}(e_j) = 1^2 + 2 \cdot q_{ij} + 1^2 - 1^2 - 1^2 = 2 \cdot q_{ij},$$

a stąd żaden z wierzchołków $i \in I_1$ bigrafu Δ_q nie jest połączony krawędzią z wierzchołkiem $j \in I_2$ i w konsekwencji funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest niespójny.

„ \Leftarrow ” Jeśli założymy, że funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest niespójny, to istnieją rozłączne zbiory indeksów $I_1 \sqcup I_2 = \{1, \dots, n\}$, takie że $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{I_1} \oplus \mathbb{R}^{I_2}$ oraz

$$q(x) = q^{(1)}(x) + q^{(2)}(x), \text{ gdzie } q^{(1)}(x) = q(x|_{I_1}) \text{ oraz } q^{(2)}(x) = q(x|_{I_2}).$$

Stąd zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma rozkład $\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{q^{(1)}} \sqcup \mathcal{R}_{q^{(2)}}$, gdzie $\mathcal{R}_{q^{(1)}} \cap \mathcal{R}_{q^{(2)}} = \emptyset$. Ponadto, na podstawie (a), $\mathcal{R}_{q^{(1)}}$ oraz $\mathcal{R}_{q^{(2)}}$ są zredukowanymi systemami pierwiastków w \mathbb{R}^{I_1} , oraz \mathbb{R}^{I_2} (nad \mathbb{R}), odpowiednio. Standardowe obliczenia pokazują, że $\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_{q^{(1)}} \oplus \mathcal{R}_{q^{(2)}}$, patrz definicja B.5. \square

Przypomnimy teraz definicję **bazy systemów pierwiastków**. Będziemy zakładać, że $\mathcal{R} \subseteq V = \mathbb{R}^n$ oraz używać następujących oznaczeń:

- (a) $V \supset P_r = \{w \in V; r^\vee(w) = 0\}$ – hiperpłaszczyzna „prostopadła” do wektora $r \in \mathcal{R}$,
- (b) $\mathcal{R}^+(w) = \{v \in \mathcal{R}; r^\vee(w) > 0\}$ – zbiór tych pierwiastków $r \in \mathcal{R}$, dla których wektor $w \in W$ leży po „dodatniej” stronie hiperpłaszczyzny P_r ,
- (c) wektor $w \in V$ nazywamy **regularnym**, jeśli $w \in V \setminus \bigcup_{v \in \mathcal{R}} P_v$.

Każdy wektor regularny $w \in V$ wyznacza podział zbioru pierwiastków \mathcal{R} na dwa rozłączne podzbiory $\mathcal{R} = \mathcal{R}^+(w) \cup \mathcal{R}^-(w)$, pierwiastków leżących „po dodatniej” oraz „po ujemnej” stronie hiperpłaszczyzny prostopadłej do w . Pierwiastek $v \in \mathcal{R}^+(w)$ nazywamy **rozkładalnym**, jeśli istnieją takie $v_1, v_2 \in \mathcal{R}^+(w)$, że $v = v_1 + v_2$ oraz **nierozkładalnym** w przeciwnym przypadku.

Definicja B.10. [105, str. 30] *Bazą systemu pierwiastków $\mathcal{R} \subset V$ nazywamy podzbiór $\Pi \subseteq \mathcal{R}$, który spełnia następujące dwa warunki:*

- (B1) Π jest bazą przestrzeni V ,
- (B2) każdy pierwiastek $w \in \mathcal{R}$ może zostać przedstawiony w postaci $\sum_{v \in \Pi} k_v^{(w)} \cdot v$, gdzie wszystkie współczynniki $k_v^{(w)} \in \mathbb{Z}$ są nieujemne lub niedodatnie (tj. $\forall_{v \in \Pi} k_v^{(w)} \geq 0 \vee \forall_{v \in \Pi} k_v^{(w)} \leq 0$).

Każdy system pierwiastków ma bazę (patrz [105, str. 30], [73, str. 48]).

Twierdzenie B.11. *Jeśli $w \in V$ jest wektorem regularnym, to zbiór $\Pi(w)$ wszystkich nierozkładalnych pierwiastków ze zbioru $\mathcal{R}^+(w)$ jest bazą systemu pierwiastków \mathcal{R} . Ponadto, każda baza systemu pierwiastków \mathcal{R} ma postać $\Pi(w)$, dla pewnego wektora regularnego $w \in V$.*

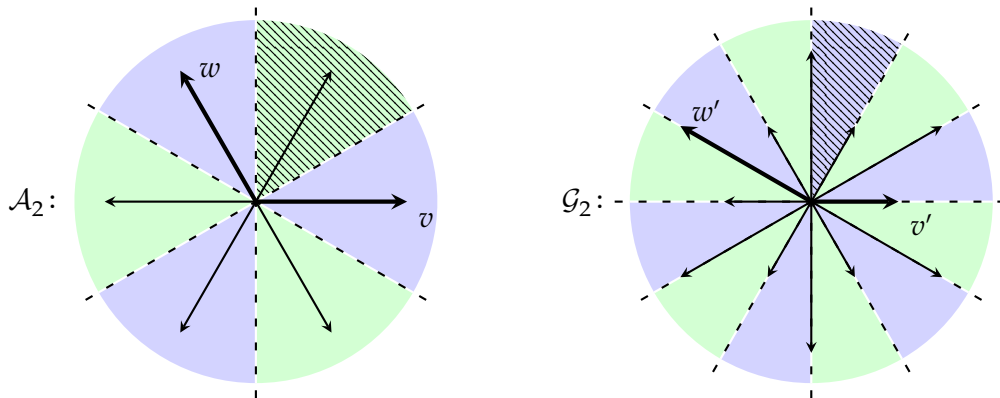
Założmy, że $\Pi \subseteq \mathcal{R}$ jest ustaloną bazą systemu pierwiastków $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$, której elementy zostały ponumerowane, tj. $\Pi = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Definicja B.12. [105, str. 34–35, 38], [73, str. 55–57] *Niech $\Pi = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie bazą systemu pierwiastków \mathcal{R} oraz $v_i^\vee: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem \mathbb{R} -liniowym wyznaczonym przez v_i (patrz definicja B.3).*

- (a) Macierz $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}}^{\Pi} = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $c_{ij} := v_j^{\vee}(v_i)$, nazywamy macierzą Cartana systemu \mathcal{R} względem bazy Π .
- (b) Grafem Coxetera $C_{\mathcal{R}}^{\Pi}$ nazywamy graf o n wierzchołkach $\{1, \dots, n\}$, którego wierzchołki i oraz j połączone są $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$ krawędziami, gdzie $d_{ij} := v_j^{\vee}(v_i) \cdot v_i^{\vee}(v_j) = c_{ij} \cdot c_{ji}$.
- (c) Diagramem Dynkina $D_{\mathcal{R}}^{\Pi}$ nazywamy graf Coxetera, którego krawędzie zostały oznaczone zgodnie z następującą konwencją: jeśli $v_j^{\vee}(v_i) \neq v_i^{\vee}(v_j)$ (równoważnie $c_{ij} \neq c_{ji}$), to krawędź (i, j) jest skierowana:
 - $i \rightrightarrows j$ jeśli $v_i^{\vee}(v_j) = -2$ oraz $v_j^{\vee}(v_i) = -1$,
 - $i \rightrightarrows\equiv j$ jeśli $v_i^{\vee}(v_j) = -3$ oraz $v_j^{\vee}(v_i) = -1$.

Dowodzi się, że definicja B.12 jest poprawna ([73, str. 55–57]). W szczególności, graf Coxetera oraz diagram Dynkina nie zależą od wyboru bazy (różne bazy prowadzą do grafów izomorficznych). Dlatego w dalszym ciągu będziemy pisać $C_{\mathcal{R}}$ i $D_{\mathcal{R}}$ zamiast $C_{\mathcal{R}}^{\Pi}$ i $D_{\mathcal{R}}^{\Pi}$. Zauważmy, że diagram Dynkina $D_{\mathcal{R}}$ wyznacza jednoznacznie macierz Cartana $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}}$.

Przykład B.13. Rozważmy następujące dwa systemy pierwiastków w przestrzeni \mathbb{R}^2 ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$, gdzie $v^{\vee}(w) := 2 \cdot \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$.



- Liniami przerywanymi zaznaczone zostały hiperpłaszczyzny prostopadłe do pierwiastków. Ponadto, obszary przestrzeni \mathbb{R}^2 , które zawierają wektory regularne, zaznaczone zostały naprzemiennymi kolorami.
- $\Pi := \Pi_{\mathcal{A}_2} = \{v, w\}$ jest bazą systemu $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $\Pi' := \Pi_{\mathcal{G}_2} = \{v', w'\}$ jest bazą systemu $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. W obszarach zakreskowanych znajdują się wektory regularne $u \in \mathbb{R}^2$, dla których $\Pi_{\mathcal{A}_2} = \Pi_{\mathcal{A}_2}(u)$ oraz $\Pi_{\mathcal{G}_2} = \Pi_{\mathcal{G}_2}(u)$. Macierze Cartana $\mathbf{Cart}_{\mathcal{A}_2}^{\Pi} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ oraz $\mathbf{Cart}_{\mathcal{G}_2}^{\Pi'} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ są równe:

$$\mathbf{Cart}_{\mathcal{A}_2}^{\Pi} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Cart}_{\mathcal{G}_2}^{\Pi'} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

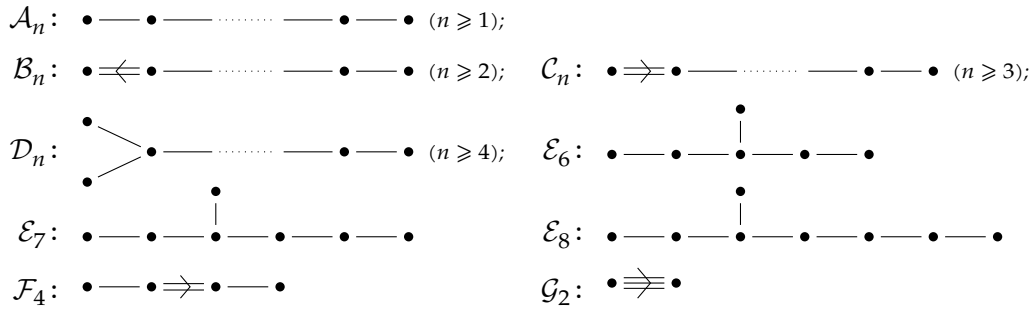
- Grafy Coxetera oraz diagramy Dynkina systemów $\mathcal{A}_2, \mathcal{G}_2$ mają postać:

$$C_{\mathcal{A}_2}^{\Pi} : \bullet \text{---} \bullet, \quad D_{\mathcal{A}_2}^{\Pi} : \bullet \text{---} \bullet, \quad C_{\mathcal{G}_2}^{\Pi'} : \bullet \equiv \bullet, \quad D_{\mathcal{G}_2}^{\Pi'} : \bullet \rightrightarrows \bullet.$$

Następujące twierdzenie pokazuje, że wszystkie nieprzywiedlne zredukowane systemy pierwiastków można sklasyfikować, z dokładnością do izomorfizmu, przy pomocy diagramów Dynkina.

