Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marcin Choiński

Modelowanie matematyczne rozprzestrzeniania się gruźlicy w populacjach niejednorodnych

Rozprawa doktorska

Promotor rozprawy:
prof. dr hab. Urszula Foryś
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Promotor pomocniczy rozprawy:
dr inż. Mariusz Bodzioch
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Listopad 2021

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

24.11.2021 r. .....
data *Marcin Choiński*

Oświadczenie Promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

24.11.2021 r. .....
data *prof. dr hab. Urszula Foryś*

Oświadczenie Promotora pomocniczego rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

24.11.2021 r. .....
data *dr inż. Mariusz Bodzioch*

Składam podziękowania

Pani Profesor Urszuli Foryś

oraz Panu Doktorowi Mariuszowi Bodziochowi

za pomoc przy pisaniu rozprawy doktorskiej.

Spis treści

Wstęp **3**

1 Modele ciągłe dla populacji jednorodnej **14**
1.1 Model ze zmiennym napływem . . . 14
1.1.1 Własności modelu (1.3) . . . 16
1.1.2 Analiza stabilności stanów stacjonarnych układu (1.3) . . . 17
1.1.3 Przypadek $A = 0$ . . . 20
1.2 Model ze stałym napływem . . . 24
1.3 Dyskusja . . . 27

2 Modele dyskretne dla populacji jednorodnej **29**
2.1 Model oparty na otwartym schemacie Eulera . . . 29
2.1.1 Podstawowe własności modelu . . . 29
2.1.2 Stabilność stanów stacjonarnych . . . 32
2.1.3 Bifurkacja podwojenia okresu . . . 39
2.1.4 Stabilność cyklu o okresie 2 . . . 49
2.1.5 Bifurkacja Neimarka-Sackera . . . 55
2.1.6 Globalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego . . . 58
2.2 Model zbudowany na podstawie niestandardowej metody dyskretyzacji . . . 64
2.2.1 Konstrukcja modelu i jego podstawowe własności . . . 64
2.2.2 Stabilność stanów stacjonarnych . . . 67
2.2.3 Wersje twierdzenia 2.22 i wniosku 2.23 z uwzględnieniem dodatniości rozwiązań . . . 72
2.2.4 Możliwość wystąpienia bifurkacji . . . 75
2.3 Dyskusja . . . 76

3 Modele ciągłe dla populacji niejednorodnej **79**
3.1 Model ze zmiennym napływem . . . 79
3.1.1 Podstawowe własności modelu . . . 81
3.1.2 Analiza stanów stacjonarnych . . . 82
3.1.3 Model z aktywnym wykrywaniem . . . 90
3.1.4 Symulacje numeryczne . . . 97
3.2 Model ze stałym napływem . . . 97
3.2.1 Stany stacjonarne . . . 100
3.2.2 Współczynnik odnowienia choroby oraz lokalna stabilność stanu stacjonarnego wolnego od epidemii . . . 103
3.2.3 Lokalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego . . . 106
3.2.4 Przypadek bez napływu osób do podpopulacji wysokiego ryzyka . . . 108
3.2.5 Bifurkacja nadkrytyczna . . . 109
3.2.6 Globalna stabilność modelu krzyżowego . . . 111
3.2.7 Symulacje numeryczne . . . 117
3.3 Dyskusja . . . 118

4 Modele dyskretne dla populacji niejednorodnej **123**
4.1 Model oparty na otwartym schemacie Eulera 123
4.1.1 Podstawowe własności modelu 123
4.1.2 Stany stacjonarne i ich lokalna stabilność 126
4.2 Dyskretyzacja niestandardowa – przypadek ogólny 130
4.3 Dyskretyzacja niestandardowa – przypadek $\beta_2 \to 0$ 132
4.3.1 Podstawowe własności 132
4.3.2 Stany stacjonarne i ich lokalna stabilność 134
4.4 Symulacje numeryczne – modelowanie gruźlicy 141
4.5 Dyskusja 145

Podsumowanie **147**

A Drugi dowód twierdenia 1.16 **149**

B Globalna stabilność stanu wolnego od epidemii układu (3.36) **z użyciem funkcji Lapunowa** **150**

C Globalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego układu (3.36) **z użyciem kolejnej funkcji Lapunowa** **152**

D Postać współczynnika b_0 z paragrafu 4.1.2 **155**

Spis rysunków **157**

Spis tabel **158**

Bibliografia **159**

Wstęp

Modelowanie matematyczne szeroko stosuje się w badaniu rozprzestrzeniania się chorób zakaźnych w określonej populacji. W szczególności należy podkreślić przydatność modelowania dynamiki pandemii COVID-19. Problematyka dotycząca dynamiki tej epidemii stała się jedną z najważniejszych w kontekście badań prowadzonych przez najlepsze ośrodki naukowe na świecie, na przykład na Uniwersytecie Oksfordzkim [76] lub na Uniwersytecie Harvarda [94]. Dynamikę epidemii najczęściej opisuje się modelami deterministycznymi. Modele te mogą być zarówno ciągłe – wówczas najczęściej stosuje się równania różniczkowe, jak i dyskretne – wtedy stosujemy równania różnicowe. Można łączyć oba te podejścia i tworzyć modele, w których korzysta się z rachunku na skalach czasowych [17]. Oprócz modeli deterministycznych używa się również modeli deterministyczno-stochastycznych albo stochastycznych [6], [46].

W celu uchwycenia prawidłowej złożoności dynamiki epidemii populację dzieli się na kilka grup w zależności od stadium choroby. Każda choroba cechuje się swoistym stadiami, jednak często można wyróżnić następujące grupy:

- zdrowi (oznaczana przez S, z języka angielskiego *susceptible*) – niezainfekowani, podatni na chorobę,
- bezobjawowi (oznaczana przez E, z języka angielskiego *exposed*, lub przez L, z języka angielskiego *latent*) – zainfekowani, ale nie zarażający innych – u osób z tej grupy występuje postać utajona choroby,
- zarażający (oznaczana przez I, z języka angielskiego *infectious*) – zainfekowani i przenoszący chorobę,
- ozdrowiali (oznaczana przez R, z języka angielskiego *recovered*) – wyleczeni z zaraźliwej lub ukrytej postaci choroby,
- zaszczepieni (oznaczana przez V, z języka angielskiego *vaccinated*) – odporni na zakażenie lub posiadający niższy stopień zachorowalności niż osoby niezaszczepione,
- objęci kwarantanną (oznaczana przez Q, z języka angielskiego *quarantined*).

Powyżej wspomniane grupy również mogą ulec podziałowi – w [9] autorzy różnicują osoby bezobjawowe ze względu na ich skłonności do rozwoju lub regresji choroby. Spotykane są też prace, gdzie konstruuje się dwa modele (odpowiednio z założeniem o istnieniu lub braku określonej grupy) i porównuje ich własności. Często rozważa się dwa przypadki, gdy wyleczeni nabywają lub nie nabywają odporności, co zaprezentowano na przykład w [55].

Wyróżnianie dużej liczby stadiów może być trudne albo niemożliwe z powodu niewystarczających danych rzeczywistych – w rocznikach statystycznych najczęściej przedstawia się wyłącznie liczby osób chorych i zdrowych. Ponadto uwzględnianie dużej liczby grup prowadzi do konstrukcji skomplikowanych modeli matematycznych, których analiza (zwłaszcza analiza stabilności) jest bardzo trudna. Z tego powodu często zakłada się wyróżnienie tylko dwóch grup – osób zdrowych oraz chorych, czyli zainfekowanych (bez wyróżniania utajonej postaci choroby). Jeśli przyjmuje się istnienie tylko tych dwóch grup, wówczas tworzy się modele SI (*susceptible – infected*) lub modele SIS (*susceptible – infected – susceptible*). Takie nazewnictwo jest oparte na założeniu przez jakie stadia choroby przechodzi dany osobnik. W modelach SI zdrowy osobnik na skutek zakażenia znajduje się w grupie osób chorych i nie ma możliwości powrotu do zdrowia lub, pomimo skuteczności leczenia objawowego, jest dalej nośnikiem patogenu. W modelach SIS zakładamy, że zakażona osoba może zostać wyleczona, to znaczy przestaje przenosić patogen i wtedy powraca do grupy osób zdrowych (S). W większości chorób istnieje możliwość powrotu do zdrowia, z tego powodu częściej konstruuje się modele SIS niż SI. W niniejszej rozprawie analizowane są modele SIS.

W większości deterministycznych modeli epidemiologicznych [88] przyjmuje się założenie polegające na tym, że wszystkie grupy są równomierne rozmieszczone w populacji, co prowadzi do tego, że prawdopodobieństwo kontaktu między dwoma dowolnymi osobnikami z populacji jest jednakowe. Ponadto przyjmuje się, że liczba nowych zakażeń jest proporcjonalna do liczby osób zdrowych i liczby osób zainfekowanych. Wyrażenia opisujące zakażenia są oparte albo na funkcjach biliniowych, mających uzasadnienie w prawie działania mas, albo na standardowej funkcji nowych zakażeń. Jest to funkcja będąca ilorazem, gdzie dzielną jest iloczyn liczebności osób zdrowych oraz liczebności osób chorych, dzielnikiem zaś jest suma obu tych liczebności. Zestawienie modeli z uwzględnieniem różnych typów wyrażeń uwzględniających zakażenie można znaleźć na przykład w [55].

Kolejnym sposobem, aby uprościć modele epidemiologiczne, jest założenie, że wszystkie osobniki danej populacji charakteryzują się tą samą podatnością na chorobę. Populacje o takiej cesze nazywamy jednorodnymi (inaczej homogenicznymi). W takich populacjach osobniki klasyfikuje się wyłącznie na podstawie stadium choroby, w którym osobnik się znajduje. Jeżeli zakłada się jednorodność populacji, wówczas tworzy się modele składające się z tylu równań, ile stadiów choroby uwzględnia się w modelu. Takie podejście jest zastosowane w modelu Kermacka–McKendricka opisanym w pracy [65], będącej jedną z pierwszych dotyczących modelowania epidemiologicznego. W [51] analizuje się modele populacji jednorodnej z tak zwaną dynamiką podstawową (czyli z występowaniem narodzin i śmierci w populacji) oraz bez tej dynamiki – wprawdzie założenie o braku tej dynamiki jest nierealistyczne, to jednak może być ono przyjęte, gdy epidemia rozprzestrzenia się bardzo szybko i zmiana liczebności populacji zależy głównie od dynamiki epidemii, a nie od przyrostu naturalnego. Innym przyjmowanym założeniem jest szczepienie osobników – w [71] przeprowadza się analizę modelu epidemii zarówno z uwzględnieniem, jak i bez uwzględnienia szczepienia.

Analizowanie dynamiki epidemii w populacjach jednorodnych ma uzasadnienie tylko w przypadku izolowanych populacji, w których stopień podatności na zakażenie jest taki sam wśród wszystkich osobników. Takie założenie jest praktycznie niemożliwe do spełnienia w warunkach rzeczywistych. Z tego powodu należy konstruować modele epidemiologiczne dla populacji niejednorodnych. Populacje niejednorodne (inaczej heterogeniczne lub niehomogeniczne) są to takie populacje, w których wyróżnia się dwie lub więcej podpopulacji, które różnią się stopniem zachorowalności lub zakaźności chorobą, bądź tymi dwoma cechami jednocześnie. W przypadku wielu chorób można wyróżnić grupę niskiego i wysokiego ryzyka zachorowalności, na przykład odpowiednio osoby zamożne i ubogie, niebezdomne i bezdomne (jak w przypadku gruźlicy) [12]. Przy badaniu dynamiki pandemii COVID-19 za grupę wysokiego ryzyka można uznać pracowników służby zdrowia. Innymi czynnikami wpływającymi na ryzyko zakażenia mogą być płeć, aktywność seksualna (jak w przypadku kiły, zakażenia HIV lub rzeżączki) lub wiek (w przypadku choroby pneumokokowej grupą wysokiego ryzyka są dzieci do 5 lat). W modelowaniu matematycznym często wyróżnia się dwie grupy o różnym stopniu ryzyka – uwzględnianie trzech lub więcej grup może prowadzić do otrzymania modeli o skomplikowanej postaci, których analiza jest znacznie trudniejsza. W niniejszej rozprawie w obrębie jednej populacji wyróżniamy dwie podpopulacje różniące się ryzykiem transmisji choroby – grupę osób o niskim ryzyku zakażenia oraz grupę osób o ryzyku wysokim.

Choroba może rozwijać się nie tylko w obrębie jednej podpopulacji, ale może być przenoszona pomiędzy różnymi podpopulacji o różnym stopniu ryzyka – wówczas do modelowania stosujemy modele krzyżowe (inaczej wielogrupowe lub wielotypowe). Składowymi takich modeli są modele epidemiologiczne dla populacji jednorodnej – tutaj te populacje stają się podpopulacjami populacji niejednorodnej. W modelach krzyżowych należy uwzględnić także wyrażenia opisujące transmisję choroby między tymi podpopulacjami. W modelach wielogrupowych funkcja transmisji choroby występuje w co najmniej dwóch typach wyrażeń – dotyczących transmisji choroby wewnątrz podpopulacji oraz między podpopulacjami.

Modele krzyżowe są powszechnie stosowane w modelowaniu matematycznym. W [79] autorzy stosują model krzyżowy do analizy epidemii SARS w Singapurze w 2013 roku. Dynamika zachorowań na odrę we Francji została opisana w [2]. Zakłada się tutaj, że podpopulacje różnią się stopniem objęcia szczepień – nie wyróżnia się w nich osób szczepionych. Stopień podatności osobnika na chorobę jest zależny od tego, w której podpopulacji się znajduje, a nie od faktu bycia zaszczepionym – w modelu zatem występuje odporność grupowa, odmienna w każdej podpopulacji. W [66] modelowane jest rozprzestrzenianie się wirusa Ebola w Korei Południowej. Do jednej z podpopulacji zaliczani są pracownicy służby zdrowia, pozostałe osoby tworzą drugą podpulację.

Analizuje się przypadki przenoszenia choroby nie tylko pomiędzy ludźmi. W [97] analizuje się modele krzyżowe epidemii grypy wśród populacji świń. Modele wielogrupowe służą nie tylko do opisywania dynamiki epidemii w populacjach niejednorodnych. Mają również zastosowanie do analizy epidemii w sy-

tuacji, kiedy patogen choroby jest przenoszony między osobnikami różnych gatunków. Wówczas zamiast podpopulacji o różnym stopniu ryzyka uwzględnia się populacje różnych gatunków, na przykład w [72] prezentowany jest model rozwoju brucelozy przenoszonej między bydłem (jedna populacja) a owcami (druga populacja).

Dynamikę międzygatunkową spotyka się też w modelowaniu chorób przenoszonych przez wektory – wówczas jeden z gatunków, nazywany wektorem, jest nośnikiem patogenu chorobotwórczego. Klasycznym przykładem takiej choroby jest malaria – komary w trakcie ukąszenia przenoszą patogen (pięć gatunków zarodźca) do organizmu człowieka. Wraz z krwią ukąszonego człowieka do organizmu komara trafiają komórki macierzyste zarodźca, które są podstawą do utworzenia sporozoitów (forma zarodźca inwazyjna dla człowieka), przenoszonych na ludzi podczas kolejnych ukłuć komarów. Przykładowy model malarii można znaleźć w [112]. Należy zwrócić uwagę, że nie jest konieczne przenoszenie patogenu wewnątrz jednego gatunku (podpulacji). Można jednak przyjąć dodatkowe założenia dające możliwość wewnątrzgatunkowej transmisji choroby, np. poprzez transfuzję krwi. Wirus powodujący gorączkę Zika może być przenoszony między ludźmi drogą płciową, co zostało uwzględnione w modelu opisanym w [92]. Modele chorób przenoszonych przez wektory często w literaturze są traktowane jako wyodrębniona klasa modeli i ich analiza odbywa się bez odniesienia do określonej choroby. Takie podejście można spotkać w [59].

Oczywiście analiza modeli krzyżowych jest również uprawiana bez odniesienia do konkretnej choroby i uzyskuje się wyniki teoretyczne, co ma miejsce na przykład w [98], gdzie autorzy badają wpływ heterogeniczności osób zdrowych na wskaźnik reinfekcji.

W niektórych pracach przyjmuje się uproszczenie polegające na tym, że nie we wszystkich stadiach choroby wyróżnia się grupy o różnym stopniu ryzyka. Takie założenie w naturalny sposób występuje na przykład, gdy osobnik po chorobie zostaje uodporniony na kolejne zakażenia. Podejście takie jest uwzględnione w [37]. Wśród osób zdrowych i chorych wyróżniamy tych, którzy reagują lub nie reagują na wybuch epidemii, natomiast osoby uodpornione po przebytej chorobie nie są pod tym względem klasyfikowane, gdyż dzięki odporności nie muszą reagować na możliwość zakażenia. W [80] autorzy modelują dynamikę epidemii dwóch rodzajów gruźlicy: lekowrażliwej oraz wielolekoopornej – te rodzaje zastępują grupy ryzyka. Dla obu odmian gruźlicy wyróżnia się osoby chore, które zakażają lub nie zakażają innych, natomiast nie różnicuje się osób zdrowych i wyleczonych (uodpornionych).

W wielu pracach można znaleźć teoretyczne podejście polegające na tym, że w populacji wyróżnia się n podpopulacji, w każdej zaś podpopulacji wyróżnia się określone stadia choroby. W [57] autorzy analizują model dynamiki epidemii HIV w takiej populacji. Autorzy w [32] modelują dynamikę COVID-19 rozważając nieokreśloną liczbę grup. Podobne podejście zastosowano w [60], gdzie obrazuje się dynamikę COVID-19 w Chinach. Ponadto w tej pracy autorzy w grupie osób zainfekowanych i ozdrowiałych wyodrębniają osoby, które nie zostały zdiagnozowane.

Założenie o nieokreślonej liczbie grup jest często rozważane w pracach, w których przyjmuje się, że czynnikiem różnicującym podatność na zakażenie jest wiek i ustala się, że n reprezentuje wiek osobników. Podejście takie zastosowano w [36]. Modele epidemiologiczne oparte na takim założeniu nazywa się modelami wielorocznikowymi. Koncepcję takich modeli przyjęto w [95] do analizy dynamiki COVID-19 w Wuhan w Chinach. Bada się tam rolę restrykcji dotyczących życia społecznego na ograniczenie rozprzestrzeniania się epidemii.

Niektórzy badacze stosują w analizie modeli teorię opóźnień – zakładają, że liczba zachorowań w określonej grupie osobników zależy od określonych zachowań danych osób, które nastąpiły w ustalonym momencie w przeszłości. W [86] przyjęte jest, że zakażenie się przez danego osobnika nastąpiło wcześniej niż możliwość przenoszenia przez niego choroby. W pracy tej pokazano, że opóźnienie nie zmienia dynamiki badanego modelu w sposób jakościowy.

Modele opisujące dynamikę epidemii budowane są najczęściej w oparciu o równania różniczkowe zwyczajne, w których zmienną niezależną stanowi czas. Można znaleźć modele, gdzie zamiast równań różniczkowych zwyczajnych stosuje się równania cząstkowe. Dodatkową zmienną niezależną może być na przykład położenie, co stosują autorzy w [75]. Prezentowany tam model jest oparty na równaniach reakcji-dyfuzji. Analizę modelu krzyżowego z wyróżnieniem dwóch podpopulacji, gdzie stosuje się tego typu równania, przedstawiono w [120]. W modelach wielorocznikowych można zauważyć podejście, w którym wiek jest traktowany, obok czasu, jako zmienna niezależna i wówczas dany model staje się układem równań różniczkowych cząstkowych. Takie założenie przyjęto w [68].

Warto również wspomnieć, że modele krzyżowe wraz z koncepcją mobilności osobników stały się podstawą do stworzenia tak zwanych modeli wielogrupowych wieloobszarowych. Ideą tych modeli jest założenie, że osobnik z danej podpopulacji (tutaj nazywamy je grupami) może znaleźć się w wybranym

przez siebie obszarze (rewirze). Podział osobników na grupy oraz podział rejonu występowania populacji na rewiry są od siebie niezależne. Stopień zakażenia osoby zdrowej zależy od przynależności do określonej grupy, zajmowanego obszaru oraz liczby osób (w różnym stadium choroby) przebywających na tym obszarze. Takie podejście przedstawiono w [14]. Co jest istotne, opisany układ składa się z równań różniczkowych zwyczajnych, zmienną niezależną pozostaje czas.

Oprócz modeli deterministycznych analizuje się też modele stochastyczne oraz deterministyczno-stochastyczne. Wśród modeli stochastycznych można wskazać model Reeda-Frosta [1, 45]. Model ten zalicza się do typu SIR (*susceptible – infected – recovered*) – osobnik po przebyciu choroby zostaje trwale na nią uodporniony. Liczebność osobników w każdej z trzech grup (w populacji jednorodnej lub niejednorodnej) jest wyznaczana za pomocą rozkładu dwumianowego. W [89] zmodyfikowano model Reeda-Frosta i w analizie rozwoju epidemii skorzystano z losowych grafów Bernoulliego. Podejście deterministyczno-stochastyczne można znaleźć w [73] – autorzy w krzyżowym modelu deterministycznym uwzględniają stochastyczne zaburzenie parametrów – do parametrów o stałych wartościach dodają wzajemnie niezależne procesy Wienera. Autorzy w [114] na podstawie krzyżowego modelu deterministycznego tworzą natomiast stowarzyszony z nim układ stochastycznych równań różniczkowych. W [4] autorka jako model krzyżowy stosuje stochastyczny układ równań różniczkowych. Teoretyczna analiza modeli stochastycznych, zarówno dla czasu ciągłego, jak i dyskretnego, została przedstawiona w [35].

Podczas analizy modeli epidemiologicznych, w tym modeli krzyżowych, istotną rolę odgrywa zagadnienie stabilności stanów stacjonarnych danych układów równań. Badanie takich układów często ogranicza się do analizy lokalnej stabilności, z pominięciem analizy globalnej stabilności. Jest to spowodowane tym, że analiza globalnej stabilności jest skomplikowana i najczęściej polega na znalezieniu odpowiedniej funkcji Lapunowa w celu określenia stabilności. Funkcje te, konstruowane w przypadku układów opisujących dynamikę epidemii w populacjach jednorodnych, są prezentowane i analizowane w literaturze [33]. W przypadku modeli krzyżowych znalezienie funkcji Lapunowa jest szczególnie trudne. Najczęściej taka funkcja Lapunowa składa się z komponentów, które są funkcjami Lapunowa używanymi w modelach populacji jednorodnej. Takie podejście można spotkać na przykład w [113] oraz w [67].

Modele ciągłe *vs* dyskretne

Modele ciągłe są powszechnie stosowane do odzwierciedlenia przebiegu epidemii. Często dokonuje się symulacji takich modeli, a uzyskane wyniki porównuje się z danymi empirycznymi. Dane rzeczywiste mają postać dyskretną – reprezentują one daną wielkość, na przykład liczebność osobników danego stadium choroby, w określonym momencie. Z tego powodu wydaje się uzasadnione konstruowanie również modeli dyskretnych. W przypadku modelowania układów rzeczywistych, których własności zmieniają się w czasie, pojawia się pytanie, który typ modelu (ciągły czy dyskretny) powinien być zastosowany. Zazwyczaj oba rodzaje modeli są używane wymiennie. Jeśli wyjściowo zaproponowano model ciągły, można zastosować wybraną metodę dyskretyzacji tworząc odpowiedni model dyskretny. W [61] autorzy konstruują i omawiają modele dyskretne oparte na ciągłym modelu SIS dla populacji jednorodnej, w [5] zaś przedstawione są też modele SI oraz SIR.

Zastanówmy się, czy układ dyskretny może opisywać dynamikę epidemii. Wybrane momenty potraktujmy jako elementy siatki czasu dyskretnego. Zakładamy, że transmisja choroby i zachorowanie następują natychmiast. Ponadto niech kontakty między osobnikami zachodzą w dostatecznie krótkim odcinku czasu i po tym czasie nie ma kontaktu. Taką sytuację można zaobserwować na przykład między osobami przebywającymi w jednym miejscu (jak uczniowie w szkole, pracownicy w zakładzie pracy), o ile w tym czasie te osoby nie kontaktują się z innymi osobami z zewnątrz, a po tym czasie nie mają ze sobą kontaktu. Wspomniany odcinek czasu możemy wówczas potraktować jako punkt ze skali czasowej. Procesy niewymagające kontaktu z inną osobą, czyli ozdrowienie, narodziny lub śmierć, praktycznie nie wpływają na dynamikę liczebności populacji w chwili kontaktu. Takie procesy rozpatrujemy zatem niezależnie i możemy uznać, że mogą one zdarzyć się na końcu ustalonego odcinka czasu lub poza tym odcinkiem. Rezultaty tych procesów będą odwzorowane w kolejnym elemencie siatki czasu dyskretnego. Stwierdzamy więc, że dynamikę epidemii można badać za pomocą układów dyskretnych. Zwróćmy uwagę, że w czasie izolacji społecznej, na przykład tej spowodowanej pandemią COVID-19, kontakty między ludźmi są ograniczone i trwają jak najkrócej. Podejście dyskretne można łatwo zastosować do modelowania dotyczącego takich okresów. Zauważmy, że w przypadku stosowania modeli ciągłych należałoby uwzględnić kontakty z innymi osobnikami w dowolnym momencie. Intensywność kontaktów nie jest rozłożona równomiernie

w czasie – zwiększona interakcja z innymi osobami występuje na przykład podczas dojazdu i powrotu z pracy oraz w godzinach roboczych. Z tego powodu model ciągły nie oddaje w pełni dynamiki epidemii.

Istotną kwestią jest wybór odpowiedniej metody dyskretyzacji. Konkretna metoda powinna jak najdokładniej aproksymować dane empiryczne. Często jednak modele ciągłe, na podstawie których dokonuje się dyskretyzacji, mają skomplikowaną postać i ich analiza jest trudna. Stanowi to powód, dla którego często wybiera się proste metody dyskretyzacji, na przykład jawny (inaczej otwarty) schemat Eulera [15] (w skrócie EEM, z języka angielskiego *explicit Euler method/scheme*). Układy równań z użyciem EEM są podobne do analogicznych układów ciągłych, ich analiza jest również podobna, jak na przykład w [42].

Modele dyskretne, w tym te z zastosowanym EEM, mogą cechować się złożoną dynamiką. W [56] omawia się możliwość pojawienia się bifurkacji podwojenia okresu oraz bifurkacji Neimarka-Sackera (nazywanej też bifurkacją Hopfa) w modelu dla populacji jednorodnej. Teoria bifurkacji występujących w układach dyskretnych i ciągłych jest omówiona w [69] – podano tam również przykłady modeli biologicznych, gdzie bifurkacje występują. W rozprawie omówimy przypadek wystąpienia bifurkacji podwojenia okresu oraz bifurkacji Neimarka-Sackera w modelu dyskretnym dla populacji jednorodnej.

Otwarty schemat Eulera, zwłaszcza dla modeli o prostej postaci, daje dobre przybliżenie danych rzeczywistych w niewielkim zakresie czasu. Wadą tego schematu jest niewłaściwe przybliżanie danych dla dużych skal czasowych. Ponadto stosowanie EEM może skutkować tym, że wartości symulowanych zmiennych mogą być ujemne, co w przypadku modelowania liczebności populacji nie powinno mieć miejsca. Z powodu niedokładności EEM przyjmuje się inne dyskretyzacje, na przykład w [74] stosuje się niejawny (inaczej zamknięty) schemat Eulera, w [103] stosuje się zaś schemat Rungego-Kutty.

Problem ujemności rozwiązań w modelach ciągłych występuje w znacznie mniejszym stopniu niż w przypadku modeli dyskretnych z użyciem EEM. Intuicyjne wydaje się zatem znalezienie takiego schematu numerycznego, na podstawie którego zbudowany układ równań ma w ujęciu jakościowym takie samo zachowanie jak odpowiadający mu układ ciągły [85]. Mówimy, że układ dyskretny jest dynamicznie zgodny ze swoim ciągłym odpowiednikiem, jeżeli oba te układy mają tę samą dynamikę, zarówno pod względem stabilności, jak i występowania bifurkacji. Takie własności obserwujemy dla układów, w których zastosowano jedną z niestandardowych metod (schematów) dyskretyzacji (w skrócie $NSDM$, z języka angielskiego *non-standard discretization method*). Stosowanie tych metod pozwala na wyeliminowanie problemu ujemności rozwiązań.

Dzięki możliwości zachowania dodatniości rozwiązań (przy odpowiednich założeniach), niestandardowe schematy dyskretyzacji znalazły zastosowanie w modelowaniu zjawisk biologicznych. Przekrojowy opis i analizę dyskretnych modeli SIS oraz SI, które są dynamicznie zgodne z modelami ciągłymi, można znaleźć w [100]. W [3] autorzy prezentują trzy przykładowe sposoby niestandardowej dyskretyzacji modelu Lotki-Volterry wraz z omówieniem własności zmodyfikowanych modeli. Również w modelowaniu epidemii stosuje się $NSDM$. W [84] autorzy stosują schemat niestandardowy do modelu epidemiologicznego dla populacji jednorodnej z uwzględnieniem przyrostu logistycznego, natomiast w [105] stosują $NSDM$ do modelu z tak zwaną nasyconą funkcją zakażeń. Autorzy [121] dyskretyzują z użyciem metody niestandardowej model krzyżowy dla populacji niejednorodnej z uogólnioną liczbą podpopulacji i dokonują analizy analogicznej jak dla modelu ciągłego. W [117] $NSDM$ jest stosowany do modelowania krzyżowego z uwzględnieniem opóźnienia. W ramach metod niestandardowych można wskazać różne schematy o odmiennych własnościach matematycznych. Wybór danego schematu jest uzależniony na przykład od opisu heurystycznego modelu lub od własności rozwiązań układu. Motywacja do wyboru odpowiedniego schematu, użytego w rozprawie, będzie przedstawiona w dalszej części pracy.

Przedstawmy jeszcze znaczenie kroku dyskretyzacji w kontekście epidemiologicznym. Na podstawie powyższych rozważań intuicyjne wydaje się uznanie tego kroku za odstęp pomiędzy kolejnymi interakcjami między osobnikami. To założenie może wydawać się niezasadne, jeśli przyjmiemy za krok dyskretyzacji okres na przykład roku, jak to ma miejsce w przytaczanym przykładzie epidemii gruźlicy. Zwróćmy jednak uwagę, że częstotliwość zakażeń patogenem gruźlicy jest znacznie mniejsza niż w przypadku patogenów grypy lub COVID-19. Nie występuje więc potrzeba przedstawiania liczby nowych zachorowań na gruźlicę dla stosunkowo krótkiego okresu (na przykład dzień, tydzień, miesiąc). Przyjmujemy więc podaną interpretację kroku dyskretyzacji za odpowiednią.

Warto również zwrócić uwagę na aktualnie rozwijane podejście do modelowania epidemiologicznego przy użyciu rachunku na skalach czasowych. Efekt zastosowania tego rachunku na modelu SIS w populacji jednorodnej można przeanalizować w [102]. Skale czasowe znalazły zastosowania do modelowania

dynamiki chorób przenoszonych przez wektory. Transmisja wirusa gorączki Zachodniego Nilu, przenoszonego przez komary, jest opisana w [110].

Współczynnik odnowienia $\mathcal{R}_0$

Z modelowaniem epidemiologicznym związane jest pojęcie współczynnika odnowienia choroby (potocznie współczynnik reprodukcji, z języka angielskiego *reproduction number*). Jest on oznaczany jako $\mathcal{R}_0$ i definiowany na przykład w [38] jako średnia liczba wtórnych zachorowań, czyli takich, które powstały poprzez zakażenie osób zdrowych przez jedną zainfekowaną osobę w populacji złożonej wyłącznie z osób zdrowych. Parametr ten określa, czy choroba może się rozprzestrzeniać w populacji, przez co $\mathcal{R}_0$ może być traktowane jako parametr progowy. Dla bardziej złożonych modeli, w których występuje więcej niż jedna grupa osób chorych, wspomniana heurystyczna definicja $\mathcal{R}_0$ jest niewystarczająca. Bardziej ogólna definicja $\mathcal{R}_0$ została podana w [39] i jest tam sformułowana jako liczba nowych infekcji wywołanych przez jednego zainfekowanego osobnika w przypadku, gdy w danej chwili populacja osiąga stan stacjonarny wolny od epidemii.

W celu wyznaczenia $\mathcal{R}_0$ można stosować różne podejścia. Jedną z technik jest zastosowanie rachunku całkowego oraz tak zwanej funkcji przeżycia. Taka metoda jest przedstawiona i opisana w [49]. Innym ze sposobów jest skorzystanie z macierzy Jacobiego danego układu równań oraz z kryterium Routha-Hurwitza. Opis i przykłady zastosowania tej metody można znaleźć na przykład w [82]. Sposób ten może nie być skuteczny w sytuacji, gdy warunki konieczne i wystarczające stabilności stanu wolnego od choroby danego układu nie mogą być sprowadzone do pojedynczego warunku, co jest również pokazane w wyżej cytowanej pozycji.

Inny sposób na obliczenie $\mathcal{R}_0$ jest związany z użyciem koncepcji tak zwanej macierzy następnego pokolenia, która została wprowadzona w [38]. Wówczas $\mathcal{R}_0$ definiuje się jako promień spektralny tej macierzy. Jedno z podejść wykorzystujących macierz następnego pokolenia do obliczenia $\mathcal{R}_0$ zostało przedstawione w [39]. W tym podejściu istotne jest odróżnienie nowych infekcji od wtórnych. Koncepcja macierzy następnego pokolenia jest przenoszona z modeli ciągłych na dyskretne. W [7] autorzy prezentują sposób wyznaczenia $\mathcal{R}_0$ dla układów dyskretnych. Metoda tam zaprezentowana jest bardzo podobna do tej stosowanej w przypadku modeli ciągłych.

Idea współczynnika odnowienia, która często jest analizowana na gruncie matematyki teoretycznej, jest używana również w rzeczywistych przykładach różnych epidemii, na przykład w [50] oblicza się wartości $\mathcal{R}_0$ dla epidemii SARS, BSE oraz grypy. W [89] podaje się wartość $\mathcal{R}_0$ dla przypadku rozprzestrzeniania się HIV w Europie. Współczynnik $\mathcal{R}_0$ jest w obecnej chwili jednym z najgorętszych tematów dyskutowanych w mediach w kontekście trwającej pandemii COVID-19.

Okazuje się, że współczynnik odnowienia może determinować globalną stabilność stanu stacjonarnego wolnego od epidemii danego układu. W [64] autorzy podają twierdzenie, które mówi, że przy odpowiednich założeniach ten stan jest globalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartość współczynnika odnowienia jest mniejsza bądź równa 1. Podobne podejście można znaleźć w [23], przy czym tutaj zakłada się heterogeniczność populacji i wyróżnienie trzech stadiów choroby: zdrowych, zainfekowanych nieroznoszących choroby, oraz zarażających. Podejścia stosowane w [64] i [23], oprócz konieczności uwzględnienia w [23] wspomnianego wyżej założenia o trzech grupach, są bardzo podobne. Istotne jest, że w obu tych pracach nie szuka się odpowiedniej funkcji Lapunowa, tylko bada się współczynnik $\mathcal{R}_0$, co stanowi znaczne ułatwienie. W rozprawie zastosujemy koncpecję z [64] do określenia warunków globalnej stabilności stanu wolnego od epidemii.

W kontekście współczynnika odnowienia epidemii zajmiemy się również możliwością występowania bifurkacji nadkrytycznej (inaczej: w przód) i podkrytycznej (inaczej: w tył). Jedną z pierwszych poświęconych tej tematyce prac jest artykuł [57], gdzie analizowana jest bifurkacja w modelu rozchodzenia się HIV. W późniejszych latach tematyka ta była dalej badana – w [24] omawia się możliwość wystąpienia bifurkacji nadkrytycznej i podkrytycznej w układach opisujących dynamikę epidemii gruźlicy. W rozprawie zagadnienie bifurkacji będzie analizowane na podstawie podejścia przedstawionego w [39].

Modelowanie gruźlicy

Do powszechnych chorób zakaźnych zalicza się gruźlicę, w przypadku której patogenem są bakterie *Mycobacterium tuberculosis* (MB). Są one przenoszone drogą kropelkową przez osoby z aktywną postacią

gruźlicy, to znaczy posiadające dodatni wynik wymazu na obecność MB [18]. Jak donosi Światowa Organizacja Zdrowia w swoim raporcie z 2019 roku [116], w 2018 roku na gruźlicę zachorowało 10 milionów osób, zmarło zaś 1,5 miliona. Prawdopodobieństwo zakażenia się gruźlicą jest niskie [10], dlatego dynamikę rozprzestrzeniania się gruźlicy należy analizować w długim horyzoncie czasowym. W przypadku większości postaci gruźlicy może być zastosowana terapia wielolekowa. Okazuje się jednak, że oporność szczepów bakterii na antybiotyki ewoluuje szybko, natomiast koszty terapii są wysokie. Co więcej, tylko jedna trzecia chorujących ma dostęp do leczenia [10]. W tym kontekście należy również wspomnieć o występowaniu gruźlicy lekoopornej, na którą w 2018 roku zapadło około pół miliona osób. Zakażenia gruźlicą będą zatem występowały nadal, co może skutkować wybuchem epidemii. Modelowanie matematyczne, tak jak w przypadku epidemii innych chorób, pomaga w analizie dynamiki rozwoju gruźlicy.

Analizuje się dynamikę gruźlicy występującej zarówno w populacjach jednorodnych, jak i niejednorodnych. Analiza modelu dla populacji homogenicznej w kontekście współczynnika odnowienia epidemii jest przedstawiona w [58]. Autorzy w [119], opierając się na statystykach dotyczący zapadalności na gruźlicę w Chinach, wyróżniają w populacji niejednorodnej trzy grupy wiekowe osób podatnych (dzieci, w średnim wieku, seniorzy) o różnym stopniu zapadalności. Okazuje się, że uwzględnienie różnego stopnia zapadalności ma wpływ na dynamikę modelu. W jednej z najnowszych prac [96] analizuje się model dynamiki epidemii gruźlicy z pochodną niecałkowitego rzędu, w którym wyróżniono dwie grupy osób zarażających – leczonych i nieleczonych. Przekrojowy opis modelowania dynamiki gruźlicy w populacjach jednorodnych i niejednorodnych można znaleźć w [24]. Uwzględniono tam wieloszczepowość patogenu oraz stopień kontaktu między osobnikami (bliski i pobieżny). We wspomnianej pracy analizuje się też możliwość wystąpienia bifurkacji nadkrytycznej i podkrytycznej. Wyniki teoretyczne są aplikowane do problemu eliminacji gruźlicy w USA.

Modelowanie gruźlicy w populacji niejednorodnej zostało również przedstawione w [87], gdzie jako grupę wysokiego ryzyka przyjęto osoby posiadające antygen leukocytarny izotypu DR (HLA-DR2), którego ekspresja przyczynia się do zwiększenia podatności zachorowania na gruźlicę. Osoby nieposiadające takiego antygenu zostały zaklasyfikowane jako osoby z niskim ryzykiem zachorowalności. HLA-DR2 jest często spotykany wśród mieszkańców Indii, co rzutuje na występującą tam zwiększoną zachorowalność na gruźlicę [104]. W [87] autorzy ponadto porównują dynamikę zachorowań na gruźlicę w Indiach z dynamiką zachorowań w USA, gdzie zachorowalność jest znacznie niższa. Genetyczną podatność na zachorowanie uwzględniono też w modelu krzyżowym prezentowanym w [91], alternatywnie rozważa się tam również lekooporność osobników. Modeluje się również gruźlicę przenoszoną między zwierzętami – w [88] zamiast podpopulacji o różnym stopniu ryzyka rozważa się populacje krów oraz borsuków.

Krzyżową dynamikę gruźlicy obrazuje się również modelami dyskretnymi. Dyskretny model wieloroczkowy jest analizowany w [21], gdzie używa się EEM. Otrzymane wyniki stosuje się do modelowania dynamiki gruźlicy w Chinach. Warto również zwrócić uwagę na pracę [107], gdzie na podstawie modelu dynamiki gruźlicy z pochodną niecałkowitego rzędu dokonuje się niestandardowej dyskretyzacji. W populacji, zamiast grup ryzyka, uwzględnia się trzy typy gruźlicy: lekowrażliwą, wielolekooporną oraz rozlegle lekooporną. Podział osobników ze względu na typy nie obejmuje osób zdrowych, lecz dotyczy osobników z ukrytą i zaraźliwą gruźlicą (traktowane jako oddzielne stadia). Krzyżowość modelu zapewnia się dzięki składnikom, które obrazują reinfekcję u osób z ukrytą gruźlicą, przy czym ponowne zakażenie może być innego typu niż pierwotne. Model z artykułu [107] jest przełożony przez autorów na przypadek stochastyczny w [106]. Tutaj używa się stochastycznych równań różnicowych. Zastosowano tu niestandardową dyskretyzację, opartą na schemacie Milsteina, stosowanym do dyskretyzacji równań stochastycznych.

W kontekście pracy [107] warto przytoczyć artykuł [108], gdzie w modelu krzyżowym z pochodną niecałkowitego rzędu zachorowalność na gruźlicę jest determinowana nie tylko przez lekową oporność szczepów, ale też przez cukrzycę. Problem minimalizacji liczby zakażeń jest rozwiązywany z użyciem teorii sterowania. Do symulacji model ciągły zdyskretyzowano za pomocą schematu 2LIM, gdzie stosuje się dwukrokową interpolację z użyciem wielomianów Lagrange'a. Ma to na celu zwiększenie regionu, w którym występuje stabilność układu. Schemat ten zaimplementowano w dwóch wersjach, zwykłej i niestandardowej.

Motywacją do przeprowadzania badań zawartych w rozprawie była obserwacja dynamiki epidemii gruźlicy w populacji niejednorodnej w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2003–2012. W przypadku tej populacji jako grupę wysokiego ryzyka wybrano osoby bezdomne. Jako grupę niskiego ryzyka przyjęto pozostałą część populacji, czyli osoby niebezdomne. Jak relacjonuje Światowa Organizacja Zdrowia, bezdomność, jako szczególny przypadek ubóstwa, przyczynia się do zwiększenia zachorowalności na gruźlicę [44]. W latach 2004–2011 przeprowadzono w województwie warmińsko-mazurskim cztery pro-

gramy wykrywania gruźlicy wśród osób bezdomnych, które potem leczono. Skutkiem zastosowania tych programów był spadek zachorowalności na gruźlicę wynoszący 53 % (w całym kraju 26 %). Co ważne, spadek zachorowalności odnotowano nie tylko wśród osób bezdomnych, ale w całej populacji w rozważanym województwie. Należy podkreślić, że wykrywanie aktywnych przypadków wśród grup wysokiego ryzyka stanowi jedną ze strategii Światowej Organizacji Zdrowia mających na celu obniżenie zachorowalności na gruźlicę [115].

Wyniki programów potwierdziły hipotezę, że bezdomni mogą być rezerwuarem patogenu gruźlicy i choroba ta może być przenoszona z tej grupy do całej populacji. Hipoteza została potwierdzona z punktu widzenia medycznego, bez konieczności stosowania modelowania matematycznego, o czym można przeczytać w [109] oraz [77]. Uzasadnione zatem było wyróżnienie w populacji województwa warmińsko-mazurskiego dwóch grup różniących się ryzykiem infekcji, przez co skupiono się na testowaniu konkretnej grupy pacjentów, zamiast całej populacji. Znaczenie wykrywania aktywnych przypadków wśród osób bezdomnych jest umotywowane medycznie, co pokazano w [12] na przykładzie z Wielkiej Brytanii – takie akcje wykrywania są mniej kosztowne niż późniejsze leczenie osób zainfekowanych. Wykrywanie gruźlicy może polegać na przykład na wykonaniu rentgenowskiego zdjęcia klatki piersiowej, co jest uważane za najskuteczniejszy sposób detekcji. Należy zwrócić uwagę, że miejscem, w którym występuje wysoka transmisja patogenu, są noclegownie dla bezdomnych, ponieważ spotykają się tam zarówno osoby bezdomne, jak i niebezdomne [34]. Gruźlica może oczywiście przenosić się w obrębie bezdomnych, niebezdomnych oraz pomiędzy tymi grupami.

Wyniki programów wykrywania gruźlicy oraz model opisujący dynamikę epidemii w tym przypadku zostały przedstawione w [101]. W niniejszej rozprawie przedstawiono dokładną analizę matematyczną opisanego tam modelu, następnie zaproponowano jego modyfikację. Dokonano również dyskretyzacji otrzymanego modelu ciągłego.

W standardowym podejściu w modelowaniu leczenia gruźlicy uwzględnia się wyrażenia, które obrazują przejście osobnika z grupy osób chorych do grupy osób zdrowych. W [22] fazę leczenia opisano poprzez dołączenie kolejnego równania na nową zmienną, która obrazuje kolejne stadium choroby – wyleczenie. Podobne podejście można znaleźć w [90], przy czym w tej pracy dodatkowo rozważa się zmienną, która reprezentuje zidentyfikowane osoby zakażone, czyli takie, które poddają się leczeniu. Tutaj autorzy uwzględniają też heterogeniczność populacji w grupie osób zdrowych i z ukrytą postacią choroby. Co ciekawe, wyróżnikiem niejednorodności nie jest stopień ryzyka, ale stopień świadomości na zachorowanie. W pracy [80] numerycznie pokazuje się wpływ diagnostyki, leczenia i edukacji zdrowotnej na dynamikę gruźlicy.

Uwzględnienie prewencji oraz kontroli choroby w modelu epidemii gruźlicy zostało przedstawione w [26]. Autorki do tego celu stosują narzędzia z teorii sterowania, gdzie sterowania są uwzględnione zarówno w wyrażeniach liniowych, jak i nieliniowych obrazujących zakażanie. Swoje rozważania autorki ilustrują na rzeczywistym przykładzie wystąpienia choroby w Korei Południowej. Nie uwzględniono tu jednak heterogeniczności populacji. Teoria sterowania jest również użyta w [99]. Sterowania reprezentują tu części pacjentów, którzy są leczeni. Tutaj również przyjmuje się jednorodność populacji. Heterogeniczność populacji (podział na dorosłych i dzieci) uwzględniono w [43], gdzie autorzy analizują trzy sterowania dotyczące odpowiednio prewencji wśród osób zdrowych, chemoprewencji wśród osób z ukrytą gruźlicą oraz leczenia wśród osób z aktywną postacią choroby. Przypadek niejednorodnej populacji jest brany pod uwagę również w [62] – autorki wyróżniają gruźlicę lekowrażliwą i lekooporną. Uwzględnia się tam dwa sterowania przy założeniu, że powinno się zredukować liczbę osób mogących zarażać innych oraz osób z rozwijającą się lekooporną gruźlicą.

Należy zaznaczyć, że opisywany w rozprawie przypadek gruźlicy powinno się traktować jako przykład ilustrujący teoretyczną analizę modeli epidemiologicznych. Wyniki przedstawione w niniejszej pracy można zastosować do badania rozprzestrzeniania się dowolnej choroby zakaźnej w dowolnej populacji niejednorodnej.

Hipoteza, zawartość i struktura rozprawy

Głównym celem niniejszej rozprawy jest zweryfikowanie hipotezy badawczej mówiącej o tym, że modele krzyżowe są konieczne do prawidłowego opisu epidemii w populacjach niejednorodnych. Zastosowanie oddzielnych modeli dla podpopulacji w populacjach niejednorodnych nie daje odpowiedzi na pytanie, czy epidemia będzie się rozprzestrzeniać, czy też nie – warunki dla oddzielnych modeli nie są wystarczające.

Ponadto zostanie również sprawdzona hipoteza, że w przypadku epidemii w populacji niejednorodnej (w rozprawie czynnikiem warunkującym niejednorodność jest stopień zachorowalności i zakażalności) może nastąpić transmisja choroby z jednej podpopulacji do całej populacji, co powoduje rozwój epidemii [83].

W znanych opracowaniach dotyczących modelowania krzyżowego dynamiki epidemii analizowane są w większosci takie sytuacje, gdzie zakłada się, że w poszczególnych podpopulacjach różniących się stopniem ryzyka zachorowalności (lub inną cechą determinującą heterogeniczność) parametry opisujące dane wielkości w różnych podpopulacjach mają te same wartości. Takie podejście można znaleźć na przykład w [11]. To założenie przyczynia się do tego, że dany model opisuje w rzeczywistości dynamikę epidemii w populacji jednorodnej. Przypadki, kiedy analogiczne parametry w różnych podpopulacjach różnią się wartościami, nie są rozważane z powodu złożoności obliczeń. W niniejszej rozprawie nie przyjmuje się powyższego założenia – zakładamy, że parametry obrazujące określoną wielkość w różnych podpopulacjach mają różne wartości. Co więcej, prezentujemy tu rezultaty, w których dane warunki (na przykład gwarantujące stabilność stanów stacjonarnych określonego układu) mają jawną postać. Według naszej wiedzy nie ma obecnie opracowań, w których takie wyniki w jawnej postaci byłyby prezentowane dla modeli dyskretnych.

Zwróćmy uwagę, że dzięki uniwersalnemu charakterowi prezentowanych w rozprawie modeli, otrzymane wyniki mogą być zastosowane nie tylko w modelowaniu chorób zakaźnych. Rezultaty mogą zostać użyte do obrazowania dynamiki różnych zjawisk w medycynie czy ekologii, na przykład konkurencji międzygatunkowej lub oddziaływania między komórkami.

W niniejszej rozprawie przedstawimy i dokonamy analizy zarówno modeli ciągłych, jak i dyskretnych. Struktura modeli dyskretnych została oparta na ich ciągłych odpowiednikach. Dyskretyzacja układów ciągłych skutkuje pojawieniem się kroku dyskretyzacji, przez co uzyskujemy kolejny parametr. To powoduje, że analiza układów dyskretnych, zwłaszcza w kontekście stabilności, jest bardziej skomplikowana niż analiza odpowiednich układów ciągłych. Należy mieć jednak na uwadze, że zasadność modelu możemy zweryfikować tylko poprzez obserwację wartości liczbowych określonych wielkości. Wielkości te są funkcjami dyskretnymi i w przypadku rozważanego w rozprawie przykładu epidemii gruźlicy stanowią one liczby osób zdrowych i zainfekowanych w podpopulacjach bezdomnych i niebezdomnych. W naszych modelach podpopulacje te odpowiadają podpopulacjom wysokiego i niskiego ryzyka. Wielkości te mają postać dyskretną. Podano je w rocznikach statystycznych, zatem za długość kroku dyskretyzacji można przyjąć rok. Z powodu dyskretnego charakteru danych uznaliśmy, że w naszych rozważaniach powinniśmy uwzględnić modele dyskretne.

W rozprawie przyjmujemy podejście, że po analizie każdego modelu ciągłego przedstawiamy i analizujemy odpowiednie modele dyskretne powstałe na skutek dwóch sposobów dyskretyzacji. Najpierw zastosujemy otwarty schemat Eulera. Schemat ten, pomimo swojej prostoty, pozwala na uzyskanie skomplikowanych zachowań układów, zwłaszcza w kontekście bifurkacji. Następnie przedstawimy dyskretyzację niestandardową. Wybór określonej formy dyskretyzacji zostanie omówiony w dalszej części rozprawy. Oprócz zbadania własności konkretnych modeli dyskretnych zajmiemy się również porównaniem obu metod dyskretyzacji i wskazaniem odpowiedniej do obrazowania dynamiki epidemii. Ponadto porównamy własności tych układów z własnościami odpowiedniego modelu ciągłego. Takiego całościowego podejścia do analizy dynamiki epidemii nie spotyka się w literaturze.

Rozprawa nie ma charakteru wyłącznie aplikacyjnego. W ujęciu teoretycznym prezentowane tu zagadnienia mogą służyć do badania dynamiki symetrycznych układów różniczkowych lub różnicowych o różnych parametrach, ponadto taką dynamikę można porównywać z dynamiką pojedynczego, odseparowanego, układu. Zastosowanie mogą mieć zwłaszcza rezultaty dotyczące układów dyskretnych, które na ogół są analizowane w znacznie mniejszym zakresie niż analogiczne układy ciągłe.

W rozprawie zawarto wyniki symulacji numerycznych, których celem było potwierdzenie przydatności matematycznej analizy w przypadkach rzeczywistych. Jako dane rzeczywiste posłużyły liczebności osób zdrowych i zainfekowanych w podpopulacjach osób bezdomnych i niebezdomnnych w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018. Dane te zostały użyte w celu obserwacji dynamiki gruźlicy w kontekście analizy wpływu programów wykrywania wspomnianych we wcześniejszej części wstępu.

Symulacje zostały wykonane w środowisku programistycznym Matlab, do którego dostęp doktorantom przyznaje Uniwersytet Warszawski. Jako dane początkowe do symulacji użyto liczebności poszczególnych grup osób w roku 2001. W przypadku symulowania modeli ciągłych skorzystano z wbudowanej funkcji *ode*45, natomiast w przypadku modeli dyskretnych zaimplementowano schematy dyskretyzacji: otwarty Eulera oraz niestandardowy, który będzie omówiony w dalszej części rozprawy.

Dane demograficzne użyte w symulacjach zostały wzięte z roczników statystycznych [25]. Liczebności osób bezdomnych zostały dostarczone przez Regionalny Ośrodek Polityki Społecznej Urzędu Marszałkowskiego Województwa Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie [81]. Dane epidemiologiczne użyte do analizy zostały zanonimizowane przez Samodzielny Publiczny Zespół Gruźlicy i Chorób Płuc w Olsztynie. Wszystkie dane są wolnego dostępu.

Występujące w modelach parametry dla obu podpopulacji, które dotyczą rozrodczości netto, ozdrowienia, napływu osobników do podpopulacji oraz śmiertelności naturalnej i z powodu gruźlicy zostały zaczerpnięte z [101]. W modelach pojawiają się również parametry, które odzwierciedlają transmisję choroby wewnątrz podpulacji lub między różnymi podpulacjami. Należy zwrócić uwagę, że z medycznego punktu widzenia nie istnieje formalna definicja tych parametrów. Konieczne jest jednak uwzględnienie tych współczynników, ponieważ oczywiste jest, że nie każdy kontakt osoby zdrowej i zainfekowanej kończy się zakażeniem. Najczęściej przyjmuje się, że parametry te mają stałą, określoną wartość.

Współczynniki transmisji oszacowano korzystając z wbudowanej w środowisku programistycznym Matlab funkcji *lsqcurvefit*. Funkcja ta korzysta z algorytmu Gaussa-Newtona [70]. Ideą tego algorytmu jest znalezienie najmniejszej sumy kwadratów różnic między wartościami symulowanymi a odpowiadającymi im wartościami rzeczywistymi. Funkcja *lsqcurvefit* zwraca wartości estymowanych parametrów oraz sumę kwadratów różnic. W naszym przypadku zwracanymi wartościami są współczynniki transmisji oraz sumy kwadratów różnic między symulowanymi a rzeczywistymi liczebnościami osób zdrowych niebezdomnych dla poszczególnych lat. Funkcja *lsqcurvefit* wymaga podania początkowej wartości estymowanych współczynników, dla których wykonywane są obliczenia. Może wystąpić sytuacja, kiedy liczona suma kwadratów jest najmniejsza tylko w ograniczonym zakresie wartości współczynników transmisji. Aby zapobiec takiemu przypadkowi, dobierano początkowe wartości współczynników transmisji z różnych zakresów.

Rozprawa składa się z czterech głównych rozdziałów.

W pierwszym rozdziale wprowadzono i przeanalizowano dwa ciągłe modele dynamiki epidemii w populacji jednorodnej. Pierwszy model zakłada, że tempo przyrostu populacji jest wprost proporcjonalne do jej liczebności. Zaprezentowano szczegółową analizę tego modelu i zwrócono uwagę na jego maltuzjański charakter. Drugi model zakłada stały napływ osobników do populacji, zarówno spowodowany przyrostem naturalnym, jak i migracją. Takie założenie powoduje, że w zmodyfikowanym układzie nie występują własności maltuzjańskie. Podczas analizy matematycznej obu modeli główny nacisk położono na analizę stabilności, także globalnej, stanów stacjonarnych.

Drugi rozdział zawiera konstrukcję i analizę modeli dyskretnych, których ciągłym odpowiednikiem jest model z poprzedniego rozdziału ze stałym napływem. Te dyskretne układy są zbudowane w oparciu o otwarty schemat Eulera oraz niestandardową metodę dyskretyzacji. Podobnie jak w pierwszym rozdziale, skupiono się na analizie stabilności. Otrzymane wyniki przedstawiono w kontekście kroku dyskretyzacji, który pojawia się podczas konstrukcji układów dyskretnych. W przypadku układu z otwartym schematem Eulera omówiono również możliwość wystąpienia bifurkacji podwojenia okresu oraz Neimarka-Sackera dla endemicznego stanu stacjonarnego. Dla układu z dyskretyzacją niestandardową analiza tego zagadnienia jest skomplikowana, dlatego dokonano wyłącznie symulacji numerycznych sugerujących wystąpienie bifurkacji Neimarka-Sackera.

Trzeci i czwarty rozdział dotyczą dynamiki epidemii w populacji niejednorodnej. W trzecim rozdziale przedstawiono dwa modele, które oparte są na bazowych modelach omówionych w rozdziale pierwszym. Pierwszy z tych modeli, ze zmiennym napływem do obu podpopulacji, był wstępnie omówiony w [101]. Podkreślono jego maltuzjański charakter. Rozpatrzono ten model w przypadku, kiedy nie stosujemy aktywnego wykrywania choroby wśród osób z grupy wysokiego ryzyka oraz kiedy to wykrywanie jest uwzględniane. Drugi model, nieposiadający już własności maltuzjańskich, dotyczy przypadku stałego napływu do podpopulacji. Dokonano matematycznej analizy obu tych modeli. W przypadku modelu ze stałym napływem przedyskutowano globalną stabilność stanów stacjonarnych oraz możliwość wystąpienia bifurkacji nadkrytycznej w kontekście współczynnika odnowienia $\mathcal{R}_0$.

W czwartym rozdziale skonstruowano dwa modele dyskretne, które oparto na ciągłym modelu ze stałym napływem z poprzedniego rozdziału. W pierwszym modelu zastosowano otwarty schemat Eulera i dokonano jego matematycznej analizy. Drugi model oparto na dyskretyzacji niestandardowej. Z powodu skomplikowanej analizy matematycznej, postanowiono uprościć ten model. Przyjęto, że nie występuje transmisja choroby z grupy niskiego ryzyka do grupy wysokiego ryzyka, co jest zasadne biologicznie, a jednocześnie umożliwiło dokonanie pełnej analizy matematycznej. Podobnie jak w rozdziale drugim, wyniki z tego rozdziału formułowano podkreślając znaczenie kroku dyskretyzacji.

Badania nad tematyką rozprawy przyczyniły się do opublikowania prac dotyczących modelowania dynamiki gruźlicy w populacjach niejednorodnych, w których autor rozprawy był współautorem. Tymi artykułami są [27], [28], [29], [30] oraz [16]. Wyniki z rozdziałów pierwszego i trzeciego są zasadniczo w pełni opublikowane odpowiednio w [29] i [16]. W rozprawie uwzględniono dodatkowo analizę globalnej stabilności dla modelu ze stałym napływem. Część rezultatów z rozdziału drugiego jest zawarta w [30] – przedstawiono tam wstępną analizę modeli dyskretnych dla populacji jednorodnej i niejednorodnej z użyciem otwartego schematu Eulera. W [28] podano warunki zajścia bifurkacji podwojenia okresu w modelu dla populacji jednorodnej z użyciem otwartego schematu Eulera. Analiza modelu dla populacji jednorodnej z użyciem dyskretyzacji niestandardowej została przedstawiona w [27].

Rozdział 1

Modele ciągłe dla populacji jednorodnej

Omawiane w rozprawie modele SIS dynamiki rozprzestrzeniania się choroby zakaźnej w populacji niejednorodnej oparto na komponentach, którymi są dwuwymiarowe modele opisujące dynamikę epidemii w populacji jednorodnej. Z tego powodu najpierw zajmiemy się analizą takich dwuwymiarowych układów. Przedstawimy w tym rozdziale dwa ciągłe modele SIS. Pierwszy odzwierciedla stały napływ do populacji, drugi – zmienny. Oba modele w różny sposób obrazują procesy narodzin i śmierci oraz migrację.

1.1 Model ze zmiennym napływem

W tym podrozdziale przedstawimy model, gdzie występuje parametr uwzględniający jednocześnie procesy narodzin i śmierci naturalnej oraz migracji w populacji. Zakładamy, że te procesy zachodzą w tempie wprost proporcjonalnym do liczebności populacji.

Rozważamy tutaj populację, której zagęszczenie (czyli liczba osobników przypadająca na jednostkę powierzchni) w momencie t wynosi $N(t)$. Przyjęcie oznaczenia $N(t)$ jako liczebności prowadzi do nierealistycznego warunku, że $N(t) \in \mathbb{N}$ dla każdego t. Będziemy jednak utożsamiać $N(t)$ z liczebnością osobników w czasie t, ponieważ powierzchnia zajmowana przez populację jest stała. Z matematycznego punktu widzenia założenie to nie wpływa na dalszą analizę i nie stanowi ograniczenia.

W danej populacji wyróżniamy dwie grupy osób:

- zdrowych, podatnych na zakażenie – ich liczebność w momencie t oznaczamy jako $S(t)$,
- chorych, zainfekowanych – ich liczebność w momencie t oznaczamy jako $I(t)$.

W modelach SIS zakłada się, że osoba zainfekowana jest jednocześnie osobą roznoszącą zakażenie. Oczywiście zachodzi $N(t) = S(t) + I(t)$. Jeśli to nie spowoduje dwuznaczności, będziemy pisać S, I i N zamiast odpowiednio $S(t)$, $I(t)$ i $N(t)$.

Przyjmujemy, że na liczebności obu tych grup mają wpływ:

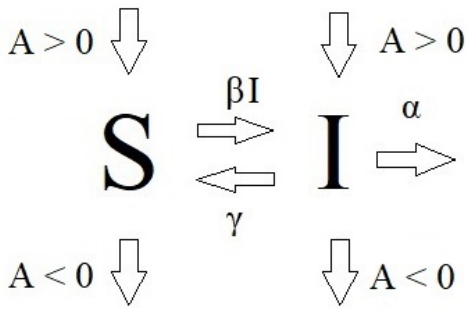
- śmiertelność z powodu choroby zakaźnej – liczba osób zakażonych umierających z powodu choroby jest proporcjonalna do liczby tych osób,
- leczenie zakażonych – liczba ozdrowieńców jest proporcjonalna do liczby osób chorych,
- przyrost populacji netto, czyli uwzględniający narodziny, śmierć naturalną oraz migrację – w krótkim horyzoncie czasowym możemy założyć, że przyrost ten jest proporcjonalny do liczebności populacji,
- transmisja choroby.

Wspomiane procesy będą odzwierciedlone poprzez parametry:

- β – zdefiniowany jako współczynnik transmisji choroby z grupy osób zakażonych do grupy osób podatnych,
- α – opisujący śmiertelność związaną z chorobą,
- γ – będący współczynnikiem ozdrowienia,

- A – odzwierciedlający przyrost naturalny populacji oraz migrację.

Schemat transmisji choroby w populacji jednorodnej ze wspomnianymi założeniami został przedstawiony na rysunku 1.1.



Rysunek 1.1: Schemat transmisji choroby w populacji jednorodnej.

Przy powyższych założeniach dynamikę epidemii w populacji jednorodnej możemy opisać za pomocą następującego układu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\beta f(S,I) + \gamma I + AS, \\ \dot{I} &= f(S,I) - (\gamma + \alpha - A)I. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Zakładamy, że występujące w układzie parametry mają stałą wartość oraz że są, oprócz A, dodatnie. Współczynnik A odzwierciedla demograficzne zmiany w populacji, zatem może być dodatni, ujemny lub nawet równać się zeru.

Funkcja $f(S,I)$ opisuje transmisję choroby z grupy osób zdrowych do grupy osób chorych. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ jest co najmniej klasy $\mathbf{C}^1$, gdzie $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ (w niektórych przypadkach, omawianych później, takie założenie jest niepoprawne i wtedy dodatkowo zakładamy, że $0 \notin \mathbb{R}_+$). W ogólności funkcja transmisji f jest rosnąca ze względu na obie zmienne oraz ma ciągłe pochodne cząstkowe. Ponadto przyjmiemy, że zachodzi $f(0,I) = f(S,0) = 0$ dla dowolnych S, $I \in \mathbb{R}_+$, natomiast podczas analizy dodatniego stanu stacjonarnego, który będzie zdefiniowany i omówiony dalej, założymy, że $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0$.

Jako funkcję transmisji choroby f zastosujemy dwa najczęściej stosowane typy funkcji:

- $f(S,I) = f_1(S,I) = \frac{SI}{S+I}$ – standardowa funkcja zapadalności,
- $f(S,I) = f_2(S,I) = SI$ – funkcja oparta na prawie działania mas.

Należy zauważyć, że funkcja f_2 jest klasy $\mathbf{C}^1$ na całej przestrzeni $\mathbb{R}_+^2$, funkcja f_1 jest zaś dobrze określona tylko dla co najmniej jednej dodatniej współrzędnej S lub I. Z tego powodu istnieje potrzeba rozszerzenia dziedziny funkcji f_1 w taki sposób, żeby otrzymać $f(0,0) = 0$. Dzięki takiemu założeniu można analizować naturalnie występujący w omawianym kontekście zerowy stan stacjonarny. Jest to stan, w którym liczebność każdej z podpopulacji wynosi zero. Ponieważ zachodzą nierówności $f_1(S,I) \leqslant S$ i $f_1(S,I) \leqslant I$, łatwo pokazać, że tak rozszerzona funkcja spełnia warunek Lipschitza.

Aby uprościć zapis układu (1.1), zredukujmy liczbę występujących w nim parametrów. W tym celu wprowadźmy najpierw nową niezależną zmienną $\tau = \gamma t$, dla której mamy

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\tau} = S', \qquad \frac{1}{\gamma}\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\tau} = I'.$$

Możemy wówczas zapisać układ (1.1) w postaci

$$S' = -\beta f(S,I) + I + AS, \tag{1.2a}$$
$$I' = \beta f(S,I) - (1 + \alpha - A)I, \tag{1.2b}$$

gdzie parametry są teraz przeskalowane przez γ. Zauważmy, że zmienne S, I stały się funkcjami zmiennej τ.

Dalsze skalowanie zależy od postaci funkcji transmisji f. Dla funkcji f_2 mnożymy równania (1.2a) i (1.2b) przez β. W przypadku f_1 mnożymy równania przez $\sqrt{\beta}$. Otrzymujemy

$$x' = -f(x,y) + y + Ax, \tag{1.3a}$$
$$y' = f(x,y) - (1+\alpha-A)y, \tag{1.3b}$$

gdzie $x = aS$, $y = aI$ oraz $a = \beta$ dla f_2 lub $a = \sqrt{\beta}$ dla f_1. Ponadto oznaczmy $w(\tau) = aN(\tau)$. Oczywiście zachodzi

$$w = x + y.$$

Zauważmy, że po skalowaniu parametry α oraz A nie ulegają zmianie, w szczególności A może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste.

1.1.1 Własności modelu (1.3)

Wprowadźmy oznaczenia

$$k := 1 + \alpha - A, \qquad \kappa := \frac{\alpha}{A} - 1 \text{ dla } A \neq 0.$$

Zauważmy, że zachodzi równość $k = 1 + A\kappa$. Ponadto, jeśli $A < 0$, to zachodzą nierówności $\kappa < 0$ oraz $k > 1 > 0$. Jeżeli natomiast $\kappa \geqslant 0$, to wówczas otrzymujemy $\alpha \geqslant A > 0$ oraz $k \geqslant 0$.

Teraz przyjrzymy się własnościom układu (1.3).

Twierdzenie 1.1. *Dla dowolnego nieujemnego warunku początkowego rozwiązania układu* (1.3) *są jednoznaczne, nieujemne i istnieją dla wszystkich* $\tau > 0$.

Dowód. Lokalne istnienie oraz jednoznaczność rozwiązań układu równań (1.3) wynikają z założeń dla funkcji transmisji f. Dzięki tym własnościom, na mocy twierdzenia Picarda-Lindelöfa [93], prawa strona układu (1.3) spełnia lokalny warunek Lipschitza, dzięki któremu uzyskujemy pożądane własności rozwiązań.

Niech teraz $x(0), y(0) > 0$. Jeśli istnieje punkt $\tilde{\tau} > 0$ taki, że $x(\tilde{\tau}) = 0$, to dla takiego pierwszego punktu mamy

$$x'(\tilde{\tau}) = y(\tilde{\tau}) \geq 0.$$

Zauważmy jednak, że gdyby $x(\tilde{\tau}) = y(\tilde{\tau}) = 0$, to dostalibyśmy sprzeczność z jednoznacznością rozwiązań, gdyż z założenia o funkcji f mamy rozwiązanie $(x,y) \equiv (0,0)$. Zatem $y(\tilde{\tau}) > 0$. Oznacza to, że x jest odpychany od 0. Stwierdzamy zatem, że $x(\tau)$ jest nieujemne dla $\tau > 0$.

Teraz zauważmy, że dla równania (1.3b) mamy

$$y' \geqslant -ky,$$

z twierdzenia Czapłygina-Perrona o nierównościach różniczkowych [13] zaś uzyskujemy

$$y(\tau) \geqslant y(0)\,\mathrm{e}^{-k\tau} \geq 0 \quad \text{dla} \quad y(0) \geq 0.$$

Korzystając z twierdzenia o przedłużaniu [93] rozwiązania układu (1.3) przy założeniu nieujemności warunku początkowego można przedłużyć na dowolny przedział $[0, \widehat{t})$, $\widehat{t} > 0$.

Pokażemy, że rozwiązania istnieją dla każdego $\tau > 0$. Jeżeli dodamy do siebie równania układu (1.3), to otrzymamy

$$x' + y' = A(x+y) - \alpha y, \quad \text{inaczej} \quad w' = Aw - \alpha y.$$

Jeśli zachodzi $A \leqslant 0$, to w maleje i stąd mamy, że $x(\tau)$ oraz $y(\tau)$ są ograniczone z góry przez $w(0)$, ponieważ zachodzi

$$x(\tau),\ y(\tau) \leqslant w(\tau) \leqslant w(0).$$

Jeżeli mamy $A > 0$, to $w' \leqslant Aw$ i przyrost zmiennych jest co najwyżej wykładniczy, to znaczy

$$x(\tau),\ y(\tau) \leqslant w(\tau) \leqslant w(0)\,\mathrm{e}^{A\tau}$$

i na mocy twierdzenia o przedłużaniu dostajemy określoność zmiennych $x(\tau)$ i $y(\tau)$ dla każdego $\tau > 0$. □

Teraz omówimy przypadki, dla których możliwy jest nieograniczony przyrost lub wymarcie populacji opisanej przez model (1.3).

Stwierdzenie 1.2. *Załóżmy, że warunek początkowy dla modelu* (1.3) *jest dodatni. Jeśli zachodzi* $A > \alpha > 0$*, to model ten obrazuje nieograniczony przyrost populacji. Jeżeli* $A < 0$*, to obserwujemy ekstynkcję populacji.*

Dowód. • Załóżmy najpierw, że $A > \alpha > 0$. Wówczas mamy

$$w' = Aw - \alpha y = Ax + (A - \alpha)y > 0, \tag{1.4}$$

jeśli spełnione są warunki $x(0) > 0$ i $y(0) > 0$. Stwierdzamy zatem, że funkcja $w(\tau)$ rośnie i ma granicę $\lim\limits_{\tau\to\infty} w(\tau) = g > 0$. Załóżmy, że $g < \infty$. Wówczas zachodzą $y(\tau) \leqslant w(\tau) < g + \varepsilon$ oraz $w(\tau) > g - \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i wystarczająco dużego $\tau > 0$. Z równania (1.4) uzyskujemy więc

$$w' = Aw - \alpha y > A(g - \varepsilon) - \alpha(g + \varepsilon) = (A - \alpha)g - \varepsilon(A + \alpha) > 0$$

dla $\varepsilon < g\frac{A-\alpha}{A+\alpha}$. Biorąc $\widehat{\varepsilon} = \frac{g}{2} \cdot \frac{A-\alpha}{A+\alpha} > 0$ dostajemy

$$w'(\tau) > (A - \alpha)g - \widehat{\varepsilon}(A + \alpha) = (A - \alpha)g - \frac{g}{2}(A - \alpha) = \tilde{\varepsilon},$$

gdzie $\tilde{\varepsilon} = \frac{g}{2}(A - \alpha)$. Z tego mamy, że dla $\tau > T$ (gdzie $T = T(\varepsilon)$ jest momentem z definicji granicy g) z twierdzenia Czapłygina-Perrona [13] wynika, że

$$w(\tau) > w(T) + \tilde{\varepsilon}(\tau - T) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \infty,$$

co jest sprzeczne z założeniem o ograniczoności g. To oznacza, że $\lim\limits_{\tau\to\infty} w(\tau) = \infty$ i obserwujemy nieograniczony przyrost zmiennej w. Stwierdzamy więc, że w takim przypadku liczebność populacji rośnie nieograniczenie.

• Teraz załóżmy, że $A < 0$. Wówczas zachodzi

$$w' = Aw - \alpha y < 0,$$

co oznacza, że w maleje. Co więcej, ponieważ spełnione jest $w' \leqslant Aw$, to dostajemy

$$0 \leqslant w(\tau) \leqslant w(0)\,\mathrm{e}^{A\tau} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0. \tag{1.5}$$

Stąd wynika, że $\lim\limits_{\tau\to\infty} w(\tau) \to 0$, czyli populacja wymiera. □

Należy zwrócić uwagę, że jeśli $y \equiv 0$, to wówczas otrzymujemy równanie

$$w' = Aw,$$

które jest równaniem Malthusa. Z analizy zaprezentowanej powyżej wynika, że dla $A > \alpha > 0$ lub dla $A < 0$ w układzie (1.3) obserwujemy dynamikę maltuzjańską.

1.1.2 Analiza stabilności stanów stacjonarnych układu (1.3)

W tym rozdziale zbadamy warunki istnienia i stabilności stanów stacjonarnych układu (1.3).

Najpierw przytoczmy odpowiednie pojęcia [63]. Rozważamy układ:

$$\dot{w} = \omega(w), \tag{1.6}$$

gdzie $w = w(t) = (w_1(t), \ldots, w_n(t))^T$ (symbol ^{T} oznacza transpozycję) i $\omega(w) = (\omega_1(w), \ldots, \omega_n(w))^T$. Będziemy również pisać $w = w(t; t_0, w_0)$. Niech $w(t_0) = w_0$ oznacza warunek początkowy układu (1.6). Zakładamy istnienie i jednoznaczność rozwiązań układu (1.6) dla $t \geq t_0$. Ponadto niech $\bar{w}$ oznacza stan stacjonarny układu (1.6).

Definicja 1.3. *Stan stacjonarny $\bar{w}$ układu* (1.6) *nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa, jeśli dla dowolnych $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ taka że*

$$||\bar{w} - w_0|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||\bar{w} - w(t; t_0, w_0)|| < \varepsilon.$$

Definicja 1.4. *Stan stacjonarny $\bar{w}$ układu* (1.6) *nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeśli jest stabilny w sensie Lapunowa oraz jeśli istnieje $\bar{\delta} = \bar{\delta}(t_0) > 0$ taka że*

$$||\bar{w} - w_0|| < \bar{\delta} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} ||\bar{w} - w(t; t_0, w_0)|| = 0.$$

Definicja 1.5. *Niech W_j oznacza zbiór wartości przyjmowanych przez w_j, gdzie $j = 1, ..., n$. Wówczas $W = (W_1, \ldots, W_n)^T$ nazywamy przestrzenią stanów.*

Definicja 1.6. *Zbiór wszystkich punktów $w_0 \in W$ dla których*

$$\lim_{t\to\infty} ||\bar{w} - w(t; t_0, w_0)|| = 0$$

dla pewnego $t_0 \geq 0$ nazywamy zbiorem przyciągania stanu stacjonarnego $\bar{w}$.

Zbiór zdefiniowany w definicji 1.6 oznaczmy przez $W_{\bar{w}}$.

Definicja 1.7. *Jeżeli stan stacjonarny układu* (1.6) *jest asymptotycznie stabilny i $W_{\bar{w}} = W$, to taki stan stacjonarny nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym.*

Sformułujemy twierdzenie pozwalające określić globalną asymptotyczną stabilność danego stanu stacjonarnego. Najpierw wprowadzimy definicje pomocnicze. Rozważamy pewien stan stacjonarny $\bar{w}$ układu (1.6).

Definicja 1.8. *Funkcję $V : W \to \mathbb{R}$ nazywamy*

- *dodatnio określoną, gdy $V(\bar{w}) = 0$ i dla każdego $w \neq \bar{w}$ zachodzi $V(w) > 0$;*
- *ujemnie określoną, gdy $V(\bar{w}) = 0$ i dla każdego $w \neq \bar{w}$ zachodzi $V(w) < 0$;*
- *ujemnie półokreśloną, gdy $V(\bar{w}) = 0$ i dla każdego $w \neq \bar{w}$ mamy $V(w) \leq 0$.*

Niech $V : W \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły (to znaczy ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu). Pochodna funkcji V względem czasu wynosi

$$\dot{V}(w(t)) = \nabla V(w(t)) \cdot \dot{w}(t) = \nabla V(w(t)) \cdot \omega(w(t)),$$

gdzie

$$\nabla V(w) = \left(\frac{\partial V}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial w_n} \right)^T.$$

Definicja 1.9. *Funkcję $\dot{V} : W \to \mathbb{R}$ nazywamy pochodną funkcji w wzdłuż trajektorii układu* (1.6) *lub pochodną systemową funkcji V.*

W celu określenia globalnej asymptotycznej stabilności danego stanu stacjonarnego przydatne jest poniższe twierdzenie. Jego dowód można znaleźć w [63].

Twierdzenie 1.10. *Załóżmy, że rozwiązania układu* (1.6) *są ograniczone. Niech istnieje funkcja $V : W \to \mathbb{R}$, różniczkowalna w sposób ciągły, dodatnio określona w W. Jeśli jej pochodna systemowa $\dot{V} : W \to \mathbb{R}$ jest ujemnie półokreślona w W, to stan stacjonarny $\bar{w}$ układu* (1.6) *jest globalnie stabilny. Jeżeli pochodna systemowa $\dot{V} : W \to \mathbb{R}$ jest ujemnie określona w W, to stan stacjonarny $\bar{w}$ układu* (1.6) *jest globalnie asymptotycznie stabilny.*

Przejdźmy do wskazania stanów stacjonarnych układu (1.3). Na początku załóżmy, że $A \neq 0$. Przypadek, gdy zachodzi równość $A = 0$, zostanie omówiony później.

Zauważmy, że z równań (1.3) uzyskujemy zależność spełnianą przez każdy stan stacjonarny

$$0 = Aw - \alpha y,$$

skąd mamy

$$x = \frac{(\alpha - A)y}{A} = \kappa y \quad \text{dla} \quad A \neq 0. \tag{1.7}$$

Widzimy, że zerowy stan stacjonarny, oznaczony przez $E_0 := (0,0)$, istnieje zawsze, niezależnie od wartości parametrów układu oraz od postaci funkcji transmisji f. Stan E_0 jest to stan, w którym nie ma osobników zarówno zainfekowanych, jak i zdrowych.

Niech (x,y) będzie niezerowym stanem stacjonarnym takim, że $x > 0$. Jest to taki stan, kiedy w populacji występuje co najmniej jeden zdrowy osobnik. O występowaniu tego stanu mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.11. *Niech $A \neq 0$. Wówczas w układzie (1.1) dla $f = f_1$ nie istnieje niezerowy stan stacjonarny, natomiast dla $f = f_2$ układ ma dodatni stan stacjonarny $\left(k, \frac{k}{\kappa}\right)$ istniejący dla $\kappa > 0$.*

Dowód. Na podstawie równości (1.7) stwierdzamy, że warunek $\kappa < 0$ (to znaczy $A < 0$ lub $A > \alpha$) implikuje nierówność $x \cdot y < 0$, która przeczy nieujemności zmiennych x i y. Jeśli założymy natomiast, że $\kappa = 0$ (inaczej $A = \alpha$), to wówczas mamy $x = 0$, co daje $y = 0$. Ponownie uzyskujemy zerowy stan stacjonarny.

Przejdziemy teraz do przypadku $\kappa > 0$. Równanie (1.3b) ma wówczas postać

$$-f(x,y) + y + A\kappa y = 0. \tag{1.8}$$

To oznacza, że dodatni stan stacjonarny $E_e := (x^*, y^*)$, gdzie x^* i y^* spełniają zależności $\frac{f(x^*,y^*)}{y^*} = 1 + A\kappa = k$ oraz $x^* = \kappa y^*$, istnieje tylko wtedy, gdy funkcja transmisji f spełnia warunek $\sup \frac{f(x,y)}{y} > k$. Ponieważ f jest funkcją rosnącą ze względu na zmienną x oraz zachodzi $f(0,y) = 0$, to warunek ten może być zapisany jako:

$$\exists\ y > 0 \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x,y)}{y} > k.$$

Zauważmy, że w przypadku funkcji f_1 mamy $f_1(x,y) = \frac{xy}{x+y} < y$ dla dowolnego $y > 0$, podczas gdy $k > 1$ dla $\kappa > 0$. To oznacza, że nie istnieje dodatni stan stacjonarny dla takiej postaci funkcji f, natomiast w przypadku funkcji $f_2(x,y) = xy$ dostajemy $x^* = k$ oraz $y^* = \frac{k}{\kappa}$. □

Dodatni stan stacjonarny nazywamy również endemicznym – czyli takim, w którym występują zarówno osobniki zdrowe, jak i chore.

Teraz sprawdźmy warunki, dla których zachodzi stabilność poszczególnych stanów stacjonarnych układu (1.3). Przypomnijmy, że ogólna funkcja f jest klasy $\mathbf{C}^1$ i ma zerowe pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$. Pozwala nam to zastosować do obliczeń macierz Jacobiego. Macierz ta dla układu (1.3), oznaczona przez M_J, ma postać

$$M_J(x,y) = \begin{pmatrix} A - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & 1 - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - k \end{pmatrix}.$$

Rozważmy najpierw stan stacjonarny E_0. Na podstawie obliczeń można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 1.12. *Stan stacjonarny wolny od epidemii E_0 układu (1.3) jest globalnie stabilny dla $A < 0$ i niestabilny dla $A > 0$.*

Dowód. Macierz Jacobiego dla stanu E_0 można zapisać jako

$$M_J(E_0) = \begin{pmatrix} A & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Wartości własne tej macierzy wynoszą $\lambda_1 = A$ oraz $\lambda_2 = -k$. Wnioskujemy zatem, że jeśli $A > 0$, to E_0 jest niestabilny, jeśli zaś $A < 0$, to E_0 jest lokalnie stabilny. Ponadto z nierówności (1.5) wynika, że stan ten jest również stabilny globalnie.

Łatwo sprawdzić, że funkcja f_1 nie jest różniczkowalna w $(0,0)$. Spójrzmy jednak na równanie (1.3a) w przypadku gdy $f = f_1$. Mamy wówczas

$$x' = -\frac{xy}{x+y} + y + Ax = \frac{y^2}{x+y} + Ax > Ax,$$

i kiedy tylko $A > 0$, to E_0 jest odpychane od punktu $(0,0)$. □

Udowodniliśmy zatem, że zerowy stan stacjonarny E_0 jest globalnie stabilny dla $A < 0$. Jeśli $A > 0$, to ten stan traci stabilność. Te własności są zachowane niezależnie od wyboru funkcji transmisji f.

Teraz rozważmy stan E_e (istniejący dla $A \in (0, \alpha)$, inaczej $\kappa > 0$). Przypomnijmy, że stan ten istnieje tylko dla funkcji f_2, natomiast nie istnieje dla f_1. Na podstawie analizy stabilności tego stanu stwierdzamy, co następujące:

Stwierdzenie 1.13. *Załóżmy, że $\kappa > 0$ oraz $f = f_2$. Wówczas endemiczny stan stacjonarny E_e układu (1.3) jest lokalnie stabilny dla $A > 0$ i niestabilny dla $A < 0$.*

Dowód. Dla stanu E_e mamy macierz Jacobiego:

$$M_J(E_e) = \begin{pmatrix} A - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*)} & 1 - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x^*,y^*)} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*)} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x^*,y^*)} - k \end{pmatrix}.$$

Warunkami stabilności stanu E_e są nierówności:

(a) $\operatorname{tr} M_J(E_e) < 0$,

(b) $\det M_J(E_e) > 0$.

Sprawdźmy warunki (a)–(b) dla funkcji f_2. Macierz Jacobiego $M_J(E_e)$ ma wówczas postać

$$\begin{pmatrix} -y^* + A & 1 - x^* \\ y^* & x^* - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\kappa} + A & 1 - k \\ \frac{k}{\kappa} & 0 \end{pmatrix}.$$

Stwierdzamy, że

$$\operatorname{tr} M_J(E_e) = -y^* + A + x^* - k = -\frac{k}{\kappa} + A + k - k = -\frac{1 + A\kappa}{\kappa} + A = -\frac{1}{\kappa} < 0,$$

zatem warunek (a) jest zawsze spełniony, o ile $\kappa > 0$. Ponadto

$$\det M_J(E_e) = (-y^* + A)(x^* - k) - (1 - x^*)y^* = kA > 0,$$

stąd zachodzi warunek (b), jeśli $A > 0$. Dla $A < 0$ warunek (b) jest niespełniony, więc wówczas stan E_e jest niestabilny. □

W celu podsumowania dotychczasowych rozważań zilustrujmy zachowanie układu zarówno dla $f = f_1$, jak i $f = f_2$. Przykładowe portrety fazowe dla $f = f_1$ oraz ujemnego i dodatniego A przedstawiono odpowiednio na rysunkach 1.2 i 1.3. Na rysunku 1.4 pokazano portrety fazowe dla $f = f_2$ i różnych znaków A.

1.1.3 Przypadek $A = 0$

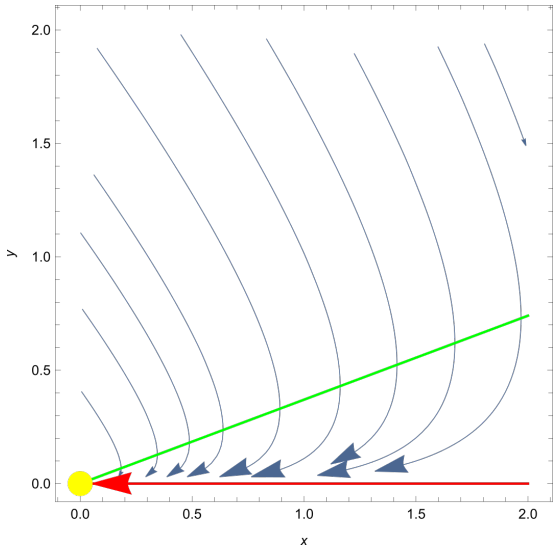
Teraz omówimy stabilność układu (1.3) dla $A = 0$. To odzwierciedla sytuację, gdy rozmiar populacji jest stały. Układ (1.3) ma wówczas postać

$$x' = -f(x, y) + y, \tag{1.9a}$$
$$y' = f(x, y) - (1 + \alpha)y, \tag{1.9b}$$

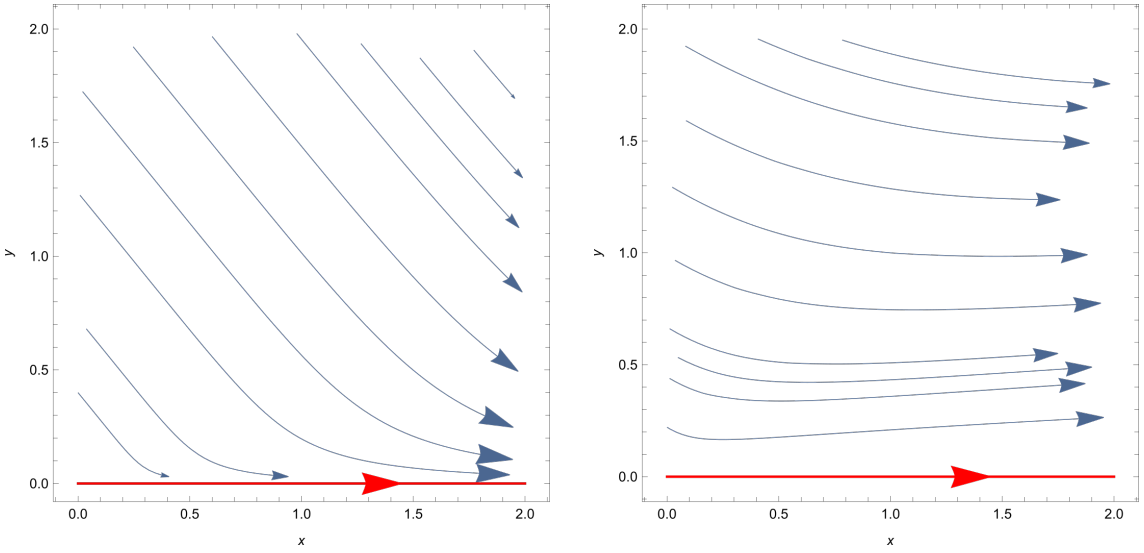
gdzie $f = f_1$ lub $f = f_2$. Możemy stwierdzić, że w układzie (1.9) nie ma dodatniego stanu stacjonarnego, występuje zaś rodzina stanów stacjonarnych wolnych od epidemii $E_a := (x_a, 0)$, gdzie $x_a \in \mathbb{R}_+$ – są to więc takie stany, w których nie ma osobników zakażonych. Zauważmy, że stan E_0 stanowi szczególny przypadek stanu E_a.

Przejdźmy do omówienia stabilności stanów postaci E_a. Zauważmy, że stany te nie są izolowane, zatem do badania stabilności nie można zastosować twierdzenia o linearyzacji. W celu zbadania stabilności przeanalizujemy portret fazowy układu (1.9).

Zacznijmy od przypadku $f = f_1$. Dostajemy twierdzenie:



Rysunek 1.2: Portret fazowy rozwiązań układu (1.3) dla $f = f_1$ i dla $A < 0$. Izoklinę zerową dla zmiennej x zaznaczono na zielono, izoklina zerowa dla zmiennej y jest czerwona. Stan stacjonarny zaznaczono na żółto. Przyjęto wartości parametrów $\alpha = 0,3$ oraz $A = -0,1$.

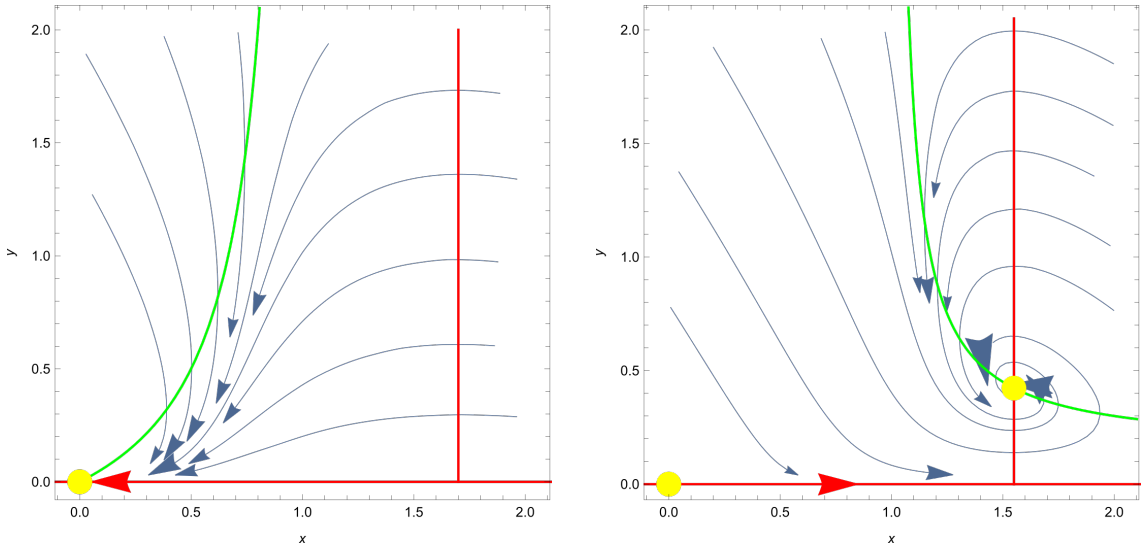


(a) (b)

Rysunek 1.3: Portrety fazowe rozwiązań układu (1.3) dla $f = f_1$ i $A > 0$. Izoklinę zerową dla zmiennej y zaznaczono na czerwono. W symulacjach przyjęto wartości parametrów $\alpha = 0,3$ oraz $A = 0,1$ w (a) i $A = 0,7$ w (b).

Twierdzenie 1.14. *Stany stacjonarne wolne od epidemii $E_a = (x_a, 0)$, gdzie $x_a \in \mathbb{R}_+$, układu (1.9) dla $f = f_1$ są stabilne w sensie Lapunowa.*

Dowód. Izokliną zerową dla zmiennej x jest prosta $y = 0$, izoklinami zerowymi dla zmiennej y są zaś proste $y = 0$ oraz $y = -\frac{\alpha}{1+\alpha}x$, której nie rozważamy, ponieważ nie znajduje się ona w I ćwiartce układu



(a) (b)

Rysunek 1.4: Portrety fazowe rozwiązań układu (1.3) dla $f = f_2$ dla $A < 0$ (a) oraz $A > 0$ (b). Izoklinę zerową dla zmiennej x zaznaczono na zielono, izoklina zerowa dla zmiennej y jest czerwona. Stany stacjonarne zaznaczono na żółto. W (a) wartości parametrów to $A = -0,5$ i $\alpha = 0,2$, w (b) przyjęto $A = 0,15$ oraz $\alpha = 0,7$.

współrzędnych. Zapiszmy układ (1.9) w następujący sposób:

$$x' = y\left(1 - \frac{x}{x+y}\right), \tag{1.10a}$$

$$y' = y\left(\frac{x}{x+y} - (1+\alpha)\right). \tag{1.10b}$$

Z równania (1.10a) wynika, że pochodna x' jest dodatnia dla $x, y > 0$. Co więcej, można stwierdzić, że $\lim_{y\to 0} x'(x,y) = 0$. Z równania (1.10b) uzyskujemy, że pochodna y' jest ujemna i może być oszacowana z góry przez

$$y' < -(1+\alpha)y.$$

Z tego otrzymujemy

$$y(\tau) < y(0)\,\mathrm{e}^{-(1+\alpha)\tau}.$$

Możemy zatem stwierdzić, że zmienna y maleje wykładniczo do zera.

Również zmienną x można oszacować z góry, ponieważ

$$x' < y < y(0)\,\mathrm{e}^{-(1+\alpha)\tau},$$

co daje

$$x(\tau) < x(0) + \frac{y(0)}{1+\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-(1+\alpha)\tau}\right).$$

Zwróćmy uwagę, że z ograniczeń na zmienne x i y wynika, że jeśli warunek początkowy $(x(0), y(0))$ jest blisko punktu $(x_a, 0)$, to rozwiązanie układu (1.10) też jest blisko tego punktu. Stąd uzyskujemy stabilność stanów E_a w sensie Lapunowa. Zauważmy też, że graniczny stan stacjonarny zależy od wyboru warunku początkowego. □

Przejdźmy do sytuacji, gdy $f = f_2$. Układ (1.9) ma wówczas postać

$$x' = -xy + y = y(-x+1), \tag{1.11a}$$

$$y' = xy - (1+\alpha)y = y\left(x - (1+\alpha)\right). \tag{1.11b}$$

Okazuje się, że można wyznaczyć całkę pierwszą powyższego układu. Dzieląc równanie (1.11b) przez (1.11a) dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y + \alpha y}{-xy + y} = \frac{\alpha}{x-1} + 1.$$

Całka pierwsza układu (1.11) ma postać

$$y + x + \alpha \ln|x-1| = \widehat{C}, \tag{1.12}$$

gdzie $\widehat{C}$ jest stałą całkowania. Wzór (1.12) opisuje trajektorie w przestrzeni fazowej $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, o ile $x \neq 1$. Nie uwzględniono tu przypadku $x = 1$, który zostanie omówiony poniżej.

Z analizy portretu fazowego dostajemy twierdzenie:

Twierdzenie 1.15. *Stany stacjonarne wolne od epidemii $E_a = (x_a, 0)$, gdzie $x_a \in \mathbb{R}^+$, układu (1.9) dla $f = f_2$ są stabilne w sensie Lapunowa dla $x_a \in [0, 1+\alpha)$, tracą zaś stabilność, gdy $x_a > 1 + \alpha$.*

Dowód. Przeanalizujmy portret fazowy układu (1.11). Izoklinami zerowymi dla zmiennej x są proste $y = 0$ oraz $x = 1$, z kolei dla zmiennej y: proste $y = 0$ oraz $x = 1 + \alpha$. Na podstawie równania (1.11a) można stwierdzić, że pochodna x' jest rosnąca dla $x < 1$, malejąca zaś dla $x > 1$. Dla $x = 1$ równanie (1.11b) ma postać $y = -\alpha y$. Możemy stwierdzić, że dla dowolnego $y(0)$ zbiór punktów $(1, y_0\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau})$ jest rozwiązaniem układu (1.11) i trajektorie innych rozwiązań nie mogą przeciąć prostej $x = 1$. Wynika stąd, że prosta $x = 1$ jest separatrysą. Z (1.11b) dostajemy, że pochodna y' jest ujemna dla $x < 1+\alpha$, dodatnia zaś dla $x > 1 + \alpha$. Uzyskujemy też $\lim\limits_{x \to 1+\alpha} y'(x, y) = 0$. Prosta $x = 1 + \alpha$ jest izokliną zerową dla zmiennej y i rozwiązania (1.11) mogą przechodzić przez tą prostą.

Przejdźmy do omówienia stabilności stanów E_a w zależności do wartości x_a.

Na podstawie znaków pochodnych x' oraz y' dla $x > 1 + \alpha$ stwierdzamy, że rozwiązanie układu (1.11) nie może zbiegać do punktu E_a dla $x_a > 1 + \alpha$ i stąd uzyskujemy brak stabilności stanu E_a dla takich wartości x_a. Co więcej, dla $x_a = 1 + \alpha$ dostajemy $x' < 0$, co również oznacza, że nie ma zbieżności rozwiązania do stanu E_a.

Zauważmy teraz, że dla $x < 1$ dostajemy $y' < -\alpha y$, zatem y maleje wykładniczo do zera. Sprawdźmy, do jakiej wartości x_a zbiega współrzędna x rozwiązania przy ustalonym warunku początkowym. Skorzystamy ze wzoru (1.12). Zauważmy, że $\widehat{C} = y(0) + x(0) + \alpha \ln|x(0) - 1|$, o ile $x(0) \neq 1$ (dla $x(0) = 1$ stosujemy przedstawione powyżej rozumowanie dla przypadku $x = 1$). We wzorze (1.12) podstawmy $y = 0$, co reprezentuje $\lim\limits_{\tau \to \infty} y(\tau) = 0$. Dostajemy

$$x_a + \alpha \ln|x_a - 1| = y(0) + x(0) + \alpha \ln|x(0) - 1|.$$

Rozwiązanie powyższego równania ma postać

$$x_a = 1 + \alpha W\left(\frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}(y(0)+x(0)+\alpha\ln|x(0)-1|-1)}\right)\right),$$

gdzie $W(z)$ jest funkcją W Lamberta z argumentem z.

Przejdźmy do przypadku $x < 1$. Wówczas x maleje, zatem mamy $x(\tau) < x(0)$ dla $t > 0$. Ponadto zachodzi $x(0) < 1 + \alpha$ i z równania (1.11b) dostajemy szacowanie

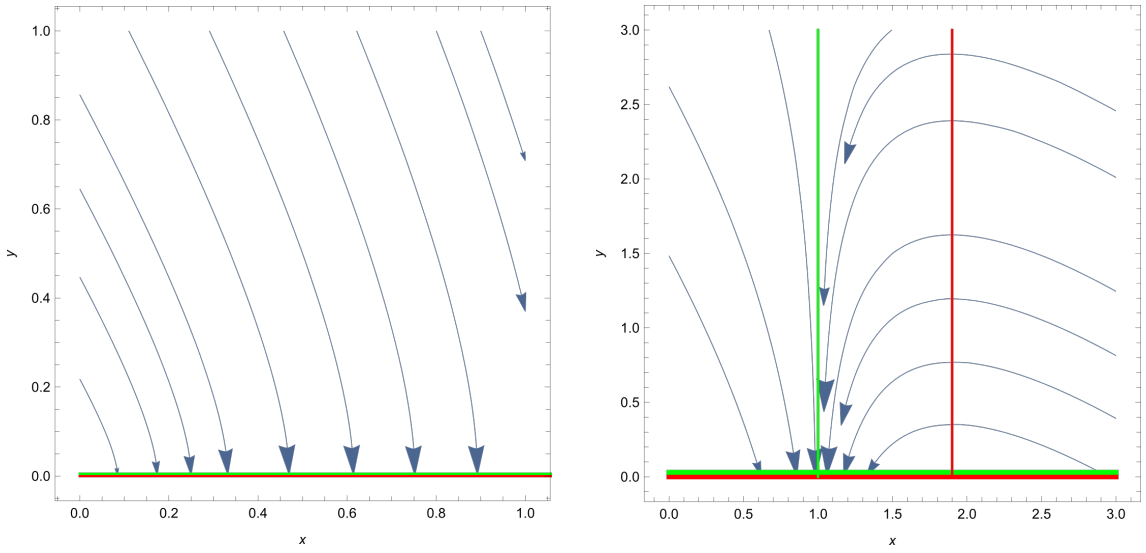
$$y' < -C_a y, \qquad C_a = 1 + \alpha - x(0) > 0,$$

co implikuje wykładniczą zbieżność y do zera.

Stwierdzamy więc, że w układzie (1.9) dla $f = f_2$ stany E_a są stabilne w sensie Lapunowa dla $x_a \in [0, 1 + \alpha)$ oraz niestabilne dla $x_a > 1 + \alpha$. □

Przykładowe portrety fazowe rozwiązań układu (1.9) dla przypadków $f = f_1$ oraz $f = f_2$ przedstawiono na rysunku 1.5.

Zwróćmy uwagę, że przypadek $A = 0$ jest niegeneryczny, więc w praktyce jego znaczenie jest marginalne. Może być pomocny w sytuacji, kiedy infekcja rozprzestrzenia się w tak szybkim tempie, że przyrost naturalny i migracja stają się nieistotne.



(a) (b)

Rysunek 1.5: Portrety fazowe rozwiązań układu (1.9) dla $f = f_1$ (a) oraz $f = f_2$ (b). Izoklinę zerową dla zmiennej x zaznaczono na zielono, dla zmiennej y – na czerwono. Przyjęto $\alpha = 0,9$.

1.2 Model ze stałym napływem

Teraz omówimy modyfikację modelu (1.3). Zamiast jednego współczynnika dotyczącego przyrostu netto populacji wprowadzimy dwa niezależne parametry. Pierwszy z nich opisuje stały napływ osobników do populacji – nie zależy on od jej liczebności. Na napływ ten składają się narodziny osobników oraz migracje. Drugi parametr dotyczy naturalnej śmiertelności, niezwiązanej z chorobą zakaźną wywołującą epidemię, proporcjonalny do liczebności populacji. Model oparty na tym założeniu został przedstawiony w [101]. W dalszej części podrozdziału zastosujemy funkcję transmisji $f(x, y) = f_2(x, y) = xy$. Omawiany model przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= C - \beta SI + \gamma I - \mu S, \\ \dot{I} &= \beta SI - (\gamma + \alpha + \mu)I, \end{aligned} \tag{1.13}$$

gdzie C jest stałym napływem osobników do populacji, β to współczynnik transmisji choroby, γ jest współczynnikiem ozdrowienia, μ opisuje śmiertelność naturalną, α zaś – śmiertelność związaną z chorobą. Zakładamy, że współczynniki te są stałe i dodatnie. Ponadto z powodu znaczenia parametrów C i μ zachodzi

$$C \gg \mu. \tag{H}$$

Przeprowadźmy skalowanie modelu (1.13), by zmniejszyć liczbę parametrów. Postąpimy podobnie jak w przypadku układu (1.1). Po wprowadzeniu zmiennej $\tau = \gamma t$ uzyskujemy

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\tau} = S', \qquad \frac{1}{\gamma}\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\tau} = I',$$

współczynniki zaś zostają przeskalowane przez γ. Następnie mnożymy oba równania przeskalowanego układu przez β. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} x' &= C - xy + y - \mu x, \\ y' &= xy - ky, \end{aligned} \tag{1.14}$$

gdzie

$$x = \beta S, \quad y = \beta I, \quad k = \alpha + \mu + 1,$$

C zaś jest odpowiednio przeskalowane. Oczywiście zachodzi $k > 1$. Ponadto wprowadźmy zmienną

$$w(\tau) = \beta N(\tau) \quad \Longrightarrow \quad w = x + y.$$

Najpierw zbadajmy podstawowe własności modelu (1.14). Postać prawej strony tego układu implikuje istnienie, jednoznaczność oraz nieujemność rozwiązań dla nieujemnego warunku początkowego. Ponadto rozwiązania mogą być przedłużone na dowolny odcinek czasu. Jeśli dodamy stronami równania układu, otrzymujemy

$$w' = C - \mu w - \alpha y. \tag{1.15}$$

Wykażemy, że (na podstawie postaci równania (1.15)) w modelu (1.13), w przeciwieństwie do (1.1), maltuzjański charakter nie występuje. Oznacza to, że nie pojawia się sytuacja, że populacja wymiera lub wzrasta nieograniczenie.