Twierdzenie B.14. [17, Théorème 3, str. 197], [73, Theorem 11.4], [105, str. 38] *Jeśli $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zredukowanym nieprzywiedlnym systemem pierwiastków, to diagram Dynkina $D_{\mathcal{R}}$ systemu \mathcal{R} jest izomorficzny z jednym z diagramów przedstawionych w tabeli B.15.*

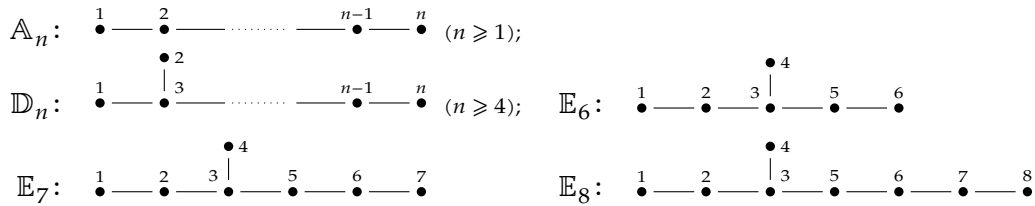
TABELA B.15. DIAGRAMY DYNKINA



Definicja B.16. *Diagram Dynkina $\text{Dyn}_{\mathcal{R}} \in \{A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2\}$ nazywamy typem Dynkina systemu pierwiastków \mathcal{R} .*

Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne do twierdzenia B.14: dla każdego diagramu Dynkina $D \in \{A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2\}$ istnieje zredukowany nieprzywiedlny system pierwiastków \mathcal{R} , dla którego $D = D_{\mathcal{R}}$, patrz [17, str. 200–221], [73, s. 63–65] oraz [105, str. 39–41]. Następujący lemat pokazuje, że w przypadku jednorodnych diagramów Dynkina (tj. diagramów, dla których $C_{\mathcal{R}} = D_{\mathcal{R}}$) twierdzenie to można uzyskać jako wniosek z lematu B.8.

TABELA B.17. JEDNORODNE (SIMPLY LACED) DIAGRAMY DYNKINA Z USTALONĄ NUMERACJĄ WIERZCHOŁKÓW



Lemat B.18. *Załóżmy, że $\Delta \in \{A_n, D_n, E_6, E_7, E_8\}$, $|\Delta| = n$, jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina przedstawionych w tabeli B.17, $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ funkcjonałem grafu Δ zdefiniowanym wzorem*

$$q_{\Delta}(x) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - \sum_{i-j} x_i \cdot x_j = x \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot x^{tr},$$

gdzie $\check{G}_{\Delta} = [d_{ij}^{\Delta}] \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jest niesymetryczną macierzą Grama grafu Δ (patrz definicja A.1), a $\mathcal{R}_{\Delta} = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{\Delta}(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ zbiorem pierwiastków diagramu Δ (definicja A.4(e)).

- (a) Funkcjonał kwadratowy $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony.
- (b) Zbiór $\mathcal{R}_{\Delta} = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_{\Delta}(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma rozkład $\mathcal{R}_{\Delta} = \mathcal{R}_{\Delta}^+ \cup \mathcal{R}_{\Delta}^-$ na wektory nieujemne oraz niedodatnie, tj. $\mathcal{R}_{\Delta}^+ = \{v \in \mathbb{N}^n; q_{\Delta}(v) = 1\}$ oraz $\mathcal{R}_{\Delta}^- = \{-v \in \mathbb{N}^n; q_{\Delta}(v) = 1\}$.
- (c) Zbiór $\mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zredukowanym nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w przestrzeni liniowej \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} .

(d) Zbiór $\Pi_\Delta = e_1, \dots, e_n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest bazą systemu pierwiastków \mathcal{R}_Δ , w której macierzą Cartana systemu \mathcal{R}_Δ jest

$$\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_\Delta} = \widehat{G}_\Delta := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}).$$

(e) Zbiór $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest systemem pierwiastków typu $\{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, gdzie $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ odpowiednio. Innymi słowy, typem Dynkina systemu $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ jest diagram $\check{\Delta}$ (definicja 1.7) powstały przez opuszczenie numeracji diagramu Δ .

Dowód. (a) Załóżmy, że wierzchołki diagramu $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ zostały ponumerowane tak, jak w tabeli B.17. Funkcjonał kwadratowy $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ można przedstawić w postaci kanonicznej (patrz twierdzenie 2.17):

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{A}_n}(x) &= x_1^2 + \dots + x_n^2 - (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n) = \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + \dots + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{D}_n}(x) &= x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_2 \cdot x_3 - (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n) = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4)^2 + \dots + \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{E}_6}(x) &= x_1^2 + \dots + x_6^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3 - x_3 \cdot x_4 - x_3 \cdot x_5 - x_5 \cdot x_6 = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5\right)^2 + \\ &\quad + \frac{5}{8}\left(x_4 - \frac{3}{5}x_5\right)^2 + \frac{2}{5}\left(x_5 - \frac{5}{4}x_6\right)^2 + \frac{3}{8}x_6^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{E}_7}(x) &= x_1^2 + \dots + x_7^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3 - x_3 \cdot x_4 - x_3 \cdot x_5 - x_5 \cdot x_6 - x_6 \cdot x_7 = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5\right)^2 + \\ &\quad + \frac{5}{8}\left(x_4 - \frac{3}{5}x_5\right)^2 + \frac{2}{5}\left(x_5 - \frac{5}{4}x_6\right)^2 + \frac{3}{8}\left(x_6 - \frac{4}{3}x_7\right)^2 + \frac{1}{3}x_7^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{E}_8}(x) &= x_1^2 + \dots + x_8^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3 - x_3 \cdot x_4 - x_3 \cdot x_5 - x_5 \cdot x_6 - x_6 \cdot x_7 - x_7 \cdot x_8 = \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5\right)^2 + \frac{5}{8}\left(x_4 - \frac{3}{5}x_5\right)^2 + \\ &\quad + \frac{2}{5}\left(x_5 - \frac{5}{4}x_6\right)^2 + \frac{3}{8}\left(x_6 - \frac{4}{3}x_7\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x_7 - \frac{3}{2}x_8\right)^2 + \frac{1}{4}x_8^2. \end{aligned}$$

Stąd łatwo zauważyć, że dla każdego $0 \neq v \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi $q_\Delta(v) > 0$.

(b) Posłużymy się argumentami użytymi w dowodzie [4, Lemma VII.4.8].

Dowolny wektor $v \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $v = v^+ + v^-$, gdzie $v^+ \in \mathbb{N}^n$, $v^- \in -\mathbb{N}^n$ oraz $v^+ - v^- = |v| := [|v_1|, \dots, |v_n|] \in \mathbb{N}^n$. Ponieważ $v \in \mathcal{R}_\Delta$ jest pierwiastkiem dodatnio określonego funkcyjonału kwadratowego $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, to:

$$0 < q_\Delta(|v|) = |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 - \sum_{i-j} |v_i| \cdot |v_j| \leq v_1^2 + \dots + v_n^2 - \sum_{i-j} v_i \cdot v_j = q_\Delta(v) = 1$$

i w konsekwencji $|v| \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$. Ponadto, z równości

$$2 = q_\Delta(|v|) + q_\Delta(v) = q_\Delta(v^+ - v^-) + q_\Delta(v^+ + v^-) = 2 \cdot [q_\Delta(v^+) + q_\Delta(v^-)].$$

otrzymujemy $q_\Delta(v^+) + q_\Delta(v^-) = 1$. Dlatego $v^+ = 0$ oraz $v = v^- \in \mathcal{R}^- \subseteq -\mathbb{N}^n$ albo $v^- = 0$ oraz $v = v^+ \in \mathcal{R}^+ \subseteq \mathbb{N}^n$.

(c) Wynika z (a), lematu B.8 oraz spójności diagramu $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

(d) Zauważmy, że $\Pi_\Delta = \{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą systemu $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$:

- $\text{span}(\Pi_\Delta) = \mathbb{R}^n$;

- zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ma rozkład $\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^+ \cup \mathcal{R}_\Delta^-$ na wektory o współrzędnych nieujemnych oraz niedodatnich (patrz (b)), stąd każdy pierwiastek $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^+ \cup \mathcal{R}_\Delta^-$ posiada w bazie Π_Δ reprezentację $v = \sum_{1 \leq i \leq n} v_i \cdot e_i$, gdzie współczynniki v_i są nieujemne lub niedodatnie.

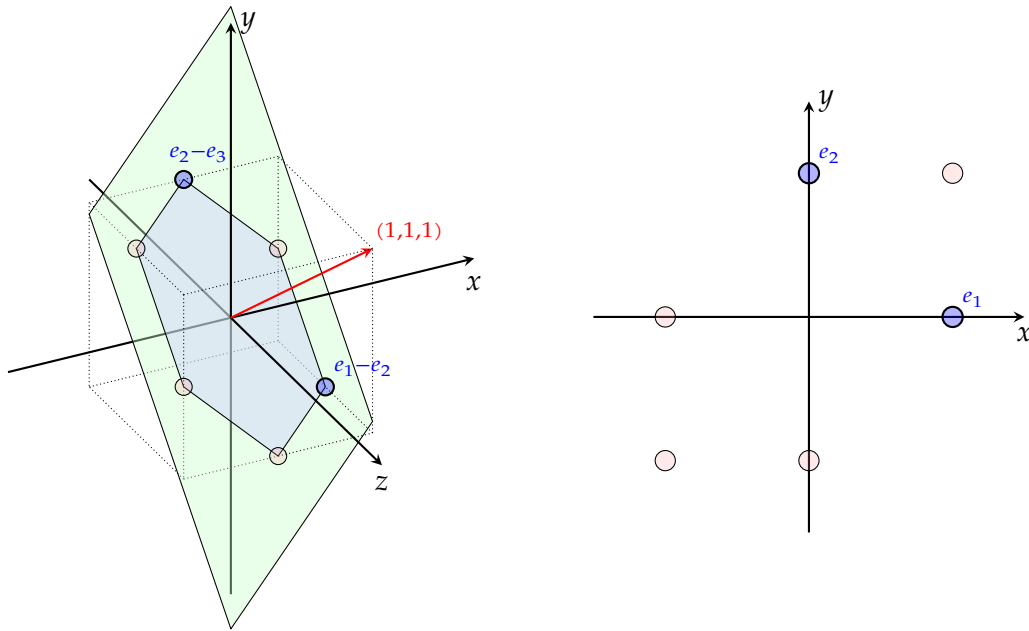
Z definicji macierzy Cartana (definicja B.12(a)) oraz definicji systemu pierwiastków \mathcal{R}_Δ (lemat B.8) otrzymujemy $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_\Delta} = [c_{ij}^\Delta] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie

$$\begin{aligned} c_{ij}^\Delta &= e_j^\vee(e_i) = q(e_j + e_i) - q(e_j) - q(e_i) = 2 - |\Delta_1(i, j)| - 2 = d_{ij}^\Delta, \text{ dla } i < j, \\ c_{ij}^\Delta &= e_j^\vee(e_i) = q(e_j + e_i) - q(e_j) - q(e_i) = 2 - |\Delta_1(i, j)| - 2 = d_{ji}^\Delta, \text{ dla } i > j, \\ c_{ii}^\Delta &= e_i^\vee(e_i) = 2 = 2 \cdot d_{ii}^\Delta. \end{aligned}$$

Podsumowując, macierz $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_\Delta} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ ma postać $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_\Delta} = \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} = \widehat{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

(e) Symetryczna macierz $\widehat{G}_\Delta = [d_{ij}^\Delta] = \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jednoznacznie koduje graf prosty $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$, ponieważ $\widehat{d}_{ij}^\Delta = -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_1(i, j) = \{(i, j)\}$. Z drugiej strony, wierzchołki i oraz j diagramu Dynkina $D_{\mathcal{R}_\Delta} = D_{\mathcal{R}_\Delta}^{\Pi_\Delta}$ połączone są $c_{ij}^\Delta \cdot c_{ji}^\Delta$ krawędziami, gdzie $[c_{ij}^\Delta] = \mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_\Delta}^{\Pi_\Delta}$ jest macierzą Cartana systemu \mathcal{R}_Δ , patrz definicja B.12. Stąd prawdziwość tezy (e) wynika z (d). \square

Przykład B.19. Przedstawimy dwie konstrukcje systemu pierwiastków typu \mathcal{A}_2 .