Oszacujmy maksymalny rozmiar populacji. Ponieważ zachodzi $y \geqslant 0$, otrzymujemy

$$w' \leqslant C - \mu w, \tag{1.16}$$

co daje

$$w(\tau) \leqslant \left(w(0) - \frac{C}{\mu}\right) \mathrm{e}^{-\mu\tau} + \frac{C}{\mu}.$$

Stwierdzamy zatem, że jeśli $w(0) > \frac{C}{\mu}$, to liczebność populacji maleje i stąd wiemy, że zmienne $x(\tau)$ i $y(\tau)$ są ograniczone z góry, ponieważ zachodzi

$$x(\tau),\ y(\tau) \leqslant w(\tau) \leqslant w(0).$$

Jeśli $w(0) \leqslant \frac{C}{\mu}$, to populacja może się rozrastać, ale przyrost zmiennych jest ograniczony. Oczywiście zachodzi

$$x(\tau),\ y(\tau) \leqslant w(\tau) \leqslant -c\,\mathrm{e}^{-\mu\tau} + \frac{C}{\mu} \leqslant \frac{C}{\mu},$$

gdzie $c = \mathrm{const} > 0$. Wynika stąd, że zmienne $x(\tau)$ i $y(\tau)$ są określone dla każdego $\tau > 0$.

Rozważmy ponownie równanie (1.15), które wraz z nierównością $y \leqslant w$ prowadzi do nierówności

$$w' \geqslant C - (\mu + \alpha)w.$$

Z równania (1.15) i nierówności (1.16) uzyskujemy

$$C - (\mu + \alpha)w \leqslant w' \leqslant C - \mu w,$$

co daje, że

$$\Lambda := \left\{ w : w \in \left[\frac{C}{\alpha + \mu}, \frac{C}{\mu} \right] \right\}$$

jest zbiorem niezmienniczym.

Układ (1.14) ma dwa stany stacjonarne: wolny od epidemii $E_{df} := (x_{df}, 0) = \left(\frac{C}{\mu}, 0\right)$ (skrót *df* oparto na anglojęzycznym wyrażeniu *disease-free*) oraz endemiczny

$$E_e = (x_e, y_e) = \left(k, \frac{C - \mu k}{\alpha + \mu}\right).$$

Zauważmy, że warunek $\frac{C}{\mu} > k$ gwarantuje istnienie stanu E_e, natomiast stan E_{df} istnieje zawsze, niezależnie od wartości parametrów modelu.

Macierz Jacobiego układu (1.13), oznaczona przez M, ma postać

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} -y - \mu & -x + 1 \\ y & x - k \end{pmatrix}.$$

Z postaci macierzy M można wywnioskować, że stan E_{df} jest lokalnie stabilny, jeśli $\frac{C}{\mu} < k$. Jeżeli zachodzi $\frac{C}{\mu} > k$ (czyli wtedy, gdy stan E_e istnieje), to stan E_{df} jest punktem siodłowym. Zauważmy również, że

stan E_e jest lokalnie stabilny, jeśli tylko istnieje. Co więcej, w analizowanym układzie lokalna stabilność implikuje globalną w przestrzeni $\mathbb{R}^2_+$. Zastosujmy kryterium Dulaca-Bendixona z funkcją $\frac{1}{xy}$, żeby pokazać, że w układzie (1.13) nie ma cykli granicznych:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C-xy+y-\mu x}{xy}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{xy-ky}{xy}\right)=-\left(\frac{C}{x^2y}+\frac{1}{x^2}\right)<0.$$

Stąd oraz z twierdzenia Poincarégo-Bendixsona wynika globalna stabilność – albo stan E_{df} jest globalnie stabilny, o ile stan E_e nie istnieje, albo stan E_e jest globalnie stabilny wewnątrz przestrzeni fazowej, o ile on istnieje.

Krytyczny warunek $\frac{C}{\mu k}=1$ definiuje współczynnik odnowienia choroby związany z układem (1.14), to znaczy $\mathcal{R}_0=\frac{C}{\mu k}$. Na podstawie postaci i interpretacji $\mathcal{R}_0$ można stwierdzić, że dana część $\left(1-\frac{\mu k}{C}\right)$ osobników powinna być szczepiona w momencie narodzin, aby powstrzymać rozprzestrzenianie się epidemii.

Globalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego z wykorzystaniem funkcji Lapunowa

W tym paragrafie przedstawimy, jak wykazać globalną stabilność endemicznego stanu stacjonarnego E_e układu (1.14) za pomocą odpowiedniej funkcji Lapunowa. W naszym przypadku zostały wykorzystane dwie funkcje z [33], które tam zastosowano do wykazania stabilności stanu endemicznego w modelu SIS. Dla tego stanu będziemy rozpatrywać podprzestrzeń U przestrzeni fazowej $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+\}$ mającą postać

$$U:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : y>0\}. \tag{1.17}$$

Przejdźmy teraz do sformułowania twierdzenia o globalnej stabilnej stanu E_e układu (1.14).

Twierdzenie 1.16. *Endemiczny stan stacjonarny E_e układu* (1.14) *jest globalnie asymptotycznie stabilny, o ile istnieje.*

Dowód. Zaproponujmy funkcję Lapunowa dla stanu endemicznego

$$V(x,y):=\frac{1}{2}\left(x-x_e+y-y_e\right)^2+(\alpha+2\mu)\left(y-y_e-y_e\ln\frac{y}{y_e}\right).$$

Oczywiście zachodzi $V(x,y)\geq 0$ dla wszystkich $(x,y)\in U$. Co więcej, funkcja $V(x,y)$ zeruje się wtedy i tylko wtedy, gdy $x=x_e$ oraz $y=y_e$. W naszym przypadku oczywiście mamy $x_e=k$. Obliczmy pochodną funkcji V wzdłuż trajektorii układu (1.14). Dostajemy

$$V'(x,y)=(x-x_e+y-y_e)\left(C-(\alpha+\mu)y-\mu x\right)+(\alpha+2\mu)\left(\frac{y-y_e}{y}\right)y(x-x_e). \tag{1.18}$$

Z pierwszego równania (1.14) wiemy, że dla stanu E_e zachodzi

$$C=(\alpha+\mu)y_e+\mu x_e. \tag{1.19}$$

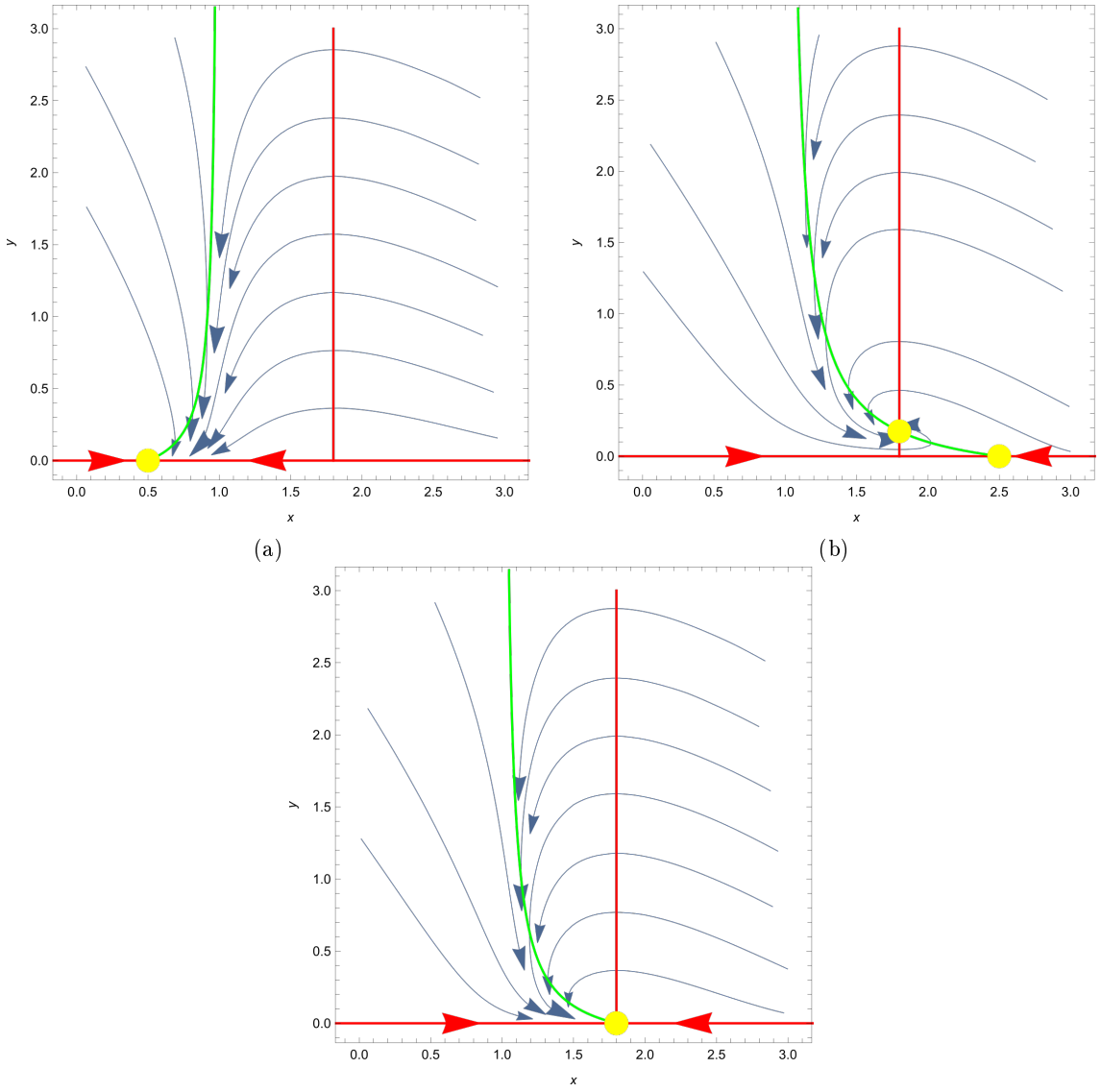
Podstawiając (1.19) do (1.18) dostajemy

$$V'(x,y)=-\mu(x-x_e)^2-(\alpha+\mu)(y-y_e)^2-(\alpha+2\mu)(y-y_e)(x-x_e)$$
$$+(\alpha+2\mu)(y-y_e)(x-x_e)=-\mu(x-x_e)^2-(\alpha+\mu)(y-y_e)^2.$$

Zauważmy, że $V'(x,y)\leq 0$ dla każdych x i y. Ponadto mamy $V'(x,y)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=x_e$ i $y=y_e$. Na podstawie uzyskanych własności funkcji Lapunowa $V(x,y)$ i jej pochodnej $V'(x,y)$ stwierdzamy ostatecznie, że stan endemiczny E_e układu (1.14) jest globalnie asymptotycznie stabilny. □

Okazuje się, że można zastosować inną funkcję Lapunowa. Dowód globalnej stabilności stanu E_e z wykorzystaniem innej funkcji można znaleźć w dodatku A.

Portrety fazowe z przykładowymi trajektoriami przedstawiono na rysunku 1.6. Analiza portretu fazowego dla przypadku krytycznego $\frac{C}{\mu}=k$ pokazuje, że gdy stan E_e bifurkuje ze stanu E_{df}, to dynamika układu (1.14) jest taka sama, jak dla przypadku $\frac{C}{\mu}<k$.



Rysunek 1.6: Portrety fazowe rozwiązań układu (1.14) gdy $\frac{C}{\mu} < k$ (a), $\frac{C}{\mu} > k$ (b) oraz $\frac{C}{\mu} = k$ (c). Izoklinę zerową dla zmiennej x zaznaczono na zielono, izoklina zerowa dla zmiennej y jest czerwona. Punkty stacjonarne zaznaczono na żółto. Na obu portretach przyjęto $\alpha = 0,6$, $\mu = 0,2$. Wartość C wynosi w (a) $0,1$, w (b) $0,5$, w (c) zaś $0,36$.

1.3 Dyskusja

W tym rozdziale przedstawiliśmy dwa modele ciągłe obrazujące dynamikę epidemii w populacji jednorodnej. Pierwszy zakładał zmienny napływ osobników do populacji, drugi dotyczył przypadku stałego napływu. Przedstawiliśmy podstawowe własności tych modeli i dokonaliśmy analizy stabilności stanów stacjonarnych.

Przyjrzyjmy się ponownie modelowi (1.3). Stwierdzenie 1.2 wskazuje na zaistnienie przypadku, gdy populacja rozrasta się nieograniczenie przy dodatnim współczynniku rozrodczości netto. Taka sytuacja nie ma miejsca w rzeczywistości. Zauważmy, że w modelu (1.14) taka możliwość nie występuje. Z tego powodu uznajemy model (1.3) za niepoprawny do modelowania dynamiki epidemii w długim czasie, w dalszej części rozdziału zajmiemy się układami dyskretnymi opartymi na (1.14).

Zwróćmy jeszcze uwagę na postaci stanu stacjonarnego wolnego od epidemii w obu układach. W ukła-

dzie (1.3) dla tego stanu nie występują osobniki zdrowe, natomiast w (1.14) ten stan gwarantuje niezerową liczebność grupy osób zdrowych. Z epidemiologicznego punktu widzenia pożądana i bardziej prawdopodobna jest postać stanu wolnego od epidemii z układu (1.14). To potwierdza niezasadność stosowania modelu (1.3).

Rozdział 2

Modele dyskretne dla populacji jednorodnej

Jak było wspomniane we wstępie, w celu zobrazowania dynamiki epidemii warto wziąć pod uwagę modele dyskretne. Skonstruujmy więc odpowiednie układy dyskretne opisujące tę dynamikę w populacji jednorodnej. W podrozdziale (1.3) stwierdziliśmy, że układ (1.3) nie jest odpowiedni do modelowania dynamiki epidemii. Zbadamy więc dyskretne wersje układu (1.14). Zastosujemy dwie metody dyskretyzacji: otwarty schemat Eulera (EEM) oraz dyskretyzację niestandardową ($NSDM$). Omówimy własności układów dyskretnych otrzymanych tymi metodami.

2.1 Model oparty na otwartym schemacie Eulera

W tym podrozdziale do dyskretyzacji (1.14) zastosujemy EEM. Otrzymujemy układ

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\left(C - x_n y_n + y_n - \mu x_n\right), \\ y_{n+1} &= y_n + h\left(x_n y_n - k y_n\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest indeksem węzła w dyskretnej siatce przeskalowanego czasu, natomiast $h > 0$ oznacza krok dyskretyzacji. Zauważmy, że możemy wybrać dowolnie małe h, tak aby uzyskać odpowiednie własności układu.

2.1.1 Podstawowe własności modelu

Przejdźmy do omówienia podstawowych własności modelu (2.1). Najpierw oszacujmy rozmiar całej populacji z użyciem zmiennej

$$w_n := x_n + y_n \tag{2.2}$$

zakładając nieujemność wartości x_n oraz y_n. Zauważmy, że jeśli dodamy oba równania układu (2.1), uzyskujemy

$$w_{n+1} = w_n + h\left(C - \mu w_n - \alpha y_n\right) \leq w_n + h\left(C - \mu w_n\right). \tag{2.3}$$

Rozwiązując (2.3) przy założeniu $h < \frac{1}{\mu}$ otrzymujemy

$$w_n \leq (1 - h\mu)^n w_0 + \Big(1 - (1 - h\mu)^n\Big)\frac{C}{\mu} \tag{2.4}$$

i stwierdzamy, że

$$w_n \leq w_0 + \frac{C}{\mu}.$$

Oznacza to, że można wskazać ograniczenie górne liczebności populacji. Co więcej, korzystając z (2.4) dostajemy następujący wniosek:

Wniosek 2.1. *Załóżmy, że rozwiązania układu* (2.1) *są nieujemne. Jeśli zachodzą*

$$h < \frac{1}{\mu} \tag{2.5}$$

oraz

$$w_0 \leq \frac{C}{\mu}, \tag{2.6}$$

to prawdziwe jest oszacowanie

$$w_n \leq \frac{C}{\mu} \tag{2.7}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Zapiszmy układ (2.1) w innej postaci. Układ ten jest dyskretnym układem dynamicznym opisanym przez funkcję

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + h\left(C - xy + y - \mu x\right) \\ y + hy\left(x - k\right) \end{pmatrix},$$

to znaczy orbita wybranego punktu (x_0, y_0), oznaczona przez $\mathcal{O}$, ma postać $\mathcal{O} = \Big((x_0,y_0), H(x_0,y_0), H^2(x_0,y_0), \dots \Big)$. Z powodu znaczenia zmiennych x i y należy przyjąć założenie o nieujemności kolejnych iteracji $F^n(x,y)$ i $G^n(x,y)$ dla nieujemnych zmiennych x i y. Mając ponadto na uwadze zależność (2.7) zdefiniujmy zbiór

$$\Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \quad x + y \leq \frac{C}{\mu} \right\}.$$

Pożądaną własnością tego zbioru byłaby jego niezmienniczość dla układu (2.1). Sprawdźmy zatem, przy jakich warunkach zbiór Ω posiada tę własność. Zbadajmy nieujemność rozwiązań układu (2.1) w tym zbiorze. Zakładamy (2.5) oraz $(x_0, y_0) \in \Omega$, co jest silniejszym warunkiem od nierówności (2.6).

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2. *Jeśli* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *oraz*

$$h < h_{\min} := \min\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{\frac{C}{\mu} + \mu + 1} \right), \tag{2.8}$$

to rozwiązania (x_n, y_n) *układu* (2.1) *pozostają w zbiorze* Ω *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}_+$.

Dowód. Zgodnie z biologicznym znaczeniem zmiennych układu (2.1) przyjmujemy spełnienie założenia $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sprawdźmy teraz warunki gwarantujące dodatniość zmiennych x i y.

Zajmijmy się najpierw zmienną y. Widzimy, że funkcja

$$G(x,y) = y(1 - kh) + hxy$$

jest odpowiednio nieujemna lub dodatnia dla odpowiednio nieujemnych lub dodatnich zmiennych x i y przy założeniu $1 - kh > 0$.

W dalszych rozważaniach zakładamy więc

$$h < \frac{1}{k}. \tag{2.9}$$

Przy spełnieniu tego warunku oraz nieujemności x_0 i y_0, dostajemy $y_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Ponieważ $k > \mu$, nierówność (2.9) implikuje (2.5).

Przejdźmy do zbadania nieujemności zmiennej x. Wyznaczymy minimalną wartość funkcji $F(x,y)$ w zbiorze Ω. Obliczając pochodne cząstkowe tej funkcji dostajemy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - h\mu - hy, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = h(1 - x).$$

Jeśli przyrównamy te pochodne do zera, to rozwiązaniem tak powstałego układu równań jest punkt $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(1, \frac{1-h\mu}{h}\right)$.

W celu uniknięcia ekstremów funkcji $F(x,y)$ wewnątrz Ω zakładamy nierówność $\frac{C}{\mu}-\overline{x}<\overline{y}$. Nierówność tę można zapisać jako

$$\frac{C}{\mu}-1<\frac{1}{h}-\mu. \tag{2.10}$$

Z (H) dostajemy, że warunek (2.10) jest równoważny nierówności

$$h<\frac{1}{\frac{C}{\mu}+\mu-1}. \tag{2.11}$$

Jeżeli zachodzi (2.11), to punkt, w którym funkcja F może mieć minimalną lub maksymalną wartość, leży poza zbiorem Ω, zatem należy sprawdzić wartości funkcji na brzegach tego zbioru. Mamy

- $F(0,y)=hy+hC>0$ dla każdego $y\geq 0$;
- $F(x,0)=x(1-h\mu)+hC>0$ dla każdego $x\geq 0$ przy założeniu (2.9);
- $F\left(x,\frac{C}{\mu}-x\right)=f(x)$, gdzie

$$f(x)=x(1-h\mu)+hC+h(1-x)\left(\frac{C}{\mu}-x\right).$$

Widzimy, że funkcja f jest funkcją kwadratową zmiennej x:

$$f(x)=hx^2+x\left(1-h\left(\frac{C}{\mu}+\mu+1\right)\right)+hC+h\frac{C}{\mu}.$$

Oczywiście zachodzi $f(x)>0$ dla $x\geq 0$ przy założeniu

$$h<\frac{1}{\frac{C}{\mu}+\mu+1}. \tag{2.12}$$

Zauważmy, że nierówność (2.12) jest silniejsza niż (2.11). Wiążąc ze sobą (2.12) oraz (2.9) dostajemy warunek (2.8). Stąd ostatecznie uzyskujemy słuszność postawionej tezy. □

Powróćmy do treści twierdzenia 2.2. Sprawdźmy, kiedy zachodzi

$$\frac{1}{\frac{C}{\mu}+\mu+1}<\frac{1}{k}.$$

Przekształcając tę nierówność dostajemy

$$k<\frac{C}{\mu}+\mu+1,$$

czyli

$$\alpha<\frac{C}{\mu}.$$

Sformułujmy wniosek:

Wniosek 2.3. *Jeśli $C>\alpha\mu$, to zastępując w twierdzeniu 2.2 nierówność* (2.8) *warunkiem* (2.12) *zachowujemy słuszność tezy. Jeśli $C<\alpha\mu$, w twierdzeniu 2.2 zamiast nierówności* (2.8) *zapisujemy* (2.9) *i twierdzenie będzie dalej zachodziło.*

Ponieważ $C\gg\mu$, zależność $C>\alpha\mu$ zachodzi praktycznie zawsze. Stąd w twierdzeniu 2.2 zamiast (2.8) przyjmujemy (2.12). W dalszej części pracy w celu zachowania ogólności przyjmiemy jednak twierdzenie 2.2 bez uwzględniania wniosku 2.3.

Wspomnijmy jeszcze o współczynniku odnowienia epidemii $\mathcal{R}_0$ układu (2.1). W celu wyznaczenia jego wartości skorzystamy z podejścia przedstawionego w [7] stosowanego dla modeli dyskretnych. Metoda tam zaprezentowana jest analogiczna do stosowanej w przypadku modeli ciągłych, dlatego obliczenia prowadzące do wyznaczenia $\mathcal{R}_0$ dla modelu (2.1) zostały pominięte. Okazuje się, że wartość $\mathcal{R}_0$ dla układu (2.1) oraz dla odpowiedniego układu ciągłego (1.14) jest taka sama i wynosi $\mathcal{R}_0=\frac{C}{\mu k}$.

Spójrzmy teraz na nierówność (2.8) w kontekście $\mathcal{R}_0$. Zauważmy, że jeśli zachodzi $\mathcal{R}_0>1$, to dostajemy $\frac{C}{\mu}>k$. Stąd również $\frac{C}{\mu}+\mu+1>k$. Z tego wynika, że w przypadku rozprzestrzeniania się epidemii nierówność (2.8) jest równoważna nierówności $h<\frac{1}{\frac{C}{\mu}+\mu+1}$.

2.1.2 Stabilność stanów stacjonarnych

Przyjrzyjmy się teraz lokalnej stabilności stanów stacjonarnych układu (2.1). Oczywiście stany te są takie same jak stany stacjonarne układu (1.14). Przypomnijmy postaci tych stanów:

- $E_{df} = (x_{df}, 0) = \left(\frac{C}{\mu}, 0\right)$: zawsze istniejący,
- $E_e = (x_e, y_e) = \left(k, \frac{C-\mu k}{k-1}\right)$: istniejący przy założeniu $C > \mu k$ równoważnemu warunkowi $\mathcal{R}_0 > 1$.

Przejdźmy do analizy warunków stabilności tych stanów. Niech M_d będzie macierzą Jacobiego układu (2.1). Macierz ta ma postać

$$M_d(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - h(y + \mu) & h(1 - x) \\ hy & 1 + h(x - k) \end{pmatrix}.$$

Stabilność stanu wolnego od epidemii

Zacznijmy od analizy stabilności stanu wolnego od epidemii E_{df}. Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 2.4. *Przy założeniu* (2.8) *stan wolny od epidemii* E_{df} *układu* (2.1) *jest*

- *węzłem lokalnie stabilnym, jeśli* $\mathcal{R}_0 < 1$,
- *niehiperboliczny, jeśli* $\mathcal{R}_0 = 1$,
- *punktem siodłowym, jeśli* $\mathcal{R}_0 > 1$.

Co więcej, jeśli $(x_0, y_0) \in \Omega$, *to stan ten jest węzłem globalnie stabilnym w* Ω *dla* $\mathcal{R}_0 < 1$.

Dowód. Macierz M_d dla stanu E_{df} ma postać

$$M_d(E_{df}) = \begin{pmatrix} 1 - h\mu & h(1 - x_{df}) \\ 0 & 1 + h(x_{df} - k) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Przypomnijmy, że warunkami stabilności stanu E_{df} są nierówności $|\lambda_j| < 1$, gdzie $j = 1, 2$. Z $|\lambda_1| < 1$ mamy

$$\begin{aligned} |1 - h\mu| &< 1, \\ -1 < 1 - h\mu &< 1, \\ -2 < -h\mu &< 0, \\ 2 > h\mu &> 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nierówność $2 > h\mu$ można zapisać jako $h < \frac{2}{\mu}$, której prawdziwość wynika z (2.5). Zależność $h\mu > 0$ jest zawsze prawdziwa. Druga wartość własna wynosi

$$\lambda_2 = 1 - hk + hx_{df}. \tag{2.15}$$

Zauważmy, że nierówność (2.8) implikuje $\lambda_2 > 0$. Ponadto przy założeniu $x_{df} < k$, czyli $\mathcal{R}_0 < 1$, mamy $\lambda_2 < 1$.

Teraz pokażemy, że lokalna stabilność stanu E_{df} implikuje jego globalną stabilność w zbiorze Ω. Z założenia $\mathcal{R}_0 < 1$, a nierówność (2.8) implikuje $h < \frac{1}{\mu}$. Z twierdzenia 2.2 dostajemy $x_n \leq \frac{C}{\mu}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. Z drugiego równania z (2.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_n =& y_0 \prod_{j=0}^{n-1} \Big(1 + h(x_j - k)\Big) \leq y_0 \left(1 + h\left(\frac{C}{\mu} - k\right)\right)^n \\ =& y_0 \left(1 + hk\left(\frac{C}{\mu k} - 1\right)\right)^n = y_0 \Big(1 - hk\left(1 - \mathcal{R}_0\right)\Big)^n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ponieważ $\mathcal{R}_0 < 1$ oraz

$$0 < hk < 1,$$

to

$$0 < hk(1 - \mathcal{R}_0) < 1. \tag{2.17}$$

Uwzględnienie (2.17) w (2.16) prowadzi do

$$0 \leq y_n \leq y_0\big(1 - hk\,(1 - \mathcal{R}_0)\,\big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0. \tag{2.18}$$

Teraz zsumujmy stronami równania (2.1). Uzyskujemy

$$w_{n+1} = w_n + h\,(C - \mu w_n - \alpha y_n)\,. \tag{2.19}$$

Oszacujmy w_{n+1} z góry przez $w_{n+1} \leq w_n + h\,(C - \mu w_n)$. Dla ustalenia uwagi zamiast nierówności rozważymy równanie

$$w_{n+1} = w_n + h\,(C - \mu w_n)\,. \tag{2.20}$$

Równanie jednorodne stowarzyszone z (2.20) ma postać

$$w_{n+1} = (1 - h\mu)w_n. \tag{2.21}$$

Jego rozwiązanie to

$$w_n = \widehat{C}(1 - h\mu)^n, \quad \widehat{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.22}$$

Rozwiązanie szczególne równania (2.20) zapisujemy jako

$$\widehat{w}_n = \widehat{A}, \quad \widehat{A} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ponieważ spełnienia ono (2.20), otrzymujemy $\widehat{A} = \frac{C}{\mu}$. Rozwiązanie ogólne równania (2.20) ma postać

$$w_n = \widehat{C}(1 - h\mu)^n + \frac{C}{\mu}.$$

Przyjmujemy, że początkowa liczebność populacji wynosi w_0. Wtedy

$$w_n = \left(w_0 - \frac{C}{\mu}\right)(1 - h\mu)^n + \frac{C}{\mu}.$$

Interesuje nas rozwiązanie nierówności, więc w przejściu granicznym dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} w_n \leq \frac{C}{\mu}. \tag{2.23}$$

Teraz oszacujmy w_{n+1} z (2.19) z dołu przez

$$w_{n+1} \geq w_n + h\Big(C - \mu w_n - \alpha y_0\big(1 - hk(1 - \mathcal{R}_0)\big)^n\Big). \tag{2.24}$$

Dla uproszczenia zapisu zdefiniujmy $s := 1 - hk(1 - \mathcal{R}_0)$. Z (2.17) mamy $0 < s < 1$. Zamiast (2.24) rozważymy równanie

$$w_{n+1} = w_n + h\,(C - \mu w_n - \alpha y_0 s^n)\,. \tag{2.25}$$

Równanie jednorodne stowarzyszone z (2.25) ma postać (2.21), zatem rozwiązanie równania (2.21) zapisujemy jako (2.22). Rozwiązanie szczególne równania (2.25) jest postaci

$$\widehat{w}_n = \tilde{A} + \tilde{B}s^n, \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Spełnia ono zależność

$$\tilde{A} + \tilde{B}s^{n+1} = \tilde{A} + \tilde{B}s^n + h(C - \mu\tilde{A} - \mu\tilde{B}s^n - \alpha y_0 s^n).$$

Otrzymujemy

$$\tilde{A} = \frac{C}{\mu}, \quad \tilde{B} = \frac{h\alpha y_0}{h\mu + s - 1}.$$

Rozwiązanie ogólne równania (2.25) ma postać

$$w_n = \tilde{C}(1 - h\mu)^n + \frac{C}{\mu} + \frac{h\alpha y_0}{h\mu + s - 1} s^n$$

Zakładając początkowa liczebność populacji równą w_0 dostajemy

$$w_n = \left(w_0 - \frac{C}{\mu} + \frac{h\alpha y_0}{h\mu + s - 1} \right) (1 - h\mu)^n + \frac{C}{\mu} + \frac{h\alpha y_0}{h\mu + s - 1} s^n.$$

Interesuje nas rozwiązanie nierówności, więc w przejściu granicznym mamy

$$\lim_{n\to\infty} w_n \geq \frac{C}{\mu}. \tag{2.26}$$

Nierówności (2.23), (2.26) oraz twierdzenie o trzech ciągach dają

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{C}{\mu}. \tag{2.27}$$

Z (2.27), (2.18) oraz zależności

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{2.28}$$

wynika $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{C}{\mu}$. Uzyskujemy zatem globalną stabilność stanu E_{df} dla $\mathcal{R}_0 < 1$. □

Lokalna stabilność stanu endemicznego

Teraz przejdźmy do analizy lokalnej stabilności stanu endemicznego E_e. Analizę przeprowadzamy przy założeniu $\mathcal{R}_0 > 1$, które gwarantuje istnienie tego stanu.

W celu zachowania przejrzystości obliczeń najpierw zbadamy lokalną stabilność bez zakładania warunków

$$(x_0, y_0) \in \Omega, \quad h < h_{\min} \tag{2.29}$$

z twierdzenia 2.2, które gwarantują pozostanie rozwiązań w zbiorze niezmienniczym Ω. Warunki (2.29) uwzględnimy po sformułowaniu i udowodnieniu następnego twierdzenia.

Wprowadźmy stałe:

$$h_1 := \frac{4(k-1)}{C - \mu + \sqrt{\delta}}, \quad h_2 := \frac{4(k-1)}{C - \mu - \sqrt{\delta}}, \quad h_3 := \frac{C - \mu}{(k-1)(C - \mu k)} \tag{2.30}$$

oraz

$$\delta := (C - \mu)^2 - 4(C - \mu k)(k-1)^2, \tag{2.31}$$

które zastosujemy w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że istnieje endemiczny stan stacjonarny E_e układu* (2.1).

Jeśli $\delta \geq 0$, to stan ten jest:

- *węzłem lokalnie stabilnym, jeśli $h < h_1$,*
- *punktem siodłowym, jeśli $h_1 < h < h_2$,*
- *węzłem niestabilnym, jeśli $h > h_2$,*
- *niehiperboliczny, jeśli $h \in \{h_1, h_2\}$.*

Jeśli $\delta < 0$, to stan E_e jest:

- *ogniskiem lokalnie stabilnym, jeśli $h < h_3$,*

- *ogniskiem niestabilnym, jeśli* $h > h_3$,
- *niehiperboliczny, jeśli* $h = h_3$.

Dowód. Zakładamy istnienie stanu E_e. Macierz Jacobiego dla tego stanu zapisujemy jako

$$M(E_e) = \begin{pmatrix} 1 - h(y_e + \mu) & h(1 - x_e) \\ hy_e & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Zauważmy, że zachodzi

$$y_e + \mu = \frac{C - \mu k}{k-1} + \mu = \frac{C - \mu k}{k-1} + \frac{\mu(k-1)}{k-1} = \frac{C - \mu k + \mu k - \mu}{k-1} = \frac{C - \mu}{k-1} \tag{2.33}$$

oraz

$$1 - x_e = -(k-1). \tag{2.34}$$

Korzystając z (2.33), (2.34) oraz definicji y_e przedstawmy (2.32) jako

$$M(E_e) = \begin{pmatrix} 1 - h\frac{C-\mu}{k-1} & -h(k-1) \\ h\frac{C-\mu k}{k-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $M(E_e)$ ma postać

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\left(h\frac{C-\mu}{k-1} - 2\right) + 1 - h\frac{C-\mu}{k-1} + h^2(C - \mu k).$$

Jego wyróżnik wynosi

$$\begin{aligned}\delta_e &:= \left(h\frac{C-\mu}{k-1} - 2\right)^2 - 4\left(1 - h\frac{C-\mu}{k-1} + h^2(C-\mu k)\right) = \\ &= h^2\left(\frac{C-\mu}{k-1}\right)^2 - 4h^2(C-\mu k) = \left(\frac{h}{k-1}\right)^2\left((C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(k-1)^2\right).\end{aligned}$$

Korzystając z (2.31) dostajemy

$$\delta_e = \left(\frac{h}{k-1}\right)^2 \delta.$$

Wartości własne macierzy $M(E_e)$ są rzeczywiste, o ile $\delta \geq 0$. Wynoszą one

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-h\frac{C-\mu}{k-1} + 2 \pm \sqrt{\delta_e}\right) = \frac{1}{2}\left(-h\frac{C-\mu}{k-1} + 2 \pm \frac{h}{k-1}\sqrt{\delta}\right),$$

co możemy przedstawić jako

$$\lambda_{1,2} = 1 - h\frac{C - \mu \mp \sqrt{\delta}}{2(k-1)}. \tag{2.36}$$

Dalszą analizę uzależniamy od znaku δ.

• Załóżmy, że $\delta \geq 0$. Wtedy mamy dwie rzeczywiste wartości własne $\lambda_1 \geq \lambda_2$ i aby uzyskać lokalną stabilność, muszą być spełnione nierówności $-1 < \lambda_2$ i $\lambda_1 < 1$. Z drugiej strony, wystarczy, by zachodziło $\lambda_1 < -1$ lub $\lambda_2 > 1$ aby stan E_e stał się węzłem niestabilnym. Zauważmy, że warunek $\lambda_1 < 1$ można zapisać w postaci równoważnego ciągu nierówności

$$1 - h\frac{C - \mu - \sqrt{\delta}}{2(k-1)} < 1,$$

$$-h\frac{C - \mu - \sqrt{\delta}}{2(k-1)} < 0,$$

$$C - \mu - \sqrt{\delta} > 0,$$

$$(C-\mu)^2 > \delta,$$
$$(C-\mu)^2 > (C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(k-1)^2,$$
$$4(C-\mu k)(k-1)^2 > 0,$$
$$C > \mu k, \text{ czyli } \mathcal{R}_0 > 1.$$

Zależność $\lambda_2 > -1$ zachodzi dla

$$1 - h\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} > -1,$$
$$-h\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} > -2,$$
$$h < 4\frac{k-1}{(C-\mu)+\sqrt{\delta}}.$$

Z $\lambda_1 < -1$ mamy

$$1 - h\frac{C-\mu-\sqrt{\delta}}{2(k-1)} < -1,$$
$$-h\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} < -2,$$
$$h > 4\frac{k-1}{(C-\mu)-\sqrt{\delta}}.$$

Pokażemy, że warunek $\lambda_2 > 1$ nigdy nie zachodzi. Rozpatrzmy przeciwną nierówność $\lambda_2 < 1$, z której dostajemy

$$1 - h\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} < 1,$$
$$-h\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} < 0,$$

co daje

$$\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} = \frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(\alpha+\mu)} > 0,$$

co wynika z założenia (H). Stwierdzamy więc, że nierówność $\lambda_2 > 1$ nigdy nie jest spełniona.

Po obliczeniach otrzymaliśmy, że

$$\lambda_1 < 1, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{R}_0 > 1 - \text{to znaczy, kiedy } E_e \text{ istnieje;} \tag{2.37}$$

$$\lambda_2 > -1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } h < \frac{4(k-1)}{C-\mu+\sqrt{\delta}} = h_1; \tag{2.38}$$

$$\lambda_1 < -1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } h > \frac{4(k-1)}{C-\mu-\sqrt{\delta}} = h_2; \tag{2.39}$$

$$\lambda_2 > 1 \quad \text{nie zachodzi.} \tag{2.40}$$

Aby stan E_e był punktem siodłowym, należy spełnić jeden z dwóch zestawów nierówności

$$-1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1 \tag{2.41}$$

lub

$$\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 1. \tag{2.42}$$

Rozważmy (2.41). Z warunku (2.37) dostajemy fałszywość warunku $1 < \lambda_1$ w przypadku istnienia E_e. Stąd (2.41) nie zachodzi. Przejdźmy do (2.42). Rozpatrując (2.37)–(2.39) stwierdzamy, że spełnienie (2.42) gwarantują warunki

$$h > h_1, \quad h < h_2.$$

• Przejdźmy do przypadku $\delta < 0$, dla którego dostajemy dwie zespolone wartości własne. Zauważmy, że zachodzą zależności $|\lambda_1| = |\lambda_2| =: \lambda$ oraz

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 &= \left(1 - h\frac{C-\mu}{2(k-1)}\right)^2 + \left(\frac{h}{2(k-1)}\sqrt{|\delta|}\right)^2 \\ &= 1 - h\frac{C-\mu}{k-1} + h^2\frac{(C-\mu)^2}{4(k-1)^2} - \frac{h^2}{4(k-1)^2}\left((C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(k-1)^2\right) \\ &= 1 - h\frac{C-\mu}{k-1} + h^2(C-\mu k).\end{aligned}$$

Sprawdźmy warunek $\lambda < 1$. Dostajemy

$$1 - h\frac{C-\mu}{k-1} + h^2(C-\mu k) < 1,$$

$$-h\frac{C-\mu}{k-1} + h^2(C-\mu k) < 0,$$

$$\frac{C-\mu}{k-1} - h(C-\mu k) < 0.$$

Ostatecznie stwierdzamy, że

$$\lambda < 1 \text{ dla } h < \frac{C-\mu}{(k-1)(C-\mu k)} = h_3. \tag{2.43}$$

□

Przyjrzyjmy się treści twierdzenia 2.5. Zwrócmy uwagę, że niezależne od znaku δ istnieje wartość progowa h, po przekroczeniu której traci się stabilność stanu E_e.

Twierdzenie 2.5 w odniesieniu do zbioru niezmienniczego Ω

Teraz załóżmy dodatkowo (2.29), dzięki czemu rozwiązania układu (2.1) pozostają w zbiorze niezmienniczym Ω. Zakładamy więc $(x_0, y_0) \in \Omega$ i sprawdzamy nierówności $h_1 < h_{\min}$, $h_2 < h_{\min}$ oraz $h_3 < h_{\min}$. W przypadku pierwszej i drugiej nierówności zakładamy warunek $\delta > 0$, który zapewnia tym nierównościom sens zgodnie ze znaczeniem kroku dyskretyzacji.

Zależność $h_1 < h_{\min}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{4(k-1)}{C-\mu+\sqrt{\delta}} < h_{\min},$$

$$\frac{4(k-1)}{h_{\min}} < C-\mu+\sqrt{\delta},$$

z czego dostajemy

$$\sqrt{\delta} > \frac{4(k-1)}{h_{\min}} - (C-\mu).$$

Z nierówności $h_2 < h_{min}$ uzyskujemy

$$\frac{4(k-1)}{C-\mu-\sqrt{\delta}} < \ h_{\min},$$

$$\frac{4(k-1)}{h_{\min}} < C-\mu-\sqrt{\delta},$$

co daje

$$\sqrt{\delta} < C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}}.$$

Ta nierówność może być spełniona, o ile

$$C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}} > 0.$$

Możemy zatem rozważyć dwa przypadki

• Niech $C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}}>0$. Mamy wówczas $h_1<h_{\min}$ i dwie możliwości

$$h_2<h_{\min} \quad \text{dla} \quad \sqrt{\delta}<C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}}$$

lub

$$h_2>h_{\min} \quad \text{dla} \quad \sqrt{\delta}>C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}}.$$

• Niech $C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}}<0$. Mamy wówczas $h_2>h_{\min}$ i stwierdzamy, że

$$h_1<h_{\min} \quad \text{dla} \quad \sqrt{\delta}>\frac{4(k-1)}{h_{\min}}-(C-\mu)$$

oraz

$$h_1>h_{\min} \quad \text{dla} \quad \sqrt{\delta}<\frac{4(k-1)}{h_{\min}}-(C-\mu).$$

Korzystając z powyższych obliczeń i twierdzenia 2.5 sformułujmy wniosek:

Wniosek 2.6. *Załóżmy, że dla układu* (2.1) *stan* E_e *istnieje oraz niech* $(x_0,y_0)\in\Omega$. *Ponadto niech* $\delta\geq 0$.

• *Jeśli zachodzą*

$$C>\mu+\frac{4(k-1)}{h_{\min}}, \quad \sqrt{\delta}<C-\mu-4\frac{4(k-1)}{h_{\min}}, \tag{2.44}$$

to dodanie warunku (2.9) *nie zmienia zachowania stanu* E_e *opisanego w twierdzeniu 2.5 dla* $\delta\geq 0$, *przy czym zachodzi* $h_2<\frac{1}{k}$.

• *Jeśli zachodzi jeden z zestawów warunków:*

$$C>\mu+\frac{4(k-1)}{h_{\min}}, \quad \sqrt{\delta}>C-\mu-\frac{4(k-1)}{h_{\min}} \tag{2.45}$$

lub

$$C<\mu+\frac{4(k-1)}{h_{\min}}, \quad \sqrt{\delta}>\frac{4(k-1)}{h_{\min}}-(C-\mu), \tag{2.46}$$

to stan E_e *jest:*

a) węzłem lokalnie stabilnym dla $h<h_1$,

b) niehiperboliczny dla $h=h_1$,

c) punktem siodłowym dla $h_1<h<\frac{1}{k}$.

• *Jeśli zachodzą*

$$C<\mu+\frac{4(k-1)}{h_{\min}}, \quad \sqrt{\delta}<\frac{4(k-1)}{h_{\min}}-(C-\mu), \tag{2.47}$$

to stan E_e *jest węzłem lokalnie stabilnym.*

Co więcej, jeśli dowolny zestaw nierówności z (2.44)–(2.47) *zachodzi, to dla każdego* $n\in\mathbb{N}_+$ *mamy* $(x_n,y_n)\in\Omega$.

Przejdźmy do warunku $h_3<h_{\min}$. Parametr h_3 ma prostszą postać niż h_1 i h_2, zatem sprawdzimy osobno nierówności

$$h_3<\frac{1}{k} \tag{2.48}$$

oraz

$$h_3<\frac{1}{\frac{C}{\mu}+\mu+1}. \tag{2.49}$$

Rozpatrzmy najpierw warunek (2.48). Otrzymujemy z niego

$$\frac{C-\mu}{(k-1)(C-\mu k)}<\frac{1}{k},$$

$$(C-\mu)k < (C-\mu k)(k-1),$$
$$Ck - k\mu < Ck - C - \mu k^2 + \mu k,$$

czyli

$$C + \mu k^2 < 2\mu k. \tag{2.50}$$

Teraz przekształćmy warunek $C > \mu k$ istnienia stanu E_e, aby otrzymać

$$C + \mu k > 2\mu k. \tag{2.51}$$

Z $k > 1$ i (2.51) dostajemy

$$C + \mu k^2 > 2\mu k.$$

Otrzymana zależność stoi w sprzeczności z (2.50) oraz, co za tym idzie, z warunkiem (2.48). Oznacza to, że zawsze zachodzi

$$h_3 > \frac{1}{k}. \tag{2.52}$$

Teraz rozpatrzmy (2.49), co możemy zapisać jako ciąg równoważnych nierówności

$$\frac{C-\mu}{(k-1)(C-\mu k)} < \frac{1}{\frac{C}{\mu} + \mu + 1},$$

$$(C-\mu)\left(\frac{C}{\mu} + \mu + 1\right) < (\alpha+\mu)(C-\mu k),$$

$$\frac{C^2}{\mu} + C\mu + C - C - \mu^2 - \mu < \alpha(C-\mu k) + \mu C - \mu^2 k,$$

$$\frac{C^2}{\mu} - \mu^2 - \mu < \alpha(C-\mu k) - \mu^2(1+\alpha+\mu),$$

$$\frac{C^2}{\mu} - \mu < \alpha(C-\mu k) - \mu^2(\alpha+\mu),$$

$$\frac{C^2}{\mu} + \mu^2(\alpha+\mu) < \alpha(C-\mu k) + \mu,$$

które prowadzą do

$$C^2 < \mu^2 - \mu^3(\alpha+\mu) + \mu\alpha(C-\mu k).$$

Z założenia (H) stwierdzamy, że podana zależność nie zachodzi. Otrzymujemy zatem nierówność

$$h_3 > \frac{1}{\frac{C}{\mu} + \mu + 1}. \tag{2.53}$$

Opierając się na (2.52), (2.53) oraz twierdzeniu 2.5 stwierdzamy co następujące:

Wniosek 2.7. *Załóżmy, że stan E_e układu (2.1) istnieje oraz zachodzi twierdzenie 2.2. Niech $\delta < 0$. Wówczas E_e jest ogniskiem lokalnie stabilnym oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $(x_n, y_n) \in \Omega$.*

2.1.3 Bifurkacja podwojenia okresu

Występowanie bifurkacji podwojenia okresu (w skrócie *BPO*, w literaturze anglojęzycznej określana jest jako *period-doubling bifurcation* lub *flip bifurcation*) w układzie dyskretnym dotyczy sytuacji, gdy jedna z wartości własnych macierzy Jacobiego układu dla ustalonego stanu stacjonarnego wynosi -1 [69]. Wybieramy parametr, który wpływa na wartość własną i przyjmujemy go za parametr bifurkacyjny. Jako wartość progową (krytyczną) tego parametru przyjmuje się taką, dla której wartość własna wynosi -1.

Wyróżniamy dwa rodzaje bifurkacji podwojenia okresu: nadkrytyczną (w literaturze anglojęzycznej definiowaną jako *supercritical*) oraz podkrytyczną (*subcritical*).

Opiszmy ideę bifurkacji nadkrytycznej. Gdy parametr bifurkacyjny ma wartość mniejszą od wartości progowej, ustalony stan stacjonarny jest lokalnie stabilny. Po przekroczeniu przez parametr tej wartości

stan stacjonarny staje się niestabilny i pojawia się cykl o okresie 2. Cykl ten utworzony jest przez naprzemiennie zmieniające się wartości kolejnych iteracji. Zauważmy, że cykl charakteryzowany jest przez dwa stany stacjonarne (oznaczmy je jako $\tilde{s}_1$ i $\tilde{s}_2$) układu będącego drugą iteracją bazowego układu dyskretnego. Określmy dla tak powstałego układu macierz Jacobiego. Jeśli wszystkie wartości własne tej macierzy wyznaczonej dla stanów $\tilde{s}_1$ i $\tilde{s}_2$ mają moduł mniejszy niż 1, to cykl powstały w nadkrytycznej BPO dla układu bazowego jest stabilny. W bifurkacji podkrytycznej dla wartości parametru bifurkacyjnego mniejszych od progowej mamy stabilny stan stacjonarny oraz niestabilny cykl o okresie 2. Dla wartości parametru większych od progowej stan stacjonarny staje się niestabilny, cykl zaś znika [47], [69]. Jeżeli stan stacjonarny jest niestabilny dla wartości parametru bifurkacyjnego poniżej wartości progowej i stabilny dla wartości parametru powyżej progowej, to w bifurkacji nadkrytyczej i podkrytycznej występujący cykl jest odpowiednio niestabilny i stabilny. Należy również zwrócić uwagę, że w przypadku niestabilnych rozmaitości centralnych cykl i punkt stały mogą być stabilne tylko w tej rozmaitości i niestabilne w całej przestrzeni fazowej.

W tym paragrafie zajmiemy się określeniem warunków, przy których w układzie (2.1) występuje BPO dla endemicznego stanu stacjonarnego E_e. Aby określić te warunki, skorzystamy z podejścia zaproponowanego w [56]. Za parametr bifurkacyjny przyjmujemy krok dyskretyzacji.

Najpierw ustalmy, dla jakiego kroku dyskretyzacji jedna z wartości własnych w odpowiedniej macierzy Jacobiego wynosi -1, co daje możliwość wystąpienia BPO. W dowodzie poniższego stwierdzenia skorzystamy z obliczeń przeprowadzonych w dowodzie twierdzenia 2.5. Korzystamy z wcześniej zdefiniowanych w (2.30) i (2.31) parametrów h_1, h_2 i δ.

Stwierdzenie 2.8. *Niech h_1, h_2 i δ będą takie jak w* (2.30) *i* (2.31). *Jeśli w układzie* (2.1) *stan endemiczny E_e istnieje oraz $\delta > 0$, to bifurkacja podwojenia okresu może zajść, o ile $h = h_1$ lub $h = h_2$.*

Dowód. Interesuje nas pojedyncza krotność rzeczywistych wartości własnych, dlatego na podstawie (2.36) przyjmujemy $\delta > 0$, z czego mamy

$$\lambda_1 > \lambda_2. \tag{2.54}$$

Z nierówności (2.36), (2.38) oraz (2.39) stwierdzamy, że jeśli $h = h_1 = \frac{4(k-1)}{C-\mu+\sqrt{\delta}}$, to $\lambda_2 = -1$ oraz

$$\lambda_1 = 1 - \frac{4(k-1)}{C-\mu+\sqrt{\delta}} \cdot \frac{C-\mu-\sqrt{\delta}}{2(k-1)} = 1 - 2\frac{(C-\mu)^2-\delta}{\left(C-\mu+\sqrt{\delta}\right)^2}.$$

Korzystając z (2.31) dostajemy

$$\lambda_1 = 1 - 2\frac{(C-\mu)^2-(C-\mu)^2+4(C-\mu k)(k-1)^2}{\left(C-\mu+\sqrt{\delta}\right)^2} = 1 - 8\frac{(C-\mu k)(k-1)^2}{\left(C-\mu+\sqrt{\delta}\right)^2}.$$

Z istnienia stanu E_e mamy $C - \mu k > 0$, co razem z (2.54) daje $\lambda_1 \neq \{-1, 1\}$.

Analogicznie wnioskujemy, że jeśli $h = h_2 = \frac{4(k-1)}{C-\mu-\sqrt{\delta}}$, to $\lambda_1 = -1$ oraz

$$\lambda_2 = 1 - \frac{4(k-1)}{C-\mu-\sqrt{\delta}} \cdot \frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2(k-1)} = 1 - 8\frac{(C-\mu k)(k-1)^2}{\left(C-\mu-\sqrt{\delta}\right)^2}.$$

Dzięki spełnieniu $C - \mu k > 0$ i (2.54) mamy $\lambda_2 \neq \{-1, 1\}$. □

Teraz przejdziemy do określenia warunków na h, które zapewniają bifurkację podwojenia okresu dla stanu E_e w układzie (2.1). Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że zachodzi $h = h_2$, co daje $\lambda_1 = -1$. Dla przypadku $h = h_1$ implikującego $\lambda_2 = -1$ rozumowanie jest analogiczne.

Oznaczmy przez h^* parametr będący zaburzeniem kroku dyskretyzacji w układzie (2.1). Zakładamy, że $|h^*| \ll 1$. Układ (2.1) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (h+h^*)\left(C - x_n y_n + y_n - \mu x_n\right), \\ y_{n+1} &= y_n + (h+h^*)\left(x_n y_n - k y_n\right). \end{aligned} \tag{2.55}$$

W kolejnym twierdzeniu i jego dowodzie skorzystamy z oznaczeń:

$$\rho := \frac{C-\mu}{\alpha+\mu}, \quad \bar{\rho} := \rho^2 - 4(C-\mu k). \tag{2.56}$$

Ze względu na założenie (H) mamy $\rho > 0$. Ponadto zauważmy, że w przypadku BPO dla stanu E_e w układzie (2.1) rozważamy rzeczywiste wartości własne macierzy (2.35). Przypomnijmy, że rzeczywisty charakter wartości gwarantował warunek $\delta \geq 0$, gdzie δ zdefiniowano w (2.31). Z definicji δ uzyskujemy

$$\begin{aligned}(C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(k-1)^2 &= (C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(\alpha+\mu)^2 \\ &= (\alpha+\mu)^2\left(\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 4(C-\mu k)\right) > 0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Mając na uwadze (2.57) i (2.56) stwierdzamy konieczność spełnienia $\bar{\rho} > 0$. Ponadto z (2.56) dla istniejącego E_e mamy

$$\rho - \sqrt{\bar{\rho}} > 0. \tag{2.58}$$

Teraz sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 2.9. *Zdefiniujmy h_2 oraz δ jak w odpowiednio* (2.30) *i* (2.31)*. Niech $h = h_2$ oraz $\delta > 0$. Ponadto załóżmy, że stan stacjonarny E_e układu* (2.55) *istnieje. W układzie tym występuje wówczas bifurkacja podwojenia okresu w stanie E_e gdy h^* zmienia się w małym otoczeniu zera oraz jeżeli zachodzi jeden z dwóch warunków*

$$2(\alpha+\mu)^2 > C-\mu \tag{2.59}$$

lub

$$4(C-\mu k) + (\alpha+\mu)^2 \neq 4(\alpha+\mu) \tag{2.60}$$

oraz jeżeli h spełnia zależności

$$h \notin \left\{ \frac{C-\mu-\sqrt{\delta}}{(C-\mu k)(\alpha+\mu)}, \frac{2(\alpha+\mu)}{C-\mu} \right\}, \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} &\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(\frac{(C-\mu+\sqrt{\delta})}{2} - 2(C-\mu k)\right)h^3 \\ &+\left(2\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 2\mu(\alpha+\mu) - \frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}\left(1+\frac{C-\mu}{(\alpha+\mu)^2}\right)\right)h^2 \\ &+\left(2(C+\alpha) + \frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(\sqrt{\delta}-5\right)\right)h + 4 \neq 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Dowód. Zakładamy istnienie stanu stacjonarnego E_e układu (2.55). Przyjmujemy też $h = h_2$ i $\delta > 0$. Wówczas na mocy stwierdzenia 2.8 możliwa jest bifurkacja dla tego stanu. W celu analizy układu (2.55) dla zerowego stanu stacjonarnego wprowadźmy nowe zmienne:

$$u_n := x_n - x_e, \quad v_n := y_n - y_e. \tag{2.63}$$

Po podstawieniu ich do (2.55) dostajemy układ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (h+h^*)\Big(C - (u_n+x_e)(v_n+y_e) + v_n + y_e - \mu(u_n+x_e)\Big), \\ v_{n+1} &= v_n + (h+h^*)\Big((u_n+x_e)(v_n+y_e) - k(v_n+y_e)\Big), \end{aligned} \tag{2.64}$$

który można zapisać jako

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (h+h^*)\left(C - u_n v_n - u_n y_e - v_n x_e + x_e y_e + v_n + y_e - \mu u_n - \mu x_e\right), \\ v_{n+1} &= v_n + (h+h^*)\left(u_n v_n + u_n y_e + v_n x_e + x_e y_e - k v_n - k y_e\right). \end{aligned}$$

Rozwińmy prawą stronę podanego układu w szereg Taylora do drugiego rzędu w punkcie $(0,0)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{11}u_n + a_{12}v_n + a_{14}u_nv_n + b_{11}h^*u_n + b_{12}h^*v_n + b_{14}h^*u_nv_n + o(u_n+v_n),\\ v_{n+1} &= a_{21}u_n + a_{22}v_n + a_{24}u_nv_n + b_{21}h^*u_n + b_{22}h^*v_n + b_{24}h^*u_nv_n + o(u_n+v_n), \end{aligned} \tag{2.65}$$

gdzie

$$a_{11} = 1 - h(\mu + y_e) = 1 - h\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}, \quad b_{11} = -(\mu+y_e) = -\frac{C-\mu}{\alpha+\mu} \tag{2.66}$$

oraz

$$a_{12} = h(1-x_e) = -h(\alpha+\mu), \quad a_{14} = -h, \tag{2.67a}$$

$$b_{12} = 1 - x_e = -(\alpha+\mu), \quad b_{14} = 1, \quad a_{21} = hy_e = h\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu}, \tag{2.67b}$$

$$a_{22} = 1, \quad a_{24} = h, \quad b_{21} = y_e = \frac{C-\mu k}{\alpha+\mu}, \quad b_{22} = 0, \quad b_{24} = 1, \tag{2.67c}$$

funkcja $o(u_n+v_n)$ zaś spełnia $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{o(u_n+v_n)}{u_n+v_n} = 0$. Zapiszmy współczynniki (2.66) przy użyciu ρ z (2.56) jako

$$a_{11} = 1 - h\rho, \quad b_{11} = -\rho. \tag{2.68}$$

Macierz Jacobiego układu (2.64) dla stanu zerowego ma postać

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}h^* & a_{12} + b_{12}h^* \\ a_{21} + b_{21}h^* & a_{22} + b_{22}h^* \end{pmatrix}.$$

Macierz tę z użyciem (2.67) i (2.68) zapisujemy jako

$$\begin{pmatrix} 1 - (h+h^*)\frac{C-\mu}{\alpha+\mu} & -(h+h^*)(\alpha+\mu) \\ (h+h^*)\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Wielomian charakterystyczny macierzy (2.69) ma postać

$$\lambda^2 + \Big((h+h^*)\rho - 2\Big)\lambda + 1 - (h+h^*)\rho + (h+h^*)^2(C-\mu k), \tag{2.70}$$

jej wartości własne zaś wynoszą

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{h+h^*}{2}\left(\rho \mp \sqrt{\bar{\rho}}\right). \tag{2.71}$$

Ponieważ $\bar{\rho} > 0$, otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oraz $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Niech $h^* = 0$. Współrzędne a i b wektora własnego $(a,\ b)^T$ odpowiadającego wartości własnej λ_1 spełniają wówczas zależność $b = \frac{\rho+\sqrt{\bar{\rho}}}{-2(\alpha+\mu)}a$, dla λ_2 zaś równość $b = \frac{\rho-\sqrt{\bar{\rho}}}{-2(\alpha+\mu)}a$. Wyrażenie $\lambda_{1,2} - a_{11}$ z (2.68) wynosi

$$\lambda_{1,2} - a_{11} = 1 - \frac{h}{2}\left(\rho \mp \sqrt{\bar{\rho}}\right) - 1 + h\rho = h\left(\frac{\rho \pm \sqrt{\bar{\rho}}}{2}\right).$$

Oba wektory możemy zapisać odpowiednio dla λ_1 i λ_2 w postaci

$$v_1 := \begin{pmatrix} -(\alpha+\mu) \\ \frac{\rho+\sqrt{\bar{\rho}}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -(\alpha+\mu) \\ \frac{\rho-\sqrt{\bar{\rho}}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Oczywiście dla $h = h_2$ dostajemy $\lambda_1 = -1$ oraz

$$\lambda_2 = 1 - \frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) \notin \{-1, 1\}, \tag{2.72}$$

co wynika z dowodu stwierdzenia 2.8.

Teraz dla $h = h_2$ zdefiniujmy macierz:

$$T := (v_1 \quad v_2) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ -1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix},$$

którą zastosujemy do przekształcenia

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix},$$

tak, aby za pomocą nowych zmiennych U_n i V_n przedstawić układ (2.65) w postaci, którą zastosujemy do twierdzenia o rozmaitości centralnej przedstawionego w [48]. Uwzględnijmy powyższe przekształcenie w (2.65). Dostajemy

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= -U_n + F(u_n, v_n, h^*) + o(u_n + v_n), \\ V_{n+1} &= \lambda_2 V_n + G(u_n, v_n, h^*) + o(u_n + v_n), \end{aligned} \tag{2.73}$$

gdzie

$$F(U_n, V_n, h^*) = \frac{s_1}{s_2}\left(a_{14}U_nV_n + b_{14}U_nV_nh^*\right) + \frac{U_nh^*}{s_2}\Big(b_{11}(\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}b_{21}\Big) + \frac{V_nh^*}{s_2}\Big(b_{12}(\lambda_2 - a_{11})\Big)$$

oraz

$$G(U_n, V_n, h^*) = \frac{s_3}{s_2}\left(a_{14}U_nV_n + b_{14}U_nV_nh^*\right) + \frac{U_nh^*}{s_2}\Big(b_{11}(1 + a_{11}) + a_{12}b_{21}\Big) + \frac{V_nh^*}{s_2}\Big(b_{12}(1 + a_{11})\Big)$$

dla

$$s_1 = \lambda_2 - a_{11} + a_{12}, \quad s_2 = a_{12}(\lambda_2 + 1), \quad s_3 = 1 + a_{11} - a_{12}. \tag{2.74}$$

Z twierdzenia o rozmaitości centralnej uzyskujemy przybliżenie rozmaitości $W^c(0,0)$ wyrażone równaniem:

$$W^c(0,0) = \left\{(U_n, V_n) : V_n = a_3U_nh^* + a_4U_n^2 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^2\Big)\right\},$$

gdzie $o\big((|U_n| + |h^*|)^2\big)$ jest funkcją zmiennych (U_n, h^*) co najmniej trzeciego rzędu oraz

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{(1 + a_{11})b_{12}(1 + a_{11})}{a_{12}(\lambda_2 + 1)^2} - \frac{a_{12}b_{21} + b_{11}(1 + a_{11})}{(\lambda_2 + 1)^2}, \\ a_4 &= -\frac{(1 + a_{11})\big(a_{12}a_{24} + a_{14}(1 + a_{11})\big)}{1 - (\lambda_2)^2}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Na $W^c(0,0)$ dostajemy

$$\begin{aligned} u_n &= a_{12}U_n + a_3a_{12}U_nh^* + a_4a_{12}U_n^2 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^2\Big), \\ v_n &= -(1 + a_{11})U_n + a_3(\lambda_2 - a_{11})U_nh^* + a_4(\lambda_2 - a_{11})U_n^2 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^2\Big). \end{aligned}$$

Uzyskujemy stąd

$$\begin{aligned} u_n^2 &= a_{12}^2U_n^2 + 2a_3a_{12}^2U_n^2h^* + 2a_4a_{12}^2U_n^3 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^3\Big), \\ u_nv_n &= -a_{12}(1 + a_{11})U_n^2 + a_3a_{12}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1)U_n^2h^* \\ &\quad + a_4a_{12}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1)U_n^3 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^3\Big), \\ v_n^2 &= (1 + a_{11})^2U_n^2 - 2a_3(1 + a_{11})(\lambda_2 - a_{11})U_n^2h^* \\ &\quad - 2a_4(1 + a_{11})(\lambda_2 - a_{11})U_n^3 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^3\Big). \end{aligned}$$

Ponadto otrzymujemy

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= -U_n + F(u_n, v_n, h) \\ &= -U_n + c_1U_n^2 + c_2U_nh^* + c_3U_n^2h^* + c_4U_n(h^*)^2 + c_5U_n^3 + o\Big(\big(|U_n| + |h^*|\big)^3\Big), \end{aligned}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
c_1 =& -\frac{s_1}{s_2}a_{14}a_{12}(1+a_{11}),\\
c_2 =& \frac{b_{11}(\lambda_2-a_{11})-a_{12}b_{21}}{\lambda_2+1}-\frac{(1+a_{11})b_{12}(\lambda_2-a_{11})}{a_{12}(\lambda_2+1)},\\
c_3 =& \frac{s_1a_3a_{14}(\lambda_2-2a_{11}-1)}{\lambda_2+1}+\frac{a_4\Big((\lambda_2-a_{11})b_{11}-a_{12}b_{21}\Big)}{\lambda_2+1}\\
&+\frac{a_4(\lambda_2-a_{11})(\lambda_2-a_{11})b_{12}}{a_{12}(\lambda_2+1)}-\frac{s_1b_{14}(1+a_{11})}{\lambda_2+1},\\
c_4 =& \frac{a_3\Big((\lambda_2-a_{11})b_{11}-a_{12}b_{21}\Big)}{\lambda_2+1}+\frac{a_3(\lambda_2-a_{11})(\lambda_2-a_{11})b_{12}}{a_{12}(\lambda_2+1)},\\
c_5 =& \frac{a_4a_{14}s_1(\lambda_2-2a_{11}-1)}{\lambda_2+1}.
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Jeśli ograniczymy układ (2.73) do $W^c(0,0)$, otrzymujemy odzworowanie G^* postaci

$$
G^*(U_n,h^*)=-U_n+c_1U_n^2+c_2U_nh^*+c_3U_n^2h^*+c_4U_n(h^*)^2+c_5U_n^3+o\Big(\big(|U_n|+|h^*|\big)^3\Big).
$$

Zdefiniujmy współczynniki

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 :=& \left(\frac{\partial^2G^*}{\partial U_n\partial h^*}+\frac{1}{2}\frac{\partial G^*}{\partial h^*}\frac{\partial^2G^*}{\partial U_n^2}\right)\Big|_{(0,0)}=c_2,\\
\sigma_2 :=& \left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3G^*}{\partial(h^*)^3}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G^*}{\partial h^*}\frac{\partial^2G^*}{\partial U_n^2}\right)^2\right)\Big|_{(0,0)}=c_1^2+c_5.
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

W celu zbadania występowania BPO w stanie stacjonarnym E_e w układzie (2.55) zastosujemy poniższy lemat. Przytoczmy go bez dowodu.

Lemat 2.10. *Jeśli $\sigma_1,\sigma_2\neq 0$, to w układzie (2.55) zachodzi bifurkacja podwojenia okresu w stanie stacjonarnym E_e, gdy parametr h^* zmienia się w małym otoczeniu zera.*

Lemat 2.10 opiera się na twierdzeniu 3.1 z [56], które wynika z twierdzenia 3.5.1 z [48]. Dowód twierdzenia 3.5.1 znajduje się w [48].

Uzyskanie pierwszego warunku z (2.61)

Sprawdźmy, przy jakich założeniach mamy $\sigma_1\neq 0$. Aby zachować przejrzystość obliczeń, sprawdzimy równość $\sigma_1=0$. Korzystając z definicji c_2 z (2.76) możemy ją zapisać jako

$$
\frac{b_{11}(\lambda_2-a_{11})-a_{12}b_{21}}{\lambda_2+1}-\frac{(1+a_{11})b_{12}(\lambda_2-a_{11})}{a_{12}(\lambda_2+1)}=0,
$$

$$
b_{11}(\lambda_2-a_{11})-a_{12}b_{21}-\frac{(1+a_{11})b_{12}(\lambda_2-a_{11})}{a_{12}}=0.
$$

Korzystając z (2.67), (2.68) oraz (2.72) możemy przepisać powyższe wyrażenie w postaci

$$
-\rho h\left(\frac{\rho-\sqrt{\bar\rho}}{2}\right)+h(\alpha+\mu)\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu}-\frac{(2-h\rho)(\alpha+\mu)h\left(\frac{\rho-\sqrt{\bar\rho}}{2}\right)}{h(\alpha+\mu)}=0,
$$

co daje ciąg równości

$$
-\rho h\left(\frac{\rho-\sqrt{\bar\rho}}{2}\right)+h(C-\mu k)-(2-h\rho)\left(\frac{\rho-\sqrt{\bar\rho}}{2}\right)=0,
$$

$$
h(C-\mu k)-\big(\rho-\sqrt{\bar\rho}\big)=0,
$$

$$h = \frac{\rho - \sqrt{\bar{\rho}}}{C - \mu k}. \tag{2.78}$$

Zauważmy, że można zapisać

$$\begin{aligned} \rho \pm \sqrt{\bar{\rho}} &= \frac{C-\mu}{\alpha+\mu} \pm \sqrt{\rho^2 - 4(C-\mu k)} = \frac{C-\mu}{\alpha+\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 - 4(C-\mu k)} \\ &= \frac{C-\mu}{\alpha+\mu} \pm \frac{1}{\alpha+\mu}\sqrt{(C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(\alpha+\mu)^2} \\ &= \frac{C-\mu}{\alpha+\mu} \pm \frac{1}{\alpha+\mu}\sqrt{\delta} = \frac{C-\mu \pm \sqrt{\delta}}{\alpha+\mu} = \frac{C-\mu \pm \sqrt{\delta}}{k-1}. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Po uwzględnieniu (2.79) w (2.78) dostajemy

$$h = \frac{C-\mu-\sqrt{\delta}}{(C-\mu k)(k-1)} = \frac{C-\mu-\sqrt{\delta}}{(C-\mu k)(\alpha+\mu)}. \tag{2.80}$$

Zachodzą $C > \mu k$, (H) oraz (2.58), więc prawa strona zależności (2.80) ma dodatni znak. Zajmujemy się $\sigma_1 \neq 0$, zatem rozważamy zaprzeczenie (2.80) postaci

$$h \neq \frac{C-\mu-\sqrt{\delta}}{(C-\mu k)(\alpha+\mu)},$$

które uwzględniono w (2.61).

Uzyskanie (2.59) **lub** (2.60)

Teraz sprawdźmy, dla jakiego h zachodzi warunek $\sigma_2 \neq 0$. Analogicznie jak dla $\sigma_1 \neq 0$ rozważymy $\sigma_2 = 0$. Tę równość przy użyciu wzorów na c_1 i c_5 z (2.76) zapisujemy w postaci

$$\left(-\frac{s_1}{s_2} a_{14} a_{12}(1+a_{11})\right)^2 + \frac{a_4 a_{14} s_1 (\lambda_2 - 2a_{11} - 1)}{\lambda_2 + 1} = 0,$$

a przy użyciu notacji z (2.74) jako

$$\left(\frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{\lambda_2 + 1} a_{14}(1+a_{11})\right)^2 + \frac{a_4 a_{14}(\lambda_2 - a_{11} + a_{12})(\lambda_2 - 2a_{11} - 1)}{\lambda_2 + 1} = 0.$$

Po wyłączeniu części wspólnej z lewej strony powyższej zależności dostajemy

$$\frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{\lambda_2 + 1} a_{14} = 0 \tag{2.81}$$

lub

$$\frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{\lambda_2 + 1} a_{14}(1+a_{11})^2 + a_4(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) = 0. \tag{2.82}$$

Ze względu na $a_{14} \neq 0$ warunek (2.81) jest równoważny zależności

$$\lambda_2 - a_{11} + a_{12} = 0, \tag{2.83}$$

którą z użyciem (2.72) i (2.68) można zapisać jako

$$-\frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) + h\rho - h(\alpha+\mu) = 0, \tag{2.84}$$

$$h\left(-\frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\bar{\rho}}}{2} + \rho - (\alpha+\mu)\right) = 0,$$

$$\frac{\rho}{2} - \frac{\sqrt{\bar{\rho}}}{2} - (\alpha+\mu) = 0,$$

$$\rho - 2(\alpha+\mu) = \sqrt{\bar{\rho}}. \tag{2.85}$$

Aby równanie (2.85) było sprzeczne, wystarczy, by zachodziło $\rho < 2(\alpha+\mu)$, co możemy zapisać jako

$$\frac{C-\mu}{\alpha+\mu} < 2(\alpha+\mu),$$

$$2(\alpha+\mu)^2 > C-\mu.$$

Jeżeli $\rho > 2(\alpha+\mu)$, to podnosimy obie strony (2.85) do kwadratu. Dostajemy

$$\rho^2 - 4(\alpha+\mu) + (\alpha+\mu)^2 = \rho^2 - 4(C-\mu k),$$

$$4(C-\mu k) + (\alpha+\mu)^2 = 4(\alpha+\mu).$$

Interesuje nas zaprzeczenie powyższej równości, więc uzyskujemy

$$4(C-\mu k) + (\alpha+\mu)^2 \neq 4(\alpha+\mu).$$

Uzyskanie drugiego warunku z (2.61)

Przeanalizujmy warunek (2.82), który po uwzględnieniu (2.75) zapisujemy jako

$$\frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{\lambda_2 + 1} a_{14}(1+a_{11})^2 - \frac{(1+a_{11})\Big(a_{12}a_{24} + a_{14}(1+a_{11})\Big)}{1-\lambda_2^2}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) = 0. \tag{2.86}$$

Z (2.67) mamy $a_{24} = -a_{14}$. Po podstawieniu tej zależności do (2.86) dostajemy

$$\frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{1 + \lambda_2} a_{14}(1+a_{11})^2 - \frac{(1+a_{11})\Big(-a_{12}a_{14} + a_{14}(1+a_{11})\Big)}{1-\lambda_2^2}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) = 0. \tag{2.87}$$

Po pomnożeniu (2.87) przez $1-\lambda_2^2$, uzyskujemy

$$(1-\lambda_2)(\lambda_2 - a_{11} + a_{12})(1+a_{11})^2 + (1+a_{11})(a_{12} - 1 - a_{11})(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) = 0. \tag{2.88}$$

Po wyłączeniu składnika $1+a_{11}$ z (2.88) dostajemy

$$1 + a_{11} = 0 \tag{2.89}$$

lub

$$(1-\lambda_2)(\lambda_2 - a_{11} + a_{12})(1+a_{11}) + (a_{12} - 1 - a_{11})(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) = 0. \tag{2.90}$$

Warunek (2.89) jest równoważny zależności $2 - h\rho = 0$, którą z użyciem (2.56) zapisujemy jako

$$h = \frac{2}{\rho} = \frac{2(\alpha+\mu)}{C-\mu}.$$

Interesuje nas $h \neq \frac{2}{\rho}$, co wzięto pod uwagę w (2.61).

Uzyskanie (2.62)

Przejdźmy do (2.90). Z użyciem (2.67), (2.68) oraz (2.71) przedstawmy zależności:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_2 &= 1 - 1 + \frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) = \frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right), \\ 1 + a_{11} &= 2 - h\rho, \\ a_{12} - 1 - a_{11} &= -h(\alpha+\mu) - 2 + h\rho, \\ \lambda_2 - 2a_{11} - 1 &= 1 - \frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) - 2 + 2h\rho - 1 = -2 - \frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) + 2h\rho. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Z równoważności (2.83) i (2.84) dostajemy

$$\lambda_2 - a_{11} + a_{12} = -\frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) + h\rho - h(\alpha+\mu) = \frac{h}{2}\left(\rho - \sqrt{\bar{\rho}}\right) - h(\alpha+\mu). \tag{2.92}$$

Uwzględniając (2.91) i (2.92) w (2.90) mamy

$$\frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right)\left(\frac{h}{2}\left(\rho - \sqrt{\bar{\rho}}\right) - h(\alpha+\mu)\right)(2-h\rho) \\ + \Big(-h(\alpha+\mu) - 2 + h\rho\Big)\left(-2 - \frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) + 2h\rho\right) = 0,$$

co po przekształceniach daje

$$\frac{h^2}{4}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right)\Big(\rho - \sqrt{\bar{\rho}} - 2(\alpha+\mu)\Big)(2-h\rho) + \Big(h(\alpha+\mu-\rho) + 2\Big)\left(\frac{h}{2}\left(\rho + \sqrt{\bar{\rho}}\right) + 2 - 2h\rho\right) = 0. \tag{2.93}$$

Powróćmy do zależności (2.79). Korzystając z definicji h_1 i h_2 z (2.30) możemy zamiast (2.79) zapisać

$$\rho + \sqrt{\bar{\rho}} = \frac{4}{h_1} \tag{2.94}$$

oraz

$$\rho - \sqrt{\bar{\rho}} = \frac{4}{h_2}. \tag{2.95}$$

W celu uproszczenia zapisu z (2.93), skorzystajmy z zależności (2.94) i (2.95). Po uwzględnieniu ich w powyższym równaniu, dostajemy

$$\frac{h^2}{4}\frac{4}{h_1}\left(\frac{4}{h_2} - 2(\alpha+\mu)\right)(2-h\rho) + \Big(h(\alpha+\mu-\rho)+2\Big)\left(\frac{h}{2}\cdot\frac{4}{h_1} + 2 - 2h\rho\right) = 0,$$

$$\frac{h^2}{h_1}\left(\frac{4}{h_2} - 2(\alpha+\mu)\right)(2-h\rho) + 2\Big(h(\alpha+\mu-\rho)+2\Big)\left(h\left(\frac{1}{h_1} - \rho\right) + 1\right) = 0$$

oraz

$$q_3 h^3 + q_2 h^2 + q_1 h + 4 = 0, \tag{2.96}$$

gdzie

$$\begin{aligned} q_3 &= -\frac{2\rho}{h_1}\left(\frac{2}{h_2} - (\alpha+\mu)\right), \\ q_2 &= \frac{4}{h_1}\left(\frac{2}{h_2} - (\alpha+\mu)\right) + 2(\alpha+\mu-\rho)\left(\frac{1}{h_1} - \rho\right), \\ q_1 &= 4(\alpha+\mu)\rho + 2(\alpha+\mu-\rho) + 4\left(\frac{1}{h_1} - \rho\right) = 2(\alpha+\mu)(1+2\rho) + \frac{4}{h_1} - 6\rho. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Uwzględnijmy definicje ρ z (2.56) oraz h_1 i h_2 z (2.30) we współczynnikach z (2.97). Parametr q_3 zapiszmy jako

$$\begin{aligned} q_3 &= -\frac{2(C-\mu)(C-\mu+\sqrt{\delta})}{4(k-1)(\alpha+\mu)}\left(\frac{2(C-\mu-\sqrt{\delta})}{4(k-1)} - (\alpha+\mu)\right) \\ &= -\frac{(C-\mu)(C-\mu+\sqrt{\delta})}{2(\alpha+\mu)(\alpha+\mu)}\left(\frac{(C-\mu-\sqrt{\delta})}{2(\alpha+\mu)} - (\alpha+\mu)\right) \\ &= -\frac{(C-\mu)\left((C-\mu)^2-\delta\right)}{2(\alpha+\mu)^3} + \frac{(C-\mu)(C-\mu+\sqrt{\delta})}{2(\alpha+\mu)}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (2.31) dostajemy

$$q_3 = \frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(-\frac{(C-\mu)^2-(C-\mu)^2+4(C-\mu k)(k-1)^2}{2(\alpha+\mu)^2}+\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}\right)$$
$$= \frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(-\frac{4(C-\mu k)(\alpha+\mu)^2}{2(\alpha+\mu)^2}+\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}\right) = \frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}-2(C-\mu k)\right).$$

Przekształcamy współczynnik q_2 uzyskując

$$q_2 = \frac{4(C-\mu+\sqrt{\delta})}{4(\alpha+\mu)}\left(\frac{2(C-\mu-\sqrt{\delta})}{4(\alpha+\mu)}-(\alpha+\mu)\right)+2\left(\alpha+\mu-\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)\left(\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{4(\alpha+\mu)}-\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)$$
$$= \frac{4(C-\mu k)(\alpha+\mu)^2}{2(\alpha+\mu)^2}-(C-\mu+\sqrt{\delta})+\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}$$
$$-2(C-\mu)-\frac{(C-\mu)(C-\mu+\sqrt{\delta})}{2(\alpha+\mu)^2}+2\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2$$
$$= 2(C-\mu k)-\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}-2C+2\mu-\frac{(C-\mu)(C-\mu+\sqrt{\delta})}{2(\alpha+\mu)^2}+2\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2$$
$$= 2\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2-2\mu(\alpha+\mu)-\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}-\frac{(C-\mu)(C-\mu+\sqrt{\delta})}{2(\alpha+\mu)^2}$$
$$= 2\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2-2\mu(\alpha+\mu)-\frac{C-\mu+\sqrt{\delta}}{2}\left(1+\frac{C-\mu}{(\alpha+\mu)^2}\right).$$

Parametr q_1 przyjmuje postać

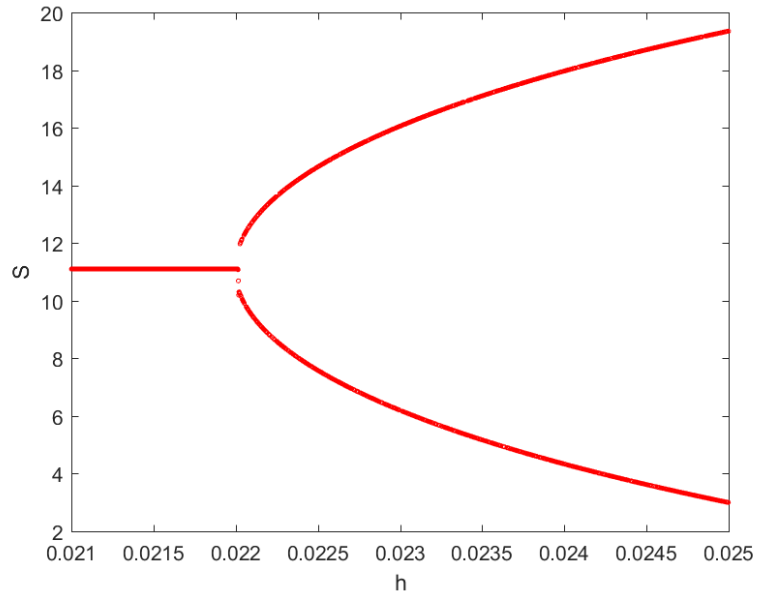
$$q_1 = 2(\alpha+\mu)\left(1+2\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)+\frac{4(C-\mu+\sqrt{\delta})}{4(\alpha+\mu)}-6\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}$$
$$= 2(\alpha+\mu)+2(C-\mu)+\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(\sqrt{\delta}-5\right) = 2(C+\alpha)+\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\left(\sqrt{\delta}-5\right).$$

Rozpatrujemy $\sigma_2 \neq 0$, więc interesuje nas zaprzeczenie równania (2.96), które ma postać (2.62). □

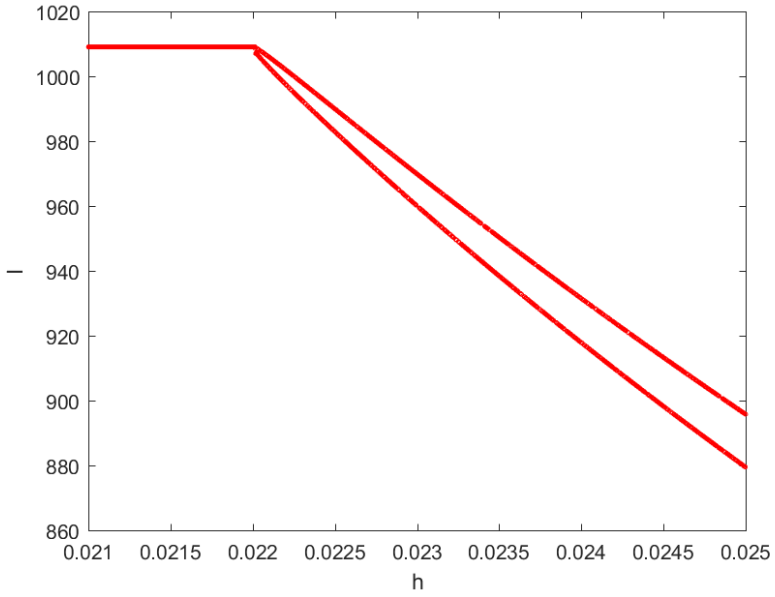
Rozważania teoretyczne uzupełnimy symulacjami numerycznymi. Na rysunkach 2.1 – 2.4 zobrazowano BPO względem h w układzie

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + h\left(C-\beta S_n I_n + I_n - \mu S_n\right), \\ I_{n+1} &= S_n + h\big(\beta S_n I_n - (\gamma+\alpha+\mu) I_n\big), \end{aligned} \tag{2.98}$$

będącym odpowiednikiem modelu (2.1) przed skalowaniem. Rysunki 2.3 i 2.4 stanowią powiększenie odpowiednio rysunków 2.1 i 2.2. Do symulacji jako warunek początkowy wzięto $(x_0, y_0) = (1200, 20)$, jako wartości parametrów zaś użyto: $C = 100$, $\beta = 0,9 \cdot 10^{-2}$, $\mu = 0,009$, $\alpha = 0,09$, $\gamma = 0,9$. Wartości parametrów μ, α i γ zaczerpnięto z roczników statystycznych dotyczących ludności województwa warmińsko-mazurskiego. Pozostałe parametry wybrano arbitralnie – dobór właściwych wartości w celu wskazania bifurkacji jest trudne. Symulacje wykonano w środowisku programistycznym Matlab. Użyto dwóch różnych ciągów wartości kroków dyskretyzacji. W przypadku symulacji zobrazowanych na rysunkach 2.1 i 2.2 wartości kroków dyskretyzacji tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $2 \cdot 10^{-6}$, w przypadku symulacji dotyczących rysunków 2.3 i 2.4 – o różnicy $1 \cdot 10^{-7}$. Na podstawie rysunków 2.3 i 2.4 stwierdzamy, że wartość krytyczna bifurkacji kroku dyskretyzacji zawiera się w przedziale $(0,02201; 0,02202)$.



Rysunek 2.1: *BPO* w układzie (2.98) – zależność zmiennej S od h.



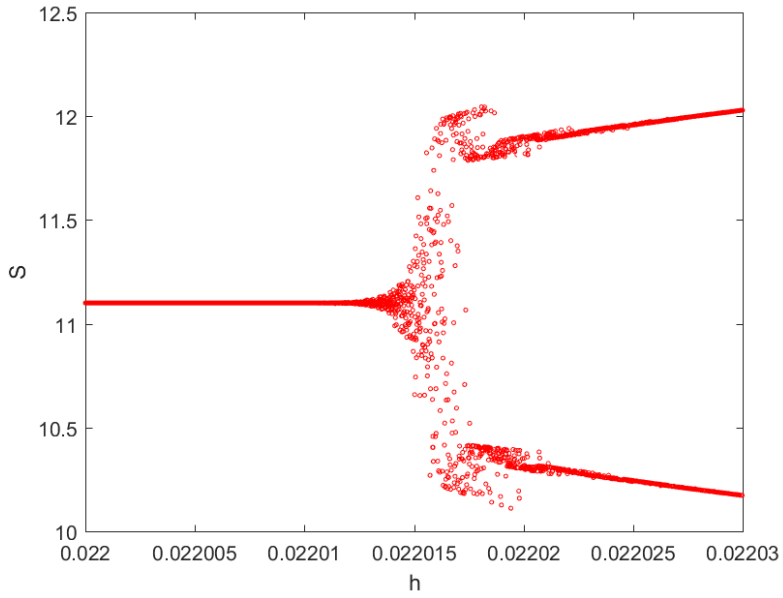
Rysunek 2.2: *BPO* w układzie (2.98) – zależność zmiennej I od h.

2.1.4 Stabilność cyklu o okresie 2

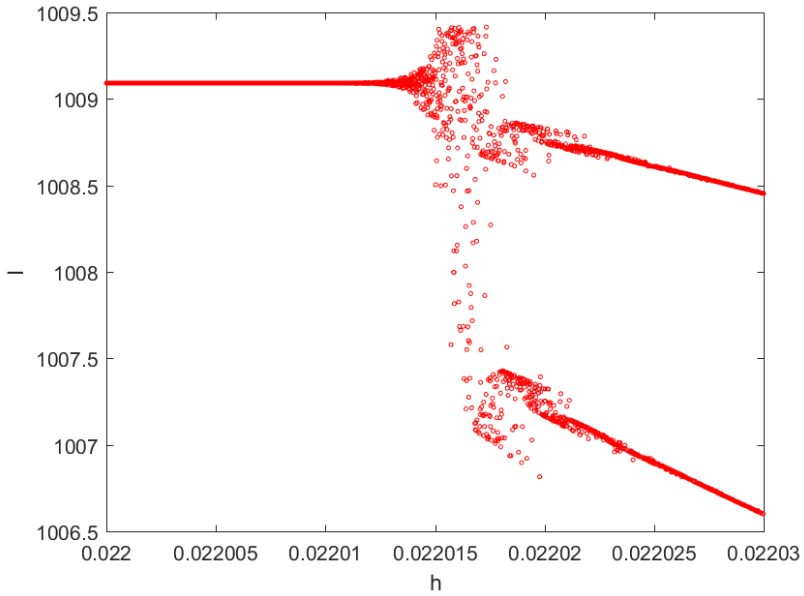
Teraz zajmijmy się zbadaniem stabilności cyklu powstałego na skutek bifurkacji podwojenia okresu dla stanu E_e. W tym celu skorzystamy z poniższego lematu.

Lemat 2.11. *Zakładamy, że w układzie* (2.55) *zachodzi bifurkacja podwojenia okresu w stanie stacjonarnym* E_e. *Niech* σ_2 *będzie zdefiniowana jak w* (2.77). *Jeśli* $\sigma_2 > 0$, *to cykl o okresie* 2 *bifurkujący ze stanu* E_e *jest stabilny. Jeśli* $\sigma_2 < 0$, *to cykl jest niestabilny.*

Lemat 2.11 oparto na twierdzeniu 3.1 z [56].
Ustalmy znak wyrażenia σ_2 zdefiniowanego w (2.77). Z wcześniejszej analizy wynika, że w tym celu



Rysunek 2.3: BPO w układzie (2.98) – zależność zmiennej S od h.



Rysunek 2.4: BPO w układzie (2.98) – zależność zmiennej I od h.

należy zbadać znak wyrażeń będacymi lewymi stronami równań (2.81) i (2.87) postaci odpowiednio

$$\bar{q}_1 := \frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{\lambda_2 + 1} a_{14}$$

oraz

$$\bar{q}_2 := \frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{1 + \lambda_2} a_{14}(1 + a_{11})^2 - \frac{(1 + a_{11})\Big(- a_{12}a_{14} + a_{14}(1 + a_{11})\Big)}{1 - \lambda_2^2}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1).$$

Zauważmy, że zachodzi

$$\sigma_2 = \bar{q}_1 \bar{q}_2. \tag{2.99}$$

Rozpatrzmy najpierw znak $\bar{q}_1$. Korzystając z oznaczenia a_{14} z (2.67) zapisujemy $\bar{q}_1$ jako

$$\bar{q}_1 = -h\frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{\lambda_2 + 1}. \tag{2.100}$$

Z (2.38) mamy

$$\lambda_2 + 1 > 0 \quad \text{dla} \quad h < h_1. \tag{2.101}$$

Z analizy równania (2.83) wynika, że

$$\lambda_2 - a_{11} + a_{12} > 0, \quad \text{jeśli} \quad 4(C - \mu k) + (\alpha + \mu)^2 > 4(\alpha + \mu). \tag{2.102}$$

Ustalmy znak $\bar{q}_1$ łącząc (2.100), (2.101) oraz (2.102). Stwierdzamy, że $\bar{q}_1 > 0$ dla jednego z zestawów nierówności:

$$h > h_1, \quad 4(C - \mu k) + (\alpha + \mu)^2 > 4(\alpha + \mu) \tag{2.103}$$

lub

$$h < h_1, \quad 4(C - \mu k) + (\alpha + \mu)^2 < 4(\alpha + \mu). \tag{2.104}$$

Analogicznie stwierdzamy, że $\bar{q}_1 < 0$ dla jednego z zestawów warunków:

$$h < h_1, \quad 4(C - \mu k) + (\alpha + \mu)^2 > 4(\alpha + \mu) \tag{2.105}$$

lub

$$h > h_1, \quad 4(C - \mu k) + (\alpha + \mu)^2 < 4(\alpha + \mu). \tag{2.106}$$

Przejdźmy do $\bar{q}_2$. Jego znak możemy określić badając wyrażenia

$$\bar{r}_1 := a_{14}(1 + a_{11}) = -h(1 + a_{11})$$

oraz

$$\begin{aligned}
\bar{r}_2 &:= \frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{1 + \lambda_2}(1 + a_{11}) + \frac{(a_{12} - 1 - a_{11})}{1 - \lambda_2^2}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) \\
&= \frac{\lambda_2 - a_{11} + a_{12}}{1 + \lambda_2}(1 + a_{11}) + \frac{(a_{12} - 1 - a_{11})}{1 - \lambda_2^2}(\lambda_2 - 2a_{11} - 1) \\
&= \frac{(1 - \lambda_2)(\lambda_2 - a_{11} + a_{12})(1 + a_{11})}{1 - \lambda_2^2} + \frac{(a_{12} - 1 - a_{11})(\lambda_2 - 2a_{11} - 1)}{1 - \lambda_2^2}.
\end{aligned}$$

Oczywiście zachodzi

$$\bar{q}_2 = \bar{r}_1\bar{r}_2. \tag{2.107}$$

Zauważmy, że z analizy równania (2.89) wynika, że

$$\bar{r}_1 > 0 \quad \text{dla} \quad h > \frac{2(\alpha + \mu)}{C - \mu}. \tag{2.108}$$

Ustalmy znak $\bar{r}_2$. Najpierw zdefiniujmy wyrażenia

$$\bar{r}_3 := 1 - \lambda_2^2 = (1 - \lambda_2)(1 + \lambda_2)$$

oraz

$$\bar{r}_4 := (1 - \lambda_2)(\lambda_2 - a_{11} + a_{12})(1 + a_{11}) + (a_{12} - 1 - a_{11})(\lambda_2 - 2a_{11} - 1).$$

Korzystając z tych wyrażeń zapisujemy

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_3\bar{r}_4. \tag{2.109}$$

Rozpatrzmy znak $\bar{r}_3$. Zauważmy, że $\bar{r}_3 > 0$ dla

$$-1 < \lambda_2 < 1. \tag{2.110}$$

Z (2.38) i (2.40) wynika, że (2.110) zachodzi dla $h < h_1$. Stąd mamy

$$\bar{r}_3 > 0 \quad \text{dla} \quad h < h_1. \tag{2.111}$$

Warunek

$$\lambda_2 > -1 \quad \text{lub} \quad \lambda_2 > 1,$$

przeciwny do (2.110), zachodzi dla $h > h_1$.

Rozpatrzmy znak wyrażenia $\bar{r}_4$. Mając na uwadze rozważania w poprzednim podrozdziale piszemy

$$\bar{r}_4 = q_3 h^3 + q_2 h^2 + q_1 h + 4,$$

gdzie q_3, q_2 i q_1 zdefiniowano w (2.97). Mamy więc $\bar{r}_4 > 0$ dla

$$q_3 h^3 + q_2 h^2 + q_1 h + 4 > 0. \tag{2.112}$$

Lewa strona (2.112) stanowi wielomian trzeciego stopnia zależny do h. Analiza (2.112) jest zatem trudna i została pominięta w rozprawie. Wyraz wolny wielomianu ma dodatni znak. Możemy więc stwierdzić, że

$$\bar{r}_4 > 0 \quad \text{dla dostatecznie małego } h. \tag{2.113}$$

Nierówność $\bar{r}_4 > 0$ jest trudna do rozwiązania dla dowolnego h, dlatego rozpatrzymy przypadek wystarczająco małego h. Ze względu na tak ustalone h uwzględnimy tylko zestaw warunków

$$h < h_1, \quad h < \frac{2(\alpha+\mu)}{C-\mu}.$$

Na podstawie (2.108) i (2.111) dalej zakładamy

$$\bar{r}_3 > 0, \quad \bar{r}_1 < 0. \tag{2.114}$$

Z (2.107) i (2.109) dostajemy

$$\bar{q}_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_3 \bar{r}_4.$$

Łącząc (2.113) i (2.114) otrzymujemy

$$\bar{q}_2 < 0 \tag{2.115}$$

dla dostatecznie małego h.

Ponieważ $h < h_1$, z nierówności (2.103)–(2.106) uzwględniamy tylko (2.104) i (2.105). Łącząc (2.99), (2.104), (2.105) i (2.115) dostajemy dla dostatecznie małego h zależności

$$\sigma_2 > 0 \quad \text{dla} \quad 4(C-\mu k) + (\alpha+\mu)^2 > 4(\alpha+\mu), \tag{2.116}$$

$$\sigma_2 < 0 \quad \text{dla} \quad 4(C-\mu k) + (\alpha+\mu)^2 < 4(\alpha+\mu). \tag{2.117}$$

Na mocy lematu 2.11 oraz zależności (2.116) i (2.117) formułujemy wniosek:

Wniosek 2.12. *Załóżmy, że zachodzi bifurkacja podwojenia okresu dla istniejącego stanu E_e w układzie (2.55). Niech h będzie wystarczająco małe. Wówczas cykl o okresie 2 bifurkujący ze stanu E_e jest stabilny, jeśli*

$$4(C-\mu k) + (\alpha+\mu)^2 > 4(\alpha+\mu), \tag{2.118}$$

natomiast dla przeciwnego przypadku cykl jest niestabilny.

Przyjrzyjmy się nierówności (2.118), którą można zapisać jako

$$4C - 4\mu - 4\alpha\mu - 4\mu^2 + \alpha^2 + 2\alpha\mu + \mu^2 > 4\alpha + 4\mu,$$

$$4C - 2\alpha\mu - 3\mu^2 + \alpha^2 > 4\alpha + 8\mu,$$

$$4C + \alpha^2 > 4\alpha + 8\mu + 2\alpha\mu + 3\mu^2,$$

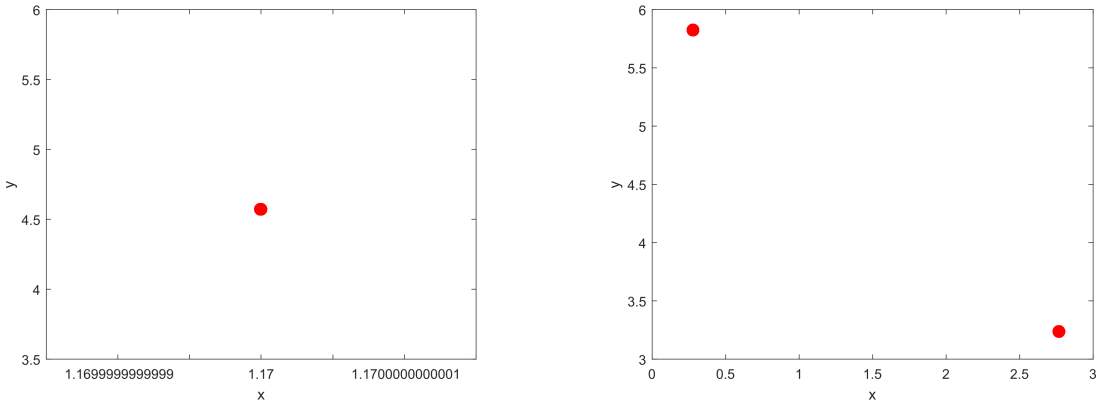
oraz

$$C + \frac{1}{4}\alpha^2 > \alpha + 2\mu + \frac{1}{2}\alpha\mu + \frac{3}{4}\mu^2. \tag{2.119}$$

Przypomnijmy, że zachodzi (H). Założymy dodatkowo $C \gg \alpha$, co z powodu znaczenia α jest sensownym założeniem. Wówczas dostajemy prawdziwość (2.119) oraz, co za tym idzie, (2.118). Stwierdzamy więc, że jeśli zachodzą założenia wniosku 2.12, to cykl o okresie 2 bifurkujący ze stanu E_e jest stabilny.

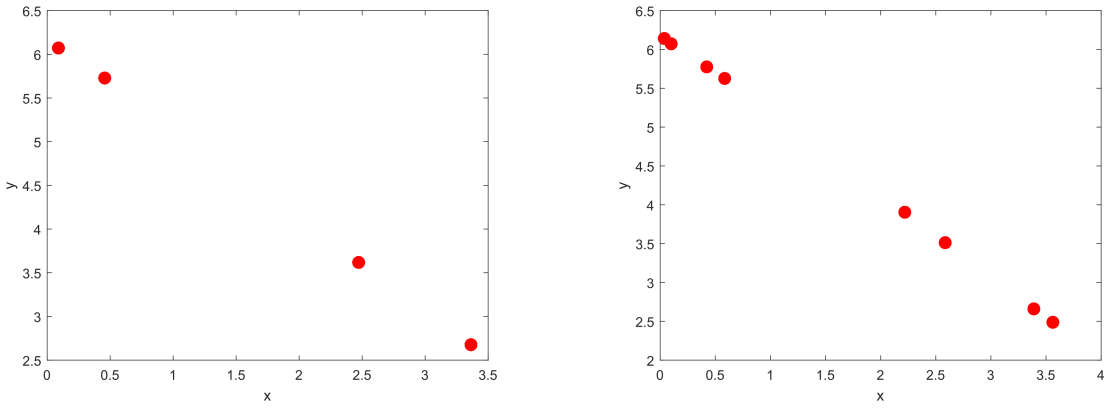
Symulacje

Dokonano symulacji obrazujących stabilność cykli w układzie (2.55). Przyjęto $(x_0, y_0) = (0,2; 0,05)$, $\mu = 0,02$ oraz $\alpha = 0,15$. Jako wartość C ustalono $0,8$, aby spełnić warunki $\delta > 0$ oraz (2.118). Rysunki 2.5–2.7 przedstawiają wynik n-tych iteracji układu (2.55), gdy $49900 \leq n \leq 50000$, $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $h \in \{0,4; 0,5; 0,52; 0,528; 0,53; 0,55\}$. Zauważmy, że dla kolejnych wartości h uzyskujemy punkt stały, cykle stabilne o okresach 2, 4, 8 oraz zachowanie chaotyczne. Na podstawie symulacji stwierdzamy, że wartość krytyczna parametru bifurkacyjnego powodująca utratę stabilności stanu E_e i generująca cykle o okresie 2 znajduje się w przedziale $[0,4; 0,5]$. Powstałe cykle o okresie 2, 4 i 8 są stabilne. Stabilność cykli świadczy o wystąpieniu nadkrytycznej bifurkacji podwojenia okresu w układzie (2.55) dla zadanych parametrów [69]. W przypadku symulacji dla $h = 0,55$ dostajemy ujemne wartości y, jednak to nie wpływa na istotę zachowania chaotycznego układu – bifurkację można rozpatrywać bez kontekstu epidemiologicznego i wartości zmiennych mogą mieć ujemny znak.



(a) (b)

Rysunek 2.5: Punkt i cykl stabilny o okresie 2 układu (2.55) dla odpowiednio (a) $h = 0,4$ i (b) $h = 0,5$.

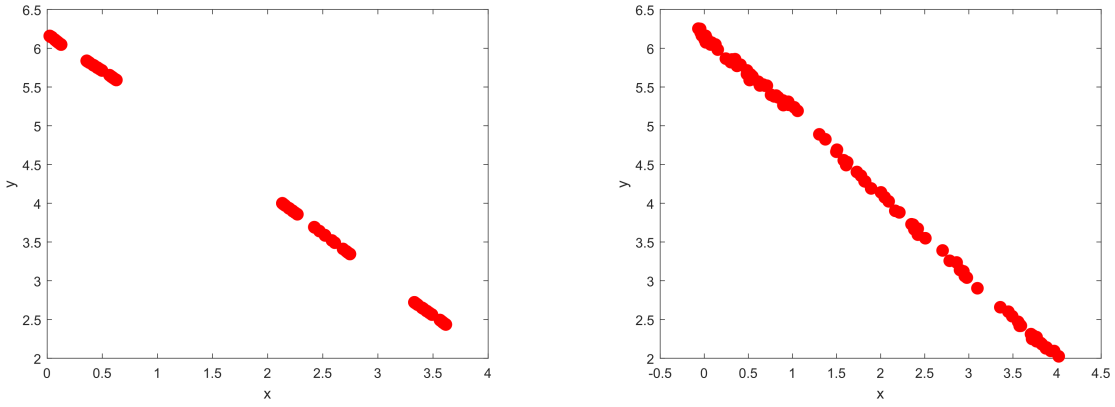


(a) (b)

Rysunek 2.6: Cykle stabilne o okresie 4 i 8 układu (2.55) dla odpowiednio (a) $h = 0,52$ i (b) $h = 0,528$.