Rozważmy dwuwymiarową płaszczyznę $P_u = \{w \in \mathbb{R}^3; \langle u, w \rangle = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów prostopadłych do $u := e_1 + e_2 + e_3$, w trójwymiarowej przestrzeni \mathbb{R}^3 , ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$. Łatwo sprawdzić, że zbiór $\Phi := \{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_1, e_2 - e_3, e_3 - e_1, e_3 - e_2\} \subseteq P_u$, gdzie $v^\vee(w) := 2 \cdot \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$ dla każdego $v \in \Phi$ oraz $w \in \mathbb{R}^3$, jest systemem pierwiastków typu \mathcal{A}_2 , którego bazą jest $\Pi_\Phi := \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, patrz [73, str. 63].

Inną konstrukcję otrzymujemy jako wniosek z lematu B.18. Rozważmy funkcjonal kwadratowy $q_{\mathbb{A}_2}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ grafu \mathbb{A}_2 , zdefiniowany wzorem $q_{\mathbb{A}_2}(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2$. Zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_{\mathbb{A}_2} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ jest systemem pierwiastków typu \mathcal{A}_2 w przestrzeni \mathbb{R}^2 (gdzie $v^\vee(w) := q(v + w) - q(v) - q(w) = 2 \cdot b_q(v, w)$), którego bazą jest $\Pi_{\mathbb{A}_2} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Łatwo sprawdzić, że systemy Φ oraz \mathcal{R}_{A_2} są izomorficzne.

- Ponieważ dla dowolnych $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\langle (x_1, x_2 - x_1, -x_2), u \rangle = 0$, funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow P_u$ zdefiniowana wzorem $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - x_1, -x_2)$ jest izomorfizmem (funkcją odwrotną jest $f^{-1}: (y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, -y_3)$). Ponadto, funkcja f przeprowadza system \mathcal{R}_{A_2} na Φ , tj. $f(\mathcal{R}_{A_2}) = \Phi$.
- Dla dowolnego $v \in \mathcal{R}_{A_2}$ zachodzi $\langle f(v), f(v) \rangle = 2 \cdot q(v) = 2$. Stąd, dla $v, w \in \mathcal{R}_{A_2}$:

$$\begin{aligned} f(v)^\vee(w) &= 2 \cdot \frac{\langle f(w), f(v) \rangle}{\langle f(v), f(v) \rangle} = w_1 \cdot v_1 + (w_2 - w_1) \cdot (v_2 - v_1) + (-w_2) \cdot (-v_2) = \\ &= 2 \cdot v_1 \cdot w_1 + 2 \cdot v_2 \cdot w_2 - v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = v^\vee(w). \end{aligned}$$

Udowodnimy teraz twierdzenie B.2, które jest głównym wynikiem omawianym w niniejszym dodatku.

Twierdzenie B.2. Załóżmy, że $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest spójnym jednolitym funkcjonałem kwadratowym, którego zbiorem pierwiastków jest $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne.

- Funkcjonał $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnio określony.
- Zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest skończony.
- Zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zredukowanym, nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki, typu $\mathbf{Dyn}_q \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.
- Symetryczna macierz Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest \mathbb{Z} -kongruentna z symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jednorodnego diagramu Dynkina $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, przedstawionego w tabeli B.17. Ponadto, graf Dynkina Δ jest diagramem $\mathbf{Dyn}_\mathcal{R} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (tabela B.15) z ponumerowanymi wierzchołkami.
- Istnieje automorfizm $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, taki że $q \circ h = q_\Delta$, gdzie $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

Dowód. (a) \Rightarrow (b) Wynika z faktu 2.16.

(b) \Rightarrow (c) Z lematu B.8 wynika, że zbiór $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest nieprzywiedlnym zredukowanym systemem pierwiastków. Ponieważ $v^\vee(w) = q(v+w) - q(v) - q(w) = w^\vee(v)$ dla dowolnych $v, w \in \mathcal{R}_q$, macierz Cartana $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_q} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ systemu \mathcal{R}_q jest symetryczna. Stąd diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_q}$ systemu \mathcal{R}_q jest równy grafowi Coxetera systemu $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ i w konsekwencji $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_q} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

(c) \Rightarrow (d) Załóżmy, że $\Pi_{\mathcal{R}_q} = \{e'_1, \dots, e'_n\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest bazą systemu $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (istnienie bazy gwarantuje twierdzenie B.11) oraz $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jest jednorodnym diagramem Dynkina, dla którego $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_\Delta} \simeq \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_q} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$. Przypomnijmy, że macierzą Cartana systemu $\mathcal{R}_{q_\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ w bazie $\Pi_\Delta = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ jest $\widehat{G}_\Delta := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, patrz lemat B.18.

Zauważmy, że jednorodny diagram Dynkina jednoznacznie wyznacza macierz Cartana (patrz definicja B.12). Ponieważ $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_q} \simeq \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_\Delta} = \Delta$, możemy założyć, że elementy bazy $\Pi_{\mathcal{R}_q} = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ ponumerowane są w taki sposób, iż $\mathbf{Cart}_{\mathcal{R}_q} = C_{\mathcal{R}_q} = \widehat{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Stąd wynika, że dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $b_q(e'_i, e'_j) = b_\Delta(e_i, e_j)$, gdzie $b_q, b_\Delta: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ (A.13) są polaryzacjami funkcjonałów $q, q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

Pokażemy, że macierz $B := [e'_1, \dots, e'_n]^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, której wiersze składają się z wektorów bazy $\Pi_{\mathcal{R}_q} \subseteq \mathbb{Z}^n$ definiuje \mathbb{Z} -kongruencję pomiędzy macierzami $\widehat{G}_\Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ oraz $\widehat{G}_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Innymi słowy, macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ spełnia równanie $B \cdot \widehat{G}_q \cdot B^{tr} = \widehat{G}_\Delta$, gdzie $\widehat{G}_q := (\check{G}_q + \check{G}_q^{tr}) = 2 \cdot G_q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest podwojoną macierzą Grama funkcjonału $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Ponieważ $b_q(v, w) = v \cdot G_q \cdot w^{tr}$ (patrz definicja A.13), to dla dowolnego elementu $\tilde{b}_{ij} \in \mathbb{Z}$ macierzy $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}] := B \cdot \widehat{G}_q \cdot B^{tr}$ mamy:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij} &= e_i \cdot \tilde{B} \cdot e_j^{tr} = (e_i \cdot B) \cdot \widehat{G}_q \cdot (e_j \cdot B)^{tr} = e'_i \cdot \widehat{G}_q \cdot e_j^{tr} = 2 \cdot b_q(e'_i, e'_j) = \\ &= 2 \cdot b_\Delta(e_i, e_j) = e_i \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot e_j = \check{d}_{ij}^\Delta, \end{aligned}$$

gdzie $\widehat{G}_\Delta = [\check{d}_{ij}^\Delta] = \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$.

Należy jeszcze pokazać, że macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest \mathbb{Z} -odwracalna, tzn. $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$. Ponieważ dla każdego $1 \leq i \leq n$ wektor $e_i \in \mathbb{Z}^n$ należy do zbioru $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$, to istnieją liczby całkowite $b_{i1}, \dots, b_{in} \in \mathbb{Z}$, takie że $e_i = b_{i1} \cdot e'_1 + \dots + b_{in} \cdot e'_n \in \mathbb{Z}^n$ (ponieważ wektory $e'_1, \dots, e'_n \in \mathbb{Z}^n$ stanowią bazę systemu $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$). Definiujemy macierz $B' := [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Zauważmy, że macierz $B^{tr} \in \mathbb{Z}^n$ jest macierzą zmiany bazy $\Pi_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ przestrzeni liniowej \mathbb{R}^n na $\Pi_{\mathcal{R}_q} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, a macierz $B'^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą zmiany bazy $\Pi_{\mathcal{R}_q} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ na $\Pi_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Stąd $B \cdot B' = B' \cdot B = E \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, co pokazuje, że macierz $B' \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą odwrotną do $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, a stąd $\det B = \pm 1$.

Podsumowując:

$$B \cdot \widehat{G}_q \cdot B^{tr} = \widehat{G}_\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2} B \cdot \widehat{G}_q \cdot B^{tr} = \frac{1}{2} \widehat{G}_\Delta \Leftrightarrow B \cdot G_q \cdot B^{tr} = G_\Delta, \text{ gdzie } B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z}),$$

tj. symetryczne macierze Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ oraz $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ są \mathbb{Z} -kongruentne.

(d) \Rightarrow (e) Z założenia istnieje taka macierz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$, że $B^{tr} \cdot G_q \cdot B = G_\Delta$, gdzie $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Definiujemy automorfizm $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ wzorem $h(v) := v \cdot B^{tr}$. Automorfizm $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest poprawnie zdefiniowany, ponieważ założenie $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ implikuje, że dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi $h(v) = v \cdot B^{tr} \in \mathbb{Z}^n$, $h^{-1}(v) = v \cdot B^{-tr} \in \mathbb{Z}^n$ oraz $(h \circ h^{-1})(v) = (h^{-1} \circ h)(v) = v$. Zauważmy, że dla dowolnego $v \in \mathbb{Z}^n$ zachodzi:

$$(q \circ h)(v) = q(v \cdot B^{tr}) = (v \cdot B^{tr}) \cdot G_q \cdot (v \cdot B^{tr})^{tr} = v \cdot (B^{tr} \cdot G_q \cdot B) \cdot v^{tr} = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = q_\Delta(v).$$

(e) \Rightarrow (a) Z założenia $q \circ h = q_\Delta$, gdzie $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ oraz $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ jest automorfizmem grupy \mathbb{Z}^n , a stąd funkcjonał q możemy przedstawić w postaci $q = q_\Delta \circ h^{-1}$. Ponieważ funkcjonał $q_\Delta: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatni (patrz lemat B.18(a)), to dla dowolnego wektora $0 \neq v \in \mathbb{Z}^n$ prawdziwa jest równość $q(v) = (q_\Delta \circ h^{-1})(v) = q_\Delta(h^{-1}(v)) > 0$. \square

Uwaga B.21. Jak pokazuje twierdzenie B.2, zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ spójnego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ wyznacza jednoznacznie jednorodny diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_q \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Naturalnym jest tu pytanie o istnienie dodatnich funkcjonałów kwadratowych $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, które wyznaczają diagram niejednorodny $\mathbf{Dyn}_q \in \{\mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n, \mathbb{F}_4, \mathbb{G}_2\}$. Problem ten został omówiony w pracy [77] (patrz też [76, 78]), gdzie przedstawione zostały dodatnie funkcjonały kwadratowe $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ wyznaczające system pierwiastków typu $\mathbf{Dyn}_q \in \{\mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n, \mathbb{F}_4, \mathbb{G}_2\}$ (są to funkcjonały stowarzyszone z pewnymi dodatnimi grafami krawędziowo-dwudzielnymi mającymi przerywane pętle).