Przypadek cykli niestabilnych

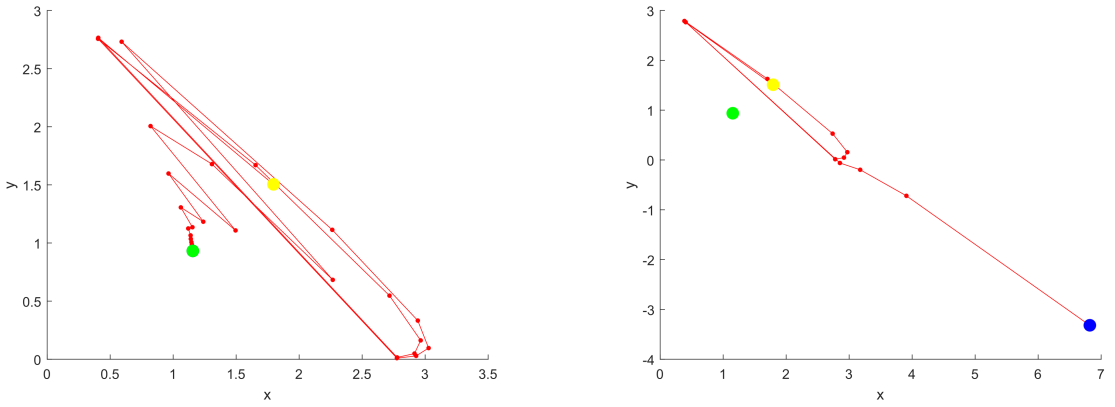
Na rysunkach 2.8a i 2.8b zobrazowano występowanie podkrytycznej bifurkacji podwojenia okresu w układzie (2.55). Przyjęto warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1,8; 1,5)$ oraz wartości parametrów $C = 0,16$,



(a) (b)

Rysunek 2.7: Punkty będące iteracjami układu (2.55) dla odpowiednio (a) $h = 0,53$ i (b) $h = 0,55$.

$\mu = 0,01$, $\alpha = 0,15$. Zastosowanie podanych wartości parametrów pozwoliło na uzyskanie nierówności przeciwnej do (2.118), co przy dostatecznie małym h może dać niestabilność postulowanego bifurkującego cyklu o okresie 2. Na rysunku 2.8a przedstawiono 300 pierwszych iteracji układu dla $h = 1,318$, natomiast na rysunku 2.8b zobrazowano 12 pierwszych iteracji dla $h = 1,3181$. Dla $h = 1,318$ początkowe iteracje tworzą niestabilny cykl o okresie 2, kolejne iteracje dążą do punktu E_e. Dla $h = 1,3181$ dostajemy niestabilność stanu E_e, iteracje nie tworzą cykli. Stwierdzamy wystąpienie podkrytycznej bifurkacji podwojenia okresu [69]. Powróćmy do twierdzenia 2.5 i wniosku 2.6. Wynika z nich, że założenie o dodatniości rozwiązań układu (2.55) przyczynia się do uproszczenia zachowania stanu E_e i może zdarzyć się, że ten stan nie traci stabilności. Podczas wykonywania symulacji nie zakładaliśmy więc dodatniości rozwiązań układu (2.55).



(a) (b)

Rysunek 2.8: Punkty będące iteracjami układu (2.55) dla odpowiednio (a) $h = 1,318$ i (b) $h = 1,3181$. Kolejne iteracje oznaczono czerwonymi punktami i połączono je czerwonymi liniami. Ostatnią iterację zaznaczono na niebiesko, natomiast stan stacjonarny zaznaczono na zielono. Dla przypadku (a) stan E_e jest stabilny i jego współrzędne mają praktyczne te same wartości co ostatnia iteracja, zatem punkt niebieski pokrywa się z zielonym.

2.1.5 Bifurkacja Neimarka-Sackera

W tym paragrafie omówimy możliwość wystąpienia bifurkacji Neimarka-Sackera (BNS) w układzie (2.1). Mówimy, że w układzie równań różnicowych występuje BNS, jeśli macierz Jacobiego układu dla ustalonego stanu stacjonarnego ma dwie sprzężone wartości własne o niezerowych częściach urojonych oraz module równym 1 [69]. Bifurkacja ta jest odpowiednikiem bifurkacji Hopfa występującej w układach ciągłych. Pojęcia bifurkacji Hopfa czasem używa się również dla układów dyskretnych [56].

Podobnie jak dla bifurkacji podwojenia okresu, wskazujemy parametr bifurkacyjny ξ, którego pewna krytyczna wartość daje pożądaną wartość własną. Analogicznie wyróżniamy dwa rodzaje BNS: nadkrytyczną i podkrytyczną. W przypadku bifurkacji nadkrytycznej dla wartości parametru mniejszych od progowej dany stan stacjonarny jest lokalnie stabilnym ogniskiem. Po przekroczeniu wartości progowej stan ten staje się niestabilny, pojawia się natomiast izolowana domknięta krzywa niezmiennicza (oznaczmy ją przez φ) otaczająca stan stacjonarny. Załóżmy, że argument liczb zespolonych będących wartościami własnymi macierzy Jacobiego badanego układu dyskretnego jest postaci $\theta \neq \frac{2\pi}{q}$ dla $q \in \{1,2,3,4\}$. Ponadto bazowy dwuwymiarowy układ dyskretny przybliżmy w małym otoczeniu stanu stacjonarnego układem ze współrzędnymi biegunowymi postaci

$$(\rho,\theta) \to \Big(\rho(\xi)\rho - a(\xi)\rho^3, \theta + \theta(\xi) + b(\xi)\rho^2\Big),$$

gdzie ρ jest promieniem wodzącym. Podany układ jest złożeniem obrotu zależnego od ρ i jednokładności. Zakładamy, że jeżeli bazowy układ jest nieliniowy, to ma zachodzić $a(0) \neq 0$, $b(0) \neq 0$. Rozważmy równanie

$$\rho_{n+1} = \rho(\xi)\rho_n - a(\xi)\rho_n^3, \tag{2.120}$$

gdzie $\rho_{n+1}, \rho_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stwierdzamy wówczas, że krzywa φ w bazowym układzie dyskretnym jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie istniejące stany stacjonarne równania (2.120) są stabilne. W przypadku bifurkacji podkrytycznej przed przekroczeniem wartości progowej mamy analogiczną krzywą niestabilną oraz stabilny stan stacjonarny otoczony przez tę krzywą. Po przekroczeniu tej wartości krzywa zanika i stan stacjonarny staje się niestabilny [69]. Podobnie jak w przypadku BPO, dla niestabilnego stanu stacjonarnego dla wartości parametru poniżej wartości progowej i stabilnego dla wartości parametru powyżej progowej dla nadkrytyczej i podkrytycznej BNS krzywa niezmiennicza jest odpowiednio niestabilna i stabilna. W przypadku niestabilnych rozmaitości centralnych krzywa i punkt stały mogą być stabilne tylko w tej rozmaitości i niestabilne w całej przestrzeni fazowej.

Zajmiemy się określeniem warunków występienia BNS w układzie (2.1) względem endemicznego stanu stacjonarnego E_e. Podobnie jak w paragrafie 2.1.3, zastosujemy metodę przedstawioną w [56]. Jako parametr bifurkacyjny znowu przyjmujemy krok dyskretyzacji.

Sprawdźmy najpierw, dla jakiej wartości h może zajść BNS. Skorzystamy z obliczeń przeprowadzonych w dowodzie twierdzenia 2.5. Najpierw zauważmy, że aby wystąpiła BNS, wartości własne macierzy $M(E_e)$ z (2.35) muszą mieć niezerowe części urojone. Z (2.36) dostajemy więc warunek $\delta < 0$, który z (2.31) ma postać

$$(C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(k-1)^2 < 0. \tag{2.121}$$

Z (2.43) dostajemy $|\lambda| = 1$, jeśli

$$h = h_3 = \frac{C-\mu}{(k-1)(C-\mu k)} \tag{2.122}$$

i dla takiej wartości kroku dyskretyzacji może wystąpić BNS.

Przyjrzyjmy się wnioskowi 2.7. Dla założeń podanych we wniosku nie otrzymujemy BNS, ponieważ dostajemy bezwzględną stabilność stanu E_e. Należy mieć jednak na uwadze, że analiza układu (2.1) nie musi być prowadzona w kontekście epidemiologicznym. Ponadto jeśli E_e jest ogniskiem stabilnym, to niektóre iteracje zmiennych (x_n, y_n) mogą nie należeć do zbioru niezmienniczego Ω. Z tych powodów w tym paragrafie pomijamy założenie (2.8) i zakładamy, że zachodzi twierdzenie 2.5 dla $\delta < 0$. Przyjmujemy więc, że rozwiązania (x_n, y_n) nie muszą należeć do Ω. Co więcej, te rozwiązania mogą być ujemne.

Przejdźmy do zbadania występowania BNS w układzie (2.1). Identycznie jak przy badaniu bifurkacji podwojenia okresu, wprowadzamy zaburzenie h^* oraz zamianę zmiennych (2.63), którą stosujemy w układzie (2.55). Przekształcony układ po rozwinięciu w szereg Taylora do drugiego rzędu w punkcie $(0,0)$ ma dalej postać (2.65). Korzystamy z oznaczeń (2.67) i (2.68), macierzy (2.69) oraz postaci wielomianu charakterystycznego (2.70).

Zapiszmy wielomian (2.70) w postaci $\lambda^2 + P(h^*)\lambda + Q(h^*)$, gdzie

$$P(h^*) = (h+h^*)\rho - 2, \quad Q(h^*) = 1 - (h+h^*)\rho + (h+h^*)^2(C-\mu k),$$

ρ zaś ma to samo znaczenie jak w (2.56). Warunkiem wystąpienia BNS jest $\lambda_{1,2}^m \neq 1$ dla $h^* = 0$ i $m \in \{1,2,3,4\}$ [56], co odpowiada zależności

$$P(0) \notin \{-2, 0, 1, 2\}. \tag{2.123}$$

Zauważmy, że $P(0) = h\rho - 2$. Ze znaczenia parametrów wynika, że warunek $P(0) \neq -2$ jest zawsze spełniony. Rozpatrując pozostałe możliwości z (2.123) stwierdzamy, że (2.123) można zapisać jako

$$h \notin \left\{ \frac{\alpha+\mu}{C-\mu}, \frac{2(\alpha+\mu)}{C-\mu}, \frac{4(\alpha+\mu)}{C-\mu} \right\}. \tag{2.124}$$

W BNS zakładamy, że wartości własne odpowiedniej macierzy mają część urojoną, zatem wartości własne macierzy (2.69) dla $h^* = 0$ wynoszą

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{h\rho}{2} \pm i\frac{h}{2}\sqrt{4(C-\mu k) - \rho^2}, \tag{2.125}$$

gdzie

$$4(C-\mu k) - \rho^2 > 0. \tag{2.126}$$

Dalej skorzystamy z oznaczeń

$$\nu := C - \mu k, \quad \alpha := 1 - \frac{h\rho}{2}, \quad \beta := \frac{h}{2}\sqrt{4\nu - \rho^2}. \tag{2.127}$$

Oczywiście z powyższej definicji ν oraz z (2.126) mamy $4\nu - \rho^2 > 0$. Ponadto (2.125) można zapisać jako $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Zdefiniujmy odwracalną macierz

$$\bar{T} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

i przekształcenie

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{T} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

Po uwzględnieniu tego przekształcenia w (2.64) dostajemy układ

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \alpha U_n - \beta V_n + \bar{F}(U_n, V_n), \\ V_{n+1} &= \beta U_n + \alpha V_n + \bar{G}(U_n, V_n), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{F}(U_n, V_n) &= \frac{h(1+\alpha)}{\beta} V_n(\beta U_n + \alpha V_n) + o\Big(\big(|U_n| + |V_n|\big)^2\Big), \\ \bar{G}(U_n, V_n) &= -hV_n(\beta U_n + \alpha V_n) + o\Big(\big(|U_n| + |V_n|\big)^2\Big). \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial U_n \partial V_n}\Big|_{(0,0)} = h(1+\alpha), \quad F_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial V_n^2}\Big|_{(0,0)} = \frac{2h\alpha(1+\alpha)}{\beta}, \\ G_1 &= \frac{\partial^2 G}{\partial U_n^2}\Big|_{(0,0)} = 2\beta^2, \quad G_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial U_n \partial V_n}\Big|_{(0,0)} = -h\beta, \quad G_3 = \frac{\partial^2 G}{\partial V_n^2}\Big|_{(0,0)} = -2h\alpha. \end{aligned} \tag{2.128}$$

Aby wystąpiła BNS, zgodnie z twierdzeniem 3.5.2 z [48] musi zachodzić

$$\Gamma := \frac{\bar{B}\bar{D} - \bar{A}\bar{C}}{64(1-\alpha)} - \frac{1}{2}||\xi_1||^2 - ||\xi_2||^2 \neq 0, \tag{2.129}$$

dla

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= 2\beta^2(1+\alpha-4\alpha^2)+(1-\alpha)\Big(4\alpha(1-\alpha^2)+(1-2\alpha)(2\alpha^2-1)\Big),\\
\bar{B} &= \beta\Big(4\alpha(1-\alpha^2)+(1-2\alpha)(2\alpha^2-1)\Big)-2\beta(1-\alpha)(1+\alpha-4\alpha^2),\\
\bar{C} &= F_2(-F_2+2G_2)-(G_1+G_3)(G_1-G_3-2F_1),\\
\bar{D} &= F_2(G_1-G_3-2F_1)-(G_1+G_3)(F_2+2G_2),\\
\xi_1 &= \frac{1}{4}\Big(F_2+i(G_1+G_3)\Big),\\
\xi_2 &= \frac{1}{8}\Big(-F_1+2G_2+i(G_1-G_3+2F_1)\Big).
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Stosując (2.127), (2.128) oraz (2.130), warunek (2.129) można zapisać jako

$$-\frac{4}{4\nu-\rho^2}+\sum_{j=1}^{7}a_j h^j \neq 0, \tag{2.131}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{4\nu-\rho^2}\left(15\rho-8\frac{\nu}{\rho}\right),\\
a_2 &= -\frac{3}{8}+26\frac{u}{4\nu-\rho^2}+\frac{1}{64}\rho^2-\frac{1}{16}\sqrt{4\nu-\rho^2}-\frac{1}{16}\nu-\frac{103}{4}\frac{\rho^2}{4\nu-\rho^2},\\
a_3 &= \frac{1}{8}\left(\frac{377}{2}\frac{\rho^3}{4\nu-\rho^2}-\frac{3}{4}\rho^2+\frac{25}{4}\rho-252\frac{\nu\rho}{4\nu-\rho^2}+3\nu-11\frac{\nu}{\rho}\right),\\
a_4 &= \frac{1}{8}\left(-\frac{151}{32}\rho^2+\frac{5}{2}\rho-\frac{3}{2}\nu^2+\frac{155}{8}\nu-\frac{47}{4}\rho\nu+\frac{7\nu^2}{\rho}-\frac{3}{32}\rho^4+\frac{3}{4}\nu\rho^2\right)\\
&\quad+\frac{\rho^2}{8(4\nu^2-\rho)}\left(-\frac{193}{2}\rho^2+151\nu\right),\\
a_5 &= \frac{1}{8}\left(\frac{9}{32}\rho^5-\frac{9}{4}\rho^4-\frac{5}{2}\nu\rho^3-\frac{1}{8}\rho^3+\frac{43}{4}\nu\rho^2+\frac{13}{2}\nu^2\rho-\frac{15}{2}\nu\rho-7\nu^2\right)\\
&\quad+\frac{221}{64}\frac{\rho^5}{4\nu-\rho^2}-\frac{6\nu\rho^3}{4\nu-\rho^2}-\frac{\nu^3}{2\rho},\\
a_6 &= \frac{1}{8}\left(-\frac{9}{32}\rho^6+\frac{1}{2}\rho^5+\frac{9}{8}\rho^4-\frac{3}{4}\nu\rho^2-\frac{3}{2}\nu^2\rho-\frac{13}{8}\nu\rho^3+\frac{43}{16}\nu\rho^2+7\nu^3\right)\\
&\quad+\frac{\rho^2}{32(4\nu-\rho^2)}\left(31\nu-\frac{33}{2}\rho^2\right)-\nu^2\rho^2,\\
a_7 &= \frac{\rho^2}{8}\left(-\frac{5}{8}\nu\rho^3-\frac{1}{4}\rho^3-\frac{1}{4}\nu\rho^2+\frac{1}{16}\rho^2+\frac{1}{2}\nu\rho+\nu^2\right)+\frac{1}{4}\rho\nu^2(\rho^2-\nu)\\
&\quad+\frac{\rho^5}{16(4\nu-\rho^2)}\left(\frac{\rho^2}{2}-\nu\right).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona zależności (2.131) jest wielomianem siódmego stopnia zmiennej h. Zgodnie ze znaczeniem zmiennych stwierdzamy, że wyraz wolny wielomianu jest mniejszy od zera. Możemy zatem stwierdzić, że dla dostatecznie małych h mamy $\Gamma < 0$. Określenie znaku Γ w zależności od h jest skomplikowane i zostało pominięte w rozprawie.

Na podstawie twierdzenia 3.2 z [56] opartego na twierdzeniu 3.4.2 z [48] formułujemy lemat:

Lemat 2.13. *W układzie* (2.55) *zaburzonym przez h^* występuje bifurkacja Neimarka-Sackera dla istniejącego endemicznego stanu stacjonarnego E_e, gdy h^* zmienia się w małym otoczeniu zera oraz jeżeli zachodzą* (2.124) *i* (2.129). *Jeżeli $\Gamma < 0$, to przyciągająca niezmiennicza krzywa domknięta bifurkuje ze stanu E_e dla $h^* > 0$. Jeżeli $\Gamma > 0$, to odpychająca niezmiennicza krzywa domknięta bifurkuje ze stanu E_e dla $h^* < 0$.*

Dowód lematu 2.13 pomijamy.

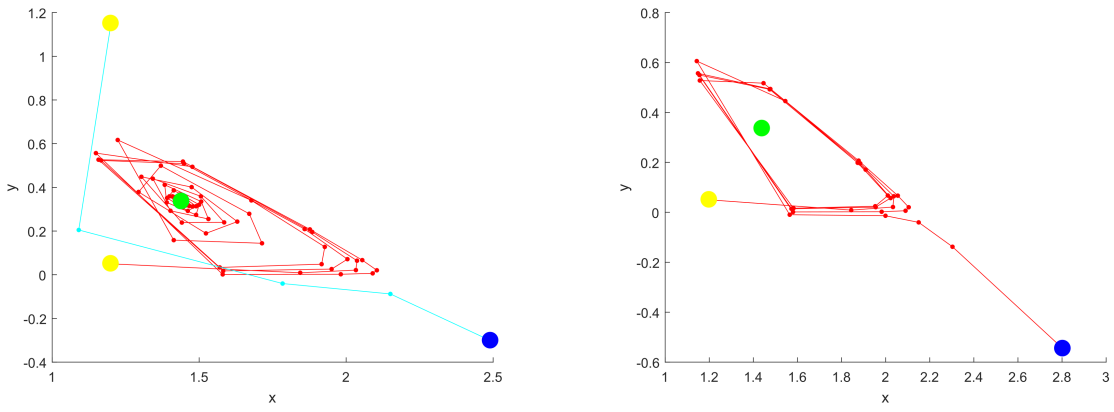
W kontekście układu (2.55) na podstawie lematu 2.13 możemy stwierdzić, co następujące:

Stwierdzenie 2.14. *Załóżmy, że zachodzą* (2.121) *i* (2.122). *W układzie* (2.55) *występuje bifurkacja Neimarka-Sackera dla istniejącego endemicznego stanu stacjonarnego* E_e, *gdy parametr* h^* *zmienia się w małym otoczeniu zera oraz jeżeli zachodzą* (2.124) *i* (2.131). *Dla dostatecznie małego* h *ze stanu* E_e *bifurkuje przyciągająca niezmiennicza krzywa domknięta dla* $h^* > 0$.

Symulacje

Na rysunkach 2.9a i 2.9b przedstawiono symulacje układu (2.55). Jako wartości parametrów przyjęto $C = 0,45$, $\mu = 0,21$ oraz $\alpha = 0,23$. Przy podanych wartościach parametrów spełniono warunek $\delta < 0$, dzięki któremu stan E_e jest ogniskiem. Te wartości są w małym stopniu realistyczne (w szczególności nie jest spełnione (H)), jednak relacje między nimi, zwłaszcza zależność $C > \mu$, są uzasadnione. Warunek początkowy wynosi $(x_0, y_0) = (1,2; 0,05)$, w przypadku symulacji z rysunku 2.9a dodatkowo obrano $(x_0^*, y_0^*) = (1,2; 1,15)$. Dla symulacji z rysunku 2.9a założono $h = 3,42437$ i dla warunków początkowych (x_0, y_0) i (x_0^*, y_0^*) zilustrowano odpowiednio 2000 oraz 5 pierwszych iteracji. W przypadku symulacji z rysunku 2.9b przyjęto $h = 3,42438$ i zobrazowano 30 pierwszych iteracji. Dla $h = 3,42437$ dostajemy stabilność stanu E_e, dla $h = 3,42438$ mamy jego niestabilność. Na podstawie symulacji stwierdzamy, że parametr bifurkacyjny znajduje się w przedziale $D := (3,42437; 3,42438)$.

Postać rysunków 2.9a i 2.9b sugeruje istnienie niestabilnej domkniętej krzywej niezmienniczej, która zanika po przekroczeniu przez h pewnej wartości krytycznej z przedziału D. Ponadto uzyskaliśmy stan stacjonarny, który traci stabilność dla h większego od wartości krytycznej. Stwierdzamy zatem, że w układzie (2.55) dla zadanych wartości parametrów występuje podkrytyczna bifurkacja Neimarka-Sackera [69]. Zwrócmy uwagę, że w stwierdzeniu 2.14 zakładamy dostatecznie małe h. Wartość h z przedziału D traktujemy jako na tyle dużą, że nie ma zastosowania stwierdzenie 2.14.



(a) (b)

Rysunek 2.9: Punkty będące iteracjami układu (2.55) dla odpowiednio (a) $h = 3,42437$ i (b) $h = 3,42438$. Warunki początkowe zaznaczono żółtymi punktami. Kolejne iteracje zaznaczono czerwonymi lub błękitnymi punktami i połączono je odpowiednio czerwonymi i błękitnymi liniami. Stan stacjonarny zaznaczono na zielono, ostatnią iterację zaś na niebiesko. Dla przypadku (a) ze względu na stabilność stanu E_e współrzędne jednej z ostatnich iteracji mają praktycznie te same wartości jak dla stanu E_e, zatem punkt oznaczający ostatnią iterację nie jest widoczny.

2.1.6 Globalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego

Przejdźmy do zbadania globalnej stabilności stanu E_e układu (2.1). Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 2.15. *Istniejący stan E_e układu (2.1) jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeśli zachodzą nierówności*

$$\alpha < \mu, \quad h < \frac{2}{\frac{C}{\mu} - k}, \quad C < \mu k \left(\frac{\mu}{\alpha} + 1\right). \tag{2.132}$$

Dowód. W dowodzie twierdzenia zastosujemy podejście przedstawione w [78].

Z istnienia stanu E_e mamy $C > \mu k$. Zauważmy, że drugie równanie z (2.1) możemy zapisać w postaci

$$y_{n+1} = y_n + h\Big((w_n - y_n)y_n - ky_n\Big). \tag{2.133}$$

Zauważmy, że z (2.3) mamy nierówności

$$w_n\Big(1 - h(\mu + \alpha)\Big) + hC \leq w_{n+1} \leq w_n(1 - h\mu) + hC.$$

Stąd dostajemy

$$\frac{C}{\alpha + \mu} + \left(w_0 - \frac{C}{\alpha + \mu}\right)\Big(1 - h(\alpha + \mu)\Big)^n \leq w_n \leq \frac{C}{\mu} + \left(w_0 - \frac{C}{\mu}\right)(1 - h\mu)^n.$$

Ponieważ zachodzą zbieżności

$$(1 - h\mu)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \Big(1 - h(\mu + \alpha)\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

możemy napisać oszacowanie

$$w_1^l \leq w_n \leq w_1^m, \tag{2.134}$$

gdzie

$$w_1^l = \frac{C}{\mu + \alpha} - \varepsilon, \qquad w_1^m = \frac{C}{\mu} + \varepsilon. \tag{2.135}$$

Dla $n \geq N_{1l}$ możemy podstawić (2.134) do (2.133). Dostajemy

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\leq y_n + h\big((w_1^m - y_n)y_n - ky_n\big), \\ y_{n+1} &\geq y_n + h\big((w_1^l - y_n)y_n - ky_n\big). \end{aligned} \tag{2.136}$$

Niech

$$u_m := \frac{1 + hw_1^m - hk}{h}, \quad u_l := \frac{1 + hw_1^l - hk}{h}. \tag{2.137}$$

Łącząc (2.136) oraz (2.137) dostajemy

$$hu_l y_n - hy_n^2 \leq y_{n+1} \leq hu_m y_n - hy_n^2.$$

Zdefiniujmy

$$z_n^{1,m} := \frac{y_n}{u_m}, \quad z_n^{1,l} := \frac{y_n}{u_l}. \tag{2.138}$$

Ciągi te spełniają nierówności

$$\begin{aligned} z_{n+1}^{1,m} &\leq hu_m z_n^{1,m}(1 - z_n^{1,m}), \\ z_{n+1}^{1,l} &\geq hu_l z_n^{1,l}(1 - z_n^{1,l}). \end{aligned} \tag{2.139}$$

Rozważmy pomocniczo dyskretne równanie logistyczne

$$z_{n+1} = rz_n(1 - z_n),$$

gdzie $r > 0$. Dla $r > 1$ stan $\bar{z} = 1 - \frac{1}{r}$ jest jedynym dodatnim stanem stacjonarnym tego równania. Dla $r \in (1, 3)$ jest on globalnie asymptotycznie stabilny [88].

Zamiast nierówności z (2.139) rozważmy tylko odpowiadające im równania

$$z_{n+1}^{1,m} = hu_m z_n^{1,m} - hu_m\left(z_n^{1,m}\right)^2, \tag{2.140a}$$

$$z_{n+1}^{1,l} = hu_l z_n^{1,l} - hu_l\left(z_n^{1,l}\right)^2. \tag{2.140b}$$

Zauważmy, że oba podane równania mają postać dyskretnego równania logistycznego. Stwierdzamy, że stan stacjonarny równania (2.140a) ma postać

$$\bar{z}^m = 1 - \frac{1}{hu_m} = 1 - \frac{1}{1 + hw_1^m - hk} = 1 - \frac{1}{1 + h\left(\frac{C}{\mu} - k + \varepsilon\right)}.$$

Mamy $hu_m > 1$, jeśli zachodzi $h\left(\frac{C}{\mu} - k + \varepsilon\right) > 0$, co jest zawsze prawdziwe dla $\frac{C}{\mu} > k$. Stwiedzamy więc, że $\bar{z}^m > 0$. Stan $\bar{z}^m$ jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli

$$1 < 1 + h\left(\frac{C}{\mu} - k + \varepsilon\right) < 3.$$

Pierwsza z nierówności jest zawsze prawdziwa, druga zachodzi dla

$$h < \frac{2}{\frac{C}{\mu} - k + \varepsilon}. \tag{2.141}$$

W szczególności interesuje nas przypadek $\varepsilon \ll 1$, zatem zamiast (2.141) możemy przyjąć warunek

$$h < \frac{2}{\frac{C}{\mu} - k}. \tag{2.142}$$

Analogicznie stwierdzamy, że równanie (2.140b) ma stan stacjonarny

$$\bar{z}^l = 1 - \frac{1}{hu_l} = 1 - \frac{1}{1 + hw_1^l - hk} = 1 - \frac{1}{1 + h\left(\frac{C}{\mu+\alpha} - k - \varepsilon\right)},$$

który jest dodatni dla

$$\frac{C}{\mu + \alpha} > k + \varepsilon. \tag{2.143}$$

Zajmujemy się przypadkiem, gdy $\varepsilon \ll 1$ i $C \gg \mu$. Możemy uznać zatem prawdziwość (2.143). Stan $\bar{z}^m$ jest globalnie asymptotycznie stabilny przy spełnieniu warunków

$$1 < 1 + h\left(\frac{C}{\mu + \alpha} - k - \varepsilon\right) < 3.$$

Pierwsza z powyższych nierówności zachodzi dla (2.143), druga jest prawdziwa, jeśli

$$h < \frac{2}{\frac{C}{\mu+\alpha} - k - \varepsilon}. \tag{2.144}$$

Podobnie jak dla (2.141), możemy zamiast (2.144) przyjąć warunek

$$h < \frac{2}{\frac{C}{\mu+\alpha} - k}.$$

Zauważmy, że ta nierówność jest słabsza niż (2.142).

Teraz analogicznie jak w (2.138) definiujmy

$$y_*^{1,m} := u_m \bar{z}^m = u_m\left(1 - \frac{1}{hu_m}\right) = u_m - \frac{u_m}{hu_m} = u_m - \frac{1}{h} = \frac{1 + hw_1^m - hk - 1}{h} = w_1^m - k = \frac{C}{\mu} - k + \varepsilon$$

oraz

$$y_*^{1,l} := u_l \bar{z}^l = w_1^l - k = \frac{C}{\mu + \alpha} - k - \varepsilon.$$

Z definicji asymptotycznej stabilności punktu stacjonarnego w układzie dyskretnym [41] oraz z kryterium porównawczego ciągów wynika, że istnieje $N_{1i} > N_{1l}$ takie, że dla każdego $n > N_{1i}$ zachodzi

$$y_1^l \le y_n \le y_1^m, \tag{2.145}$$

gdzie

$$y_1^l = y_*^{1,l} - \varepsilon = \frac{C}{\mu+\alpha} - k - 2\varepsilon, \quad y_1^m = y_*^{1,m} + \varepsilon = \frac{C}{\mu} - k + 2\varepsilon.$$

Jeżeli $n > N_{1i}$, to możemy podstawić (2.145) do równania z (2.3) otrzymując układ nierówności

$$\begin{aligned} w_{n+1} &\leq w_n + h\left(C - \mu w_n - \alpha y_1^l\right), \\ w_{n+1} &\geq w_n + h\left(C - \mu w_n - \alpha y_1^m\right). \end{aligned} \tag{2.146}$$

Na podstawie (2.146) stwierdzamy, że istnieje dodatnia stała N_{2l} taka, że dla każdego $n > N_{2l}$ mamy

$$w_2^l \leq w_n \leq w_2^m, \tag{2.147}$$

gdzie

$$w_2^l = \frac{C - \alpha y_1^m}{\mu} - \varepsilon, \quad w_2^m = \frac{C - \alpha y_1^l}{\mu} + \varepsilon. \tag{2.148}$$

Zauważmy, że aby mogły zachodzić nierówności (2.147), musimy mieć

$$w_2^l < w_2^m, \tag{2.149}$$

czyli

$$\begin{gathered} \frac{C - \alpha y_1^m}{\mu} - \varepsilon < \frac{C - \alpha y_1^l}{\mu} + \varepsilon, \\ C - \alpha\left(\frac{C}{\mu} - k + 2\varepsilon\right) - \mu\varepsilon < C - \alpha\left(\frac{C}{\mu+\alpha} - k - 2\varepsilon\right) + \mu\varepsilon, \\ -\alpha\left(\frac{C}{\mu} + 2\varepsilon\right) - \mu\varepsilon < -\alpha\left(\frac{C}{\mu+\alpha} - 2\varepsilon\right) + \mu\varepsilon, \\ \alpha\left(\frac{C}{\mu} + 2\varepsilon\right) + \mu\varepsilon > \alpha\left(\frac{C}{\mu+\alpha} - 2\varepsilon\right) - \mu\varepsilon, \end{gathered}$$

co jest równoważne

$$\alpha\left(\frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu+\alpha} + 4\varepsilon\right) + 2\mu\varepsilon > 0.$$

Ponadto zauważmy, że z postaci w_2^m oraz w_1^m z odpowiednio (2.148) i (2.135) dostajemy nierówność

$$w_2^m < w_1^m. \tag{2.150}$$

Sprawdźmy, kiedy zachodzi

$$w_1^l < w_2^l, \tag{2.151}$$

czyli

$$\begin{gathered} \frac{C}{\mu+\alpha} - \varepsilon < \frac{C - \alpha y_1^m}{\mu} - \varepsilon, \\ C\mu < (C - \alpha y_1^m)(\mu + \alpha), \\ C\mu < C\mu + C\alpha - \alpha\mu y_1^m - \alpha^2 y_1^m, \\ 0 < C - \mu y_1^m - \alpha y_1^m, \\ y_1^m < \frac{C}{\mu+\alpha}, \\ \frac{C}{\mu} - k + 2\varepsilon < \frac{C}{\mu+\alpha}. \end{gathered}$$

Przy założeniu $0 < \varepsilon \ll 1$ mamy

$$\begin{gathered} \frac{C}{\mu} - k < \frac{C}{\mu+\alpha}, \\ \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu+\alpha} < k, \end{gathered}$$

$$\frac{C\alpha}{\mu(\mu+\alpha)} < k,$$

co jest równoważne (2.151).

Ostatecznie po uwzględnieniu (2.149), (2.150) i (2.151) stwierdzamy, że zachodzi

$$w_1^l < w_2^l < w_2^m < w_1^m.$$

Jeżeli $n > N_{2l}$, to z (2.147) oraz (2.133) otrzymujemy układ nierówności

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\leq y_n + h\big((w_2^m - y_n)y_n - ky_n\big), \\ y_{n+1} &\geq y_n + h\big((w_2^l - y_n)y_n - ky_n\big). \end{aligned}$$

Podobnie jak dla (2.146) stwierdzamy, że istnieje stała dodatnia $N_{2i} > N_{2l}$ taka, że dla każdego $n > N_{2i}$ mamy

$$y_2^l \leq y_n \leq y_2^m, \tag{2.152}$$

gdzie

$$y_2^l = w_2^l - k - \varepsilon, \quad y_2^m = w_2^m - k + \varepsilon. \tag{2.153}$$

Podstawiając pierwszą i drugą równość z (2.148) do odpowiednio pierwszego i drugiego równania z (2.153) dostajemy

$$\begin{aligned} y_2^l &= \frac{C - \alpha y_1^m}{\mu} - \varepsilon - k - \varepsilon = \frac{C - \alpha y_1^m}{\mu} - k - 2\varepsilon, \\ y_2^m &= \frac{C - \alpha y_1^l}{\mu} + \varepsilon - k + \varepsilon = \frac{C - \alpha y_1^l}{\mu} - k + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Powyższe równania są spełnione, jeśli zachodzą $n > N_{2i}$ oraz (2.152). Indukcyjnie możemy zdefiniować ciągi (N_{ki}), (y_k^l) i (y_k^m) (gdzie $k \in \mathbb{N}$) takie, że

$$y_k^l < y_n < y_k^m \tag{2.154}$$

dla wszystkich $n > N_{ki}$ oraz (y_k^l) i (y_k^m) spełniają równania różnicowe

$$\begin{aligned} y_{k+1}^l &= \frac{C - \alpha y_k^m}{\mu} - k - 2\varepsilon, \\ y_{k+1}^m &= \frac{C - \alpha y_k^l}{\mu} - k + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.155}$$

Stan stacjonarny układu (2.155), oznaczony jako y_{st}, ma postać

$$y_{st} = (\bar{y}^l, \bar{y}^m) = \left(\frac{C - \mu k}{\alpha + \mu} + \frac{2\varepsilon\mu}{\alpha - \mu}, \frac{C - \mu k + 2\varepsilon\mu}{\alpha + \mu}\right). \tag{2.156}$$

Macierz Jacobiego układu (2.155) zapisujemy jako

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha}{\mu} \\ \frac{-\alpha}{\mu} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.157}$$

Ta macierz ma wartości własne wynoszące $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\alpha}{\mu}$. Zauważmy, że $|\lambda_{1,2}| < 1$, jeśli $\alpha < \mu$ – dla tego warunku punkt stacjonarny y_{st} układu (2.155) jest zatem lokalnie stabilny. Ponieważ w układach liniowych różnicowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach lokalna stabilność implikuje stabilność globalną [41], stwierdzamy, że punkt stacjonarny y_{st} układu (2.155) dla $\alpha < \mu$ jest globalnie stabilny, to znaczy

$$\lim_{k\to\infty} y_k^l = \bar{y}^l, \quad \lim_{k\to\infty} y_k^m = \bar{y}^m.$$

Z (2.156) mamy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{y}^l = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{y}^m = \frac{C - \mu k}{\alpha + \mu}.$$

Z nierówności (2.154) oraz twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} = y_e. \tag{2.158}$$

Teraz podstawmy pierwszą i drugą równość z (2.153) do odpowiednio pierwszego i drugiego równania z (2.148). Dostajemy

$$w_2^l = \frac{C-\alpha(w_1^m - k - \varepsilon)}{\mu} - \varepsilon, \quad w_2^m = \frac{C-\alpha(w_1^l - k + \varepsilon)}{\mu} + \varepsilon.$$

Równania z (2.154) zachodzą przy spełnieniu $n > N_{2l}$ oraz (2.147).

Korzystając ponownie z zasady indukcji matematycznej dostajemy istnienie ciągów (N_{kl}), (w_k^l) oraz (w_k^m) (dla $k \in \mathbb{N}$) o własności

$$w_k^l < w_n < w_k^m, \tag{2.159}$$

gdzie $n > N_{kl}$. Co więcej, dla (w_k^l) i (w_k^m) mamy

$$\begin{aligned} w_{k+1}^l &= \frac{C-\alpha(w_k^m - k - \varepsilon)}{\mu} - \varepsilon, \\ w_{k+1}^m &= \frac{C-\alpha(w_k^l - k + \varepsilon)}{\mu} + \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Stan stacjonarny układu (2.160), oznaczony przez w_{st}, zapisujemy jako

$$w_{st} = (\bar{w}^l, \bar{w}^m) = \left(\frac{C+\alpha k}{\mu+\alpha} - \varepsilon, \frac{2\mu(C+k\alpha)}{\mu^2-\alpha^2} - \frac{C+k\alpha}{\mu-\alpha} + \varepsilon\right).$$

Macierz Jacobiego układu (2.160) ma postać (2.157). Stwierdzamy więc, że dla $\alpha < \mu$ stan stacjonarny $w^{l,k}$ układu (2.160) jest globalnie asymptotycznie stabilny. To oznacza, że

$$\lim_{k\to\infty} w_k^l = \bar{w}^l, \quad \lim_{k\to\infty} w_k^m = \bar{w}^m.$$

Ponadto dostajemy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{w}^l = \frac{C+\alpha k}{\mu+\alpha}$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{w}^m &= \frac{2\mu(C+k\alpha)}{\mu^2-\alpha^2} - \frac{C+k\alpha}{\mu-\alpha} = \frac{2\mu C + 2k\mu\alpha - (C+k\alpha)(\mu+\alpha)}{\mu^2-\alpha^2} \\ &= \frac{2\mu C + 2k\mu\alpha - C\mu - C\alpha - k\alpha\mu - k\alpha^2}{\mu^2-\alpha^2} = \frac{\mu C + k\mu\alpha - C\alpha - k\alpha^2}{\mu^2-\alpha^2} \\ &= \frac{C(\mu-\alpha) + k\alpha(\mu-\alpha)}{\mu^2-\alpha^2} = \frac{C+k\alpha}{\mu+\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{w}^l. \end{aligned}$$

Twierdzenie o trzech ciągach oraz (2.159) implikują

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{C+k\alpha}{\mu+\alpha}. \tag{2.161}$$

Z (2.2), (2.158) oraz (2.161) uzyskujemy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{C+k\alpha}{\mu+\alpha} - \frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} = \frac{C+k\alpha-C+\mu k}{\mu+\alpha} = \frac{k(\alpha+\mu)}{\mu+\alpha} = k = x_e.$$

Dostajemy stąd globalną asymptotyczną stabilność stanu E_e, jeśli ten stan istnieje oraz gdy spełnione są zależności (2.132). □

2.2 Model zbudowany na podstawie niestandardowej metody dyskretyzacji

Ten podrozdział dotyczy konstrukcji i analizy układu dyskretnego powstałego z (1.14) po zastosowaniu niestandardowej metody dyskretyzacji. Najpierw przedstawimy motywację wyboru wskazanej metody dyskretyzacji, potem przejdziemy do analizy zaproponowanego układu.

2.2.1 Konstrukcja modelu i jego podstawowe własności

Konstrukcja modelu

Jak wcześniej wspomniano, modele z użyciem otwartego schematu Eulera, z powodu możliwości pojawienia się ujemnych wartości zmiennych, nie są odpowiednie do modelowania zjawisk biologicznych. Powinno używać się takich schematów numerycznych, których własności pozwalają na konstruowanie modeli dyskretnych o takich samych własnościach (w ujęciu jakościowym) jak analogiczne modele ciągłe – zwłaszcza w kontekście stabilności i bifurkacji. Wówczas taki układ dyskretny jest dynamicznie zgodny ze swoim ciągłym odpowiednikiem. Mickens w swojej pracy [85] prezentuje niestandardowe schematy dyskretyzacji, które cechują się dynamiczną zgodnością. Zastosowanie podejścia Mickensa do modelu (2.1) oznaczałoby:

- wprowadzenie w obu równaniach układu (2.1) funkcji $\varphi(h) = h + O(h^2)$ zamiast parametru h,
- zastąpienie w pierwszym, drugim lub obu równaniach z (2.1) wyrażenia dwuliniowego $-\beta S_n I_n$ wyrażeniem $-\beta S_{n+1} I_n$ lub $-\beta S_n I_{n+1}$.

Nie ma konkretnej metody wyboru odpowiedniej funkcji $\varphi(h)$ [3]. Zauważmy, że wprowadzenie niezerowego elementu $O(h^2)$ nie ma uzasadnienia biologicznego. W naszych rozważaniach przyjmiemy zatem $O(h^2) = 0$. Decyzja o zmianie elementów dwulinowych, czyli takich, które najczęściej obrazują zakażenie, zależy od pożądanych własności modelu. Nie ma określonego sposobu modyfikacji tych elementów. W [3] przedstawiono możliwe przykłady tych modyfikacji, które wpływają na odpowiednie własności rozwiązań układów. W przypadku modelowania zjawisk biologicznych, w tym epidemiologicznych, pożądane jest, by modyfikacja modelu miała motywację biologiczną.

Zwróćmy uwagę, że krok dyskretyzacji reprezentuje ustalony odcinek czasu – w omawianym w rozprawie przykładzie gruźlicy długość kroku dyskretyzacji odpowiada rokowi. Dane rzeczywiste podaje się jako wartości liczbowe określonych wielkości w ustalonym momencie – dotyczą one liczebności konkretnych grup osób w tym momencie. W symulacjach obrazujących dynamikę epidemii przyjmujemy $h = 1$, zatem długość kroku równa 1 odpowiada odcinkowi czasu równego rokowi. W naszych rozważaniach przedstawiamy określone warunki (na przykład lokalnej stabilności stanów stacjonarnych) w zależności od kroku dyskretyzacji. Warunki te mają najczęściej postać nierówności $h < c$ dla $0 < c < 1$, które określają górne ograniczenie tego kroku. Zauważmy, że ograniczenie to jest mniejsze od 1, co odpowiada odcinkowi czasu krótszemu niż rok. To oznacza, że aby dana nierówność zachodziła w przypadku omawianej epidemii gruźlicy, dane rzeczywiste powinny być zbierane częściej niż co rok.

Przyjrzyjmy się pierwszemu równaniu układu (2.1), które ma postać

$$x_{n+1} = x_n + h\left(C - x_n y_n + y_n - \mu x_n\right). \tag{2.162}$$

Wynika z niego, że liczba nowych zakażeń w $(n+1)$-ym punkcie zależy od liczebności osobników w n-tym punkcie – zakłada się zatem, że zakażenie choroby następuje w momencie, którego odpowiednikiem jest n-ty punkt. W rzeczywistości zakażenia odbywają w różnym chwilach pomiędzy momentami, dla których podaje się dane rzeczywiste. Co więcej, w większości przypadków, zanim podejmie się leczenie lub akcje profilaktyczne, liczebność osób zakażonych jest funkcją rosnącą względem czasu. Z tego powodu na wartość x_{n+1} większy wpływ mają zakażenia występujące w momentach bliższych $(n+1)$-szemu punktowi, niż zakażenia występujące w momentach bliższych n-temu punktowi. Oczywiście należy mieć na uwadze, że zazwyczaj nie posiada się danych dotyczących momentów, które można przyporządkować punktom z dyskretnej siatki czasu znajdującym się między n-tym a $(n+1)$-szym punktem. Z tego powodu w (2.162) zamiast $-x_n y_n$ uwzględnimy składnik $-x_{n+1} y_n$, co jest zgodne z podejściem Mickensa. Proponujemy

zatem następujący układ dyskretny

$$x_{n+1} = x_n + h\left(C - x_{n+1}y_n + y_n - \mu x_n\right), \tag{2.163a}$$
$$y_{n+1} = y_n + h\left(x_n y_n - k y_n\right) = y_n\big(1 + h(x_n - k)\big), \tag{2.163b}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Przekształćmy pierwsze równanie z układu (2.163), tak aby go zapisać w postaci

$$x_{n+1} = \frac{x_n(1-h\mu) + hC + hy_n}{1 + hy_n}, \tag{2.164a}$$
$$y_{n+1} = y_n\big(1 + h(x_n - k)\big), \tag{2.164b}$$

przez co uzyskujemy jawną zależność wartości zmiennych w $(n+1)$-szym kroku od wartości w kroku n-tym.

Przedyskutujmy możliwość zamiany wyrażenia hx_ny_n w równaniu (2.163b) na składnik $hx_{n+1}y_n$ lub hx_ny_{n+1}. Składnik hx_ny_n ma dodatni znak, więc nie przyczynia się do problemów z dodatniością zmiennej y. Ponadto zauważmy, że jeśli byśmy rozważali składnik $hx_{n+1}y_n$, to za x_{n+1} należałoby podstawić prawą stronę równania (2.164a). Wówczas (2.163b) miałoby postać

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{x_n(1-h\mu) + hC + hy_n}{1 + hy_n} y_n - k y_n\right), \tag{2.165}$$

znacznie bardziej skomplikowaną niż obecne równanie (2.163b). Ponadto w (2.165) pojawia się stała C, która zgodnie ze znaczeniem biologicznym nie ma bezpośredniego wpływu na zmienną y_n. Nie wprowadzamy zatem wyrażenia $hx_{n+1}y_n$.

Jeśli zamiast hx_ny_n rozważymy hx_ny_{n+1}, to (2.163b) miałoby postać

$$y_{n+1} = y_n + h\left(x_n y_{n+1} - k y_n\right),$$

co daje

$$y_{n+1} = \frac{y_n(1-hk)}{1 - hx_n}.$$

Zauważmy, że w mianowniku prawej strony pojawia się dodatkowy warunek dodatniości zmiennej y_n, który zależy od zmiennej x_n. W modelach epidemiologicznych dodatniość zmiennych powinna być bezwarunkowa albo zależeć od wartości parametrów modelu, a nie od wartości zmiennych. Ponadto mianownik otrzymanego równania może być ujemny. Nie powinno się więc uwzględniać składnika $x_{n+1}y_n$ i dlatego modyfikacja prawej strony (2.163b) nie jest zasadna.

Podstawowe własności modelu

Zajmiemy się analizą modelu (2.164). Najpierw omówimy jego podstawowe własności.

Wybrane wnioski z dalszej analizy przedstawimy w kontekście współczynnika $\mathcal{R}_0$. W celu wyznaczenia $\mathcal{R}_0$ dla układu (2.163) skorzystaliśmy ponownie z podejścia z [7], przyjętego dla układu (2.1). Ponieważ równanie na zmienną y_n w układach (2.163) i (2.1) ma tę samą postać, obliczenia prowadzące do otrzymania $\mathcal{R}_0$ dla obu układów są praktycznie takie same. Dla układu (2.163) uzyskaliśmy ponownie $\mathcal{R}_0 = \frac{C}{\mu k}$. Podobnie jak w przypadku (2.1), w rozprawie pomijamy obliczenia dla układu (2.163).

Układ (2.164) jest opisany przez funkcje

$$\tilde{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \tilde{F}(x,y) \\ \tilde{G}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x(1-h\mu)+hC+hy}{1+hy} \\ y\big(1 + h(x-k)\big) \end{pmatrix}. \tag{2.166}$$

Zauważmy, że $\tilde{F}(x,y) > 0$, o ile zachodzi nierówność (2.5), natomiast $\tilde{G}(x,y) > 0$, o ile zachodzi nierówność (2.9). Pamiętając, że (2.9) jest warunkiem silniejszym niż (2.5) formułujemy następujący wniosek:

Wniosek 2.16. *Niech zachodzi* (2.9) *oraz* $x_0 \geq 0$.

1. *Jeśli* $y_0 > 0$, *to* $x_n, y_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}_+$.

2. *Jeśli* $y_0 = 0$, *to* $x_n > 0$ *oraz* $y_n = 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}_+$.

Zauważmy, że w układzie (2.164) dostajemy prostszy warunek dodatniości zmiennych niż w układzie (2.1) – nierówność (2.9) jest słabsza od nierówności (2.8) dla układu (2.1). Zwróćmy też uwagę, że (2.9) implikuje $h < 1$.

Dalej zakładamy, że zachodzi (2.9). Będziemy rozważać układ (2.166) dla $x, y \geq 0$.

Oszacujmy teraz wartość zmiennej x. Ta zmienna rośnie, jeśli $\frac{\tilde{F}(x,y)}{x} > 1$ dla $x \neq 0$, co jest równoważne

$$\frac{(1-h\mu) + \frac{hC}{x} + \frac{hy}{x}}{1+hy} > 1,$$

$$x < \frac{C+y}{y+\mu} = \frac{C+y+\mu-\mu}{y+\mu},$$

czyli ostatecznie

$$x < \tilde{x}(y) := 1 + \frac{C-\mu}{\mu+y}.$$

W rozważanej dziedzinie funkcja $\tilde{x}(y)$ przyjmuje największą wartość dla $y = 0$ wynoszącą

$$\tilde{x}\Big|_{y=0} = 1 + \frac{C-\mu}{\mu} = \frac{C}{\mu}.$$

Stąd dalej zakładamy $x \leq \frac{C}{\mu}$. Podstawiając tę nierówność do $\tilde{F}(x,y)$ uzyskujemy

$$\tilde{F}(x,y) \leq \frac{\tilde{x}_m(1-h\mu) + hC + hy}{1+hy} = \frac{\frac{C}{\mu}(1-h\mu) + hC + hy}{1+hy} = \frac{\frac{C}{\mu} + hy}{1+hy} = \frac{\frac{C}{\mu} + hy + 1 - 1}{1+hy},$$

co daje

$$\tilde{F}(x,y) \leq 1 + \frac{\frac{C}{\mu} - 1}{1+hy}.$$

Z założenia (H) $\tilde{F}(x,y)$ osiąga maksymalną wartość dla $y = 0$ wynoszącą

$$1 + \frac{\frac{C}{\mu} - 1}{1} = \frac{C}{\mu}.$$

Wysuwamy wniosek:

Wniosek 2.17. *Niech zachodzi* (2.9). *Jeśli dla danego* $q \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $x_q \leq \frac{C}{\mu}$, *to* $x_{q+s} \leq \frac{C}{\mu}$ *dla dowolnego* $s \in \mathbb{N}$.

Inaczej możemy stwierdzić, że jeśli liczebność osób zdrowych w dowolnej iteracji układu (2.164) wyniesie mniej niż $\frac{C}{\mu}$, to będzie ograniczona przez tę wartość cały czas. Mając zadane $x_0 \leq \frac{C}{\mu}$ możemy przeformułować wniosek 2.17 zapisując

Wniosek 2.18. *Jeśli zachodzą nierówności* (2.9) *oraz* $x_0 \leq \frac{C}{\mu}$, *to* $x_n \leq \frac{C}{\mu}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}_+$.

Dalej dla układu (2.164) rozważamy zbiór niezmienniczy

$$\breve{\Omega} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq \frac{C}{\mu}, \quad y \geq 0 \right\}.$$

Teraz przyjrzyjmy się zmiennej y. Dla $y \neq 0$ ta zmienna maleje, jeżeli

$$\frac{\tilde{G}(x,y)}{y} = 1 + h\,(x-k) < 1,$$

$$h\,(x-k) < 0,$$

co daje

$$x < k. \tag{2.167}$$

Zauważmy, że dla $\frac{C}{\mu} < k$ nierówność (2.167) jest spełniona w niezmienniczym zbiorze $\breve{\Omega}$. Łącząc tę analizę ze znaczeniem $\mathcal{R}_0$ wnioskujemy:

Wniosek 2.19. *Jeśli zachodzą* $x_0 \leq \frac{C}{\mu}$ *oraz* $\mathcal{R}_0 < 1$*, to dla układu* (2.164) *zachodzi* $y_{n+1} < y_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Teraz zbadajmy ograniczoność rozmiaru całej populacji. Przepiszmy równania (2.164), by uzyskać postaci ilorazu różnicowego. Dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}-x_n}{h} &= C - x_{n+1}y_n + y_n - \mu x_n, \\ \frac{y_{n+1}-y_n}{h} &= y_n(x_n - k). \end{aligned} \tag{2.168}$$

Tak jak w układzie (2.1), skorzystamy z oznaczenia $w_n = x_n + y_n$. Dodając stronami równania z (2.168) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}-w_n}{h} &= C - x_{n+1}y_n + y_n - \mu x_n + y_n x_n - y_n k \\ &= C - x_{n+1}y_n + y_n - \mu x_n + y_n x_n - y_n(1+\mu+\alpha) \\ &= C - x_{n+1}y_n + y_n x_n - \mu(x_n + y_n) - \alpha y_n, \end{aligned}$$

co możemy zapisać jako

$$\frac{w_{n+1}-w_n}{h} = C + y_n(x_n - x_{n+1}) - \mu w_n - \alpha y_n. \tag{2.169}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

• Niech $x_{n+1} > x_n$. Wówczas

$$\frac{w_{n+1}-w_n}{h} < C - \mu w_n,$$

co jest równoważne nierówności

$$w_{n+1} < h(C - \mu w_n) + w_n, \tag{2.170}$$

która pojawiła się w szacowaniu (2.3) dla układu (2.1). Jeśli zachodzi (2.5), to z (2.170) uzyskujemy ponownie zależności (2.4) oraz

$$w_n \leq w_0 + \frac{C}{\mu}.$$

Oznacza to, że liczebność całej populacji jest ograniczona z góry. Zauważmy, że wniosek 2.1, dotyczący układu (2.1), można odnieść również do układu (2.164).

• Teraz przejdźmy do przypadku $x_{n+1} < x_n$.

Najpierw przyjmijmy $\mathcal{R}_0 < 1$ i $x_0 < \frac{C}{\mu}$. Wówczas z wniosku 2.19 mamy $y_{n+1} < y_n$, co razem z $x_{n+1} < x_n$ daje $w_{n+1} < w_n$. Stąd wynika ograniczoność rozmiaru populaji.

Teraz niech $\mathcal{R}_0 > 1$. Dla przypadku $x_n < k$ zachodzi $y_{n+1} < y_n$ i znowu stwierdzamy ograniczoność rozmiaru populacji.

2.2.2 Stabilność stanów stacjonarnych

Przejdźmy do zbadania stabilności stanów stacjonarnych układu (2.164). Są one takie same jak te z układów (1.14) oraz (2.1), przypomnijmy ich postaci:

- stan wolny od epidemii $E_{df} = (x_{df}, 0) = \left(\frac{C}{\mu}, 0\right)$: istnieje zawsze,
- stan endemiczny $E_e = (x_e, y_e) = \left(k, \frac{C-\mu k}{k-1}\right)$: jego istnienie gwarantuje warunek $C > \mu k$ równoważny $\mathcal{R}_0 > 1$.

Macierz Jacobiego układu (2.164), oznaczoną przez $\widehat{M}$, zapisujemy jako

$$\widehat{M}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu}{1+hy} & \frac{h\left(1-x(1-h\mu)-hC\right)}{(1+hy)^2} \\ hy & 1+h(x-k) \end{pmatrix}.$$

Stabilność stanu wolnego od epidemii

Omówmy najpierw stabilność stanu E_{df}.

Twierdzenie 2.20. *Jeśli zachodzi* (2.9)*, to stan wolny od epidemii* E_{df} *układu* (2.164) *jest*

- *węzłem lokalnie stabilnym dla* $\mathcal{R}_0 < 1$,
- *niehiperboliczny dla* $\mathcal{R}_0 = 1$,
- *niestabilny (precyzyjniej: punktem siodłowym) dla* $\mathcal{R}_0 > 1$.

Ponadto jeśli $x_0 < \frac{C}{\mu}$*, to dla* $\mathcal{R}_0 < 1$ *stan* E_{df} *jest globalnie stabilny.*

Dowód. Warunek (2.9) gwarantuje dodatniość x_n i y_n w układzie (2.164). Macierz Jacobiego dla stanu E_{df} ma postać

$$\widehat{M}(E_{df}) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu}{1+h\cdot 0} & \frac{h\left(1-\frac{C}{\mu}(1-h\mu)-hC\right)}{(1+h\cdot 0)^2} \\ h\cdot 0 & 1+h\left(\frac{C}{\mu}-k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-h\mu & h\left(1-\frac{C}{\mu}\right) \\ 0 & 1+h\left(\frac{C}{\mu}-k\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-h\mu & h\left(1-x_{df}\right) \\ 0 & 1+h\left(x_{df}-k\right) \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\widehat{M}(E_{df})$ jest tożsama z macierzą Jacobiego (2.13) dla stanu E_{df} z układu (2.1). Na podstawie analizy wartości własnych dla macierzy (2.13) uzyskujemy lokalną stabilność stanu E_{df} w układzie (2.164) dla $\mathcal{R}_0 < 1$.

Pokażemy teraz globalną stabilność stanu E_{df} układu (2.164) dla $x_0 < \frac{C}{\mu}$ i $\mathcal{R}_0 < 1$. Zauważmy, że spełniony jest wniosek 2.18. Przypomnijmy oszacowanie (2.16) oraz równość (2.18) zachodzącą w układzie (2.1). Zwróćmy uwagę, że te zależności można zastosować do badania globalnej stabilności E_{df} w układzie (2.164). Mamy więc

$$y_n \leq y_0\Big(1-hk\left(1-\mathcal{R}_0\right)\Big)^n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0. \tag{2.171}$$

Teraz dodajmy do siebie równania (2.163). Uzyskujemy

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + h\left(C - x_{n+1}y_n + y_n - \mu x_n\right) + y_n h(x_n - k) \\ &= w_n + h\left(C - x_{n+1}y_n + x_n y_n - \alpha y_n - \mu w_n\right). \end{aligned} \tag{2.172}$$

Prawą stronę można oszacować z góry przez

$$w_{n+1} \leq w_n + h\left(C + x_n y_n - \alpha y_n - \mu w_n\right) \leq w_n + h\left(C + \left(\frac{C}{\mu} - \alpha\right) y_n - \mu w_n\right). \tag{2.173}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ zachodzi (2.171), stwierdzamy, że

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0 \quad \exists\ N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n > N_1 \quad \left(\frac{C}{\mu} - \alpha\right) y_n < \varepsilon_1. \tag{2.174}$$

Łacząc (2.173) i (2.174) dostajemy

$$w_{n+1} < (1-h\mu)w_n + h(C+\varepsilon_1)$$

dla $n > N_1$. Z powyższego wynika

$$w_n < (1-h\mu)^n \left(w_0 - \frac{C+\varepsilon_1}{\mu}\right) + \frac{C+\varepsilon_1}{\mu}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} (1-h\mu)^n \left(w_0 - \frac{C+\varepsilon_1}{\mu}\right) = 0,$$

wybieramy dostatecznie duże $n(> N_1)$ takie, że

$$w_n < \frac{C}{\mu} + \varepsilon. \tag{2.175}$$

W analogiczny sposób przeprowadzamy rozumowanie dla szacowania prawej strony równania (2.173) z dołu. Stosując ponownie (2.172) otrzymujemy

$$w_{n+1} \geq w_n + h\left(C - x_{n+1}y_n - \alpha y_n - \mu w_n\right) \geq w_n + h\left(C - \left(\frac{C}{\mu} + \alpha\right) y_n - \mu w_n\right).$$

Z (2.171) dla dostatecznie dużych n mamy

$$\left(\frac{C}{\mu} + \alpha\right) y_n < \varepsilon_1,$$

$$w_{n+1} > (1 - h\mu)w_n + h(C - \varepsilon_1),$$

co daje

$$w_n > (1 - h\mu)^n \left(w_0 - \frac{C - \varepsilon_1}{\mu}\right) + \frac{C - \varepsilon_1}{\mu}.$$

Stwierdzamy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi

$$w_n > \frac{C}{\mu} - \varepsilon. \tag{2.176}$$

Łącząc (2.175) i (2.176) uzyskujemy dla dostatecznie dużych n

$$\left| w_n - \frac{C}{\mu} \right| < \varepsilon$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{C}{\mu}.$$

Zauważmy, że zależność (2.28) zachodzi również dla układu (2.164). Dostajemy z niej

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{C}{\mu}.$$

Powyższa równość oraz (2.171) dają globalną stabilność E_{df}. □

Zwrócmy uwagę, że warunki stabilności stanu E_{df} nie zależą od kroku dyskretyzacji, podczas gdy ta zależność występuje w przypadku stanu E_e, co omówimy poniżej.

Porównajmy jeszcze twierdzenia 2.4 oraz 2.20 dotyczące stabilności stanu E_{df} w układach odpowiednio (2.1) i (2.164). Możemy stwierdzić, co następujące:

Wniosek 2.21. *W układach* (2.1) *oraz* (2.164) *zachowanie stanu wolnego od epidemii E_{df} w kontekście stabilności jest takie samo.*

Lokalna stabilność stanu endemicznego

Przejdźmy teraz do lokalnej stabilności stanu endemicznego E_e. Zakładamy więc, że zachodzi $\mathcal{R}_0 > 1$. Wprowadzamy współczynnik δ, który pojawił się w twierdzeniu 2.5. Ponadto definiujemy parametry

$$\bar{h}_1 := \frac{\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha + \sqrt{\left(\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha\right)^2 + 4(C-\mu)}}{2(C-\mu k)}, \tag{2.177}$$

$$\bar{h}_2 := \frac{\delta}{4(C-\mu k)^2(\alpha+\mu)}. \tag{2.178}$$

Z założenia (H) dostajemy $\bar{h}_1 > 0$ dla $\mathcal{R}_0 > 1$. Dodatniość $\bar{h}_2$ mamy dla $\delta > 0$. W celu zachowania przejrzystości zapisu, najpierw przyjmiemy $\delta > 0$. Przypadek $\delta < 0$ omówimy po sformułowaniu i udowodnieniu twierdzenia przedstawionego poniżej. Niegeneryczny przypadek $\delta = 0$ nie będzie rozważany.

Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 2.22. *Załóżmy, że endemiczny stan stacjonarny E_e układu* (2.164) *istnieje. Ponadto niech zachodzi $\delta > 0$. Stan E_e jest:*

- *węzłem lokalnie stabilnym, jeśli zachodzi $h < \bar{h}_2$,*
- *ogniskiem lokalnie stabilnym, jeśli zachodzą $h \in \left(\bar{h}_2, \bar{h}_1\right)$ oraz $\bar{h}_2 < \bar{h}_1$,*
- *ogniskiem niestabilnym, jeśli zachodzi $h > \bar{h}_1 > \bar{h}_2$,*
- *niehiperboliczny, jeśli zachodzi $h = \bar{h}_1 > \bar{h}_2$,*

gdzie $\bar{h}_1$ i $\bar{h}_2$ zdefiniowano odpowiednio w (2.177) *i* (2.178).

Dowód. Macierz Jacobiego układu (2.164) dla stanu E_e zapisujemy jako

$$\widehat{M}(E_e) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu}{1+hy_e} & \frac{h\left(1-k(1-h\mu)-hC\right)}{(1+hy_e)^2} \\ hy_e & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby uprościć zapis, wprowadźmy oznaczenia

$$\upsilon := \frac{1-h\mu}{1+hy_e}, \tag{2.179}$$

$$\varpi := hC + k(1-h\mu) - 1 = hC - h\mu k + k - 1 = h(C-\mu k) + \alpha + \mu. \tag{2.180}$$

Z (2.5) i $\mathcal{R}_0 > 1$ mamy $\upsilon > 0$ i $\varpi > 0$. Korzystając z (2.179) i (2.180) zapiszmy macierz $\widehat{M}(E_e)$ jako

$$\widehat{M}(E_e) = \begin{pmatrix} \upsilon & -\frac{h\varpi}{(1+hy_e)^2} \\ hy_e & 1 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$\widehat{P}(\lambda) = \lambda^2 - (1+\upsilon)\,\lambda + \upsilon + h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2}, \tag{2.181}$$

a jej wartości własne wynoszą

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \upsilon \pm \sqrt{\widehat{\delta}}\right),$$

gdzie

$$\widehat{\delta} = (1+\upsilon)^2 - 4\left(\upsilon + h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2}\right) = (1-\upsilon)^2 - 4h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2}.$$

Sprawdźmy, dla jakich h zachodzi $\widehat{\delta} > 0$. Dostajemy ciąg równoważnych nierówności

$$(1-\upsilon)^2 > 4h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2},$$

$$\left(1 - \frac{1-h\mu}{1+hy_e}\right)^2 > 4h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2},$$

$$\left(\frac{1+hy_e-1+h\mu}{1+hy_e}\right)^2 > 4h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2},$$

$$(y_e+\mu)^2 h^2 > 4h^2 y_e \varpi,$$

$$(y_e+\mu)^2 > 4y_e\varpi,$$

$$\left(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2 > 4\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu}\Big(h(C-\mu k)\alpha + \mu\Big),$$

$$(C-\mu)^2 > 4(C-\mu k)(\alpha+\mu)\Big(h(C-\mu k) + \alpha + \mu\Big),$$

$$\frac{(C-\mu)^2}{4(C-\mu k)(\alpha+\mu)} > h(C-\mu k) + \alpha + \mu,$$

$$\frac{(C-\mu)^2}{4(C-\mu k)(\alpha+\mu)} - (\alpha+\mu) > h(C-\mu k),$$

$$h < \frac{(C-\mu)^2}{4(C-\mu k)^2(\alpha+\mu)} - \frac{\alpha+\mu}{C-\mu k},$$

$$h < \frac{(C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(\alpha+\mu)^2}{4(C-\mu k)^2(\alpha+\mu)}$$

prowadzących do

$$h < \frac{\delta}{4(C-\mu k)^2(\alpha+\mu)}. \tag{2.182}$$

Zależność $\delta > 0$ implikuje dodatniość prawej strony (2.182). Łącząc (2.182) oraz (2.178) uzyskujemy warunek $h < \bar{h}_2$.

Analogicznie stwierdzamy, że $\widehat{\delta} < 0$ dla

$$h > \bar{h}_2. \tag{2.183}$$

Analizę lokalnej stabilności stanu E_e przeprowadzimy w zależności od znaku $\widehat{\delta}$. Przypadek $\widehat{\delta} = 0$ pomijamy.

• Rozpatrzmy najpierw przypadek $\widehat{\delta} > 0$, dla którego mamy dwie rzeczywiste wartości własne takie, że $\lambda_1 > \lambda_2$. Wielomian (2.181) ma dwa pierwiastki rzeczywiste, zaś współczynnik jego liniowego wyrażenia jest ujemny. Stąd dostajemy $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ i aby dostać lokalną stabilność stanu E_e, wystarczy zbadać $\lambda_1 < 1$. Z tej nierówności wynika

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \upsilon + \sqrt{\widehat{\delta}}\right) < 1,$$

$$\sqrt{\widehat{\delta}} < 1 - \upsilon. \tag{2.184}$$

Prawą stronę (2.184) zapisujemy jako

$$1 - \upsilon = 1 - \frac{1-h\mu}{1+hy_e} = \frac{hy_e + h\mu}{1+hy_e}.$$

To wyrażenie ma zawsze dodatni znak, zatem obie strony (2.184) podnosimy do kwadratu. Otrzymujemy

$$\widehat{\delta} < (1-\upsilon)^2,$$

co jest oczywiste ze względu na definicję $\widehat{\delta}$.

Z nierówności $\lambda_1 < 1$ nie uzyskaliśmy dodatkowych warunków lokalnej stabilności. Stwierdzamy więc, że istniejący stan E_e jest zawsze lokalnie stabilny, jeśli zachodzą nierówności $\delta > 0$ i $h < \bar{h}_2$.

• Przejdźmy teraz do przypadku $\widehat{\delta} < 0$, gdy wartości własne są zespolone. Ich iloczyn wynosi

$$\lambda_1\lambda_2 = |\lambda|^2 = \frac{1}{4}(1+\upsilon)^2 - \frac{1}{4}\widehat{\delta} = \frac{1}{4}(1+\upsilon)^2 - \frac{1}{4}(1+\upsilon)^2 + \left(\upsilon + h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2}\right) = \upsilon + h^2 y_e \frac{\varpi}{(1+hy_e)^2}.$$

Warunek $|\lambda| < 1$ ma postać

$$\frac{1-h\mu}{1+hy_e} + h^2 y_e \frac{h(C-\mu k)+\alpha+\mu}{(1+hy_e)^2} < 1,$$

co prowadzi do

$$(1-h\mu)(1+hy_e) + h^2 y_e\Big(h(C-\mu k)+\alpha+\mu\Big) < (1+hy_e)^2,$$

$$1 + hy_e - h\mu - h^2\mu y_e + h^2 y_e\Big(h(C-\mu k)+\alpha+\mu\Big) < 1 + 2hy_e + h^2 y_e^2,$$

$$-hy_e - h\mu - h^2\mu y_e - h^2 y_e^2 + h^3 y_e(C-\mu k) + h^2 y_e(\alpha+\mu) < 0,$$

$$-y_e - \mu - h\mu y_e - hy_e^2 + h^2 y_e(C - \mu k) + hy_e(\alpha + \mu) < 0,$$
$$h^2 y_e(C - \mu k) + hy_e(-y_e + \alpha + \mu - \mu) - (y_e + \mu) < 0,$$
$$\bar{P}(h) := y_e(\mathcal{R}_0 - 1)h^2 - y_e(y_e - \alpha)h - (y_e + \mu) < 0.$$

Wyraz wolny wielomianu $\bar{P}(h)$ jest ujemny. Z $\mathcal{R}_0 > 1$ stwierdzamy więc, że $\bar{P}(h)$ ma jeden pierwiastek dodatni równy

$$\frac{y_e(y_e-\alpha) + \sqrt{\Big(y_e(y_e-\alpha)\Big)^2 + 4y_e(C-\mu k)(y_e+\mu)}}{2y_e(C-\mu k)}$$
$$= \frac{y_e(y_e-\alpha) + \sqrt{y_e^2(y_e-\alpha)^2 + 4y_e^2(\alpha+\mu)(y_e+\mu)}}{2y_e(C-\mu k)} = \frac{y_e - \alpha + \sqrt{(y_e-\alpha)^2 + 4(\alpha+\mu)(y_e+\mu)}}{2(C-\mu k)}$$
$$= \frac{\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha + \sqrt{\Big(\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha\Big)^2 + 4(\alpha+\mu)\Big(\frac{C-\mu}{\alpha+\mu}\Big)}}{2(C-\mu k)} = \frac{\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha + \sqrt{\Big(\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha\Big)^2 + 4(C-\mu)}}{2(C-\mu k)}.$$

Porównując z (2.177) stwierdzamy, że otrzymana wartość to $\bar{h}_1$. Wynika zatem, że powinno zachodzić $h < \bar{h}_1$, aby $\bar{P}(h) < 0$. Łącząc $h < \bar{h}_1$ i (2.183) dostajemy $h \in \big(\bar{h}_2, \bar{h}_1\big)$ spełnione dla $\bar{h}_2 < \bar{h}_1$. □

Przyjrzymy się twierdzeniu 2.22. Zwróćmy uwagę, że h_2 jest wartością, po której przekroczeniu stan E_e przestaje być węzłem i staje się ogniskiem, przy czym lokalna stabilność jest zachowana. Wartość h_1 jest progową wartością w kontekście stabilności – po jej przekroczeniu stan E_e przestaje być stabilny.

Teraz rozważmy przypadek $\delta < 0$. Jeśli ta nierówność zachodzi, otrzymujemy $\bar{h}_2 < 0$ odpowiadające przypadkowi $\widehat{\delta} < 0$. Korzystając z tej zależności oraz twierdzenia 2.22, formułujemy wniosek:

Wniosek 2.23. *Niech $\delta < 0$. Istniejący stan stacjonarny E_e układu* (2.164) *jest wówczas:*

- *ogniskiem lokalnie stabilnym, jeśli $h < \bar{h}_1$,*
- *ogniskiem niestabilnym, jeśli $h > \bar{h}_1$,*
- *niehiperboliczny, jeśli $h = \bar{h}_1$.*

2.2.3 Wersje twierdzenia 2.22 i wniosku 2.23 z uwzględnieniem dodatniości rozwiązań

Teraz przyjmiemy założenie (2.9) gwarantujące dodatniość rozwiązań układu (2.164). Sprawdzamy warunki, dla których progowe wartości h zdefiniowane w poprzednim paragrafie spełniają tę nierówność. Sprawdźmy najpierw warunek

$$\bar{h}_2 < \frac{1}{k}. \tag{2.185}$$

Dostajemy z niego ciąg nierówności

$$\frac{\delta}{4(C-\mu k)^2(\alpha+\mu)} = \frac{(C-\mu)^2 - 4(C-\mu k)(\alpha+\mu)^2}{4(C-\mu k)^2(\alpha+\mu)} < \frac{1}{k},$$
$$\frac{1}{4(\alpha+\mu)} \cdot \frac{(C-\mu)^2}{(C-\mu k)^2} - \frac{\alpha+\mu}{C-\mu k} < \frac{1}{k},$$
$$\frac{1}{4(\alpha+\mu)} \cdot \frac{(C-\mu)^2}{(C-\mu k)^2} < \frac{1}{k} + \frac{\alpha+\mu}{C-\mu k},$$
$$\frac{1}{4(\alpha+\mu)} \cdot \frac{(C-\mu)^2}{(C-\mu k)^2} < \frac{C-\mu k + (\alpha+\mu)k}{k(C-\mu k)} = \frac{C+\alpha k}{k(C-\mu k)},$$
$$\frac{(C-\mu)^2}{4(\alpha+\mu)} < \frac{(C+\alpha k)(C-\mu k)}{k},$$
$$k(C-\mu)^2 < 4(\alpha+\mu)(C+\alpha k)(C-\mu k),$$

$$k(C^2-2\mu C+\mu^2)<4(\alpha+\mu)(C^2-C\mu k+\alpha kC-\alpha\mu k^2),$$
$$kC^2-2k\mu C+k\mu^2<4(\alpha+\mu)C^2-4(\alpha+\mu)k(\mu-\alpha)C-4(\alpha+\mu)\alpha\mu k^2$$

dających

$$W(C):=a_2C^2+a_1C+a_0<0, \tag{2.186}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_2&:=k-4(\alpha+\mu)=1+\alpha+\mu-4(\alpha+\mu)=1-3(\alpha+\mu),\\
a_1&:=2k\big(2(\mu+\alpha)(\mu-\alpha)-\mu\big),\\
a_0&:=k\mu\big(4k\alpha(\alpha+\mu)+\mu\big).
\end{aligned} \tag{2.187}$$

Zauważmy, że $a_0>0$. Wyróżnik wielomianu $W(C)$ wynosi

$$\begin{aligned}
\delta_C&:=4k^2\Big(2(\mu+\alpha)(\mu-\alpha)-\mu\Big)^2-4\Big(1-3(\alpha+\mu)\Big)k\mu\Big(\mu+4k\alpha(\alpha+\mu)\Big)\\
&=4k^2\Big(2(k-1)(\mu-\alpha)-\mu\Big)^2-4k\mu\Big(1-3(k-1)\Big)\Big(\mu+4k\alpha(k-1)\Big)\\
&=4k^2\Big(4(k-1)^2(\mu-\alpha)^2-4(k-1)(\mu-\alpha)\mu+\mu^2\Big)\\
&\quad-4k\mu\Big(\mu+4k\alpha(k-1)-3(k-1)\mu-12k(k-1)^2\alpha\Big)\\
&=16k^2(k-1)^2(\mu-\alpha)^2-16k^2(k-1)(\mu-\alpha)\mu+4k^2\mu^2\\
&\quad-4k\mu^2-16k^2(k-1)\mu\alpha+12k(k-1)\mu^2+48k^2(k-1)^2\alpha\mu\\
&=16k^2(k-1)^2\Big((\mu-\alpha)^2+3\alpha\mu\Big)-16k^2(k-1)\Big((\mu-\alpha)\mu+\alpha\mu\Big)\\
&\quad+12k(k-1)\mu^2+4k(k-1)\mu^2\\
&=16k^2(k-1)^2\Big((\mu-\alpha)^2+3\alpha\mu\Big)-16k^2(k-1)\mu^2+16k(k-1)\mu^2\\
&=16k^2(k-1)^2\Big((\mu-\alpha)^2+3\alpha\mu\Big)-16k(k-1)\mu^2(k-1)\\
&=16k(k-1)^2\Big(k\left((\mu-\alpha)^2+3\alpha\mu\right)-\mu^2\Big)=16k(\alpha+\mu)^2\Big(k\left((\mu-\alpha)^2+3\alpha\mu\right)-\mu^2\Big).
\end{aligned} \tag{2.188}$$

Zapisujemy

$$\begin{aligned}
&k\Big((\mu-\alpha)^2+3\alpha\mu\Big)-\mu^2=(1+\alpha+\mu)\left(\mu^2-2\alpha\mu+\alpha^2+3\alpha\mu\right)-\mu^2\\
&=\mu^2+\alpha\mu+\alpha^2+(\alpha+\mu)\left(\mu^2+\alpha\mu+\alpha^2\right)-\mu^2=\alpha\mu+\alpha^2+(\alpha+\mu)\left(\mu^2+\alpha\mu+\alpha^2\right)\\
&=(\alpha+\mu)\left(\alpha+\mu^2+\alpha\mu+\alpha^2\right).
\end{aligned} \tag{2.189}$$

Uwzgledniając (2.189) w (2.188) dostajemy

$$\delta_C=16k(\alpha+\mu)^3\left(\alpha+\mu^2+\alpha\mu+\alpha^2\right). \tag{2.190}$$

Ponieważ $\delta_C>0$, $W_C(C)$ ma dwa miejsca zerowe postaci

$$C_{a,b}=\frac{2k\Big(\mu-2(\mu+\alpha)(\mu-\alpha)\Big)\mp\sqrt{\delta_C}}{2\Big(1-3(\alpha+\mu)\Big)}. \tag{2.191}$$

Nierówności $a_2>0$ i $a_1<0$ zapiszmy jako

$$\alpha+\mu<\frac{1}{3} \tag{2.192}$$

oraz

$$2(\mu+\alpha)(\mu-\alpha)<\mu. \tag{2.193}$$

Weźmy $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Jeśli założymy (2.192), to z (2.193) wynika

$$2m(\mu - \alpha) < \mu \quad \Rightarrow \quad 2m\mu - 2m\alpha < \mu \quad \Rightarrow \quad 0 < (1 - 2m)\,\mu + 2m\alpha.$$

Mamy $1 - 2m > 0$, zatem ostatnia powyższa nierówność jest zawsze prawdziwa. Oznacza to, że $a_2 > 0$ implikuje $a_1 < 0$. Ponadto stwierdzamy, że nie mogą zajść jednocześnie $a_2 > 0$ i $a_1 > 0$.

Okazuje się więc, że na spełnienie nierówności (2.186) wpływ ma tylko znak a_2. Nierówności (2.185) i (2.186) są tożsame. Stwierdzamy zatem, że

- dla $a_2 > 0$ nierówność (2.185) zachodzi dla $C > 0$ i $C \in (C_a, C_b)$,
- dla $a_2 < 0$ nierówność (2.185) zachodzi dla $C > C_b > 0$.

Teraz przyjrzyjmy się nierówności

$$\bar{h}_1 < \frac{1}{k}. \tag{2.194}$$

Skorzystamy ze wzoru na y_e i zapiszemy $\bar{h}_1$ jako

$$\bar{h}_1 = \frac{y_e - \alpha + \sqrt{(y_e - \alpha)^2 + 4(C - \mu)}}{2(C - \mu k)} = \frac{y_e - \alpha + \sqrt{(y_e - \alpha)^2 + 4(C - \mu)}}{2y_e(k - 1)}.$$

Uwzględniając tę zależność w (2.194) dostajemy

$$\frac{(y_e - \alpha) + \sqrt{(y_e - \alpha)^2 + 4(C - \mu)}}{2(C - \mu k)} < \frac{1}{k},$$

$$(y_e - \alpha) + \sqrt{(y_e - \alpha)^2 + 4(C - \mu)} < \frac{2(C - \mu k)}{k},$$

$$\sqrt{(y_e - \alpha)^2 + 4(C - \mu)} < \frac{2(C - \mu k)}{k} - (y_e - \alpha)\,. \tag{2.195}$$

Nierówność (2.195) może być spełniona, jeśli

$$\frac{2(C - \mu k)}{k} - y_e + \alpha = \frac{2y_e(k - 1)}{k} - y_e + \alpha = y_e\left(1 - \frac{2}{k}\right) + \alpha = \frac{(C - \mu k)(k - 2)}{k(k - 1)} + \alpha > 0. \tag{2.196}$$

Jeśli zachodzi warunek przecwiny do (2.196), to mamy

$$\bar{h}_1 > \frac{1}{k}. \tag{2.197}$$

Przyjmijmy, że zachodzi (2.196). Wówczas możemy podnieść obie strony (2.195) do kwadratu otrzymując równoważne nierówności

$$(y_e - \alpha)^2 + 4(C - \mu) < \frac{4(C - \mu k)^2}{k^2} - 4\frac{(C - \mu k)(y_e - \alpha)}{k} + (y_e - \alpha)^2\,,$$

$$4(C - \mu) < \frac{4(C - \mu k)^2}{k^2} - 4\frac{(C - \mu k)(y_e - \alpha)}{k},$$

$$k^2(C - \mu) < (C - \mu k)^2 - k(C - \mu k)(y_e - \alpha),$$

$$k^2(C - \mu) < (C - \mu k)^2 - k(C - \mu k)\left(\frac{C - \mu k}{\alpha + \mu} - \alpha\right),$$

$$k^2(C - \mu) < \frac{(\alpha + \mu)(C - \mu k)^2}{\alpha + \mu} - (1 + \alpha + \mu)\frac{(C - \mu k)^2}{\alpha + \mu} + k\alpha(C - \mu k),$$

$$k^2(C - \mu) < -\frac{(C - \mu k)^2}{\alpha + \mu} + k\alpha(C - \mu k),$$

$$k(1+\alpha+\mu)(C-\mu) < -\frac{(C-\mu k)^2}{\alpha+\mu} + k\alpha\Big(C-\mu(1+\mu+\alpha)\Big),$$

$$k(C-\mu+\alpha C-\alpha\mu+C\mu-\mu^2) < -\frac{(C-\mu k)^2}{\alpha+\mu} + k\alpha(C-\mu-\mu^2-\mu\alpha),$$

$$k\alpha C-k\alpha\mu+k(C-\mu+C\mu-\mu^2) < -\frac{(C-\mu k)^2}{\alpha+\mu} + k\alpha C-k\alpha\mu-k\alpha(\mu^2+\mu\alpha),$$

$$k(C-\mu+C\mu-\mu^2) < -\frac{(C-\mu k)^2}{\alpha+\mu} - k\alpha(\mu^2+\mu\alpha)$$

prowadzące do

$$kC(1+\mu)-k\mu(1+\mu)+\frac{(C-\mu k)^2}{\alpha+\mu}+k\alpha(\mu^2+\mu\alpha)<0. \tag{2.198}$$

Zwrócmy uwagę, że z założenia (H) wynika $kC(1+\mu) \gg k\mu(1+\mu)$. Stwierdzamy więc, że (2.198) nigdy nie zachodzi. Oznacza to, że warunek (2.194) jest sprzeczny i należy zakładać (2.197).

Teraz odnieśmy twierdzenie 2.22 i wniosek 2.23 do powyższej analizy w kontekście dodatniości rozwiązań. Ponownie zwróćmy uwagę, że nie może zachodzić $h > \bar{h}_1$. Rozpatrujemy znak a_2 zdefiniowanego w (2.187). Z twierdzenia 2.22 otrzymujemy wniosek:

Wniosek 2.24. *Niech stan E_e układu* (2.164) *istnieje. Ponadto niech $\delta > 0$. Zdefiniujmy C_a i C_b wzorem* (2.191). *Jeśli zachodzi jeden z zestawów warunków:*

$$\alpha+\mu<\frac{1}{3}, \quad 0<C\in(C_a,C_b) \tag{2.199}$$

lub

$$\alpha+\mu>\frac{1}{3}, \quad C>C_b>0, \tag{2.200}$$

to stan E_e jest

- *węzłem lokalnie stabilnym dla $h < \bar{h}_2$,*
- *ogniskiem lokalnie stabilnym dla $h \in \big(\bar{h}_2, \frac{1}{k}\big)$.*

Ponadto rozwiązania układu (2.164) *pozostają dodatnie dla $x_0 \geq 0$ i $y_0 > 0$.*

Powróćmy do wniosku 2.23. Warunek $\delta < 0$ jest równoważny $\bar{h}_2 < 0$, zatem (2.185) zachodzi zawsze i wystarczy uwzględnić tylko (2.197). Odrzucamy przypadek $h > \bar{h}_1$.

Wniosek 2.25. *Niech stan E_e układu* (2.164) *istnieje i zachodzą nierówności* (2.9) *i $\delta < 0$. Stan E_e jest wówczas ogniskiem lokalnie stabilnym i rozwiązania układu* (2.164) *pozostają dodatnie dla $x_0 \geq 0$ i $y_0 > 0$.*

2.2.4 Możliwość wystąpienia bifurkacji

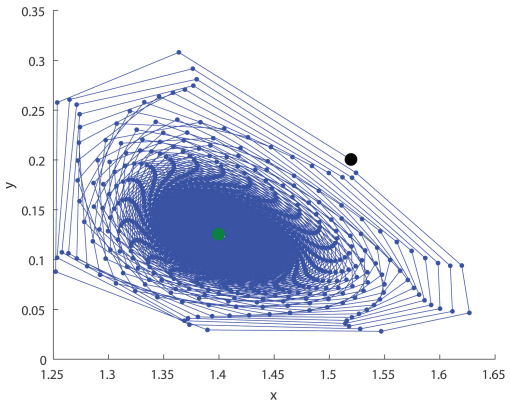
Rozważmy jeszcze możliwość zajścia bifurkacji. Zauważmy, że jeśli odpowiednie wartości własne są rzeczywiste, to stan E_e jest zawsze lokalnie stabilny. W układzie (2.164) nie wystąpi więc bifurkacja podwojenia okresu dla stanu E_e. Uwzględniamy tylko przypadek, gdy wartości własne są zespolone. Na podstawie wcześniejszych obliczeń, określamy warunki konieczne zajścia bifurkacji.

Wniosek 2.26. *Załóżmy, że zachodzą $\delta > 0$ i $\widehat{\delta} < 0$ lub $\delta < 0$. W układzie* (2.164) *dla istniejącego stanu stacjonarnego E_e może wystąpić bifurkacja Neimarka-Sackera dla $h = \bar{h}_1$.*

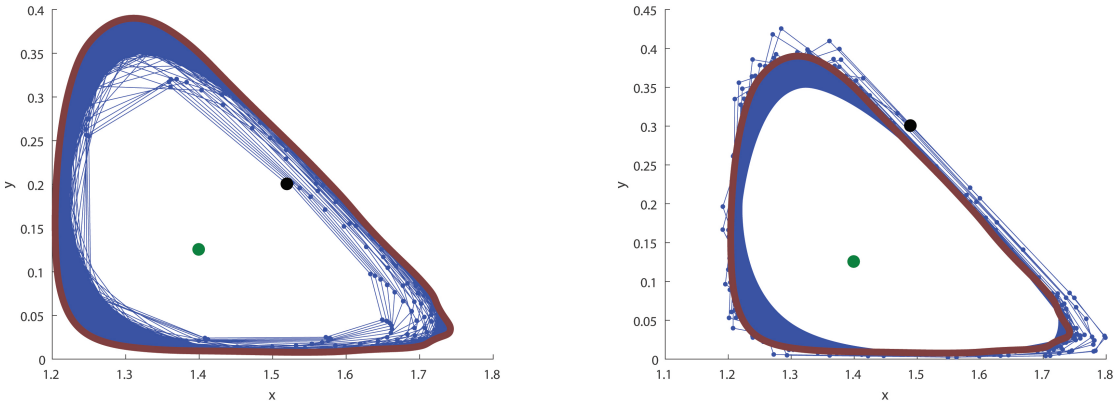
Określenie warunków występienia BNS dla stanu E_e w układzie (2.164) jest znacznie trudniejsze niż w przypadku układu (2.1) z powodu bardziej złożonej postaci tego układu. Z tego powodu jedynie zaprezentujemy symulacje wskazujące na BNS.

Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach 2.10 i 2.11. Na każdym z nich zobrazowano 50000 iteracji układu (2.164). Do symulacji użyto wartości parametrów: $C = 0,19$, $\mu = 0,1$ oraz $\alpha = 0,3$ – dobrano je tak, by uzyskać warunek $\delta < 0$. Dla symulacji z rysunku 2.10 przyjęto $(x_0, y_0) = (1,52; 0,2)$ oraz $h = 4,5$. W przypadku rysunków 2.11a i 2.11b uwzględniono $h = 4,65$, przy czym dla rysunku 2.11a

przyjęto $(x_0, y_0) = (1,52; 0,2)$, dla rysunku 2.11b zaś założono $(x_0, y_0) = (1,49; 0,3)$. Zauważmy, że dla $h = 4,5$ stan E_e jest węzłem stabilnym, dla $h = 4,65$ zaś uzyskujemy krzywą niezmienniczą przyciągającą rozwiązania z wewnątrz, jak i zewnątrz krzywej, co pokazują odpowiednio rysunki 2.11a i 2.11b. Takie zachowanie wskazuje, że w układzie (2.164) może wystąpić nadkrytyczna bifurkacja Neimarka-Sackera dla stanu E_e.



Rysunek 2.10: Punkty będące iteracjami układu (2.164) dla $h = 4,5$. Warunek początkowy zaznaczono czarnym punktem. Kolejne iteracje zaznaczono niebieskimi punktami i połączono je niebieskimi liniami. Stan stacjonarny zaznaczono na zielono.



(a) (b)

Rysunek 2.11: Punkty będące iteracjami układu (2.164) dla $h = 4,65$ i odpowiednio (a) $(x_0, y_0) = (1,52; 0,2)$ i (b) $(x_0, y_0) = (1,49; 0,3)$. Warunki początkowe zaznaczono czarnymi punktami, a pierwsze 40000 iteracji niebieskimi punktami i połączono je niebieskimi liniami, kolejne 10000 iteracji zaś zaznaczono bordowymi punktami. Stany stacjonarne zaznaczono na zielono.

2.3 Dyskusja

W tym rozdziale dokonaliśmy dyskretyzacji układu (1.14). Zastosowaliśmy otwarty schemat Eulera (EEM) oraz dyskretyzację niestandardową ($NSDM$) otrzymując odpowiednio układy (2.1) oraz (2.164). Dokonaliśmy analizy tak powstałych układów.

Najpierw zbadaliśmy układ (2.1). W tym układzie dodatniość zmiennych zachodzi pod określonymi warunkami, co odróżnia go od odpowiedniego układu ciągłego. Z tego powodu układy dyskretne z użyciem EEM mogą nie być odpowiednie do modelowania dynamiki epidemii. Już na poziomie populacji

jednorodnej okazuje się, że układ z $NSDM$ znacznie lepiej zachowuje własności modelu ciągłego niż układ z EEM. Dzięki zastosowaniu $NSDM$ dodatniość zmiennych jest zagwarantowana dla szerszego zakresu parametrów w porównaniu do EEM.

Podobieństwo wynikające z użycia EEM i $NSDM$ zaobserwowaliśmy w zachowaniu stanu wolnego od epidemii E_{df}, które w przypadku obu układów jest takie samo, nawet w kontekście globalnej stabilności. Również w przypadku lokalnej stabilności endemicznego stanu stacjonarnego oba układy mają zbliżone zachowania. Dla obu układów (2.1) i (2.164) zbadaliśmy stabilność stanu E_e najpierw bez założenia o dodatniości rozwiązań. Okazuje się, że na zachowanie stanu E_e w obu układach wpływ ma ten sam parametr δ. Stabilność stanu E_e w układzie (2.1) rozpatrujemy w dwóch oddzielnych przypadkach, kiedy δ ma dodatni bądź ujemny znak, co odpowiada występowaniu rzeczywistych i zespolonych wartości własnych. W przypadku użycia $NSDM$ na charakter wartości własnych dodatkowo ma wpływ krok dyskretyzacji. W obu układach po przekroczeniu odpowiedniej wartości kroku dyskretyzacji stan E_e traci stabilność bez względu na znak δ.

W przypadku układu (2.1) uwzględniliśmy dodatkowo warunki (2.29), dające zachowanie rozwiązań w dodatnim zbiorze niezmienniczym. Przy takim założeniu dostajemy to samo lub uproszczone zachowanie stanu E_e. W szczególności dla pary warunków $\delta \geq 0$ i (2.47) lub nierówności $\delta < 0$ stan E_e jest wyłącznie lokalnie stabilny. Dla układu (2.164) założyliśmy tylko dodatniość rozwiązań, co gwarantuje nierówność (2.9). W tym układzie zachowanie stanu E_e również się upraszcza. Jeśli zachodzi nierówność $\delta < 0$ lub jeśli $\delta > 0$ i zachodzi jeden z dwóch zestawów nierówności: (2.199) lub (2.200), to dostajemy wyłącznie lokalną stabilność stanu E_e (przypadek $\delta = 0$ pominęliśmy w analizie).

Zauważmy, że w układach (2.1) i (2.164) otrzymujemy podobne zachowanie stanu E_e, gdy h znajduje się odpowiednio w otoczeniu h_3 i $\bar{h}_1$ zdefiniowanych odpowiednio w (2.30) i (2.177). Wówczas przy przekroczeniu progowych wartości kroków dyskretyzacji, stan E_e z ogniska lokalnie stabilnego staje się ogniskiem niestabilnym. Obliczmy różnicę $\bar{h}_1 - h_3$. Wynosi ona

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha + \sqrt{\left(\frac{C-\mu k}{\alpha+\mu} - \alpha\right)^2 + 4(C-\mu)}}{2(C-\mu k)} - \frac{C-\mu}{(k-1)(C-\mu k)} \\
&= \frac{1}{2(C-\mu k)}\left(\frac{C-\mu k}{k-1} - \alpha + \sqrt{\left(\frac{C-\mu k}{k-1} - \alpha\right)^2 + 4(C-\mu)} - \frac{2(C-\mu)}{k-1}\right) = \frac{q}{2(C-\mu k)(k-1)},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
q &= \sqrt{\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2} + C - \mu k - \alpha(k-1) - 2(C-\mu) \\
&= -C - \mu k + 2\mu - \alpha(k-1) + \sqrt{\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2}.
\end{aligned}$$

Sprawdźmy, kiedy zachodzi $q > 0$. Dostajemy

$$-C - \mu k + 2\mu - \alpha(k-1) + \sqrt{\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2} > 0,$$

$$\sqrt{\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2} > C + k\mu - 2\mu + \alpha(k-1),$$

$$\sqrt{\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2} > C + (k-1)\mu - \mu + \alpha(k-1),$$

co daje

$$\sqrt{\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2} > C + (k-1)^2 - \mu. \tag{2.201}$$

Z założenia (H) prawa strona (2.201) jest zawsze dodatnia. Możemy więc podnieść obie strony (2.201) do kwadratu otrzymując ciąg nierówności

$$\Big(C-\mu k-\alpha(k-1)\Big)^2 + 4(C-\mu)(k-1)^2 > \Big(C-\mu+(k-1)^2\Big)^2,$$

$$(C-\mu k)^2-2\alpha(C-\mu k)(k-1)+\alpha^2(k-1)^2+4(C-\mu)(\alpha+\mu)^2$$
$$>(C-\mu)^2+2(C-\mu)(k-1)^2+(\alpha^2+2\alpha\mu+\mu^2)(k-1)^2,$$

$$(C-\mu k)^2-2\alpha(C-\mu k)(k-1)+4(C-\mu)(\alpha^2+2\alpha\mu+\mu^2)$$
$$>(C-\mu)^2+2(C-\mu)(k-1)^2+(2\alpha\mu+\mu^2)(k-1)^2,$$

$$C^2-2\mu kC+\mu^2k^2-2\alpha(Ck-C-\mu k^2+\mu k)+4C\alpha^2+8C\alpha\mu+4C\mu^2-4\mu\alpha^2-8\mu^2\alpha-4\mu^3$$
$$>C^2-2C\mu+\mu^2+2(C-\mu)(k^2-2k+1)+(2\alpha\mu+\mu^2)(k^2-2k+1),$$

$$-2\mu kC+\mu^2k^2-2\alpha Ck+2\alpha C+2\alpha\mu k^2-2\alpha\mu k+4C\alpha^2+8C\alpha\mu+4C\mu^2-4\mu\alpha^2-8\mu^2\alpha-4\mu^3$$
$$>-2C\mu+\mu^2+2Ck^2-4Ck+2C-2\mu k^2+4\mu k-2\mu+2\alpha\mu k^2-4\alpha k\mu+2\alpha\mu+k^2\mu^2-2k\mu^2+\mu^2,$$

$$-2\mu^2C-2\mu C-2\mu\alpha C-2\alpha^2C-2\alpha\mu C-2\alpha C+2\alpha C+2\alpha\mu k+4C\alpha^2+8C\alpha\mu+4C\mu^2-4\mu\alpha^2-8\mu^2\alpha-4\mu^3$$
$$>-2C\mu+2\mu^2+2Ck(1+\alpha+\mu)-4Ck+2C-2\mu k(1+\alpha+\mu)+4\mu k-2\mu+2\alpha\mu-2\mu^2-2\mu^2(\alpha+\mu),$$

$$2\mu^2C-4\mu\alpha C+2\alpha^2C+2\alpha\mu k+8C\alpha\mu-4\mu\alpha^2-8\mu^2\alpha-4\mu^3$$
$$>2C(\alpha+\mu)-2Ck+2C-2\mu(\alpha+\mu)+2\mu k-2\mu+2\alpha\mu-2\mu^2(\alpha+\mu),$$

$$2\mu^2C+4\mu\alpha C+2\alpha^2C+2\alpha\mu k-4\mu\alpha^2-8\mu^2\alpha-4\mu^3>-2C+2C+2\mu-2\mu+2\alpha\mu-2\mu^2\alpha-2\mu^3,$$
$$2\mu^2C+4\mu\alpha C+2\alpha^2C+2\alpha\mu k-4\mu\alpha^2-8\mu^2\alpha>2\alpha\mu-2\mu^2\alpha+2\mu^3,$$
$$\mu^2C+2\mu\alpha C+\alpha^2C+\alpha\mu k-2\mu\alpha^2-4\mu^2\alpha>\alpha\mu-\mu^2\alpha+\mu^3,$$
$$\mu^2C+2\mu\alpha C+\alpha^2C+\alpha\mu(1+\alpha+\mu)-2\mu\alpha^2-4\mu^2\alpha>\alpha\mu-\mu^2\alpha+\mu^3,$$
$$\mu^2C+2\mu\alpha C+\alpha^2C+\alpha^2\mu+\alpha\mu^2-2\mu\alpha^2-4\mu^2\alpha>-\mu^2\alpha+\mu^3,$$
$$\mu^2C+2\mu\alpha C+\alpha^2C-\alpha^2\mu-3\alpha\mu^2>-\mu^2\alpha+\mu^3,$$
$$\mu^2C+2\mu\alpha C+\alpha^2C>2\mu^2\alpha+\mu^3+\alpha^2\mu,$$
$$C(\mu^2+2\mu\alpha+\alpha^2)>\mu(\mu^2+2\mu\alpha+\alpha^2)$$

prowadzących do

$$C>\mu.$$

Zgodnie z (H) powyższa nierówność jest zawsze spełniona. Stwierdzamy więc, że zachodzi $q>0$ oraz $\bar{h}_1>h_3$. Oznacza to, że w układzie (2.164) utrata stabilności E_e następuje dla większej wartości progowej niż w przypadku układu (2.1). Powtórzmy, że w układzie ciągłym (1.14) stan E_e jest lokalnie stabilny, o ile istnieje. Stwierdzamy zatem ponownie, że zastosowanie $NSDM$ pozwala nam na lepsze przybliżenie modelu ciągłego w porównaniu do EEM.

Porównajmy oba układy w kontekście bifurkacji. W układzie (2.1) dla stanu E_e dla określonych warunków występuje zarówno bifurkacja podwojenia okresu (BPO), jak i Neimarka-Sackera (BNS). Badamy układ deterministyczny, więc w przebiegu epidemii należy spodziewać się co najwyżej jednego rodzaju bifurkacji. Możliwość wystąpienia dwóch rodzajów bifurkacji w (2.1) pokazuje, że modele epidemiologiczne z użyciem EEM nie obrazują odpowiednio dynamiki epidemii. W dalszej części omówiliśmy własności układu (2.164). W przypadku tego układu BPO nie może zajść, może wystąpić tylko BNS. Z powodu skomplikowanych rachunków nie podaliśmy warunków wystarczających jej zajścia, jednak wykonane symulacje sugerują, że w układzie (2.164) wystąpuje nadkrytyczna BNS. Przypomnijmy, że w przypadku zastosowania EEM symulacje sugerowały wystąpienie podkrytycznej BNS. Aby wykazać, że dla EEM i $NSDM$ występuje inny rodzaj BNS, należałoby dokonać analizy matematycznej.

Podkreślmy, że prezentowane w tym rozdziale wyniki można zastosować nie tylko do analizowania dynamiki epidemii. Przedstawione rozważania wpisują się w tematykę analizy stabilności dyskretnych układów dwuwymiarowych, do których zastosowano EEM lub $NSDM$. Zwróćmy uwagę, że we wszystkich omawianych zagadnieniach uzyskaliśmy wyniki o jawnej postaci i zależne od kroku dyskretyzacji, co nie jest powszechnym podejściem zwłaszcza w kontekście badania bifurkacji (por. [24], [56]).

Rozdział 3

Modele ciągłe dla populacji niejednorodnej

Przejdźmy do analizy ciągłych krzyżowych modeli dynamiki transmisji choroby w populacji niejednorodnej, w której wyróżniamy dwie podpopulacje. Pierwsza z nich jest podpopulacją niskiego ryzyka transmisji, druga – wysokiego. Najpierw zajmiemy się przypadkiem, gdy występuje zmienny napływ osobników do każdej z podpopulacji. Następnie sformułujemy i zbadamy model ze stałym napływem. Oba typy modeli zbudujemy w oparciu o odpowiednie ciągle modele dynamiki epidemii w populacji jednorodnej, które zostały wprowadzone w rozdziale 1.

3.1 Model ze zmiennym napływem

W tym podrozdziale sformułujemy model krzyżowy ze zmiennym napływem i dokonamy jego pełnej analizy.

Zacznijmy najpierw od zdefniowania oznaczeń, które wystąpią również w kolejnych rozdziałach. Wprowadzone zmienne i parametry mają indeks dolny i równy 1 lub 2. Indeks dolny równy 1 odnosi się do zmiennych i parametrów dotyczących podpopulacji niskiego ryzyka, indeks dolny równy 2 zaś dotyczy podpopulacji wysokiego ryzyka transmisji. Brak przypisania indeksowi określonej wartości oznacza, że dana zależność jest spełniona dla obu podpopulacji.

W związku z powyższym mamy następujące oznaczenia:

- $S_1(t)$ – liczba osób zdrowych z podpopulacji niskiego ryzyka w chwili t,
- $S_2(t)$ – liczba osób zdrowych z podpopulacji wysokiego ryzyka w chwili t,
- $I_1(t)$ – liczba osób chorych z podpopulacji niskiego ryzyka w chwili t,
- $I_2(t)$ – liczba osób chorych z podpopulacji wysokiego ryzyka w chwili t.

Wprowadźmy też oznaczenia

$$N_1(t) = S_1(t) + I_1(t), \qquad N_2(t) = S_2(t) + I_2(t),$$

czyli $N_1(t)$ i $N_2(t)$ są liczebnościami podpopulacji odpowiednio niskiego i wysokiego ryzyka w chwili t. Jeśli to nie spowoduje dwuznaczności, będziemy pisać S_i, I_i i N_i zamiast odpowiednio $S_i(t)$, $I_i(t)$ i $N_i(t)$.

W konstruowanym układzie występują współczynniki transmisji choroby między osobnikami, które opisano w tabeli 3.1:

Zdefiniujmy pozostałe parametry:

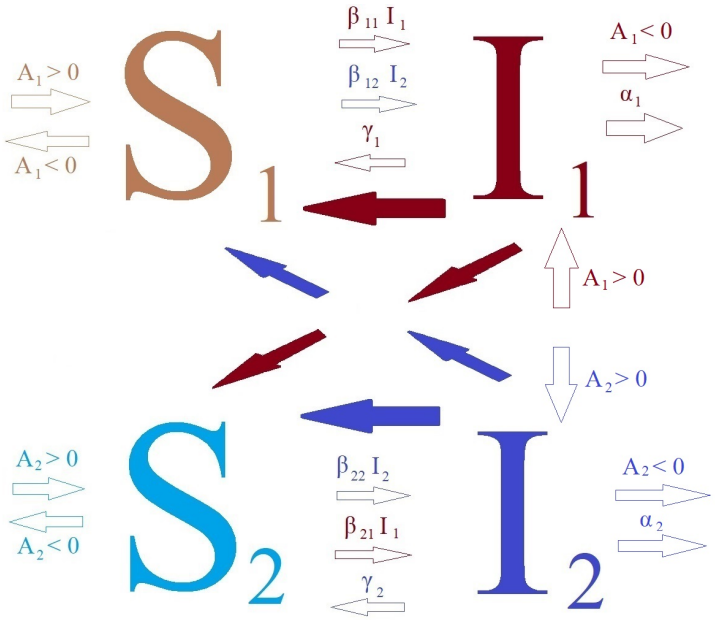
- α_1 i α_2 są współczynnikami śmiertelności związanej z chorobą odpowiednio dla osobników z podpopulacji niskiego i wysokiego ryzyka,
- γ_1 i γ_2 to współczynniki wyzdrowienia dla odpowiedniej podpopulacji,

Tabela 3.1: Wartości współczynników transmisji choroby w populacji niejednorodnej.