Przedstawimy teraz algorytm, który służy do obliczania macierzy $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiującej \mathbb{Z} -kongruencję pomiędzy symetryczną macierzą Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ dodatniego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ oraz symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jednorodnego diagramu Dynkina $\mathbf{Dyn}_q \equiv \Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$. Z dowodu twierdzenia B.2 wynika, że macierz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ składa się z wektorów stanowiących bazę systemu pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (definicja B.10).

Na podstawie twierdzenia B.11, każda baza $\Pi_{\mathcal{R}_q} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ systemu pierwiastków $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ składa się z pierwiastków nierozkładalnych należących do zbioru $\mathcal{R}_q^+(w) = \{v \in \mathcal{R}_q; r^\vee(w) > 0\} \subseteq \mathcal{R}_q$ dla pewnego wektora nierozkładalnego $w \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{r \in \mathcal{R}_q} P_r$, gdzie $P_r := \{w \in \mathbb{R}^n; r^\vee(w) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ (zbiór $P_r \subset \mathbb{R}^n$ jest hiperpłaszczyzną „prostopa-
dłą” do wektora $r \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie \mathbb{R}^n traktujemy jako przestrzeń wektorową z iloczynem skalarnym $b_{\bar{q}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (B.9), tzn. przestrzeń Hilberta).

Stąd do wyznaczenia bazy $\Pi_{\mathcal{R}_q} \subseteq \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ systemu pierwiastków $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{R}^n$ wystarczy znajomość wektora regularnego. Wiadomo, że taki wektor istnieje, ale dowód tego faktu ma charakter egzystencjalny (patrz np. [60]). W celu znalezienia wektora regularnego $w \in \mathbb{R}^n$ w następującym algorytmie stosujemy losowe przeglądanie przestrzeni \mathbb{R}^n .

Algorytm B.22. WEJŚCIE Spójny dodatni jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

WYNIK Macierz $B \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$ definiująca \mathbb{Z} -kongruencję pomiędzy symetryczną macierzą Grama $G_q \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ oraz symetryczną macierzą Grama $G_\Delta \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ jednorodnego diagramu Dynkina $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

KROK 1° Obliczamy skończony zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\}$, np. przy pomocy algorytmu 2.21.

KROK 2° Losujemy wektor $w \in \{-100, \dots, 100\}^n$.

KROK 2.1° Inicjalizujemy listę *posit* := [].

KROK 2.2° Dla każdego $r \in \mathcal{R}_q$:

KROK 2.2.1° jeśli $q(w+r) - q(w) > 1$ dodajemy pierwiastek r do listy *posit*,

KROK 2.2.2° jeśli $q(w+r) - q(w) = 1$ przerywamy obliczenia i wracamy do kroku 2°.

KROK 3° Tworzymy zbiór *sumy* złożony z wektorów $p_1 + p_2$, gdzie $(p_1, p_2) \in \text{posit} \times \text{posit}$.

KROK 4° Zwracamy jako wynik macierz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, której kolumny tworzą elementy zbioru $\text{posit} \setminus \text{sumy}$.

Uwaga B.23. (a) Algorytm B.22 jest algorytmem probabilistycznym (randomizowanym). W kroku 2° szukamy wektora regularnego $w \in \mathbb{R}^n$. Jeśli wylosowany wektor $w \in \{-100, \dots, 100\}^n$ spełnia równość $q(w+r) - q(w) = 1$ (dla pewnego $r \in \mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$), to spełnia też równość $b_q(w, r) = 0$ i nie jest regularny.

(b) Przestrzeń, z której losujemy wektor w kroku 2°, równa $\{-100, \dots, 100\}^n$ została wybrana na podstawie wyników eksperymentalnych (w testowanych przypadkach algorytm znajdował szukany wektor w mniej niż 10 losowaniach). Inną możliwością jest podejście adaptacyjne: przestrzeń tą można automatycznie zwiększać, jeśli liczba wykonanych losowań przekracza pewien ustalony próg.

Znajomość bazy nieprzywiedlnego zredukowanego systemu pierwiastków $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$ pozwala na łatwe określenie typu Dynkina $\text{Dyn}_{\mathcal{R}_q} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

Algorytm B.24. WEJŚCIE Spójny dodatni jednolity funkcjonal kwadratowy $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$.

WYNIK Typ Dynkina $\text{Dyn}_{\mathcal{R}_q} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$.

KROK 1° Obliczamy skończony zbiór pierwiastków $\mathcal{R}_q = \{v \in \mathbb{Z}^n; q(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$, np. przy pomocy algorytmu 2.21.

KROK 2° Obliczamy bazę $\Pi_{\mathcal{R}_q} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ systemu $\mathcal{R}_q \subseteq \mathbb{Z}^n$, np. przy pomocy algorytmu B.22, który wyznacza macierz $B := [b_1^{tr}, \dots, b_n^{tr}] \in \text{Gl}(n; \mathbb{Z})$.

KROK 3° Konstruujemy graf Coxetera $C := C_{\mathcal{R}_q}^{II}$ (definicja B.12(b)). Zauważmy, że graf C ma n wierzchołków i jest wyznaczony przez symetryczną macierz Grama $G_C := B^{tr} \cdot G_q \cdot B \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ (równoważnie: wierzchołki i oraz j grafu C połączone są $q(b_i + b_j) - q(b_i) - q(b_j) \in \{0, 1\}$ krawędziami).

KROK 4° Jeśli graf C nie zawiera wierzchołka v stopnia 3, kończymy z wynikiem \mathcal{A}_n .

KROK 5° Jeśli wierzchołek $v \in C$ stopnia trzy ma dwóch sąsiadów stopnia 1, kończymy z wynikiem \mathcal{D}_n . W przeciwnym przypadku kończymy z wynikiem \mathcal{E}_n .

Uwaga B.25. Graf $C := C_{\mathcal{R}_q}^{II}$ wyznaczony w kroku 3° algorytmu to (oznaczony) jednorodny diagram Dynkina, tj. $C \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ (patrz twierdzenie B.2(c)). W krokach 4° – 5° określamy, który diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_q} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ powstaje z grafu C po opuszczeniu numeracji.

Załóżmy, że $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zredukowanym nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki typu $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$. Pokażemy, że w tym wypadku liczba pierwiastków $|\mathcal{R}| < \infty$ oraz wymiar przestrzeni $n < \infty$ wyznaczają typ Dynkina $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ jednoznacznie.

Fakt B.26. Jeśli $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ są zredukowanymi nieprzywiedlnymi systemami pierwiastków w sensie Bourbaki typów Dynkina $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_1}, \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_2} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$, to $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = m$ oraz $|\mathcal{R}_1| = |\mathcal{R}_2|$.

Dowód. „ \Rightarrow ” Diagram Dynkina jednoznacznie wyznacza macierz Cartana (definicja B.12(a)) a stąd systemy pierwiastków tego samego typu są izomorficzne (patrz [17, Proposition 1, str. 196], [105, Proposition 13, str. 38], [73, Proposition, str. 55]) i w konsekwencji $|\mathcal{R}_1| = |\mathcal{R}_2|$.

„ \Leftarrow ” Ponieważ, dla ustalonego wymiaru przestrzeni $n < \infty$, diagram Dynkina $\mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}} \in \{\mathcal{A}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8\}$ wyznacza jednoznacznie wielkość $|\mathcal{R}|$ systemu pierwiastków $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ (patrz [73, Table 1, str. 66]), to $|\mathcal{R}_1| = |\mathcal{R}_2| \Rightarrow \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{Dyn}_{\mathcal{R}_2}$. \square

Podamy teraz jawny opis zbiorów pierwiastków $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_n}, \mathcal{R}_{\mathcal{D}_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{R}_{\mathcal{E}_6} \subseteq \mathbb{Z}^6$, $\mathcal{R}_{\mathcal{E}_7} \subseteq \mathbb{Z}^7$ oraz $\mathcal{R}_{\mathcal{E}_8} \subseteq \mathbb{Z}^8$ wyznaczonych przez funkcjonały kwadratowe stowarzyszone z jednorodnymi diagramami Dynkina.

TABELA B.27. WIELKOŚĆ ZBIORU \mathcal{R}_{Δ} JEDNORODNEGO DIAGRAMU DYNKINA Δ

Δ	$\mathcal{A}_n, n \geq 1$	$\mathcal{D}_n, n \geq 4$	\mathcal{E}_6	\mathcal{E}_7	\mathcal{E}_8
$ \mathcal{R}_{\Delta} $	$n \cdot (n + 1)$	$2 \cdot n \cdot (n - 1)$	72	126	240

Lemat B.28. Załóżmy, że $\Delta \in \{\mathcal{A}_n, n \geq 1; \mathcal{D}_n, n \geq 4; \mathcal{E}_6; \mathcal{E}_7; \mathcal{E}_8\}$ jest diagramem Dynkina o n wierzchołkach ponumerowanych jak w tabeli B.17, a $\mathcal{R}_{\Delta} = \{v \in \mathbb{Z}^n, q_{\Delta}(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest zbiorem pierwiastków grafu Δ (definicja A.4(e)). Zbiór $\mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma rozkład $\mathcal{R}_{\Delta} = \mathcal{R}_{\Delta}^+ \cup \mathcal{R}_{\Delta}^-$ na wektory nieujemne i niedodatnie, gdzie $\mathcal{R}_{\Delta}^+ := \{v \in \mathbb{N}^n; q_{\Delta}(v) = 1\}$ oraz $\mathcal{R}_{\Delta}^- := -\mathcal{R}_{\Delta}^+$.

(a) Liczba pierwiastków $|\mathcal{R}_{\Delta}|$ przedstawiona jest w tabeli B.27.

(b) Zbiór $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_n}^+ = \{v \in \mathbb{N}^n, q_{\mathcal{A}_n}(v) = 1\} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{A}_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma postać

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_n}^+ = \{e_1, \dots, e_n\} \cup \{e_j, 1 \leq i < j \leq n\}. \quad (*)$$

(c) Zbiór $\mathcal{R}_{\mathcal{D}_n}^+ = \{v \in \mathbb{N}^n, q_{\mathcal{D}_n}(v) = 1\} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{D}_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$ ma postać

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{D}_n}^+ = & \{e_1, \dots, e_n\} \cup \{e_j, 2 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_j, 3 \leq j \leq n\} \cup \\ & \cup \{e_j - e_2, 3 \leq j \leq n\} \cup \{e_j + 3e_i, 3 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned} \quad (**)$$

(d) Zbiór $\mathcal{R}_{\mathbb{E}_6}^+ = \{v \in \mathbb{N}^6, q_{\mathbb{E}_6}(v) = 1\} \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{E}_6} \subseteq \mathbb{Z}^6$ składa się z następujących 36 wektorów:

[1,0,0,0,0,0], [0,1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0], [0,0,0,1,0,0], [0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,1], [1,1,0,0,0,0], [0,1,1,0,0,0], [0,0,1,1,0,0], [0,0,1,0,1,0], [0,0,0,0,1,1], [1,1,1,0,0,0], [0,1,1,1,0,0], [0,1,1,0,1,0], [0,0,1,1,1,0], [0,0,1,0,1,1], [1,1,1,1,0,0], [1,1,1,0,1,0], [0,1,1,1,1,0], [0,1,1,0,1,1], [0,0,1,1,1,1], [1,1,1,1,1,0], [1,1,1,0,1,1], [0,1,1,1,1,1], [1,1,1,1,1,1], [0,1,2,1,1,0], [1,1,2,1,1,0], [1,2,2,1,1,0], [0,1,2,1,1,1], [0,1,2,1,2,1], [1,1,2,1,1,1], [1,2,2,1,1,1], [1,1,2,1,2,1], [1,2,2,1,2,1], [1,2,3,1,2,1], [1,2,3,2,2,1].

(e) Zbiór $\mathcal{R}_{\mathbb{E}_7}^+ = \{v \in \mathbb{N}^7, q_{\mathbb{E}_7}(v) = 1\} \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{E}_7} \subseteq \mathbb{Z}^7$ składa się z następujących 63 wektorów:

[1,0,0,0,0,0,0], [0,1,0,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0,0], [0,0,0,1,0,0,0], [0,0,0,0,1,0,0], [0,0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,0,1], [1,1,0,0,0,0,0], [0,1,1,0,0,0,0], [0,0,1,1,0,0,0], [0,0,1,0,1,0,0], [0,0,0,0,1,1,0], [0,0,0,0,0,1,1], [1,1,1,0,0,0,0], [0,1,1,1,0,0,0], [0,1,1,0,1,0,0], [0,0,1,1,1,0,0], [0,0,1,0,1,1,0], [0,0,0,0,1,1,1], [1,1,1,1,0,0,0], [1,1,1,0,1,0,0], [0,1,1,1,1,0,0], [0,1,1,0,1,1,0], [0,0,1,1,1,1,0], [0,0,1,0,1,1,1], [1,1,1,1,1,0,0], [1,1,1,0,1,1,0], [0,1,1,1,1,1,0], [0,1,1,0,1,1,1], [0,0,1,1,1,1,1], [1,1,1,1,1,1,0], [1,1,1,0,1,1,1], [0,1,2,1,1,0,0], [1,1,2,1,1,0,0], [0,1,2,1,1,1,0], [0,1,2,1,2,1,0], [1,1,2,1,1,1,0], [1,2,2,1,1,1,0], [1,1,2,1,2,1,0], [1,2,2,1,2,1,0], [0,1,2,1,1,1,1], [0,1,2,1,2,1,1], [0,1,2,1,2,2,1], [1,1,2,1,1,1,1], [1,2,2,1,1,1,1], [1,1,2,1,2,1,1], [1,2,2,1,2,1,1], [1,1,2,1,2,2,1], [1,2,2,1,2,2,1], [1,2,3,1,2,1,0], [1,2,3,2,2,1,0], [1,2,3,1,2,1,1], [1,2,3,2,2,1,1], [1,2,3,1,2,2,1], [1,2,3,2,2,2,1], [1,2,3,1,3,2,1], [1,2,3,2,3,2,1], [1,2,4,2,3,2,1], [1,3,4,2,3,2,1], [2,3,4,2,3,2,1].

(f) Zbiór $\mathcal{R}_{\mathbb{E}_8}^+ = \{v \in \mathbb{N}^8, q_{\mathbb{E}_8}(v) = 1\} \subseteq \mathcal{R}_{\mathbb{E}_8} \subseteq \mathbb{Z}^8$ składa się z następujących 120 wektorów:

[1,0,0,0,0,0,0,0], [0,1,0,0,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0,0,0], [0,0,0,1,0,0,0,0], [0,0,0,0,1,0,0,0], [0,0,0,0,0,1,0,0], [0,0,0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,0,0,1], [1,1,0,0,0,0,0,0], [0,1,1,0,0,0,0,0], [0,0,1,1,0,0,0,0], [0,0,1,0,1,0,0,0], [0,0,0,0,1,1,0,0], [0,0,0,0,0,1,1,0], [1,1,1,0,0,0,0,0], [0,1,1,1,0,0,0,0], [0,1,1,0,1,0,0,0], [0,0,1,1,1,0,0,0], [0,0,1,0,1,1,0,0], [0,0,0,0,1,1,1,0], [0,0,0,0,0,1,1,1], [1,1,1,1,0,0,0,0], [1,1,1,0,1,0,0,0], [0,1,1,1,1,0,0,0], [0,1,1,0,1,1,0,0], [0,0,1,1,1,1,0,0], [0,0,1,0,1,1,1,0], [0,0,1,1,1,1,1,0], [1,1,1,1,1,1,0,0], [1,1,1,0,1,1,1,0], [0,1,1,1,1,1,1,0], [0,1,1,0,1,1,1,1], [0,0,1,1,1,1,1,1], [1,1,1,1,1,1,1,0], [1,1,1,0,1,1,1,1], [0,1,1,1,1,1,1,1], [1,1,1,1,1,1,1,1], [0,1,2,1,1,0,0,0], [1,1,2,1,1,0,0,0], [1,2,2,1,1,0,0,0], [0,1,2,1,1,1,0,0], [0,1,2,1,2,1,0,0], [1,1,2,1,1,1,0,0], [1,2,2,1,1,1,0,0], [1,1,2,1,2,1,0,0], [1,2,2,1,2,1,0,0], [0,1,2,1,1,1,1,0], [0,1,2,1,2,1,1,0], [0,1,2,1,2,2,1,0], [1,1,2,1,1,1,1,0], [1,2,2,1,1,1,1,0], [1,2,2,1,1,1,1,0], [1,1,2,1,2,1,1,0], [1,2,2,1,2,1,1,0], [1,1,2,1,2,2,1,0], [1,2,2,1,2,2,1,0], [0,1,2,1,1,1,1,1], [0,1,2,1,2,1,1,1], [0,1,2,1,2,2,1,1], [0,1,2,1,2,2,2,1], [1,1,2,1,1,1,1,1], [1,2,2,1,1,1,1,1], [1,1,2,1,2,1,1,1], [1,2,2,1,2,1,1,1], [1,1,2,1,2,2,1,1], [1,2,2,1,2,2,1,1], [1,1,2,1,2,2,2,1], [1,2,2,1,2,2,2,1], [1,2,3,1,2,1,0,0], [1,2,3,2,2,1,0,0], [1,2,3,1,2,1,1,0], [1,2,3,2,2,1,1,0], [1,2,3,1,2,2,1,0], [1,2,3,2,2,2,1,0], [1,2,3,1,3,2,1,0], [1,2,3,2,3,2,1,0], [1,2,3,1,2,1,1,1], [1,2,3,2,2,1,1,1], [1,2,3,1,2,2,1,1], [1,2,3,2,2,2,1,1], [1,2,3,1,3,2,2,1], [1,2,3,2,3,2,2,1], [1,2,3,1,3,3,2,1], [1,2,3,2,3,3,2,1], [1,2,4,2,3,2,1,0], [1,3,4,2,3,2,1,0], [2,3,4,2,3,2,1,0], [1,2,4,2,3,2,1,1], [1,3,4,2,3,2,1,1], [2,3,4,2,3,2,1,1], [1,2,4,2,3,2,2,1], [1,3,4,2,3,2,2,1], [2,3,4,2,3,2,2,1], [1,2,4,2,3,3,2,1], [1,3,4,2,3,3,2,1], [2,3,4,2,3,3,2,1], [1,2,4,2,4,3,2,1], [1,3,4,2,4,3,2,1], [2,3,4,2,4,3,2,1], [1,2,4,2,4,3,2,1], [1,3,5,2,4,3,2,1], [2,3,5,2,4,3,2,1], [2,4,5,2,4,3,2,1], [1,3,5,3,4,3,2,1], [2,3,5,3,4,3,2,1], [2,4,5,3,4,3,2,1], [2,4,6,3,4,3,2,1], [2,4,6,3,5,3,2,1], [2,4,6,3,5,4,2,1], [2,4,6,3,5,4,3,1], [2,4,6,3,5,4,3,2].

Dowód. Istnienie rozkładu $\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^+ \cup \mathcal{R}_\Delta^-$, gdzie $\mathcal{R}_\Delta^+ := \{v \in \mathbb{N}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ oraz $\mathcal{R}_\Delta^- := \{-v \in \mathbb{N}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ wynika z lematu B.18(b). Ponadto, dla dowolnego jednolitego funkcjonału kwadratowego $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, prawdziwa jest równość $q(-v) = q(-1 \cdot v) = (-1)^2 \cdot q(v) = q(v)$, a stąd $\mathcal{R}_\Delta^- = -\mathcal{R}_\Delta^+$.

(a) Ponieważ zbiór $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^n; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ jest zredukowanym nieprzywiedlnym systemem pierwiastków w przestrzeni liniowej \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} (lemat B.18(c)), teza wynika z [17, Chapitre VI, § 4] (patrz też [60, Table 5.2] oraz [74, str. 44]).

(b)–(f) Zauważmy, że prawdziwe są równości:

$$q_{\mathbb{A}_n}(e_i) = q_{\mathbb{D}_n}(e_i) = 1_i^2 = 1,$$

$$q_{\mathbb{A}_n}(ie_j) = q_{\mathbb{D}_n}(ie_j) = 1_i^2 + \dots + 1_j^2 - \sum_{i < j} 1_i \cdot 1_j = (j - i + 1) - (j - i) = 1,$$

$$q_{\mathbb{D}_n}(1e_j - e_2) = 1_1^2 + 1_3^2 + \dots + 1_j^2 - 1_1 \cdot 1_3 - \sum_{3 \leq k < j} 1_k \cdot 1_{k+1} = (j - 1) - 1 - (j - 3) = 1,$$

$$\begin{aligned} q_{\mathbb{D}_n}(1e_j + 3e_i) &= 1_1^2 + 1_2^2 + 2_3^2 + \dots + 2_{i+1}^2 + 1_i^2 + \dots + 1_j^2 + \\ &\quad - 1_1 \cdot 2_3 - 1_2 \cdot 2_3 - \sum_{3 \leq k < i} 2_k \cdot 2_{k+1} - 2_i \cdot 1_{i+1} - \sum_{i < k \leq j} 1_k \cdot 1_{k+1} = \\ &= 2 + (i - 2) \cdot 4 + (j - i) - 4 - (i - 3) \cdot 4 - 2 - (j - i - 1) = 1, \end{aligned}$$

$$q_{\Delta}(r_{\Delta}) = 1, \text{ jeśli } \Delta \in \{\mathbb{E}_6; \mathbb{E}_7; \mathbb{E}_8\} \text{ oraz } r_{\Delta} \in \{\mathcal{R}_{\mathbb{E}_6}^+; \mathcal{R}_{\mathbb{E}_7}^+; \mathcal{R}_{\mathbb{E}_8}^+\} \text{ odpowiednio.}$$

Ponadto, moc zbiorów (*) oraz (**) wynosi:

$$|\mathcal{R}_{\mathbb{A}_n}^+| = n + \frac{1}{2}n(n - 1) = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

$$|\mathcal{R}_{\mathbb{D}_n}^+| = n + \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) + 2(n - 2) + \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3) = n(n - 1).$$

Aby zakończyć dowód zauważmy, że $|\mathcal{R}_{\Delta}| = 2 \cdot |\mathcal{R}_{\Delta}^+|$ dla każdego diagramu Dynkina $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1; \mathbb{D}_n, n \geq 4; \mathbb{E}_6; \mathbb{E}_7; \mathbb{E}_8\}$ (na podstawie wcześniejszych rozważań), a moc zbioru $|\mathcal{R}_{\Delta}|$ jest znana (patrz (a)). Stąd wynika, że nie ma innych wektorów $v \in \mathbb{N}^n$ spełniających równanie $q_{\Delta}(v) = 1$ niż przedstawione w podpunktach (b)–(f). \square

Uwaga B.29. Dowód lematu B.28 można przeprowadzić elementarnie. Aby udowodnić, że wskazane wektory przedstawiają pełen opis zbioru $\mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1; \mathbb{D}_n, n \geq 4; \mathbb{E}_6; \mathbb{E}_7; \mathbb{E}_8\}$, wystarczy rozważyć równanie $q_{\Delta}(x) = 1$ oraz pokazać, że wektory przedstawione w lemacie B.28 są jedynymi (z dokładnością do znaku), które je spełniają. Bardzo przydatny jest tu zapis formy kwadratowej $q_{\Delta}(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ w postaci kanonicznej (patrz dowód lematu B.18(a)).