Symbol	Sposób transmisji choroby
β_{11}	w obrębie podpopulacji niskiego ryzyka
β_{12}	z podpopulacji wysokiego ryzyka do podpopulacji niskiego ryzyka
β_{21}	z podpopulacji niskiego ryzyka do podpopulacji wysokiego ryzyka
β_{22}	w obrębie podpopulacji wysokiego ryzyka

- A_1 i A_2 są współczynnikami przyrostu naturalnego netto oraz migracji dla danej podpopulacji – podobnie jak w poprzednim rozdziale zakładamy, że przyrost w danej podpopulacji jest propocjonalny do jej liczebności.

Schemat transmisji choroby w populacji niejednorodnej został przedstawiony na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Schemat transmisji choroby w populacji niejednorodnej. Wypełnione strzałki obrazują możliwe sposoby transmisji choroby.

Model opisujący dynamikę epidemii w populacji niejednorodnej możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= -\beta_{11} f(S_1, I_1) - \beta_{12} f(S_1, I_2) + \gamma_1 I_1 + A_1 S_1, \\
\dot{I}_1 &= \beta_{11} f(S_1, I_1) + \beta_{12} f(S_1, I_2) - (\gamma_1 + \alpha_1 - A_1) I_1, \\
\dot{S}_2 &= -\beta_{22} f(S_2, I_2) - \beta_{21} f(S_2, I_1) + \gamma_2 I_2 + A_2 S_2, \\
\dot{I}_2 &= \beta_{22} f(S_2, I_2) + \beta_{21} f(S_2, I_1) - (\gamma_2 + \alpha_2 - A_2) I_2.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Współczynniki występujące w układzie (3.1), oprócz A_1 i A_2, są dodatnie. Parametry A_1 i A_2, ze względu na ich znaczenie, mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Ponadto przyjmujemy, że wszystkie współczynniki mają stałą wartość.

Własności uogólnionej funkcji transmisji $f(S, I)$ są takie same jak w rozdziale pierwszym. Będziemy znowu rozważać dwie postaci funkcji $f(S, I)$: $f_1(S, I)$ oraz $f_2(S, I)$. Własności obu typów funkcji z układu (1.3) zostają zachowane również dla układu (3.1). Założenie $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0$ będzie potrzebne podczas analizy półzerowego stanu stacjonarnego, wprowadzonego i omówionego później. Wstępną analizę modelu (3.1) z funkcją transmisji f_2 przedstawiono w [31].

Należy podkreślić, że powyższy model – poprzez swój uniwersalny charakter – może zostać rozbudowany, aby móc opisać transmisję dowolnej choroby zakaźnej z uwzględnieniem większej liczby grup osób zarażonych, na przykład zakażonych z utajoną lub nieutajoną postacią choroby.

W celu zmniejszenia liczby parametrów występujących w modelu przeskalujmy równania (3.1) analogicznie jak w modelu (1.3). Po wprowadzeniu nowej zmiennej niezależnej $\tau = \gamma_1 t$ możemy zapisać

$$\frac{1}{\gamma_1}\frac{dS_i}{dt} = \frac{dS_i}{d\tau} = S_i', \qquad \frac{1}{\gamma_1}\frac{dI_i}{dt} = \frac{dI_i}{d\tau} = I_i'.$$

Układ (3.1) ma wówczas postać

$$S_1' = -\beta_{11} f(S_1, I_1) - \beta_{12} f(S_1, I_2) + \eta_1 I_1 + A_1 S_1, \tag{3.2a}$$
$$I_1' = \beta_{11} f(S_1, I_1) + \beta_{12} f(S_1, I_2) - (\eta_1 + \alpha_1 - A_1) I_1, \tag{3.2b}$$
$$S_2' = -\beta_{22} f(S_2, I_2) - \beta_{21} f(S_2, I_1) + \eta_2 I_2 + A_2 S_2, \tag{3.2c}$$
$$I_2' = \beta_{22} f(S_2, I_2) + \beta_{21} f(S_2, I_1) - (\eta_2 + \alpha_2 - A_2) I_2, \tag{3.2d}$$

gdzie

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = 1, \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, & \text{jeśli } i = 2, \end{cases}$$

pozostałe współczynniki zaś są przeskalowane przez γ_1. Zmienne S_i, I_i stały się teraz funkcjami zależnymi od τ. Będziemy zapisywać η zamiast η_2, ponieważ η_1 nie występuje w prezentowanych oznaczeniach.

Następnie dla funkcji f_2 mnożymy równania (3.2a) i (3.2b) przez β_{11} oraz równania (3.2c) i (3.2d) przez β_{22}. W przypadku f_1 mnożymy podane pary równań odpowiednio przez $\sqrt{\beta_{11}}$ i $\sqrt{\beta_{22}}$. Ponadto oznaczamy $\beta_1 = \beta_{12}$ oraz $\beta_2 = \beta_{21}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$x_1' = -f(x_1, y_1) - \beta_1 f(x_1, y_2) + y_1 + A_1 x_1, \tag{3.3a}$$
$$y_1' = f(x_1, y_1) + \beta_1 f(x_1, y_2) - (1 + \alpha_1 - A_1) y_1, \tag{3.3b}$$
$$x_2' = -f(x_2, y_2) - \beta_2 f(x_2, y_1) + \eta y_2 + A_2 x_2, \tag{3.3c}$$
$$y_2' = f(x_2, y_2) + \beta_2 f(x_2, y_1) - (\eta + \alpha_2 - A_2) y_2, \tag{3.3d}$$

gdzie

$$x_1 = a_1 S_1, \quad y_1 = a_1 I_1, \quad x_2 = a_2 S_2, \quad y_2 = a_2 I_2,$$

oraz $a_i = \beta_{ii}$ dla f_2 lub $a_1 = \sqrt{\beta_{ii}}$ dla f_1, współczynniki β_i zaś są odpowiednio skalowane. Wprowadzamy także zmienną $w_i(\tau) = a_i N_i(\tau)$ z oczywistą zależnością

$$w_i = x_i + y_i.$$

Po skalowaniu dalej mamy β_i, α_i, $\eta > 0$ oraz $A_i \in \mathbb{R}$, zgodnie ze znaczeniem tych współczynników.

3.1.1 Podstawowe własności modelu

Przejdźmy do omówienia podstawowych własności modelu (3.3). Zwróćmy uwagę, że układ ten został utworzony na podstawie układu (1.3). Dzięki temu część własności układu (1.3) można przenieść na układ (3.3). Podobnie jak w (1.3), oznaczamy

$$k_i := \eta_i + \alpha_i - A_i, \qquad \kappa_i := \frac{\alpha_i}{A_i} - 1 \text{ dla } A_i \neq 0.$$

Zauważmy, że zachodzi $k_i = \eta_i + A_i \kappa_i$. Zatem jeśli $A_i < 0$, to zachodzą nierówności $\kappa_i < 0$ oraz $k_i > 0$. Jeżeli $\kappa_i \geqslant 0$, to otrzymujemy $\alpha_i \geqslant A_i > 0$ oraz $k_i \geqslant 0$.

Analogicznie jak w (1.3), spełnienie lokalnego warunku Lipschitza gwarantuje lokalne istnienie i jednoznaczność rozwiązań układu (3.3). Ponadto rozwiązania mogą być przedłużone na dowolny odcinek czasu. Nieujemność zmiennych $x_i(\tau)$ oraz $y_i(\tau)$ dla $\tau > 0$ przy założeniu nieujemności $x_i(0)$ i $y_i(0)$ można pokazać analogicznie jak w modelu (1.3).

Zauważmy, że jeżeli dodamy do siebie równania (3.3a) i (3.3b) lub równania (3.3c) i (3.3d), to otrzymamy

$$x_i' + y_i' = A_i(x_i + y_i) - \alpha_i y_i, \quad \text{czyli} \quad w_i' = A_i w_i - \alpha_i y_i. \tag{3.4}$$

Postać powyższych równań jest taka sama jak w przypadku równania (1.3), co pozwala na pokazanie określoności zmiennych $x_i(\tau)$ oraz $y_i(\tau)$ dla dowolnych $\tau > 0$ w analogiczny sposób jak w modelu dwuwymiarowym.

Można również przenieść analizę dotyczącą nieograniczonego przyrostu lub wymarcia populacji jednorodnych na przypadek niejednorodny. Tutaj analizę równania $w_i' = A_i w_i - \alpha_i y_i$ odnosimy do każdej z podpopulacji osobno. Na tej podstawie można wskazać cztery rodzaje zachowań modelu (3.3):

- jeśli $A_1 > \alpha_1 > 0$ i $A_2 > \alpha_2 > 0$, to liczebność całej populacji rośnie nieograniczenie;
- jeśli $A_1 < 0$ i $A_2 < 0$, to cała populacja wymiera;
- jeśli $A_1 < 0$ i $A_2 > \alpha_2 > 0$, to podpopulacja niskiego ryzyka wymiera, natomiast podpopulacja wysokiego ryzyka rozrasta się nieograniczenie;
- jeśli $A_2 < 0$ i $A_1 > \alpha_1 > 0$, to podpopulacja wysokiego ryzyka wymiera, natomiast podpopulacja niskiego ryzyka rozrasta się nieograniczenie.

Oczywiście, jeśli zachodzi $y_i \equiv 0$, to dostajemy równanie Malthusa $w_i' = A_i w_i$. Można stwierdzić, że dla $A_i > \alpha_i > 0$ lub dla $A_i < 0$ dynamika układu (3.3) jest maltuzjańska.

3.1.2 Analiza stanów stacjonarnych

Teraz zbadamy warunki istnienia i stabilności stanów stacjonarnych układu (3.3). Na początku załóżmy, że $A_i \neq 0$. Przypadki, gdy zachodzi $A_1 = 0$ lub $A_2 = 0$, zostaną omówione na końcu rozdziału.

Zauważmy, że z równań (3.4) uzyskujemy zależność spełnianą przez każdy stan stacjonarny

$$0 = A_i w_i - \alpha_i y_i.$$

Stąd mamy

$$x_i = \frac{(\alpha_i - A_i) y_i}{A_i} = \kappa_i y_i \quad \text{dla} \quad A_i \neq 0. \tag{3.5}$$

Widzimy, że zerowy stan stacjonarny, oznaczony przez $E_0 = (0,0,0,0)$, istnieje zawsze, niezależnie od wartości parametrów układu oraz od postaci funkcji transmisji f.

Istnienie niezerowych stanów stacjonarnych

Oznaczmy przez (x_1, y_1, x_2, y_2) niezerowy stan stacjonarny taki, że $x_1 \neq 0$ lub $x_2 \neq 0$. Jest to zatem taki stan, w którym w co najmniej jednej podpopulacji (wysokiego lub niskiego ryzyka) występuje co najmniej jeden zdrowy osobnik.

Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy funkcja f ma postać

$$f(x,y) = xy \cdot g(x,y), \tag{3.6}$$

gdzie g jest funkcją nierosnącą ze względu na obie zmienne. W naszym przypadku mamy $g_1(x,y) = \frac{1}{x+y}$ oraz $g_2(x,y) = 1$.

O warunkach istnienia poszczególnych stanów stacjonarnych mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. *Rozważmy układ (3.3) dla $A_i \neq 0$, $i = 1,2$. Zakładamy, że funkcja f ma postać (3.6). Jeśli $g = g_1$, to istnieje tylko jeden (zerowy) stan stacjonarny, podczas gdy dla $g = g_2$ istnieje do czterech stanów stacjonarnych: zerowy E_0, dwa półdodatnie $E_1 := (x_1^*, y_1^*, 0, 0)$, $E_2 := (0, 0, x_2^*, y_2^*)$ oraz dodatni $E_e = (x_1^+, y_1^+, x_2^+, y_2^+)$, gdzie $x_i^*, y_i^*, x_i^+, y_i^+ > 0$, przy czym:*

- *jeśli κ_1, $\kappa_2 \leqslant 0$, to istnieje tylko E_0,*
- *jeśli $\kappa_2 \leqslant 0$ oraz $\kappa_1 > 0$, to nie istnieją E_e i E_2, ale istnieją E_0 i E_1,*
- *jeśli $\kappa_1 \leqslant 0$ oraz $\kappa_2 > 0$, to nie istnieją E_e i E_1, ale istnieją E_0 i E_2,*
- *jeśli κ_1, $\kappa_2 > 0$, to istnieją E_0, E_1 i E_2, podczas gdy istnienie E_e wymaga spełnienia jednego z zestawu warunków:*

$$k_1\kappa_2\beta_2 > k_2\kappa_1 > k_1\kappa_2\frac{1}{\beta_1} > 0 \tag{3.7}$$

lub

$$0 < k_1\kappa_2\beta_2 < k_2\kappa_1 < k_1\kappa_2\frac{1}{\beta_1}. \tag{3.8}$$

Dowód. Podobnie jak w przypadku układu (1.3) można pokazać, że przypadki $\kappa_i < 0$ oraz $\kappa_i = 0$ uniemożliwiają otrzymanie niezerowych stanów stacjonarnych. Omówmy zatem przypadki kiedy $\kappa_1 > 0$ lub $\kappa_2 > 0$.

Załóżmy najpierw, że $\kappa_1 > 0$ (czyli $\alpha_1 > A_1 > 0$). Gdy $y_2 = 0$, to z (3.5) mamy $x_2 = 0$, natomiast równanie (3.3a) ma postać

$$-f(x_1, y_1) + y_1 + A_1\kappa_1 y_1 = 0,$$

taką samą jak równanie (1.8) użyte do analizy stanu E_e w układzie (1.3). Opierając się na tamtej analizie stwierdzamy, że półdodatni stan stacjonarny E_1 nie istnieje w przypadku funkcji f_1, istnieje zaś w przypadku funkcji f_2. Otrzymujemy zależności $x_1^* = k_1$ oraz $y_1^* = \frac{k_1}{\kappa_1}$.

Ponieważ układ (3.3) jest symetryczny, występuje również kolejny półdodatni stan stacjonarny E_2, gdzie $x_2^* = k_2$ oraz $y_2^* = \frac{k_2}{\kappa_2}$. Ten stan istnieje, gdy $\kappa_2 > 0$ oraz gdy rozważamy funkcję f_2. Stan ten nie istnieje w przypadku, gdy stosujemy funkcję f_1.

Przyjrzymy się teraz przypadkowi, gdy jednocześnie zachodzą nierówności $\kappa_1 > 0$ i $\kappa_2 > 0$. Dla funkcji postaci (3.6) stany stacjonarne opisane są następującym układem:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 y_1 g(x_1, y_1) + \beta_1 x_1 y_2 g(x_1, y_2) - k_1 y_1, \\ 0 &= x_2 y_2 g(x_2, y_2) + \beta_2 x_2 y_1 g(x_2, y_1) - k_2 y_2. \end{aligned}$$

Powyższe równania, przy zastosowaniu (3.5), można zapisać jako

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa_1 y_1^2 g(\kappa_1 y_1, y_1) + \beta_1 \kappa_1 y_1 y_2 g(\kappa_1 y_1, y_2) - k_1 y_1, \\ 0 &= \kappa_2 y_2^2 g(\kappa_2 y_2, y_2) + \beta_2 \kappa_2 y_1 y_2 g(\kappa_2 y_2, y_1) - k_2 y_2, \end{aligned}$$

które dla $y_1 \neq 0$ i $y_2 \neq 0$ przyjmują postać

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa_1 y_1 g(\kappa_1 y_1, y_1) + \beta_1 \kappa_1 y_2 g(\kappa_1 y_1, y_2), \\ k_2 &= \kappa_2 y_2 g(\kappa_2 y_2, y_2) + \beta_2 \kappa_2 y_1 g(\kappa_2 y_2, y_1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

• Rozważmy układ (3.9) dla funkcji g_1. Wtedy otrzymujemy

$$\kappa_1 \frac{y_1}{\kappa_1 y_1 + y_1} + \beta_1 \kappa_1 \frac{y_2}{\kappa_1 y_1 + y_2} = k_1, \quad \kappa_2 \frac{y_2}{\kappa_2 y_2 + y_2} + \beta_2 \kappa_2 \frac{y_1}{\kappa_2 y_2 + y_1} = k_2,$$

co poprzez skrócenie wyrażeń κ_1, y_1, κ_2 i y_2 można zapisać jako

$$\frac{1}{1 + c_1} + \frac{\beta_1}{z + c_1} = k_1, \quad \frac{1}{1 + c_2} + \frac{\beta_2}{\frac{1}{z} + c_2} = k_2, \quad z = \frac{y_1}{y_2}, \quad c_1 = \frac{1}{\kappa_1}, \quad c_2 = \frac{1}{\kappa_2}.$$

Z pierwszej i drugiej równości powyższego układu mamy kolejny układ równań

$$z = \frac{\beta_1(1 + c_1) - \Big(k_1(1 + c_1) - 1\Big)c_1}{k_1(1 + c_1) - 1}, \quad z = \frac{k_2(1 + c_2) - 1}{\beta_2(1 + c_2) - \Big(k_2(1 + c_2) - 1\Big)c_2},$$

który nie ma rozwiązań, chyba że spełnione jest

$$\Big(k_1(1 + c_1) - 1\Big)\Big(k_2(1 + c_2) - 1\Big) = \Big(\beta_1(1 + c_1) - c_1\big(k_1(1 + c_1) - 1\big)\Big)\Big(\beta_2(1 + c_2) - c_2\big(k_2(1 + c_2) - 1\big)\Big).$$

To oznacza, że w ogólnych przypadkach nie istnieje dodatni stan stacjonarny układu (3.3) z funkcją transmisji f_1.

• Rozważmy układ (3.9) dla funkcji g_2. Wówczas otrzymujemy

$$\kappa_1 y_1 + \beta_1 \kappa_1 y_2 = k_1, \tag{3.10a}$$

$$\kappa_2 y_2 + \beta_2 \kappa_2 y_1 = k_2. \tag{3.10b}$$

Równanie (3.10a) można przedstawić w postaci $y_1 = \frac{k_1 - \beta_1 \kappa_1 y_2}{\kappa_1}$. Zależność tę uwzględniamy w równaniu (3.10b) i otrzymujemy

$$(1 - \beta_1\beta_2)\kappa_2 y_2 + \beta_2 k_1 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = k_2.$$

Przy założeniu $\beta_1\beta_2 \neq 1$ układ (3.10) ma jednoznaczne rozwiązanie. Dla tego rozwiązania otrzymujemy współrzędne

$$y_1^+ = \frac{k_1\kappa_2 - k_2\beta_1\kappa_1}{(1-\beta_1\beta_2)\,\kappa_1\kappa_2}, \quad y_2^+ = \frac{k_2\kappa_1 - k_1\beta_2\kappa_2}{(1-\beta_1\beta_2)\,\kappa_1\kappa_2}, \tag{3.11}$$

natomiast postać x_1^+ i x_2^+ dostajemy stosując zależność (3.5).

Wyznaczmy warunki wystarczające istnienia E_e. Z równań (3.11) otrzymujemy

$$k_1\kappa_2\beta_2 > k_2\kappa_1 > 0, \quad k_2\kappa_1\beta_1 > k_1\kappa_2 > 0, \quad \beta_1\beta_2 > 1 \tag{3.12}$$

lub

$$0 < k_1\kappa_2\beta_2 < k_2\kappa_1, \quad 0 < k_2\kappa_1\beta_1 < k_1\kappa_2, \quad \beta_1\beta_2 < 1. \tag{3.13}$$

Zauważmy, że zależności (3.12) mogą być zapisane za pomocą jednej nierówności (3.7). Analogicznie (3.13) można zapisać jako (3.8). Stwierdzamy więc, że warunkami istnienia stanu E_e są nierówności κ_1, $\kappa_2 > 0$ oraz jedna z nierówności: (3.7) lub (3.8). □

Zauważmy, że przy analizie modelu krzyżowego, oprócz stanu zerowego i endemicznego, dostajemy dwa kolejne, symetryczne stany E_1 i E_2 o ciekawej własności – odzwierciedlają one sytuację, gdy istnieje tylko jedna podpopulacja, odpowiednio podpopulacja wysokiego lub niskiego ryzyka.

Omówmy jeszcze dwa przypadki graniczne:

• Zauważmy, że jeśli zachodzi $\beta_i \to 0$, to $y_i^+ \to y_i^* = \frac{k_i}{\kappa_i}$. Oznacza to, że dodatni stan stacjonarny bifurkuje z półdodatnich stanów występujących w odseparowanych podpopulacjach.

• Z drugiej strony, wraz z rosnącym β_i uzyskujemy granicę $\beta_1\beta_2 \to 1$. W takim przypadku zachodzi $\beta_1 \to \frac{1}{\beta_2}$ i licznik y_1^+ zbiega do $k_1\kappa_2 - \frac{k_2\kappa_1}{\beta_2}$, które powinno być nieujemne, jeśli y_1^+ wciąż istnieje. Stwierdzamy więc, że powinien być spełniony warunek $k_2\kappa_1 - k_1\beta_2\kappa_2 \leqslant 0$. Ten warunek zaprzecza jednak istnieniu dodatniego stanu stacjonarnego, ponieważ przeczy on dodatniości y_2^+. Oznacza to, że dodatni stan stacjonarny istnieje tylko wtedy, gdy iloczyn $\beta_1\beta_2$ jest oddzielony od 1. Stwierdzamy zatem, że wraz z rosnącym β_i współrzędne E_e nie zbiegają do nieskończoności – rozwiązanie to staje się ujemne i traci biologiczne znaczenie.

Stabilność stanów stacjonarnych

Sprawdzimy teraz warunki, dla których zachodzi stabilność poszczególnych stanów stacjonarnych układu (3.3). Zastosujemy metodę linearyzacji. Wyznaczmy macierz Jacobiego układu (3.3). Dla dowolnej różniczkowalnej funkcji transmisji macierz ta ma postać

$$J(x_1, y_1, x_2, y_2) =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 - \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1} - \beta_1\frac{\partial f(x_1,y_2)}{\partial x_1} & 1 - \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1} & 0 & -\beta_1\frac{\partial f(x_1,y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1} + \beta_1\frac{\partial f(x_1,y_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1} - k_1 & 0 & \beta_1\frac{\partial f(x_1,y_2)}{\partial y_2} \\ 0 & -\beta_2\frac{\partial f(x_2,y_1)}{\partial y_1} & A_2 - \frac{\partial f(x_2,y_2)}{\partial x_2} - \beta_2\frac{\partial f(x_2,y_1)}{\partial x_2} & \eta - \frac{\partial f(x_2,y_2)}{\partial y_2} \\ 0 & \beta_2\frac{\partial f(x_2,y_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial f(x_2,y_2)}{\partial x_2} + \beta_2\frac{\partial f(x_2,y_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial f(x_2,y_2)}{\partial y_2} - k_2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli założymy, że funkcja f jest opisana wzorem (3.6), to pochodne cząstkowe obliczamy ze wzorów:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yg(x,y) + xy\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xg(x,y) + xy\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}.$$

Rozważmy najpierw stan stacjonarny E_0. Dostajemy twierdzenie:

Twierdzenie 3.2. *Niezależnie od funkcji transmisji f zachodzi:*

- *jeśli $A_1 < 0$ i $A_2 < 0$, to stan E_0 jest globalnie stabilny;*
- *jeśli $A_1 > 0$ lub $A_2 > 0$, to stan E_0 jest niestabilny.*

Dowód. Ponieważ dla funkcji transmisji różniczkowalnej w $(0,0)$ zakładamy, że pochodne cząstkowe wynoszą 0, to wartości własne macierzy $J(E_0)$ nie zależą od postaci funkcji f. Dla tego stanu mamy

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Wartości własne wynoszą

$$\lambda_1 = A_1, \quad \lambda_2 = -k_1, \quad \lambda_3 = A_2, \quad \lambda_4 = -k_2.$$

Stąd mamy, że jeśli co najmniej jeden parametr A_i jest dodatni, to E_0 jest niestabilny. Jeśli oba $A_i < 0$, to stan E_0 jest lokalnie stabilny. Co więcej, z analizy przeprowadzonej w paragrafie 3.1.1 wynika, że ten stan jest również stabilny globalnie.

Z drugiej strony, łatwo sprawdzić, że funkcja f_1 nie jest różniczkowalna w $(0,0)$. Skorzystamy z rozważań z paragrafu 1.1.2. Zbiory

$$\Xi_1 := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4_+ : \quad x_2 = y_2 = 0\}$$

oraz

$$\Xi_2 := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4_+ : \quad x_1 = y_1 = 0\}$$

nazwijmy podprzestrzeniami odpowiednio niskiego i wysokiego ryzyka. Zauważmy, że w rzutach przestrzeni $\{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4_+\}$ na Ξ_1 i Ξ_2 zachodzą własności pokazane dla zbioru odpowiadającego populacji jednorodnej. Można zatem skorzystać z własności stabilności stanu E_0 układu (1.3). □

Zajmijmy się teraz stabilnością stanów E_1 (istniejącego dla $A_1 \in (0, \alpha_1)$) i E_2 (przy założeniu $A_2 \in (0, \alpha_2)$).

Twierdzenie 3.3. *Stan stacjonarny E_1 dla funkcji f_2 istnieje, jeśli $\kappa_1 > 0$ (czyli $A_1 \in (0, \alpha_1)$). Stan ten jest stabilny dla $A_2 < k_2 + \beta_2 \frac{k_1}{\kappa_1} < \beta_2 k_1 \frac{\kappa_2+1}{\kappa_1}$.*

Analogicznie stan stacjonarny E_2 dla funkcji f_2 istnieje, jeśli $\kappa_2 > 0$ (czyli $A_2 \in (0, \alpha_2)$). Stan ten jest stabilny dla $A_1 < k_1 + \beta_1 \frac{k_2}{\kappa_2} < \beta_1 k_1 \frac{\kappa_1+1}{\kappa_2}$.

Dowód. Dla stanu E_1 dostajemy macierz Jacobiego:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} A_1 - \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} & 1 - \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} & 0 & -\beta_1 x_1^* g(x_1^*, 0) \\ \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} & \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} - k_1 & 0 & \beta_1 x_1^* g(x_1^*, 0) \\ 0 & 0 & A_2 - \beta_2 y_1^* g(0, y_1^*) & \eta \\ 0 & 0 & \beta_2 y_1^* g(0, y_1^*) & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Ta macierz ma postać

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix},$$

gdzie wszystkie podmacierze są macierzami wymiaru 2×2. Warunki stabilności wynikające z analizy macierzy $J(E_1)$ są zatem takie same jak te wynikające z analizy macierzy M_1 i M_3. Warunki te przyjmują postać:

(a) $\operatorname{tr} M_1 = -\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} + A_1 + \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} - k_1 < 0;$

(b) $\det M_1 = \left(-\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} + A_1\right)\left(\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} - k_1\right)$
$- \frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)}\left(-\frac{\partial f(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} + 1\right) > 0;$

(c) $\operatorname{tr} M_3 = -\beta_2 y_1^* g(0, y_1^*) + A_2 - k_2 < 0;$

(d) $\det M_3 = -k_2\Big(-\beta_2 y_1^* g(0,y_1^*) + A_2\Big) - \eta\beta_2 y_1^* g(0,y_1^*) > 0.$

Zauważmy najpierw, że jeśli $A_2 = 0$, to $k_2 = \eta + \alpha_2$ i warunki (c) oraz (d) są spełnione. Jeśli $A_2 \neq 0$, to warunki (a) – (d) są równoważne warunkom

(A) $(x_1^*)^2 \left(\frac{\partial g(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} - \frac{\partial g(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} \right) < 1;$

(B) $k_1 + x_1^* \left(x_1^* \frac{\partial g(x_1,y_1)}{\partial x_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} + y_1^* \frac{\partial g(x_1,y_1)}{\partial y_1}\Big|_{(x_1^*,y_1^*)} \right) > 0;$

(C) $\beta_2 y_1^* g(0,y_1^*) > A_2 - k_2;$

(D) $A_2\Big(\kappa_2\beta_2 y_1^* g(0,y_1^*) - k_2\Big) > 0.$

Sprawdźmy te warunki dla funkcji f_2. Ponieważ $g_2 = 1$, jej pochodne cząstkowe wynoszą 0 i stąd warunki (A) i (B) są spełnione. Jeśli $A_2 < 0$, to $A_2 - k_2 < 0$, jak również $\kappa_2\beta_2 y_1^* - k_2 < 0$ i wtedy oba warunki (C) i (D) są spełnione. Jeżeli $A_2 > 0$, to warunek (C) wymaga dodatkowego założenia $A_2 < k_2 + \beta_2 y_1^*$, warunek $k_2 < \kappa_2\beta_2 y_1^*$ zaś jest potrzebny do spełnienia warunku (D). Zauważmy, że ostatni warunek jest spełniony jednocześnie z nierównościami (3.7), natomiast nie jest spełniony, kiedy zachodzi zależność (3.8). Ostatecznie stwierdzamy, że jeśli $A_2 > 0$, to warunek stabilności stanu E_1 ma postać

$$A_2 < k_2 + \beta_2 y_1^* < \beta_2 k_1 \frac{\kappa_2 + 1}{\kappa_1}.$$

Przejdźmy do stanu E_2. Układ (3.3) jest symetryczny, zatem warunki stabilności dla tego stanu są również symetryczne do tych otrzymanych dla E_1. □

Teraz omówimy lokalną stabilność stanu E_e (dla $A_1 \in (0,\alpha_1)$ oraz $A_2 \in (0,\alpha_2)$). Ponieważ ogólne warunki stabilności stanu E_e są trudne do przeanalizowania, zajmiemy się analizą tylko dla funkcji f_2.

W poniższym twierdzeniu i jego dowodzie występują współczynniki, które definiujemy jako:

$$\begin{aligned}
a_1 &:= \kappa_1\eta + \kappa_2 + \kappa_1\kappa_2\left(k_1 - x_1^+ + k_2 - x_2^+\right) = \kappa_1\eta + \kappa_2 + \kappa_1^2\beta_1 x_2^+ + \kappa_2^2\beta_2 x_1^+,\\
a_2 &:= x_1^+ x_2^+ \kappa_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2) + \kappa_1\kappa_2(k_1 - x_1^+)(k_2 - x_2^+) + \kappa_1\eta(k_1 - x_1^+)\\
&\quad + \kappa_2(k_2 - x_2^+) + (k_1 - 1)x_1^+\kappa_2 + (k_2 - \eta)x_2^+\kappa_1 + \eta - \kappa_1\kappa_2 x_1^+ x_2^+\\
&= \eta + \kappa_1\kappa_2 A_1 x_1^+ + \kappa_1\kappa_2 A_2 x_2^+ + \kappa_1^2\eta\beta_1 y_2^+ + \kappa_2^2\beta_2 y_1^+,\\
a_3 &:= (k_1 - 1)(\eta + \beta_1\beta_2\kappa_2 x_2^+)x_1^+ + (k_2 - \eta)(1 + \beta_1\beta_2\kappa_1 x_1^+)x_2^+\\
&\quad + x_1^+\kappa_2(k_2 - x_2^+)(k_1 - 1) + x_2^+\kappa_1(k_1 - x_1^+)(k_2 - \eta)\\
&= \kappa_1 A_1 x_1^+\eta + \kappa_2 A_2 x_2^+ + \kappa_1^2 A_2 x_2^+ k_2\beta_1 + \kappa_2^2 A_1 x_1^+ k_1\beta_2,\\
a_4 &:= x_1^+ x_2^+(k_2 - \eta)(k_1 - 1)(1 - \beta_1\beta_2) = \kappa_1\kappa_2 A_1 A_2\left(1 - \beta_1\beta_2\right)x_1^+ x_2^+.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 3.4. *Stan stacjonarny E_e dla funkcji $f = f_2$ jest lokalnie stabilny, jeśli zachodzą zależności* (3.13) *oraz*

$$a_1 a_2 - \kappa_1\kappa_2 a_3 > \frac{a_4 a_1^2}{a_3}. \tag{3.14}$$

Dowód. Dla funkcji f_2 macierz J przyjmuje postać

$$J(x_1,y_1,x_2,y_2) = \begin{pmatrix} -y_1 - \beta_1 y_2 + A_1 & -x_1 + 1 & 0 & -\beta_1 x_1\\ y_1 + \beta_1 y_2 & x_1 - k_1 & 0 & \beta_1 x_1\\ 0 & -\beta_2 x_2 & -y_2 - \beta_2 y_1 + A_2 & -x_2 + \eta\\ 0 & \beta_2 x_2 & y_2 + \beta_2 y_1 & x_2 - k_2 \end{pmatrix}.$$

Dla stanu E_e z równań (3.3a) oraz (3.3c) mamy

$$-y_1^+ - \beta_1 y_2^+ + A_1 = -\frac{y_1^+}{x_1^+} = -\frac{1}{\kappa_1}, \quad -y_2^+ - \beta_2 y_1^+ + A_2 = -\eta\frac{y_2^+}{x_2^+} = -\frac{\eta}{\kappa_2},$$

natomiast z równań (3.3b) oraz (3.3d) uzyskujemy

$$y_1^+ + \beta_1 y_2^+ = k_1 \frac{y_1^+}{x_1^+} = \frac{k_1}{\kappa_1}, \quad y_2^+ + \beta_2 y_1^+ = k_2 \frac{y_2^+}{x_2^+} = \frac{k_2}{\kappa_2}.$$

Macierz $J(E_e)$ możemy zapisać jako

$$J(E_e) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa_1} & -x_1^+ + 1 & 0 & -\beta_1 x_1^+ \\ \frac{k_1}{\kappa_1} & x_1^+ - k_1 & 0 & \beta_1 x_1^+ \\ 0 & -\beta_2 x_2^+ & -\frac{\eta}{\kappa_2} & -x_2^+ + \eta \\ 0 & \beta_2 x_2^+ & \frac{k_2}{\kappa_2} & x_2^+ - k_2 \end{pmatrix}.$$

Obliczając wielomian charakterystyczny tej macierzy dostajemy

$$P(\lambda) = \kappa_1\kappa_2\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4.$$

Zauważmy, że $a_1, a_2, a_3 > 0$, natomiast $a_4 > 0$, o ile $\beta_1\beta_2 < 1$.

Ze względu na ostatnią nierówność stwierdzamy, że nierówności (3.13) stanowią warunki konieczne stabilności stanu E_e. Jeśli zachodzi $\beta_1\beta_2 > 1$, to stan ten jest siodłem.

Zastosujemy kryterium Routha-Hurwitza. Tworzymy macierz pomocniczą

$$M_{\mathrm{RH}} = \begin{pmatrix} a_1 & \kappa_1\kappa_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \kappa_1\kappa_2 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Jeśli wszystkie elementy oraz minory główne macierzy są dodatnie, to stan E_e jest stabilny. Wszystkie współczynniki a_j, $j = 1, \ldots, 4$, są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $1 > \beta_1\beta_2$. Wskażmy kolejne minory główne

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1, \\ \Delta_2 &= a_1a_2 - \kappa_1\kappa_2 a_3, \\ \Delta_3 &= a_1a_2a_3 - \kappa_1\kappa_2 a_3^2 - a_4a_1^2, \\ \Delta_4 &= a_4\left(a_1a_2a_3 - \kappa_1\kappa_2 a_3^2 - a_4a_1^2\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy $a_4 > 0$, to warunek $\Delta_4 > 0$ jest równoważny warunkowi $\Delta_3 > 0$. Warunek $\Delta_3 > 0$ można zapisać jako

$$a_1a_2a_3 - \kappa_1\kappa_2 a_3^2 - a_4a_1^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1a_2 - \kappa_1\kappa_2 a_3 > \frac{a_4a_1^2}{a_3} \quad \text{gdy} \quad a_3 > 0,$$

stąd otrzymujemy, że jest on mocniejszy niż warunek $\Delta_2 > 0$. Ostatecznie, przy założeniu $1 > \beta_1\beta_2$, warunek lokalnej stabilności ma postać (3.14). □

Ponieważ warunek (3.14) jest w ogólnym przypadku skomplikowany, omówimy prostszy przypadek, gdy β_1 oraz β_2 są bliskie 0. Nierówność $1 > \beta_1\beta_2$ jest wtedy spełniona. Jeśli $\beta_i \to 0$, to $x_i^+ \to k_i$, $y_i^+ \to \frac{k_i}{\kappa_i}$, natomiast minory Δ_2, Δ_3 dążą do wartości

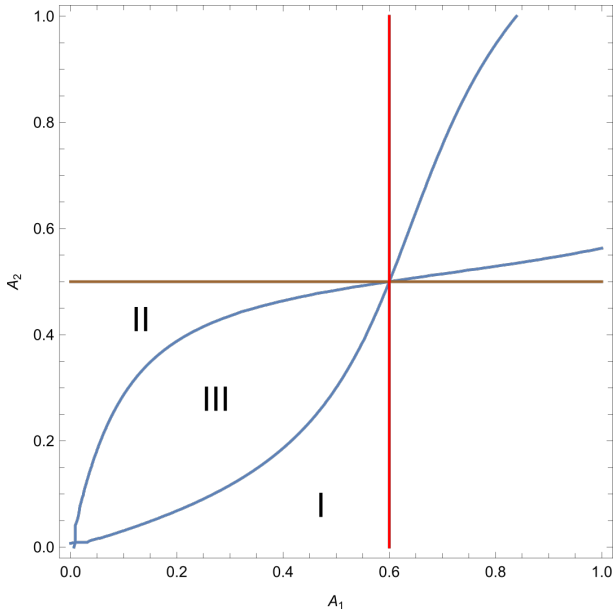
$$\Delta_2 \to \kappa_1\kappa_2\Big(\kappa_1\eta\left(\eta + A_2x_2^+\right) + \kappa_2\left(\eta + A_1x_1^+\right)\Big) \quad \text{oraz}$$

$$\Delta_3 \to \kappa_1\kappa_2\eta\Big(\kappa_1\kappa_2\left(A_1x_1^+ - A_2x_2^+\right)^2 + \kappa_1\kappa_2\eta\left(A_1x_1^+ + A_2x_2^+\right) + \kappa_1^2\eta^2A_1x_1^+ + \kappa_2^2A_2x_2^+\Big).$$

Łatwo zauważyć, że dla dodatnich parametrów oba minory Δ_2 i Δ_3 mają dodatnie znaki. Formułujemy stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.5. *Jeśli β_1 i β_2 są dostatecznie małe, to stan stacjonarny E_e istnieje i jest lokalnie stabilny.*

Na rysunku (3.2) przedstawiono diagram bifurkacyjny dla układu (3.3) z funkcją transmisji f_2 i uwzględnionym warunkiem $\beta_1\beta_2 < 1$. Jako parametry bifurkacyjne zostały wybrane współczynniki A_1 i A_2. Półdodatni stan stacjonarny E_1 jest stabilny w obszarze I, półdodatni stan E_2 jest stabilny w obszarze II. W obszarze III oba półdodatnie stany są niestabilne, podczas gdy istnieje dodatni stan E_e. W którymkolwiek z pozostałych obszarów wszystkie stany stacjonarne tracą stabilność dla $A_i > 0$.



Rysunek 3.2: Diagram bifurkacyjny dla układu (3.3) z funkcją transmisji f_2 i warunkiem $\beta_1\beta_2 < 1$. Niebieskie krzywe przedstawiają równości dla warunku (3.13) na istnienie stanu E_e. Brązowa linia reprezentuje prostą $A_2 = \alpha_2$, czerwona – prostą $A_1 = \alpha_1$. Symbolami I, II, III oznaczono różne obszary dziedziny $(0, \alpha_1) \times (0, \alpha_2)$. Wartości parametrów: $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,5$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,3$, $\eta = 0,9$.

Przypadki z zerowym przyrostem netto w podpopulacjach

Przejdźmy najpierw do przypadku, gdy $A_1 = 0$. Dla funkcji f_2 mamy wówczas układ równań

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1y_1 - \beta_1 x_1 y_2 + y_1, \\ y_1 &= x_1y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - (1+\alpha_1)y_1, \\ x_2' &= -x_2y_2 - \beta_2 x_2 y_1 + \eta y_2 + A_2 x_2, \\ y_2' &= x_2y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - (\eta + \alpha_2 - A_2)y_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Otrzymujemy wtedy stan stacjonarny E_2 istniejący dla $\kappa_2 > 0$ oraz rodzinę stanów stacjonarnych $E_3 = (x_a, 0, 0, 0)$, gdzie x_a jest dowolną liczbą nieujemną. Zauważmy, że rodzina stanów E_3 istnieje zawsze, niezależnie od wartości parametrów modelu.

Sposób analizy stabilności stanu E_2 dla przypadku $A_i \neq 0$ można zastosować również dla $A_1 = 0$. Z otrzymanych warunków a – d na stabilność (są one podane na stronach 85–86) uzyskujemy, że stan E_2 jest zawsze lokalnie stabilny.

Macierz Jacobiego dla stanu E_3 ma postać

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -x_a + 1 & 0 & -\beta_1 x_a \\ 0 & x_a - (\alpha_1 + 1) & 0 & \beta_1 x_a \\ 0 & 0 & A_2 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & -k_2 \end{pmatrix},$$

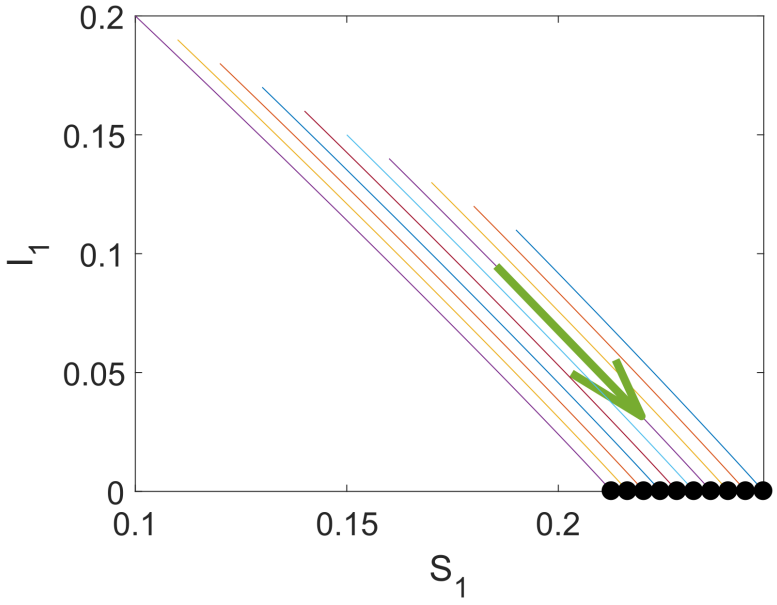
wartości własne tej macierzy wynoszą

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = x_a - (\alpha_1 + 1), \quad \lambda_3 = A_2, \quad \lambda_4 = -k_2.$$

Zauważmy, że punkt E_3 nie jest hiperboliczny. Co więcej, nie jest to izolowany stan stacjonarny. Z tego wynika, że analiza wartości własnych daje nam tylko ograniczoną wiedzę o stabilności.

Spróbujmy przewidzieć dynamikę układu w rzucie na podprzestrzeń $\{(x_1, y_1)\}$. Jeżeli $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ (co odpowiada spełnieniu warunków $x_a < \alpha_1 + 1$ oraz $A_2 < 0$), to spodziewamy się przyciągania rozwiązań do płaszczyzny (x_1, y_1). Zachowanie rozwiązań w tej płaszczyźnie jest analogiczne do zachowania

rozwiązań w modelu dwuwymiarowym. Można się zatem spodziewać, że rozwiązania będą zbiegać do poszczególnych stanów stacjonarnych $(x_a, 0)$ w zależności od warunku początkowego. Portret fazowy układu (3.15) zrzutowany na płaszczyznę przy założeniu $\lambda_3, \lambda_4 < 0$ przedstawiono na rysunku 3.3. Symulacja sugeruje spełnienie warunku $\lambda_2 < 0$ dla określonych wartości parametrów.



Rysunek 3.3: Portret fazowy układu (3.15) zrzutowany na płaszczyznę (x_1, y_1) przy założeniu $\lambda_3, \lambda_4 < 0$ dla $A_1 = 0$ oraz $A_2 = -0,1$. Zielona strzałka przedstawia kierunek przebiegu trajektorii, stany stacjonarne zaznaczono na czarno. Wartości parametrów: $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,5$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,3$, $\eta = 0,9$.

Zwróćmy uwagę, że jeśli rozpatrzymy przypadek, gdy co najmniej jedna z wartości własnych λ_2, λ_3 lub λ_4 jest dodatnia, to E_3 jest odpychany w odpowiednim kierunku i wówczas stan ten jest niestabilny.

W sytuacji, gdy $A_2 = 0$ uzyskujemy wyniki analogiczne jak dla $A_1 = 0$. Dostajemy stany stacjonarne E_1 i $E_4 = (0, 0, x_b, 0)$, gdzie $x_b \geqslant 0$. Analiza istnienia i stabilności tych stanów jest analogiczna jak dla stanów E_2 i E_3 przy spełnieniu $A_1 = 0$.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy jednocześnie $A_1 = A_2 = 0$. Badany układ równań przyjmuje wówczas postać

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 y_1 - \beta_1 x_1 y_2 + y_1, \\ y_1' &= x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - (1 + \alpha_1) y_1, \\ x_2' &= -x_2 y_2 - \beta_2 x_2 y_1 + \eta y_2, \\ y_2' &= x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - (\eta + \alpha_2) y_2. \end{aligned}$$

Otrzymujemy dwuparametrową rodzinę stanów stacjonarnych $E_5 = (x_c, 0, x_d, 0)$, gdzie x_c, $x_d \in [0, \infty)$. Istnienie stanu E_5 nie zależy od wartości współczynników modelu, o ile zachodzi $A_i = 0$. Macierz Jacobiego dla stanu E_5 ma postać

$$J(E_5) = \begin{pmatrix} 0 & -x_c + 1 & 0 & -\beta_1 x_c \\ 0 & x_c - (\alpha_1 + 1) & 0 & \beta_1 x_c \\ 0 & -\beta_2 x_d & 0 & -x_d + \eta \\ 0 & \beta_2 x_d & 0 & x_d - (\alpha_2 + \eta) \end{pmatrix}.$$

Obliczając wartości własne macierzy $J(E_5)$ uzyskujemy

$$\det(J(E_5) - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 \Big(\lambda^2 - \big(x_c + x_d - (\alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \eta) \big) \lambda + q \Big) = 0,$$

gdzie $q = (1-\beta_1\beta_2)x_c x_d + (\alpha_1+1)(1-x_d) + (\alpha_2+\eta)(1-x_c)$. W sytuacji, gdy zachodzi jeden z dwóch przypadków:

- $x_c + x_d - (\alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \eta) > 0$,
- $x_c + x_d - (\alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \eta) < 0$, $1 - \beta_1\beta_2 < 0$, $x_c > 1$, $x_d > 1$,

stan E_5 jest niestabilny. Oznacza to, że jeśli liczebność osób chorych w co najmniej jednej podpopulacji jest wystarczająco duża, to stan E_5 nie może być stabilny.

Zauważmy, że przypadki $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ oraz $A_1 = A_2 = 0$ są szczególne i praktycznie nie do spełnienia w rzeczywistości. Analiza tych przypadków sugeruje nam, co może dziać się z dynamiką populacji w pewnym horyzoncie czasowym, w którym nie ma przyrostu netto lub migracji w co najmniej jednej podpopulacji.

3.1.3 Model z aktywnym wykrywaniem

Rozważmy teraz sytuację, kiedy w ramach eliminacji choroby w całej populacji stosujemy aktywne wykrywanie wśród zakażonych osób z podpopulacji wysokiego ryzyka transmisji. Taka strategia została zastosowana w przypadku leczenia osób bezdomnych chorych na gruźlicę w województwie warmińsko-mazurskim. Informacje na temat tego programu można znaleźć w [101]. W tym paragrafie zakładamy, że $f(x,y) = f_2(x,y) = xy$. Model (3.3) w przypadku zastosowania aktywnego wykrywania zakażenia wśród osób chorych z podpopulacji wysokiego ryzyka przyjmuje postać

$$x_1' = -x_1y_1 - \beta_1 x_1 y_2 + y_1 + A_1 x_1, \tag{3.16a}$$
$$y_1' = x_1y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - k_1 y_1, \tag{3.16b}$$
$$x_2' = -x_2y_2 - \beta_2 x_2 y_1 + \eta_2 y_2 + A_2 x_2 + B, \tag{3.16c}$$
$$y_2' = x_2y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - k_2 y_2 - B, \tag{3.16d}$$

gdzie $B > 0$ oznacza liczbę osób z podpopulacji wysokiego ryzyka, które są leczone (czyli zdiagnozowane i niezarażające dalej) z użyciem aktywnego wykrywania. Ze względu na typowe ograniczenie środków na diagnostykę zakładamy, że liczba osób zdiagnozowanych jest stała. Przyjmujemy więc, że B to stała liczba naturalna. Stwierdzamy ponadto, że dla każdego $\tau > 0$ powinno być $y_2(\tau) > B$. W przeciwnym razie, na skutek zastosowania aktywnego wykrywania, dostajemy $y_2(\tau) = 0$ i model opisywany równaniami (3.16) traci zasadność. Zauważmy, że w przypadku $B = 0$ układ (3.16) sprowadza się do układu (3.3).

Jest oczywiste, że podstawowe własności rozwiązań układu (3.3) można przełożyć na układ (3.16). Zachowane są lokalne istnienie, jednoznaczność rozwiązań oraz ich przedłużalność na dowolny odcinek czasu. Można też pokazać dodatniość i określoność rozwiązań dla każdego $\tau > 0$, z naturalnym obostrzeniem $y_2(\tau) > B$.

Zwróćmy też uwagę, że równania (3.16) opisują dynamikę maltuzjańską dla takiego samego zestawu parametrów jak dla równań (3.3), czyli również w przypadku układu (3.16) może wystąpić sytuacja, że rozmiar całej populacji (lub jednej z podpopulacji) może dążyć do zera lub do nieskończoności.

Istnienie stanów stacjonarnych

Teraz przejdziemy do analizy stanów stacjonarnych układu (3.16). Zauważmy, że równanie (3.5) jest prawdziwe również dla układu (3.16). Z postaci równań (3.16c) i (3.16d) wynika, że nie występują zerowy $(0,0,0,0)$ i półdodatni $(x_1, y_1, 0, 0)$ stan stacjonarny.

O istnieniu drugiego półdodatniego stanu mówi twierdzenie:

Twierdzenie 3.6. *Układ* (3.16) *ma półdodatni stan stacjonarny* $E_2^{**} := (0, 0, x_2^{**}, y_2^{**})$, $x_2^{**}, y_2^{**} > 0$, *przy założeniu* $\kappa_2 > 0$.

Dowód. Podstawiając $x_1 = y_1 = 0$ do prawej strony układu (3.16) i przyrównując ją do zera dostajemy

$$0 = -x_2y_2 + \eta_2 y_2 + A_2 x_2 + B, \tag{3.17a}$$
$$0 = x_2y_2 - k_2 y_2 - B. \tag{3.17b}$$

Łączac ze sobą równania (3.17b) oraz (3.5) mamy

$$x_2^2 - k_2 x_2 - \kappa_2 B = 0.$$

Rozwiązując to równanie uzyskujemy jedno dodatnie rozwiązanie

$$x_2^{**} = \frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\kappa_2 B}}{2}.$$

Stwierdzamy więc, że istnieje półdodatni stan stacjonarny $E_2^{**} = (0, 0, x_2^{**}, y_2^{**})$, gdzie $y_2^{**} = \frac{x_2^{**}}{\kappa_2}$. □

Mając na uwadze intepretację modelu (3.16) można łatwo sprawdzić, że warunek $y_2^{**} > B$ jest spełniony tylko wtedy, gdy $B < \frac{1+k_2}{\kappa_2}$. Co więcej, zauważmy, że wraz z B wzrastającym od zera stan E_2^{**} bifurkuje ze stanu E_2.

Teraz sprawdźmy, czy istnieje dodatni stan stacjonarny. Warunkami istnienia tego stanu są dalej κ_1, $\kappa_2 > 0$. Definiujemy parametry

$$\vartheta := k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2 \kappa_1 \tag{3.18}$$

oraz

$$\theta := k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1 \kappa_2, \tag{3.19}$$

które zostaną zastosowane w poniższym twierdzeniu i jego dowodzie.