Zbiory $\mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$, gdzie $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1; \mathbb{D}_n, n \geq 4; \mathbb{E}_6; \mathbb{E}_7; \mathbb{E}_8\}$ używane są w różnych algorytmach prezentowanych w rozprawie (patrz np. algorytm B.22 oraz 3.58), dlatego jawny opis umożliwiający szybkie ich obliczenie jest bardzo przydatny. Jest to szczególnie istotne w przypadku $n > 11$, ponieważ *wykładniczy* algorytm ograniczonego zliczania (patrz algorytm 2.21) wymaga dużo czasu do obliczenia zbioru \mathcal{R}_q , gdzie $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ jest dodatnim jednolitym funkcjonałem kwadratowym. Dla przykładu, w następującej tabeli przedstawiamy czasy obliczeń zbioru $\mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^n$ przy pomocy algorytmu 2.21.

TABELA B.30. CZASY OBLICZEŃ ZBIORU \mathcal{R}_{Δ} PRZY POMOCY ALGORYTMU 2.21

	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$
$\Delta = \mathbb{A}_n$	0,057 s	0,071 s	0,172 s	0,238 s	0,928 s	3,925 s	19,886 s
$\Delta = \mathbb{D}_n$	0,093 s	0,118 s	0,769 s	6,338 s	45,459 s	498,572 s	3039,984 s

Test przeprowadzono na komputerze z procesorem AMD FX-8120 taktowany zegarem 4,0 GHz, wyposażonym w 16 GB pamięci RAM; algorytm zaimplementowano w języku Python i uruchomiono przy pomocy interpretera PyPy 2.5 wykorzystującego technikę *just-in-time compilation* (patrz uwaga 3.53).

Spis cytowanej literatury

- [1] J. Abdeljaoued i G. I. Malaschonok, *Efficient algorithms for computing the characteristic polynomial in a domain*, J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 127–145, doi: [10.1016/S0022-4049\(99\)00158-9](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00158-9).
- [2] A. V. Aho, M. R. Garey i J. D. Ullman, *The transitive reduction of a directed graph*, SIAM J. Comput. **1** (1972), 131–137, doi: [10.1137/0201008](https://doi.org/10.1137/0201008).
- [3] E. Anderson i in., „LAPACK Users' Guide”, 3 ed., Philadelphia, PA: Society for Industrial i Applied Mathematics, 1999, doi: [10.1137/1.9780898719604](https://doi.org/10.1137/1.9780898719604).
- [4] I. Assem, D. Simson i A. Skowroński, „Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 1. Techniques of Representation Theory”, London Math. Soc. Student Texts, Tom 65, Cambridge-New York: Cambridge Univ. Press, 2006, x+458 str., doi: [10.1017/CB09780511614309](https://doi.org/10.1017/CB09780511614309).
- [5] L. Babai, *Graph isomorphism in quasipolynomial time*, wer. 2, arXiv: [1512.03547v2](https://arxiv.org/abs/1512.03547v2), 19 sty. 2016.
- [6] E. H. Bareiss, *Sylvester's identity and multistep integer-preserving Gaussian elimination*, Mathematics of Computation **22** (1968), 565–578, doi: [10.2307/2004533](https://doi.org/10.2307/2004533).
- [7] M. Barot i J. A. de la Peña, *The Dynkin type of a non-negative unit form*, Exposition. Math. **17** (1999), 339–348, URL: <http://www.matem.unam.mx/jap/articulos/71.pdf>.
- [8] M. Barot i J. A. de la Peña, „Derived tubularity: a computational approach”, w: *Computational methods for representations of groups and algebras (Essen, 1997)*, Tom 173, Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 1999, 87–106, doi: [10.1007/978-3-0348-8716-8_4](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8716-8_4).
- [9] R. Bocian, M. Felisiak i D. Simson, „On Coxeter type classification of loop-free edge-bipartite graphs and matrix morsifications”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2013, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014*, 115–118, doi: [10.1109/SYNASC.2013.22](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2013.22).
- [10] R. Bocian, M. Felisiak i D. Simson, *Numeric and mesh algorithms for the Coxeter spectral study of positive edge-bipartite graphs and their isotropy groups*, J. Comput. Appl. Math. **259** (2014), 815–827, doi: [10.1016/j.cam.2013.07.013](https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.07.013).
- [11] V. M. Bondarenko i M. V. Stepanchikina, *(Min, max)-equivalence of posets, and nonnegative Tits forms*, Ukrainian Math. J. **60** (2008), 1157–1167, doi: [10.1007/s11253-009-0147-7](https://doi.org/10.1007/s11253-009-0147-7).
- [12] V. M. Bondarenko, V. Futorny, T. Klimchuk, V. V. Sergeichuk i K. Yusenko, *Systems of subspaces of a unitary space*, Linear Algebra and its Applications **438** (2013), 2561–2573, doi: [10.1016/j.laa.2012.10.038](https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.10.038).
- [13] V. M. Bondarenko i A. M. Polishchuk, „On finiteness of critical Tits forms of posets”, w: *Symmetry in nonlinear mathematical physics*, Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., Volume 50, Part 3, Kiev: Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 2004, 1061–1063, URL: <http://www.slac.stanford.edu/ecnf/C0306234/papers/bondarenkoV.pdf>.

- [14] V. M. Bondarenko i M. V. Styopochkina, „(Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса”, w: *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць*. Kiev: Ін-ту математики НАН України, 2005, 18–58.
- [15] V. M. Bondarenko i M. V. Styopochkina, *On posets of width two with positive Tits form*, Algebra Discrete Math. (2005), 20–35, URL: <http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2005/N2/adm-n2-2.pdf>.
- [16] J. A. Bondy i U. S. R. Murty, „Graph Theory”, Graduate Texts in Mathematics, Tom 244, Springer, New York, 2008, xii+651 str.
- [17] N. Bourbaki, „Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines”, Actualités Scientifiques et Industrielles, Tom 1337, Paris: Hermann, 1968, 288 str.
- [18] G. Brinkmann i B. D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order **19** (2002), 147–179, doi: [10.1023/A:1016543307592](https://doi.org/10.1023/A:1016543307592).
- [19] A. E. Brouwer i W. H. Haemers, „Spectra of Graphs”, Universitext, Springer, New York, 2012, xiv+250 str., doi: [10.1007/978-1-4614-1939-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6).
- [20] R. A. Brualdi, *Spectra of digraphs*, Linear Algebra Appl. **432** (2010), 2181–2213, doi: [10.1016/j.laa.2009.02.033](https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.02.033).
- [21] H. Cohen, „Number Theory. Vol. I. Tools and Diophantine Equations”, Graduate Texts in Mathematics, Tom 239, Springer, New York, 2007, xxiv+650 str. doi: [10.1007/978-0-387-49923-9](https://doi.org/10.1007/978-0-387-49923-9).
- [22] L. Collatz i U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21** (1957), 63–77, doi: [10.1007/BF02941924](https://doi.org/10.1007/BF02941924).
- [23] H. S. M. Coxeter, „The evolution of Coxeter-Dynkin diagrams”, w: *Polytopes: abstract, convex and computational*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Tom 440, Springer Netherlands, 1994, 21–42, doi: [10.1007/978-94-011-0924-6_2](https://doi.org/10.1007/978-94-011-0924-6_2).
- [24] D. Cvetković, P. Rowlinson i S. Simić, „Eigenspaces of Graphs”, Tom 66, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, xiv+258 str., doi: [10.1017/CB09781139086547](https://doi.org/10.1017/CB09781139086547).
- [25] D. Cvetković, P. Rowlinson i S. Simić, „An Introduction to the Theory of Graph Spectra”, London Math. Soc. Student Texts, Tom 75, Cambridge: Cambridge University Press, 2010, xii+364 str., doi: [10.1017/CB09780511801518](https://doi.org/10.1017/CB09780511801518).
- [26] D. Cvetković i S. Simić, *Graph spectra in Computer Science*, Linear Algebra and its Applications **434** (2011), 1545–1562, doi: [10.1016/j.laa.2010.11.035](https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.11.035).
- [27] E. R. van Dam i W. H. Haemers, *Which graphs are determined by their spectrum?*, Linear Algebra Appl. **373** (2003), 241–272, doi: [10.1016/S0024-3795\(03\)00483-X](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00483-X).
- [28] R. Diestel, „Graph Theory”, Graduate Texts in Mathematics, Tom 173, New York: Springer-Verlag, 1997, xiv+286 str.
- [29] D. Ž. Đoković, F. Szechtman i K. Zhao, *An algorithm that carries a square matrix into its transpose by an involutory congruence transformation*. eng, Electronic Journal of Linear Algebra **10** (2003), 320–340, URL: <http://eudml.org/doc/124203>.
- [30] Y. A. Drozd, *Coxeter transformations and representations of partially ordered sets*, Functional Analysis and Its Applications **8** (1974), 219–225, doi: [10.1007/BF01075695](https://doi.org/10.1007/BF01075695).
- [31] M. Felisiak, *Computer algebra technique for Coxeter spectral study of edge-bipartite graphs and matrix morsifications of Dynkin type A_n* , Fundamenta Informaticae **125** (2013), 21–49, doi: [10.3233/FI-2013-851](https://doi.org/10.3233/FI-2013-851).

- [32] M. Felisiak, „Algorytmy numeryczne w spektralnej analizie Coxetera bigrafów”, rozprawa doktorska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 2017.
- [33] M. Felisiak i D. Simson, „On computing mesh root systems and the isotropy group for simply-laced Dynkin diagrams”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2012*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2012, 91–97, doi: [10.1109/SYNASC.2012.16](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2012.16).
- [34] M. Felisiak i D. Simson, „On Coxeter spectral study of edge-bipartite graphs in relation with Dynkin diagrams”, w: *11th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, Munich, Germany, May 29-31, 2012. Extended Abstracts*, 2012, 125–129.
- [35] M. Felisiak i D. Simson, *On combinatorial algorithms computing mesh root systems and matrix morsifications for the Dynkin diagram A_n* , *Discrete Math.* **313** (2013), 1358–1367, doi: [10.1016/j.disc.2013.02.003](https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.02.003).
- [36] P. Gabriel, *Unzerlegbare darstellungen I*, *Manuscripta Mathematica* **6** (1972), 71–103, doi: [10.1007/BF01298413](https://doi.org/10.1007/BF01298413).
- [37] P. Gabriel, „Représentations indécomposables”, w: *Séminaire Bourbaki vol. 1973/74 Exposés 436–452*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975, 143–169, doi: [10.1007/BFb0066369](https://doi.org/10.1007/BFb0066369).
- [38] Z. Galil, C. M. Hoffmann, E. M. Luks, C. P. Schnorr i A. Weber, *An $O(n^3 \log n)$ deterministic and an $O(n^3)$ Las Vegas isomorphism test for trivalent graphs*, *J. ACM* **34** (lip. 1987), 513–531, doi: [10.1145/28869.28870](https://doi.org/10.1145/28869.28870).
- [39] M. R. Garey i D. S. Johnson, „Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-completeness”, W. H. Freeman i Co., San Francisco, Calif., 1979, x+338 str. doi: [10.1137/1024022](https://doi.org/10.1137/1024022).
- [40] M. Gąsiorek, „Efficient computation of the isotropy group of a finite graph: a combinatorial Approach”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2013*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014, 104–111, doi: [10.1109/SYNASC.2013.21](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2013.21).
- [41] M. Gąsiorek, *Lista macierzy incydencji dodatnich spójnych porządków I , $|I| < 14$, wraz z macierzami zadającymi dwuliniową równoważność z Diagramami Dynkina*, URL: <http://mg.mat.umk.pl/PositIncMat.zip>, 2016.
- [42] M. Gąsiorek, *Lista macierzy incydencji spójnych głównych porządków I , $|I| \leq 15$, wraz z typami Coxetera-Dynkina oraz macierzami zadającymi dwuliniową równoważność*, URL: <http://mg.mat.umk.pl/PrincIncMat.zip>, 2016.
- [43] M. Gąsiorek, *Lista macierzy incydencji spójnych porządków I korangi dwa, $|I| \leq 15$, wraz z typami Coxetera-Dynkina oraz macierzami zadającymi dwuliniową równoważność*, URL: <http://mg.mat.umk.pl/Crk2IncMat.zip>, 2016.
- [44] M. Gąsiorek i D. Simson, *Programming in PYTHON and an algorithmic description of positive wandering on one-peak posets*, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **38** (2011), 419–424, doi: [10.1016/j.endm.2011.09.068](https://doi.org/10.1016/j.endm.2011.09.068).
- [45] M. Gąsiorek i D. Simson, *A computation of positive one-peak posets that are Tits-sincere*, *Colloq. Math.* **127** (2012), 83–103, doi: [10.4064/cm127-1-6](https://doi.org/10.4064/cm127-1-6).
- [46] M. Gąsiorek i D. Simson, *One-peak posets with positive quadratic Tits form, their mesh translation quivers of roots, and programming in Maple and Python*, *Linear Algebra Appl.* **436** (2012), 2240–2272, doi: [10.1016/j.laa.2011.10.045](https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.10.045).
- [47] M. Gąsiorek i D. Simson, „A classification of positive posets using isotropy groups of Dynkin diagrams”, w: *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph*

- Theory and Applications*, red. J. Nešetřil i M. Pellegrini, CRM Series, Tom 16, Scuola Normale Superiore, 2013, 599–605, doi: [10.1007/978-88-7642-475-5_95](https://doi.org/10.1007/978-88-7642-475-5_95).
- [48] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, „On Coxeter spectral study of posets and a digraph isomorphism problem”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2012*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2012, 369–375, doi: [10.1109/SYNASC.2012.56](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2012.56).
- [49] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *On Coxeter spectral study of finite posets using computer algebra tools*, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **40** (2013), 121–127, doi: [10.1016/j.endm.2013.05.023](https://doi.org/10.1016/j.endm.2013.05.023).
- [50] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, „On corank two edge-bipartite graphs and simply extended Euclidean diagrams”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2014*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014, 66–73, doi: [10.1109/SYNASC.2014.17](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2014.17).
- [51] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *Tables of one-peak principal posets of Coxeter-Euclidean type \tilde{E}_8* , URL: <http://mg.mat.umk.pl/pdf/OnePeakPrincipalPosetsE8Tables.pdf>, 2014.
- [52] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *Algorithmic computation of principal posets using Maple and Python*, *Algebra and Discr. Math.* **17** (2014), 33–69, URL: [http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2014/N1/adm-n1\(2014\)-4.pdf](http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2014/N1/adm-n1(2014)-4.pdf).
- [53] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *On Coxeter type study of non-negative posets using matrix morsifications and isotropy groups of Dynkin and Euclidean diagrams*, *European J. Combin.* **48** (2015), 127–142, doi: [10.1016/j.ejc.2015.02.015](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.02.015).
- [54] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *Structure and a Coxeter-Dynkin type classification of corank two non-negative posets*, *Linear Algebra Appl.* **469** (2015), 76–113, doi: [10.1016/j.laa.2014.11.003](https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.11.003).
- [55] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *A Gram classification of non-negative corank-two loop-free edge-bipartite graphs*, *Linear Algebra Appl.* **500** (2016), 88–118, doi: [10.1016/j.laa.2016.03.007](https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.007).
- [56] M. Gąsiorek i K. Zając, *On algorithmic study of non-negative posets of corank at most two and their Coxeter-Dynkin types*, *Fundamenta Informaticae* **139** (2015), 347–367, doi: [10.3233/FI-2015-1238](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1238).
- [57] C. Godsil i G. Royle, „Algebraic Graph Theory”, *Graduate Texts in Mathematics*, Tom 207, Springer-Verlag, New York, 2001, xx+439 str., doi: [10.1007/978-1-4613-0163-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9).
- [58] R. Gow, *The equivalence of an invertible matrix to its transpose*, *Linear and Multilinear Algebra* **8** (1980), 329–336, doi: [10.1080/03081088008817337](https://doi.org/10.1080/03081088008817337).
- [59] G. Greiter, *A simple proof for a theorem of Kronecker*, *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 756–757, doi: [10.2307/2321687](https://doi.org/10.2307/2321687), URL: <http://dx.doi.org/10.2307/2321687>.
- [60] L. C. Grove i C. T. Benson, „Finite Reflection Groups”, 2nd ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Tom 99, Springer-Verlag, New York, 1985, x+133 str., doi: [10.1007/978-1-4757-1869-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1869-0).
- [61] H. H. Günthard i H. Primas, *Zusammenhang von Graphentheorie und MO-Theorie von Molekeln mit Systemen konjugierter Bindungen*, *Helvetica Chimica Acta* **39** (1956), 1645–1653, doi: [10.1002/hlca.19560390623](https://doi.org/10.1002/hlca.19560390623).
- [62] W. H. Haemers i E. Spence, *Enumeration of cospectral graphs*, *European Journal of Combinatorics* **25** (2004), In memory of Jaap Seidel, 199–211, doi: [10.1016/S0195-6698\(03\)00100-8](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(03)00100-8).

- [63] G. Hämmerlin i K.-H. Hoffmann, „Numerical Mathematics”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991, xii+422 str., doi: [10.1007/978-1-4612-4442-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4442-4).
- [64] F. Harary, *On the notion of balance of a signed graph*, Michigan Math. J 2 (1953), 143–146, doi: [10.1307/mmj/1028989917](https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917).
- [65] F. Harary, *The determinant of the adjacency matrix of a graph*, SIAM Rev. 4 (1962), 202–210, doi: [10.1137/1004057](https://doi.org/10.1137/1004057).
- [66] M. Hazewinkel, W. Hesselink, D. Siersma i F. D. Veldkamp, *The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the $A - D - E$ problem)*, Nieuw Arch. Wisk. (3) 25 (1977), 257–307, URL: <http://oai.cwi.nl/oai/asset/10039/10039D.pdf>.
- [67] G. Helmberg, P. Wagner i G. Veltkamp, *On Faddeev-Leverrier’s method for the computation of the characteristic polynomial of a matrix and of eigenvectors*, Linear Algebra Appl. 185 (1993), 219–233, doi: [10.1016/0024-3795\(93\)90214-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)90214-9).
- [68] H. J. von Höhne, *On weakly non-negative unit forms and tame algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) 73 (1996), 47–67, doi: [10.1112/plms/s3-73.1.47](https://doi.org/10.1112/plms/s3-73.1.47).
- [69] H.-J. von Höhne, *On weakly positive unit forms*, Comment. Math. Helv. 63 (1988), 312–336, doi: [10.1007/BF02566771](https://doi.org/10.1007/BF02566771).
- [70] R. A. Horn i C. R. Johnson, „Matrix Analysis”, 2nd ed., Cambridge University Press, 2013, xviii+643 str.
- [71] R. A. Horn i V. V. Sergeichuk, *Congruences of a square matrix and its transpose*, Linear Algebra Appl. 389 (2004), 347–353, doi: [10.1016/j.laa.2004.03.010](https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.03.010).
- [72] R. B. Howlett, *Coxeter groups and M -matrices*, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 137–141, doi: [10.1112/blms/14.2.137](https://doi.org/10.1112/blms/14.2.137).
- [73] J. E. Humphreys, „Introduction to Lie Algebras and Representation Theory”, Graduate Texts in Mathematics, Tom 9, New York: Springer-Verlag, 1978, xii+171 str., doi: [10.1007/978-1-4612-6398-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6398-2).
- [74] J. E. Humphreys, „Reflection Groups and Coxeter Groups”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Tom 29, Cambridge: Cambridge University Press, 1990, xii+204 str., doi: [10.1017/CB09780511623646](https://doi.org/10.1017/CB09780511623646).
- [75] M. Kaniecki, J. Kosakowska, P. Malicki i G. Marczak, *A horizontal mesh algorithm for a class of edge-bipartite graphs and their matrix morsifications*, Fundamenta Informaticae 136 (2015), 345–379, doi: [10.3233/FI-2015-1162](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1162).
- [76] S. Kasjan i D. Simson, *Algorithms for isotropy groups of Cox-regular edge-bipartite graphs*, Fundamenta Informaticae 139 (2015), 249–275, doi: [10.3233/FI-2015-1234](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1234).
- [77] S. Kasjan i D. Simson, *Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, I. Mesh root systems*, Fundamenta Informaticae 139 (2015), 153–184, doi: [10.3233/FI-2015-1230](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1230).
- [78] S. Kasjan i D. Simson, *Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, II. Application to Coxeter spectral analysis*, Fundamenta Informaticae 139 (2015), 185–209, doi: [10.3233/FI-2012-1231](https://doi.org/10.3233/FI-2012-1231).
- [79] M. M. Kleiner, *Partially ordered sets of finite type*, (w jęz. rosyjskim), Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 28 (1972), 32–41, [w jęz. angielskim: Journal of Soviet Mathematics 3 (1975), 607–615, doi: [10.1007/BF01084663](https://doi.org/10.1007/BF01084663)].
- [80] J. Kosakowska, *A classification of two-peak sincere posets of finite prinjective type and their sincere prinjective representations*, Colloq. Math. 87 (2001), 27–77.

- [81] J. Kosakowska, *Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms*, *Fundamenta Informaticae* **119** (2012), 149–162, doi: [10.3233/FI-2012-731](https://doi.org/10.3233/FI-2012-731).
- [82] L. Kronecker, *Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten*, *J. Reine Angew. Math.* **53** (1857), 173–175, doi: [10.1515/crll.1857.53.173](https://doi.org/10.1515/crll.1857.53.173), URL: <http://eudml.org/doc/147661>.
- [83] S. Lang, „Algebra”, wyd. 2 popr., Państwowe Wydaw. Naukowe, 1984, 499 str.
- [84] H. Lenzing i J. A. de la Peña, „Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities”, w: *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, 541–588, doi: [10.4171/062-1/13](https://doi.org/10.4171/062-1/13), URL: <http://www.matem.unam.mx/jap/articulos/112.pdf>.
- [85] Z. Lonc, „Wstęp do algorytmicznej teorii grafów”, CAS Lecture Notes, Numer 3, Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2010, 121 str.
- [86] E. M. Luks, *Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time*, *J. Comput. Syst. Sci.* **25** (1982), 42–65, doi: [10.1016/0022-0000\(82\)90009-5](https://doi.org/10.1016/0022-0000(82)90009-5).
- [87] G. Marczak, A. Polak i D. Simson, *P-critical integral quadratic forms and positive unit forms: an algorithmic approach*, *Linear Algebra Appl.* **433** (2010), 1873–1888, doi: [10.1016/j.laa.2010.06.052](https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.06.052).
- [88] B. D. McKay i A. Piperno, *Practical graph isomorphism, II*, *J. Symbolic Comput.* **60** (2014), 94–112, doi: [10.1016/j.jsc.2013.09.003](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003).
- [89] C. Meyer, „Matrix Analysis and Applied Linear Algebra”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000, xii+718 str.
- [90] G. L. Miller, *Graph isomorphism, general remarks*, *J. Comput. Syst. Sci.* **18** (1979), 128–142, doi: [10.1016/0022-0000\(79\)90043-6](https://doi.org/10.1016/0022-0000(79)90043-6).
- [91] A. Mostowski i M. Stark, „Elementy algebry wyższej”, wyd. 4, Państwowe Wydaw. Naukowe, 1968, 397 str.
- [92] A. Mróz, *Congruences of edge-bipartite graphs with applications to Grothendieck group recognition I. Inflation algorithm revisited*, *Fundamenta Informaticae* **146** (2016), 121–144, doi: [10.3233/FI-2016-1377](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1377).
- [93] A. Mróz, *Congruences of edge-bipartite graphs with applications to Grothendieck group recognition II. Coxeter type study*, *Fundamenta Informaticae* **146** (2016), 145–177, doi: [10.3233/FI-2016-1378](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1378).
- [94] L. A. Nazarova i A. V. Roĭter, *Representations of partially ordered sets*, *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **28** (1972), 5–31, [w jęz. angielskim: *Journal of Soviet Mathematics* **3** (1975), 585–606, 1426–1481, doi: [10.1007/BF01084662](https://doi.org/10.1007/BF01084662)].
- [95] K. Ogawa, S. Tagusari i M. Tsuchiya, *On strict semibound graphs of posets*, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **100** (2017), 45–54.
- [96] S. Ovsienko, „Integral weakly positive forms”, (w jęz. rosyjskim), w: *Schur Matrix Problems and Quadratic Forms*, Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, preprint, Kiev, 1978, 3–17.
- [97] J. A. de la Peña, „Algebras with hypercritical Tits form”, w: *Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988)*, Tom 26, Banach Center Publ. PWN, Warsaw, 1990, 353–369, URL: <http://www.matem.unam.mx/jap/articulos/16.pdf>.
- [98] A. Polak, „Zastosowanie algorytmów kombinatorycznych i numerycznych w klasyfikacji orbit P-krytycznych bigrafów, TP-krytycznych posetów oraz sieciowych kołczanów pierwiastków”, rozprawa doktorska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 2014, 149 str.

- [99] A. Polak i D. Simson, *Algorithms computing $O(n, \mathbb{Z})$ -orbits of P -critical edge-bipartite graphs and P -critical unit forms using Maple and C#*, Algebra and Discr. Math. **16** (2013), 242–286, URL: [http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2013/N4/adm-n4\(2013\)-9.pdf](http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2013/N4/adm-n4(2013)-9.pdf).
- [100] A. Polak i D. Simson, „Algorithmic experiences in Coxeter spectral study of P -critical edge-bipartite graphs and posets”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2013*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014, 375–382, doi: [10.1109/SYNASC.2013.56](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2013.56).
- [101] A. Polak i D. Simson, *Coxeter spectral classification of almost TP -critical one-peak posets using symbolic and numeric computations*, Linear Algebra Appl. **445** (2014), 223–255, doi: [10.1016/j.laa.2013.12.018](https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.12.018).
- [102] C. M. Ringel, „Tame Algebras and Integral Quadratic Forms”, Lecture Notes in Mathematics, Tom 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xiii+376 str., doi: [10.1007/BFb0072870](https://doi.org/10.1007/BFb0072870).
- [103] J. J. Rotman, „An Introduction to the Theory of Groups”, Tom 148, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995, xvi+513 str., doi: [10.1007/978-1-4612-4176-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4176-8).
- [104] M. Sato, *Periodic Coxeter matrices and their associated quadratic forms*, Linear Algebra Appl. **406** (2005), 99–108, doi: [10.1016/j.laa.2005.03.036](https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.03.036).
- [105] J.-P. Serre, „Complex Semisimple Lie Algebras”, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, x+74 str. doi: [10.1007/978-3-642-56884-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56884-8).
- [106] D. Simson, „Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories”, Algebra, Logic and Applications, Tom 4, Montreux: Gordon i Breach Science Publishers, 1992, xvi+499 str.
- [107] D. Simson, *Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories*, Colloq. Math. **115** (2009), 259–295, doi: [10.4064/cm115-2-9](https://doi.org/10.4064/cm115-2-9).
- [108] D. Simson, *Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 699–717, doi: [10.1016/j.laa.2010.03.041](https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.03.041).
- [109] D. Simson, *Mesh algorithms for solving principal Diophantine equations, sand-glass tubes and tori of roots*, Fundamenta Informaticae **109** (2011), 425–462, doi: [10.3233/FI-2011-520](https://doi.org/10.3233/FI-2011-520).
- [110] D. Simson, *Mesh geometries of root orbits of integral quadratic forms*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 13–34, doi: [10.1016/j.jpaa.2010.02.029](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2010.02.029).
- [111] D. Simson, *A Coxeter-Gram classification of simply laced edge-bipartite graphs*, SIAM J. Discrete Math. **27** (2013), 827–854, doi: [10.1137/110843721](https://doi.org/10.1137/110843721).
- [112] D. Simson, *Algorithms determining matrix morsifications, Weyl orbits, Coxeter polynomials and mesh geometries of roots for Dynkin diagrams*, Fundamenta Informaticae **123** (2013), 447–490, doi: [10.3233/FI-2013-820](https://doi.org/10.3233/FI-2013-820).
- [113] D. Simson, *A framework for Coxeter spectral analysis of edge-bipartite graphs, their rational morsifications and mesh geometries of root orbits*, Fundamenta Informaticae **124** (2013), 309–338, doi: [10.3233/FI-2013-836](https://doi.org/10.3233/FI-2013-836).
- [114] D. Simson, *Toroidal algorithms for mesh geometries of root orbits of the Dynkin diagram D_4* , Fundamenta Informaticae **124** (2013), 339–364, doi: [10.3233/FI-2013-837](https://doi.org/10.3233/FI-2013-837).
- [115] D. Simson, *Symbolic algorithms computing Gram congruences in the Coxeter spectral classification of edge-bipartite graphs, I. A Gram classification*, Fundamenta Informaticae **145** (2016), 19–48, doi: [10.3233/FI-2016-1345](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1345).

- [116] D. Simson, *Symbolic algorithms computing Gram congruences in the Coxeter spectral classification of edge-bipartite graphs, II. Isotropy mini-groups*, *Fundamenta Informaticae* **145** (2016), 49–80, doi: [10.3233/FI-2016-1346](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1346).
- [117] D. Simson i A. Skowroński, „Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 2. Tubes and Concealed Algebras of Euclidean type”, *London Math. Soc. Student Texts*, Tom 71, Cambridge-New York: Cambridge Univ. Press, 2007, xii+308 str., doi: [10.1017/CB09780511619212](https://doi.org/10.1017/CB09780511619212).
- [118] D. Simson i A. Skowroński, „Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 3. Representation-Infinite Tilted Algebras”, *London Math. Soc. Student Texts*, Tom 72, Cambridge-New York: Cambridge Univ. Press, 2007, xii+456 str., doi: [10.1017/CB09780511619403](https://doi.org/10.1017/CB09780511619403).
- [119] D. Simson i K. Zając, *A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots*, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2013** (2013), Article ID 743734, 22 str. doi: [10.1155/2013/743734](https://doi.org/10.1155/2013/743734).
- [120] D. Simson i K. Zając, *Inflation algorithm for loop-free non-negative edge-bipartite graphs of corank at least two*, *Linear Algebra Appl.* **524** (2017), 109–152, doi: [10.1016/j.laa.2017.02.021](https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.02.021).
- [121] S. S. Skiena, „The Algorithm Design Manual”, 2nd ed., Springer-Verlag, London, 2008, xvi+730 str., doi: [10.1007/978-1-84800-070-4](https://doi.org/10.1007/978-1-84800-070-4).
- [122] E. E. Tyrtshnikov, „A Brief Introduction to Numerical Analysis”, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997, xii+202 str. doi: [10.1007/978-0-8176-8136-4](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8136-4).
- [123] K. Zając, *Numeric algorithms for Corank two edge-bipartite graphs and their mesh geometries of roots*, *Fundamenta Informaticae* **152** (2017), 185–222, doi: [10.3233/FI-2017-1518](https://doi.org/10.3233/FI-2017-1518).
- [124] K. Zając, „Algorytmy kombinatoryczne i graficzne w spektralnej klasyfikacji skończonych bigrafów oraz sieciowych systemów pierwiastków”, rozprawa doktorska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 2018.
- [125] T. Zaslavsky, *The geometry of root systems and signed graphs*, *Amer. Math. Monthly* **88** (1981), 88–105, doi: [10.2307/2321133](https://doi.org/10.2307/2321133).
- [126] T. Zaslavsky, *Signed graphs*, *Discrete Appl. Math.* **4** (1982), 47–74, doi: [10.1016/0166-218X\(82\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(82)90033-6).
- [127] T. Zaslavsky, *A mathematical bibliography of signed and gain graphs and allied areas*, *Electron. J. Combin.* **5** (1998), Manuscript prepared with Marge Pratt, *Dynamic Surveys* **8**, 124, (Eighth Edition, 6 September 2012).
- [128] V. N. Zemlyachenko, N. M. Korneenko i R. I. Tyshkevich, *The graph isomorphism problem*, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **118** (1982), 83–158, 215, [w jęz. angielskim: *Journal of Soviet Mathematics* **29** (1985), 1426–1481, doi: [10.1007/BF02104746](https://doi.org/10.1007/BF02104746)].