Twierdzenie 3.7. *Dodatni stan układu* (3.16) *istnieje, jeśli spełnione są nierówności* κ_1, $\kappa_2 > 0$, $\beta_1\beta_2 < 1$, $\vartheta > 0$ *oraz*

$$B < \frac{k_1\vartheta}{\beta_1^2\kappa_1^2}.$$

Ponadto warunek $y_2^{++} > B$ *jest spełniony, gdy*

$$B < \frac{\kappa_1 + \theta}{\kappa_1\kappa_2(1 - \beta_1\beta_2)}$$

przy założeniu $\kappa_1 + \theta > 0$.

Dowód. Z równania (3.16b) uzyskujemy

$$0 = x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - k_1 x_1.$$

Stosując (3.5) mamy

$$y_1 = \frac{k_1 - \beta_1\kappa_1 y_2}{\kappa_1}. \tag{3.20}$$

Podstawiając zależności (3.20) i (3.5) do (3.16c) dostajemy

$$\kappa_1 (1 - \beta_1\beta_2) x_2^2 - \theta x_2 - B\kappa_1\kappa_2 = 0.$$

Przy założeniu $\beta_1\beta_2 < 1$ otrzymujemy jednoznaczne rozwiązanie

$$x_2^{++} = \frac{\theta + \sqrt{\Theta}}{2\kappa_1 (1 - \beta_1\beta_2)}, \tag{3.21}$$

gdzie

$$\Theta = \theta^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2 (1 - \beta_1\beta_2) B. \tag{3.22}$$

Co więcej, stosując równania (3.5) i (3.20) uzyskujemy

$$x_1^{++} = \frac{\vartheta - \beta_1\sqrt{\Theta} + k_1\kappa_2 (1 - \beta_1\beta_2)}{2\kappa_2 (1 - \beta_1\beta_2)}. \tag{3.23}$$

Zauważmy, że jeśli $\beta_1\beta_2 < 1$, to $\Theta > 0$ oraz $\sqrt{\Theta} > |\theta|$, a stąd mamy $x_2^{++} > 0$ niezależnie od wartości θ. Sprawdźmy, dla jakiego warunku zachodzi $x_1^{++} > 0$. Ponieważ $\beta_1\beta_2 < 1$, możemy przemnożyć nierówność

$$\frac{\vartheta - \beta_1\sqrt{\Theta} + k_1\kappa_2 (1 - \beta_1\beta_2)}{2\kappa_2 (1 - \beta_1\beta_2)} > 0$$

przez mianownik jej lewej strony. Dostajemy

$$\vartheta - \beta_1\sqrt{\Theta} + k_1\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right) > 0,$$

$$\vartheta + k_1\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right) > \beta_1\sqrt{\Theta},$$

$$\vartheta^2 + 2\vartheta k_1\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right) + k_1^2\kappa_2^2\left(1-\beta_1\beta_2\right)^2 > \beta_1^2\Theta.$$

Stosując (3.18), (3.19) oraz (3.22) uzyskujemy

$$(k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1)^2 + 2k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)(k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1) + (k_1\kappa_2)^2(1-\beta_1\beta_2)^2 > \beta_1^2\Big((k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1\kappa_2)^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right)B\Big),$$

$$k_1^2\kappa_2^2 - 2\beta_1 k_1 k_2\kappa_1\kappa_2 + \beta_1^2\kappa_1^2 k_2^2 + 2k_1^2\kappa_2^2(1-\beta_1\beta_2) - 2\beta_1 k_1 k_2\kappa_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2) + (k_1\kappa_2)^2(1-\beta_1\beta_2)^2 > \beta_1^2 k_2^2\kappa_1^2 - 2\beta_1^2\beta_2 k_1 k_2\kappa_1\kappa_2 + \beta_1^2\beta_2^2 k_1^2\kappa_2^2 + 4\beta_1^2\kappa_1^2\kappa_2 B(1-\beta_1\beta_2),$$

$$k_1^2\kappa_2^2\left(1 + 2(1-\beta_1\beta_2) + (1-\beta_1\beta_2)^2 - \beta_1^2\beta_2^2\right) - 4k_1 k_2\kappa_1\kappa_2\beta_1(1-\beta_1\beta_2) > 4\beta_1^2\kappa_1^2\kappa_2 B(1-\beta_1\beta_2),$$

$$4k_1^2\kappa_2^2\left(1-\beta_1\beta_2\right) - 4k_1 k_2\kappa_1\kappa_2\beta_1(1-\beta_1\beta_2) > 4\beta_1^2\kappa_1^2\kappa_2 B(1-\beta_1\beta_2).$$

Po podzieleniu powyższej nierówności przez $4\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right)$ dostajemy

$$k_1^2\kappa_2 - k_1 k_2\kappa_1\beta_1 > \beta_1^2\kappa_1^2 B,$$

$$k_1(k_1\kappa_2 - k_2\kappa_1\beta_1) > \beta_1^2\kappa_1^2 B,$$

$$k_1\vartheta > \beta_1^2\kappa_1^2 B,$$

co daje

$$B < \frac{k_1\vartheta}{\beta_1^2\kappa_1^2},$$

o ile $\vartheta > 0$.

Wyznaczmy teraz warunek, dla którego zachodzi $y_2^{++} > B$. Otrzymujemy

$$\frac{x_2^{++}}{\kappa_2} = \frac{\theta + \sqrt{\Theta}}{2\kappa_1\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right)} > B,$$

$$\theta + \sqrt{\Theta} > 2\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right),$$

$$\sqrt{\Theta} > 2\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right) - \theta. \tag{3.24}$$

Zauważmy, że z (3.22) wynika $\sqrt{\Theta} > \theta$. Możemy więc podnieść obie strony nierówności (3.24) do kwadratu. Dostajemy

$$\Theta > \Big(2\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right)\Big)^2 - 4\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right)\theta + \theta^2.$$

Stosując (3.22) otrzymujemy

$$\theta^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right)B > 4\kappa_1^2\kappa_2^2 B^2(1-\beta_1\beta_2)^2 - 4\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right)\theta + \theta^2,$$

$$4\kappa_1^2\kappa_2\left(1-\beta_1\beta_2\right)B > 4\kappa_1^2\kappa_2^2 B^2\left(1-\beta_1\beta_2\right)^2 - 4\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right)\theta.$$

Dzieląc powyższą nierówność przez $4\kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right)$ uzyskujemy

$$\kappa_1 > \kappa_1\kappa_2 B\left(1-\beta_1\beta_2\right) - \theta.$$

Dostajemy $y_2^{++} > B$ dla

$$B < \frac{\kappa_1 + \theta}{\kappa_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}$$

przy założeniu $\kappa_1 + \theta > 0$.

Ostatecznie uzyskujemy postać dodatniego stanu stacjonarnego:

$$E_w := (x_1^{++}, y_1^{++}, x_2^{++}, y_2^{++}), \quad y_1^{++} = \frac{x_1^{++}}{\kappa_1}, \quad y_2^{++} = \frac{x_2^{++}}{\kappa_2}$$

(indeks w przyjęto od słowa *wykrywanie*). Ten stan istnieje tylko wtedy, gdy spełnione są warunki κ_1, $\kappa_2 > 0$, $\beta_1\beta_2 < 1$, $\vartheta > 0$ oraz $B < \frac{k_1\vartheta}{\beta_1^2\kappa_1^2}$. □

Przyjrzyjmy się przypadkowi $B \to 0$. Wówczas z (3.22) dostajemy $\sqrt{\Theta} \to |\theta|$, co razem z (3.21) daje

$$x_2^{++} \to \frac{\theta + |\theta|}{2\kappa_1(1-\beta_1\beta_2)} = \begin{cases} \frac{\theta}{\kappa_1(1-\beta_1\beta_2)}, & \text{jeśli} \quad \theta \geq 0, \\ 0, & \text{jeśli} \quad \theta < 0. \end{cases}$$

Korzystajac z (3.19) zapisujemy

$$x_2^{++} \to \begin{cases} \frac{k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1\kappa_2}{\kappa_1(1-\beta_1\beta_2)}, & \text{jeśli} \quad k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1\kappa_2 \geq 0, \\ 0, & \text{jeśli} \quad k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1\kappa_2 < 0. \end{cases}$$

Dla $B \to 0$ mamy

$$x_1^{++} \to \frac{\vartheta - \beta_1|\theta| + k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}.$$

Jeżeli $\theta \geq 0$ (czyli $\beta_2 k_1\kappa_2 \leq k_2\kappa_1$), to dostajemy

$$\begin{aligned} x_1^{++} &\to \frac{\vartheta - \beta_1\theta + k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} = \frac{k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1 - \beta_1(k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1\kappa_2) + k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} \\ &= \frac{k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1 - \beta_1 k_2\kappa_1 + \beta_1\beta_2 k_1\kappa_2 + k_1\kappa_2 - \beta_1\beta_2 k_1\kappa_2}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} \\ &= \frac{2k_1\kappa_2 - 2\beta_1 k_2\kappa_1}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} = \frac{k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1}{\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}. \end{aligned}$$

Dla $\theta < 0$ (inaczej $\beta_2 k_1\kappa_2 > k_2\kappa_1$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_1^{++} &\to \frac{\vartheta + \beta_1\theta + k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} = \frac{k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1 + \beta_1(k_2\kappa_1 - \beta_2 k_1\kappa_2) + k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} \\ &= \frac{k_1\kappa_2 - \beta_1 k_2\kappa_1 + \beta_1 k_2\kappa_1 - \beta_1\beta_2 k_1\kappa_2 + k_1\kappa_2 - \beta_1\beta_2 k_1\kappa_2}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} \\ &= \frac{2k_1\kappa_2 - 2\beta_1\beta_2 k_1\kappa_2}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} = \frac{2k_1\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)}{2\kappa_2(1-\beta_1\beta_2)} = k_1. \end{aligned}$$

Mając na uwadze (3.11) i (3.5) z układu (3.3) dla $f = f_2$ zapisujemy

$$(x_1^{++}, y_1^{++}, x_2^{++}, y_2^{++}) \to \begin{cases} (x_1^*, y_1^*, 0, 0), & \text{jeśli} \quad \beta_2 k_1\kappa_2 > k_2\kappa_1, \\ (x_1^+, y_1^+, x_2^+, y_2^+), & \text{jeśli} \quad \beta_2 k_1\kappa_2 \leq k_2\kappa_1. \end{cases}$$

Powyższą zależność można przedstawić jako

$$E_w \to \begin{cases} E_1, & \text{jeśli} \quad \beta_2 k_1\kappa_2 > k_2\kappa_1, \\ E_e, & \text{jeśli} \quad \beta_2 k_1\kappa_2 \leq k_2\kappa_1. \end{cases}$$

Oznacza to, że stan E_w bifurkuje ze stanów E_1 lub E_e, w zależności od wartości parametrów.

Stabilność stanów stacjonarnych

Zajmijmy się teraz stabilnością stanu E_2^{**}. Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 3.8. *Półdodatni stan stacjonarny E_2^{**} układu* (3.16) *jest stabilny, jeśli zachodzi nierówność*

$$\frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\kappa_2 B}}{2\kappa_2}(\kappa_2 - 1) < \gamma_2, \tag{3.25}$$

wraz z jednym z warunków:

- $A_1 \leqslant 0$ *lub*
- $0 < A_1 < k_1 + \beta_1 \frac{k_2+\sqrt{k_2^2+4\kappa_2 B}}{2\kappa_2} < (\kappa_1+1)\beta_1 \frac{k_2+\sqrt{k_2^2+4\kappa_2 B}}{2\kappa_2}$.

Dowód. Jest oczywiste, że macierze Jacobiego dla układów (3.3) i (3.16) są identyczne. Z tego wynika, że obliczając wartości własne macierzy $J(E_2^{**})$ można skorzystać z rachunków wykonanych dla $J(E_2)$. Otrzymujemy zatem

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} M_4 \cdot \lambda + \det M_4 = 0 \quad \text{lub odpowiednio} \quad \lambda^2 - \operatorname{tr} M_5 \cdot \lambda + \det M_5 = 0,$$

gdzie

$$M_4 = \begin{pmatrix} -\beta_1 y_2^{**} + A_1 & 1 \\ \beta_1 y_2^{**} & -k_1 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} -y_2^{**} + A_2 & -x_2^{**} + \eta \\ y_2^{**} & -x_2^{**} - k_2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierze M_4 i M_1, którą wprowadzono w poprzednim podrozdziale na stronie 85, mają podobną postać, analiza wartości własnych macierzy M_4 jest analogiczna do analizy w przypadku macierzy M_1.

Teraz przejdźmy do analizy macierzy M_5. Z warunku

$$\operatorname{tr} M_5 = x_2^{**} - y_2^{**} - k_2 + A_2 < 0$$

otrzymujemy (3.25), podczas gdy warunek $\det M_5 > 0$ można przedstawić jako

$$\sqrt{k_2^2 + 4\kappa_2 B} > 0,$$

który jest oczywiście zawsze prawdziwy.

Stwierdzamy, że przy spełnieniu (3.25) dostajemy lokalną stabilność stanu E_2^{**}, o ile zachodzi $A_1 \leqslant 0$ lub

$$0 < A_1 < k_1 + \beta_1 \frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\kappa_2 B}}{2\kappa_2} < (\kappa_1 + 1)\beta_1 \frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\kappa_2 B}}{2\kappa_2}.$$

□

Skupmy się teraz na lokalnej stabilności stanu E_w. W twierdzeniu oraz jego dowodzie zastosujemy współczynniki:

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_1 &:= \kappa_1^2\beta_1 x_2^{++} + \kappa_2^2\beta_2 x_1^{++} + \kappa_1\eta + \kappa_2 + \kappa_1\kappa_2(1-\kappa_2)B\frac{1}{x_2^{++}}, \\
\widetilde{a}_2 &:= \kappa_1\kappa_2 A_1 x_1^{++} + \kappa_1\kappa_2 A_2 x_2^{++} + \beta_2 x_1^{++}\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} + \beta_1 x_2^{++}\frac{\kappa_1^2\eta}{\kappa_2} + \eta \\
&\quad + \kappa_1\kappa_2^2 A_2 B\frac{1}{x_2^{++}} + B(1-\kappa_2)\left(\beta_1\kappa_1^2 + \frac{\kappa_2}{x_2^{++}}\right), \\
\widetilde{a}_3 &:= \kappa_1 A_1 x_1^{++}\eta + \kappa_2 A_2 x_2^{++} + \kappa_1^2 A_2 x_2^{++} k_2\beta_1 + \kappa_2^2 A_1 x_1^{++} k_1\beta_2 \\
&\quad + \kappa_2^2 A_2 B\frac{1}{x_2^{++}} + \kappa_1\kappa_2 A_1 B\frac{x_1^{++}}{x_2^{++}}(1-\kappa_2) + 2\kappa_1^2\kappa_2 A_2 B\beta_1, \\
\widetilde{a}_4 &:= \kappa_1\kappa_2 A_1 A_2(1-\beta_1\beta_2)x_1^{++}x_2^{++} + \kappa_1\kappa_2^2 A_1 A_2 B\frac{x_1^{++}}{x_2^{++}}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 3.9. *Załóżmy, że endemiczny stan stacjonarny E_w układu (3.16) istnieje. Warunkami wystarczającymi lokalnej stabilności E_w są nierówności $\kappa_2 < 1$ oraz*

$$\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 - \kappa_1\kappa_2\widetilde{a}_3 > \frac{\widetilde{a}_4\widetilde{a}_1^2}{\widetilde{a}_3}.$$

Dowód. Macierz Jacobiego dla stanu E_w ma postać

$$J(E_w) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa_1} & -x_1^{++} + 1 & 0 & -\beta_1 x_1^{++} \\ \frac{k_1}{\kappa_1} & x_1^{++} - k_1 & 0 & \beta_1 x_1^{++} \\ 0 & -\beta_2 x_2^{++} & -\frac{\eta}{\kappa_2} - \frac{B}{x_2^{++}} & -x_2^{++} + \eta \\ 0 & \beta_2 x_2^{++} & \frac{k_2}{\kappa_2} + \frac{B}{x_2^{++}} & x_2^{++} - k_2 \end{pmatrix}.$$

Dla tego stanu z równań (3.16d) i (3.5) otrzymujemy

$$\kappa_2 y_2 + \beta_2\kappa_1 y_1 = k_2 + \frac{B}{y_2}, \quad \kappa_1,\ \kappa_2 > 0. \tag{3.27}$$

Wyznaczmy wielomian charakterystyczny macierzy $J(E_w)$. Stosując zależności (3.20) i (3.27) dostajemy

$$\widetilde{P}(\lambda) = \kappa_1\kappa_2\lambda^4 + \widetilde{a}_1\lambda^3 + \widetilde{a}_2\lambda^2 + \widetilde{a}_3\lambda + \widetilde{a}_4.$$

Zauważmy, że jeśli $\kappa_2 < 1$, to wszystkie współczynniki $\widetilde{a}_j$, $j = 1, ..., 4$, są dodatnie (przy założeniu $\beta_1\beta_2 < 1$). Podobnie jak w paragrafie 3.1.2, zastosujemy kryterium Routha-Hurwitza. Mamy

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_1 &= \widetilde{a}_1,\\
\widetilde{\Delta}_2 &= \widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 - \kappa_1\kappa_2\widetilde{a}_3,\\
\widetilde{\Delta}_3 &= \widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{a}_3 - \kappa_1\kappa_2\widetilde{a}_3^2 - \widetilde{a}_4\widetilde{a}_1^2,\\
\widetilde{\Delta}_4 &= \widetilde{a}_4\left(\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\widetilde{a}_3 - \kappa_1\kappa_2\widetilde{a}_3^2 - \widetilde{a}_4\widetilde{a}_1^2\right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Jeśli $\widetilde{a}_4 > 0$, to warunek $\widetilde{\Delta}_4 > 0$ jest równoważny warunkowi $\widetilde{\Delta}_3 > 0$, który jest silniejszy niż warunek $\widetilde{\Delta}_2 > 0$. Stwierdzamy ostatecznie, że warunkami wystarczającymi stabilności stanu E_w są nierówności $\kappa_2 < 1$ oraz

$$\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 - \kappa_1\kappa_2\widetilde{a}_3 > \frac{\widetilde{a}_4\widetilde{a}_1^2}{\widetilde{a}_3},$$

co kończy dowód. □

Przypadek graniczny $\beta_i \to 0$

Rozważmy teraz graniczny przypadek, gdy $\beta_i \to 0$. Wówczas z (3.18), (3.19) oraz (3.22) mamy $\vartheta \to k_1\kappa_2$, $\theta \to k_2\kappa_1$, $\Theta \to k_2^2\kappa_1^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2 B$, dodatkowo zaś z (3.23) oraz (3.21) otrzymujemy

$$x_1^{++} \to \frac{k_1\kappa_2 + k_1\kappa_2}{2\kappa_2} = k_1$$

oraz

$$x_2^{++} \to \frac{k_2\kappa_1 + \sqrt{(k_2\kappa_1)^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2 B}}{2\kappa_1} = \frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4\kappa_2 B}}{2} \equiv \widetilde{x}_2^{++}.$$

Z (3.5) dostajemy $y_1^{++} \to \frac{k_1}{\kappa_1}$ oraz $y_2^{++} \to \frac{\widetilde{x}_2^{++}}{\kappa_2}$. Definiując

$$\tilde{E}_w := \left(k_1, \frac{k_1}{\kappa_1}, \widetilde{x}_2^{++}, \frac{\widetilde{x}_2^{++}}{\kappa_2}\right)$$

możemy zapisać $E_w \to \tilde{E}_w$ dla $\beta_i \to 0$.

Z twierdzenia 3.7 dostajemy, że warunkami istnienia stanu $\tilde{E}_w$ dla $\beta_i \to 0$ są nierówności $\kappa_1, \kappa_2 > 0$. Warunkiem spełnienia $y_2^{++} > B$ staje się zależność $B < \frac{\kappa_1 + k_2\kappa_1}{\kappa_1\kappa_2} = \frac{1+k_2}{\kappa_2}$.

O stabilności stanu $\tilde{E}_w$ mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.10. *Niech $\beta_i \to 0$. Załóżmy, że graniczny endemiczny stan stacjonarny $\tilde{E}_w$ układu* (3.16) *istnieje. Wówczas $\tilde{E}_w$ jest lokalnie stabilny, jeśli*

$$\kappa_2 < \min\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4A_2^2}}{2A_2}, \frac{1}{\kappa_1 A_2 + 1}\right).$$

Dowód. Uzwzględniając $\beta_i \to 0$ w (3.26) dostajemy

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_1 &\to \kappa_1\eta + \kappa_2 + \kappa_1\kappa_2(1-\kappa_2)B\frac{1}{\widetilde{x}_2^{++}} \equiv a,\\
\widetilde{a}_2 &\to \kappa_1\kappa_2 A_1 k_1 + \kappa_1\kappa_2 A_2\widetilde{x}_2^{++} + \eta + \kappa_1\kappa_2^2 A_2 B\frac{1}{\widetilde{x}_2^{++}} + B(1-\kappa_2)\frac{\kappa_2}{\widetilde{x}_2^{++}},\\
\widetilde{a}_3 &\to \kappa_1 A_1 k_1\eta + \kappa_2 A_2\widetilde{x}_2^{++} + \kappa_2^2 A_2 B\frac{1}{\widetilde{x}_2^{++}} + \kappa_1\kappa_2 A_1 B\frac{k_1}{\widetilde{x}_2^{++}}(1-\kappa_2),\\
\widetilde{a}_4 &\to \kappa_1\kappa_2 A_1 A_2 k_1\widetilde{x}_2^{++} + \kappa_1\kappa_2^2 A_1 A_2 B\frac{k_1}{\widetilde{x}_2^{++}}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$ i $\widetilde{a}_3$ zbiegają do stałej dodatniej, o ile $\kappa_2 < 1$. Współczynnik $\widetilde{a}_4$ zbiega do stałej dodatniej bez dodatkowego warunku.

Sprawdźmy zachowanie minorów głównych z (3.28) dla $\beta_i \to 0$. Dla $\widetilde{\Delta}_1$ mamy $\widetilde{\Delta}_1 \to a$. Stwierdzamy, że $a > 0$, jeśli $\kappa_2 < 1$. Dalej uzyskujemy $\widetilde{\Delta}_2 \to \widehat{\Delta}_2$, gdzie

$$\widehat{\Delta}_2 \equiv \kappa_1^2\kappa_2^2 BA_2\left(\frac{\eta}{\widetilde{x}_2^{++}} + (1-\kappa_2) + \frac{\kappa_2 B(1-\kappa_2)}{(\widetilde{x}_2^{++})^2}\right) + \kappa_1\eta^2 + \kappa_2\eta + B(1-\kappa_2)\frac{\kappa_2^2}{\widetilde{x}_2^{++}}$$

$$+\kappa_1\kappa_2\left(\kappa_1 A_2\eta\widetilde{x}_2^{++} + \frac{2B\eta(1-\kappa_2)}{\widetilde{x}_2^{++}} + \kappa_2 A_2 k_1 + \frac{\kappa_2 B^2(1-\kappa_2)^2}{(\widetilde{x}_2^{++})^2}\right).$$

Zauważmy, że $\widehat{\Delta}_2 > 0$, o ile $\kappa_2 < 1$.

Następnie mamy $\widetilde{\Delta}_3 \to \widehat{\Delta}_3$, gdzie

$$\widehat{\Delta}_3 \equiv \frac{2\kappa_1^2\kappa_2^2(1-\kappa_2)B^2A_1k_1}{(\widetilde{x}_2^{++})^2}\Big((1-\kappa_2)\eta - \kappa_2^2A_2\Big) + \kappa_1^2\kappa_2^2\eta(A_2\widetilde{x}_2^{++} - A_1k_1)^2$$

$$+\frac{2\kappa_1\kappa_2^2\eta BA_1k_1}{\widetilde{x}_2^{++}}(1-\kappa_2-\kappa_1\kappa_2A_1) + \kappa_1^2A_1k_1\Big(\eta^3 - 2\kappa_2^3(1-\kappa_2)A_2B\Big)$$

$$+\eta^2\kappa_1\kappa_2(A_1k_1 + A_2\widetilde{x}_2^{++}) + \frac{B^3\kappa_1\kappa_2^3(1-\kappa_2)^2}{(\widetilde{x}_2^{++})^3}\Big(\kappa_2A_2 + \kappa_1(1-\kappa_2)A_1k_1\Big)$$

$$+\frac{(1-\kappa_2)\kappa_2^3B^2}{(\widetilde{x}_2^{++})^2}\Big(\kappa_2A_2 + \kappa_1(1-\kappa_2)A_1k_1 + \kappa_1\eta A_2\Big) + \frac{\kappa_2^2\eta A_2B}{\widetilde{x}_2^{++}}(\kappa_2 + \kappa_1\eta)$$

$$+\frac{\kappa_1^2\kappa_2^4A_2^2B^2}{(\widetilde{x}_2^{++})^2}\left(\eta + \frac{\kappa_2(1-\kappa_2)B}{\widetilde{x}_2^{++}}\right) + \kappa_1\kappa_2^2(1-\kappa_2)A_2B(\kappa_1\kappa_2A_2\widetilde{x}_2^{++} + 2\eta)$$

$$+\frac{\kappa_1\kappa_2(1-\kappa_2)B}{\widetilde{x}_2^{++}}\Big(\kappa_2^2BA_2(\kappa_1\kappa_2A_2 + 1 - \kappa_2) + \kappa_1A_1k_1(\kappa_2^2A_1k_1 + \eta)\Big)$$

$$+B(1-\kappa_2)^3A_2(1-\kappa_2+2\kappa_1^2\eta A_2).$$

Zauważmy, że $\widehat{\Delta}_3 > 0$, jeśli zachodzi zestaw warunków:

$$(1-\kappa_2)\eta - \kappa_2^2A_2 > 0, \tag{3.29}$$

$$1 - \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2A_1 > 0, \tag{3.30}$$

$$\eta^3 - 2\kappa_2^3(1-\kappa_2)A_2B > 0. \tag{3.31}$$

Nierówność (3.29) można zapisać jako

$$1 - \kappa_2 > \frac{A_2}{\eta}\kappa_2^2,$$

$$\frac{A_2}{\eta}\kappa_2^2 + \kappa_2 - 1 < 0.$$

Rozwiązując powyższą nierówność względem κ_2 dla $\kappa_2 > 0$ stwierdzamy, że zachodzi ona dla

$$\kappa_2 < \frac{-1+\sqrt{1+4A_2^2}}{2A_2}. \tag{3.32}$$

Zależność $\frac{-1+\sqrt{1+4A_2^2}}{2A_2} < 1$ jest spełniona dla $A_2 > 0$, ta zaś jest prawdziwa dla $\kappa_2 > 0$. Stwierdzamy więc, że (3.32) jest warunkiem silniejszym niż $\kappa_2 < 1$.

Z (3.30) otrzymujemy

$$\kappa_2 < \frac{1}{\kappa_1A_2 + 1}, \tag{3.33}$$

co jest silniejsze niż $\kappa_2 < 1$.

Zapiszmy nierówność (3.31) w postaci

$$\kappa_2^3(\kappa_2 - 1) < \frac{\eta^3}{2A_2B}. \tag{3.34}$$

Potraktujmy lewą stronę (3.34) jako funkcję zależną od κ_2. Zapiszmy $\widehat{F}(\kappa_2) := \kappa_2^3(\kappa_2 - 1)$. Zwróćmy uwagę, że zachodzi $\widehat{F}(0) = \widehat{F}(1) = 0$, dla $\kappa_2 \in (0,1)$ zaś mamy $\widehat{F}(\kappa_2) < 0$. Oznacza to, że (3.34) jest warunkiem słabszym niż $\kappa_2 < 1$.

Łącząc ze sobą nierówności (3.32) i (3.33) dostajemy

$$\kappa_2 < \min\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4A_2^2}}{2A_2}, \frac{1}{\kappa_1 A_2 + 1}\right).$$

□

3.1.4 Symulacje numeryczne

Zobrazujemy dynamikę modelu dla parametrów dopasowanych do danych dotyczących wspomnianego we wstępie przypadku gruźlicy w województwie warmińsko-mazurskim. Rozważmy układ (3.1) z funkcjami transmisji $f(S,I) = SI$ oraz $f(S,I) = \frac{SI}{S+I}$. Żeby otrzymać jak najlepiej dopasowane parametry, porównujemy symulowane wartości z rzeczywistymi danymi epidemiologicznymi. Parametry te przedstawiono w tabeli 3.2.

Tabela 3.2: Wartości parametrów układu (3.1) dla funkcji $f(S,I) = f_1(S,I)$ i $f(S,I) = f_2(S,I)$. Wartości współczynników transmisji zostały dopasowane, wartości pozostałych parametrów zaczerpnięto z [25].

Symbol	Zjawisko opisywane przez współczynnik	Wartość dla f_1	Wartość dla f_2
α_1, α_2	śmierć związana z chorobą	$0,09$	
γ_1, γ_2	wyzdrowienie	$0,9$	
A_1	rozrodczość netto dla populacji niebezdomnych	$-0,001$	
A_2	rozrodczość netto dla populacji bezdomnych	$0,04$	
β_{11}	transmisja choroby	$1,5356 \cdot 10^{-1}$	$5,4889 \cdot 10^{-7}$
β_{12}	transmisja choroby	$5,5064 \cdot 10^{-1}$	$1,3022 \cdot 10^{-5}$
β_{21}	transmisja choroby	$2,1757 \cdot 10^{-3}$	$5,3667 \cdot 10^{-6}$
β_{22}	transmisja choroby	$7,6214 \cdot 10^{-1}$	$1,1089 \cdot 10^{-4}$

Wartości parametrów α_1, α_2, γ_1, γ_2, A_1 i A_2 zostały zaczerpnięte z [101]. Sposób estymacji wartości współczynników transmisji choroby β_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$ opisano we wstępie. Porównanie między danymi symulowanymi a rzeczywistymi zilustrowano na rysunku 3.4.

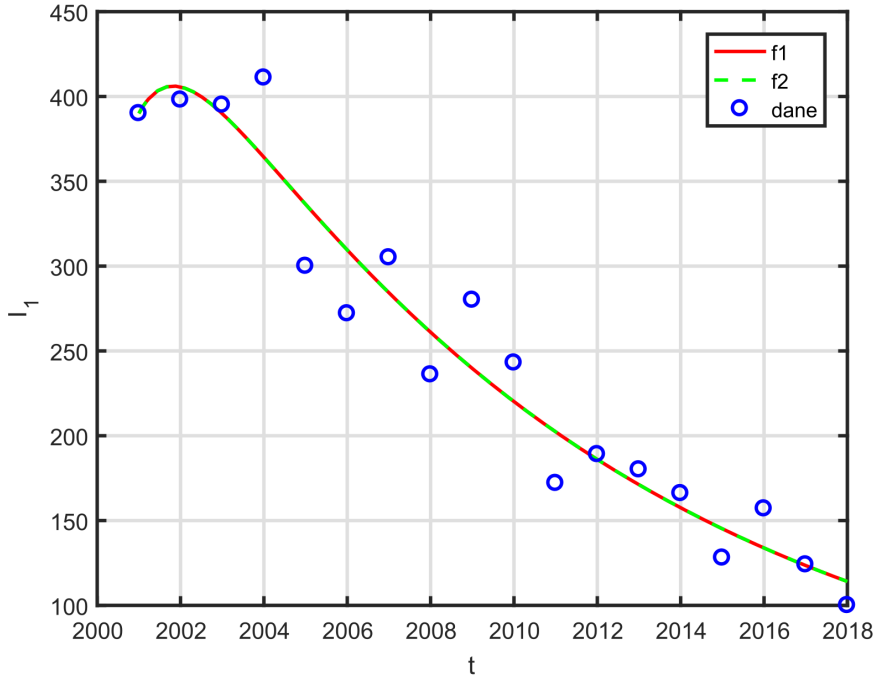
Zauważmy, że dla obu funkcji f_1 i f_2 dopasowane krzywe mają bardzo podobny kształt. Należałoby zatem uzyskać więcej danych, żeby zdecydować, która funkcja transmisji lepiej opisuje proces rozprzestrzeniania się choroby.

Rysunki 3.5a i 3.5b przedstawiają portrety fazowe układu (3.1) z uwzględnieniem funkcji transmisji f_2 w podprzestrzeniach fazowych (S_1, I_1) i (S_2, I_2). Przyjęto wartości parametrów $A_1 = 0,05$, $A_2 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,7$, $\alpha_2 = 0,6$, $\eta = 0,9$, $\beta_1 = 0,7$ oraz $\beta_2 = 0,8$. W tym przypadku stan stacjonarny $E_2 = (0, 0, x_2^*, y_2^*)$ istnieje i jest stabilny. Co więcej, w dłuższym przedziale czasowym podpopulacja niebezdomnych zanika i istnieje tylko podpopulacja osób bezdomnych. Sytuacja ta jest nierealistyczna – w przypadku braku niebezdomnych, bezdomni zajmą ich domy. Trzeba jednak ponownie podkreślić, że interesuje nas tylko dynamika epidemii w krótkim przedziale czasowym, a w modelu nie uwzględniamy wymiany osób między dwiema podpopulacjami.

W kontekście funkcji f_1 należy dodać, że dla tej funkcji oba stany, czyli półdodatni i dodatni, nie istnieją.

3.2 Model ze stałym napływem

Teraz zajmiemy się analizą kolejnego ciągłego modelu krzyżowego, który określa dynamikę rozprzestrzeniania się epidemii w populacji niejednorodnej. Zakładamy, że napływ do każdej z podpopula-



Rysunek 3.4: Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018 (liczba zainfekowanych niebezdomnych). Porównanie między danymi rzeczywistymi a symulowanymi z użyciem funkcji f_1 i f_2.

cji jest stały. Strukturę modelu oprzemy na modelu dwuwymiarowym (1.13) dla populacji jednorodnej omówionym w podrozdziale 1.2. Analogicznie jak dla układu (1.13), rozważamy funkcję transmisji $f(S,I) = f_2(S,I) = SI$.

Tak powstały układ ma postać

$$\begin{aligned}
\dot{S}_1 &= C_1 - \beta_{11}S_1I_1 - \beta_{12}S_1I_2 + \gamma_1 I_1 - \mu_1 S_1,\\
\dot{I}_1 &= \beta_{11}S_1I_1 + \beta_{12}S_1I_2 - (\gamma_1 + \alpha_1 + \mu_1)I_1,\\
\dot{S}_2 &= C_2 - \beta_{22}S_2I_2 - \beta_{21}S_2I_1 + \gamma_2 I_2 - \mu_2 S_2,\\
\dot{I}_2 &= \beta_{22}S_2I_2 + \beta_{21}S_2I_1 - (\gamma_2 + \alpha_2 + \mu_2)I_2,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

gdzie μ_1 i μ_2 to współczynniki śmiertelności naturalnej w podpopulacji odpowiednio niskiego i wysokiego ryzyka. Stałe C_i odzwierciedlają stały napływ osobników do odpowiedniej podpopulacji. W naszym modelu są to liczby nowo narodzonych oraz migrujących osobników. Współczynniki μ_i i C_i są dodatnie. Pozostałe parametry mają takie samo znaczenie jak w modelu (3.1). Ponadto przyjmujemy założenie

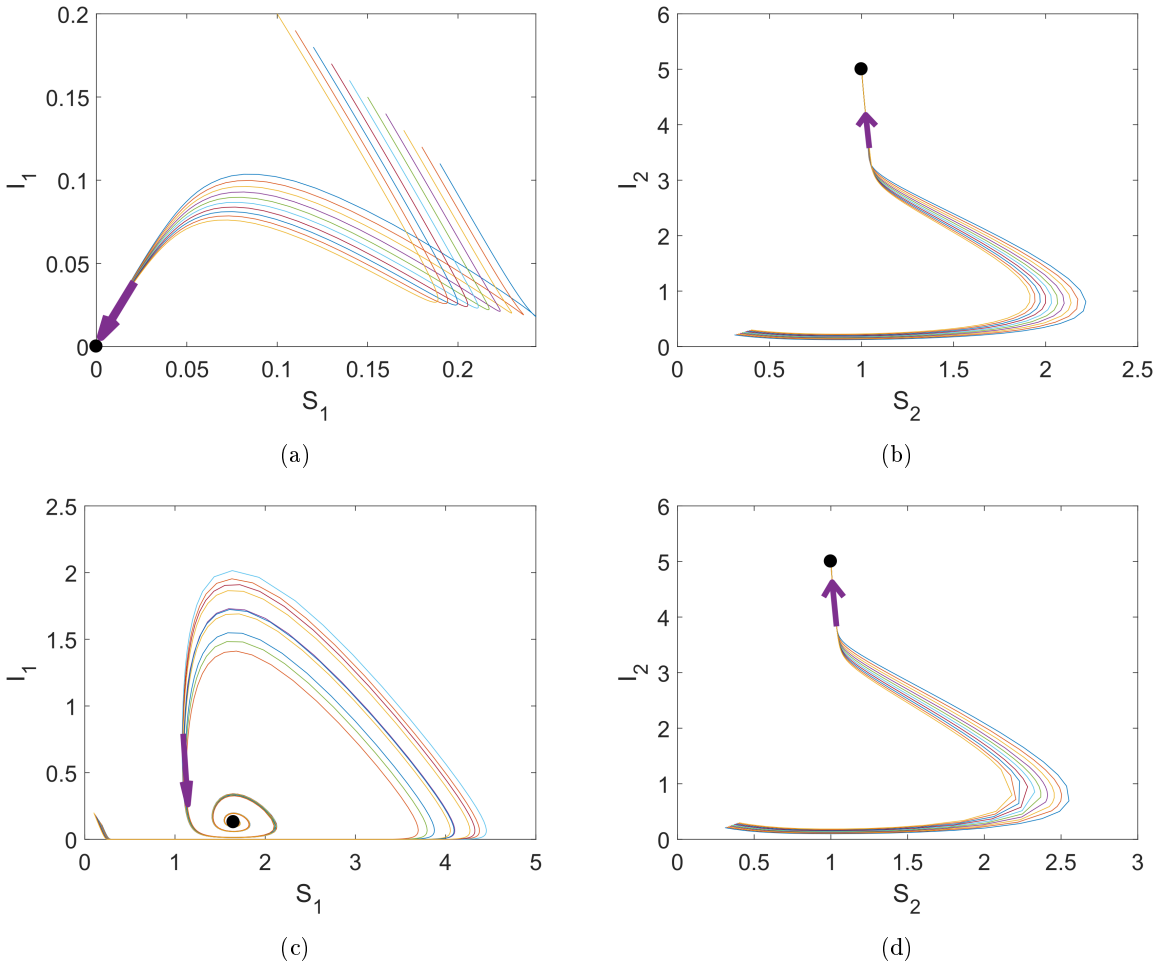
$$C_i \gg \mu_i, \quad i = 1,2, \tag{HH}$$

które jest analogiczne do założenia (H) w przypadku populacji jednorodnej.

Dla uproszczenia, analogicznie jak w poprzednich modelach, nie zakładamy migracji osobników z podpopulacji niskiego ryzyka do podpopulacji wysokiego ryzyka oraz na odwrót. W przypadku niektórych chorób (na przykład trądu) możliwa jest sytuacja, że skłonność do infekcji jest rzeczą nabytą w momencie narodzin [111].

Zauważmy, że w modelu (3.1) nie występują stałe analogiczne do C_i i μ_i, ich rolę spełniają tam współczynniki A_i. Jeśli rozważa się matematyczną strukturę modeli (3.35) i (3.1), to można stwierdzić, że współczynniki μ_i są tożsame ze współczynnikami A_i, jednakże z powodu interpretacji biologicznej w układzie (3.1) A_i nie muszą być wyłącznie dodatnie, ponieważ uwzględniają one narodziny i śmierci.

Załóżmy, że $C_1 = C_2 = 0$ – obrazuje to sytuację, kiedy do obu podpopulacji nie ma napływu nowych osobników. Wówczas układ (3.35) jest tożsamy z układem (3.1) dla $A_1, A_2 < 0$. Wtedy otrzymujemy



Rysunek 3.5: Portrety fazowe dla układu (3.3) z funkcją transmisji f_2 w przestrzeni fazowej (a) (S_1, I_1) i (b) (S_2, I_2) w przypadku możliwości wystąpienia zakażeń pomiędzy osobnikami z różnych podpopulacji. Dodatni stan stacjonarny E_e nie istnieje, podczas gdy półdodatni stan E_2 istnieje i jest stabilny. Dla tych samych wartości parametrów dodatnie stany stacjonarne dla dwóch rozdzielonych populacji jednorodnych istnieją i są stabilne. Portrety fazowe w przestrzeni fazowej (S_1, I_1) i (S_2, I_2) dla tego przypadku (to znaczy $\beta_1 = \beta_2 = 0$) przedstawiono odpowiednio na (c) i (d). Stany stacjonarne zaznaczono czarnym punktem.

przypadek ekstynkcji całej populacji, co było wykazane w paragrafie 3.1.1. Stwierdzamy więc, że założenie w modelu (3.35) braku napływu nowych osobników do populacji jest niezasadne.

Teraz przeprowadźmy skalowanie modelu (3.35) analogicznie jak w układzie (3.1). Otrzymujemy układ

$$x_1' = C_1 - x_1 y_1 - \beta_1 x_1 y_2 + y_1 - \mu_1 x_1, \tag{3.36a}$$
$$y_1' = x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - (1 + \alpha_1 + \mu_1) y_1, \tag{3.36b}$$
$$x_2' = C_2 - x_2 y_2 - \beta_2 x_2 y_1 + \eta_2 y_2 - \mu_2 x_2, \tag{3.36c}$$
$$y_2' = x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - (\eta_2 + \alpha_2 + \mu_2) y_2, \tag{3.36d}$$

gdzie, jak poprzednio,

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad i = 1, \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} & \text{jeśli} \quad i = 2, \end{cases}$$

$$x_1 = a_1 S_1, \quad y_1 = a_1 I_1, \quad x_2 = a_2 S_2, \quad y_2 = a_2 I_2,$$

$a_i = \beta_{ii}$, natomiast zmienne β_i i C_i są odpowiednio skalowane. Będziemy również oznaczać

$$w_i(\tau) = a_i N_i(\tau), \quad w_i = x_i + y_i$$

oraz

$$k_i = \eta_i + \alpha_i + \mu_i, \qquad \kappa_i = \frac{\alpha_i}{\mu_i} + 1.$$

Zauważmy, że $\kappa_i > 1$ i $k_i > \eta_i > 0$.

Przyjrzyjmy się własnościom rozwiązań układu (3.36).

Twierdzenie 3.11. *Dla nieujemnego warunku początkowego rozwiązania układu* (3.36) *są nieujemne.*

Dowód. Załóżmy, że wartości $x_i(0)$ i $y_i(0)$ są nieujemne. Jeśli istnieje punkt $\tilde{\tau} > 0$ taki, że $x_i(\tilde{\tau}) = 0$, to dla pierwszego wystąpienia takiego punktu mamy

$$x_i'(\tilde{\tau}) = C_i + \eta_i y_i(\tilde{\tau}) > 0.$$

Oznacza to, że x_i jest odpychane od zera i, co więcej, dla $\tau > 0$ mamy $x_i(\tau) > 0$. Następnie, przy założeniu, że istnieje punkt $\tilde{\tau} > 0$ taki, że $y_1(\tilde{\tau}) = 0$ oraz reszta zmiennych jest dodatnia, uzyskujemy

$$y_1'(\tilde{\tau}) = \beta_1 x_1(\tilde{\tau}) y_2(\tilde{\tau}) > 0,$$

co implikuje nieujemność zmiennej y_1. Podobna nierówność zachodzi dla zmiennej y_2. Ponadto z równania (3.36b) lub (3.36d) dostajemy

$$y_i' \geq -k_i y_i$$

i z twierdzenia Czapłygina-Perrona o nierównościach różniczkowych [13] mamy

$$y_i(\tau) \geq y_i(0)\, \mathrm{e}^{-k_i \tau} > 0 \quad \text{dla} \quad y_i(0) > 0.$$

Zauważmy ponadto, że jeśli $y_i(0) = 0$, to dostajemy $y_i'(0) = 0$, co prowadzi do uzyskania podprzestrzeni niezmienniczej, w której $y_i = 0$ oraz $x_i' = C_i - \mu_i x_i$. □

O pozostałych własnościach rozwiązań mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.12. *Rozwiązania układu* (3.36) *są określone dla każdego $\tau > 0$, jednoznaczne oraz mogą być też przedłużone w przód na dowolny odcinek czasu.*

Dowód. Dodając równania (3.36a) i (3.36b) albo (3.36c) i (3.36d) dostajemy

$$x_i' + y_i' = C_i - \alpha_i y_i - \mu_i (x_i + y_i), \quad \text{czyli} \quad w_i' = C_i - \alpha_i y_i - \mu_i w_i. \tag{3.37}$$

Powtarzając to samo rozumowanie co dla układu (1.14) otrzymujemy zbiór niezmienniczy

$$\Omega = \left\{ (x_1, y_1, x_2, y_2) : \; x_i + y_i \in \left[\frac{C_i}{\alpha_i + \mu_i}, \frac{C_i}{\mu_i} \right] \right\}. \tag{3.38}$$

Zbiór ten przyciąga wszystkie rozwiązania układu (3.36). Stwierdzamy zatem, że zmienne $x_i(\tau)$ i $y_i(\tau)$ są określone dla każdego $\tau > 0$.

Jednoznaczność rozwiązań układu (3.36) jest konsekwencją postaci prawej strony układu. □

Wnioskujemy z powyższego, że dla populacji opisywanych modelem (3.36), podobnie jak dla (1.14), własności maltuzjańskie nie występują.

3.2.1 Stany stacjonarne

W tym podrozdziale badamy warunki istnienia i lokalnej stabilności stanów stacjonarnych układu (3.36).

Zauważmy, że z równania (3.37) dostajemy zależność

$$x_i = \frac{C_i - (\mu_i + \alpha_i) y_i}{\mu_i} = \frac{C_i}{\mu_i} - \kappa_i y_i, \tag{3.39}$$

spełnioną przez dowolny stan stacjonarny. Z powyższego równania uzyskujemy od razu postać zawsze istniejącego stanu wolnego od epidemii

$$E_{df} = (\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_2, 0), \quad \tilde{x}_i = \frac{C_i}{\mu_i}.$$

Istnienie dodatniego stanu stacjonarnego

Przejdźmy do określenia warunków istnienia dodatniego (endemicznego) stanu stacjonarnego E_e.

Twierdzenie 3.13. *Stan stacjonarny E_e istnieje, jeśli zachodzi co najmniej jeden z warunków:*

1. $C_1 \geq \mu_1 k_1$;
2. $C_2 \geq \mu_2 k_2$;
3. $(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) \leq \beta_1 \beta_2 C_1 C_2$ *oraz*

$$C_i < \mu_i k_i, \quad i = 1, 2. \tag{N}$$

Dowód. Niech $E_e = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Dodatniość x_i oraz równanie (3.39) implikują zależność

$$y_i < \frac{C_i}{\mu_i \kappa_i}.$$

Z równań (3.36b) i (3.36d) otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} y_1 + \beta_1 y_2 &= k_1 \frac{y_1}{x_1}, \\ y_2 + \beta_2 y_1 &= k_2 \frac{y_2}{x_2}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

który, wraz z równaniem (3.39), opisuje dodatni stan stacjonarny. Zauważmy, że z układu (3.40) wynika zależność $x_i < k_i$. Co więcej, po podstawieniu (3.39) do (3.40) uzyskuje się

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{y_2}{\beta_2}\left(\frac{\mu_2 k_2}{C_2 - \mu_2 \kappa_2 y_2} - 1\right), \\ y_2 &= \frac{y_1}{\beta_1}\left(\frac{\mu_1 k_1}{C_1 - \mu_1 \kappa_1 y_1} - 1\right). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Rozważmy równanie dla y_2 z układu (3.41) jako funkcję zmiennej y_1. Biorąc pod uwagę nierówności $y_1 < \frac{C_1}{\mu_1 \kappa_1}$ i $y_2 > 0$ dostajemy, że funkcja $y_2(y_1)$ jest zdefiniowana tylko dla $y_1 \in \left(\xi_1, \frac{C_1}{\mu_1 \kappa_1}\right)$, gdzie $\xi_1 = \max\left\{0, \frac{C_1 - \mu_1 k_1}{\mu_1 \kappa_1}\right\}$. Co więcej $y_2(y_1) \to +\infty$, gdy $y_1 \to \frac{C_1}{\mu_1 \kappa_1}$, oraz jeśli zachodzi $y_1 \in \left(\xi_1, \frac{C_1}{\mu_1 \kappa_1}\right)$, to $y_2' > 0$ i $y_2'' > 0$.

Rozważmy dwa przypadki: $C_1 > \mu_1 k_1$ lub $C_1 \leq \mu_1 k_1$.

1. Jeśli $C_1 > \mu_1 k_1$, to zachodzą $\xi_1 = \frac{C_1 - \mu_1 k_1}{\mu_1 \kappa_1} > 0$ oraz $y_2(\xi_1) = 0$.
2. Jeżeli $C_1 \leq \mu_1 k_1$, to mamy $\xi_1 = 0$ i $y_2(\xi_1) = 0$.

Analogicznie badamy równanie dla y_1 jako funkcję y_2, która jest zdefiniowana tylko dla $y_2 \in \left(\xi_2, \frac{C_2}{\mu_2 \kappa_2}\right)$, gdzie $\xi_2 = \max\left\{0, \frac{C_2 - \mu_2 k_2}{\mu_2 \kappa_2}\right\}$.

1. Jeśli $C_2 > \mu_2 k_2$, to zachodzą $\xi_2 = \frac{C_2 - \mu_2 k_2}{\mu_2 \kappa_2} > 0$ i $y_1(\xi_2) = 0$.
2. Jeżeli $C_2 \leq \mu_2 k_2$, to mamy $\xi_2 = 0$ i $y_1(\xi_2) = 0$.

Zauważmy, że jeśli zachodzi $C_i = \mu_i k_i$, to otrzymujemy $\xi_i = 0$, $y_j(0) = 0$ oraz $y_j'(0) = 0$, dla $i, j = 1,\ 2$, $i \neq j$.

Możemy zatem stwierdzić, że jeśli zachodzi co najmniej jeden z warunków: $C_1 \geq \mu_1 k_1$ lub $C_2 \geq \mu_2 k_2$ (rysunek 3.6), to wówczas istnieje dodatnie rozwiązanie układu (3.41), które spełnia następujące nierówności:

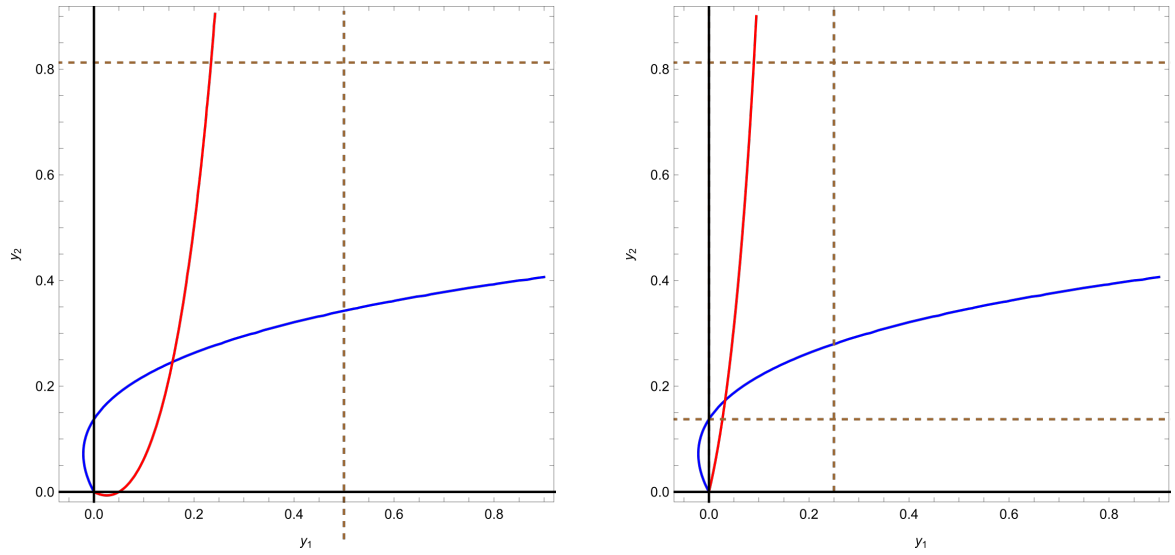
$$0 < x_i < k_i, \quad \xi_i < y_i < \frac{C_i}{\mu_i \kappa_i}.$$

Z drugiej strony, jeśli spełnione jest (N), to dodatnie rozwiązanie układu (3.41) istnieje tylko wtedy, gdy $y_2'(0) \leq \frac{1}{y_1'(0)}$. Dodatni stan stacjonarny istnieje zatem, jeśli

$$(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) \leq \beta_1 \beta_2 C_1 C_2 \tag{3.42}$$

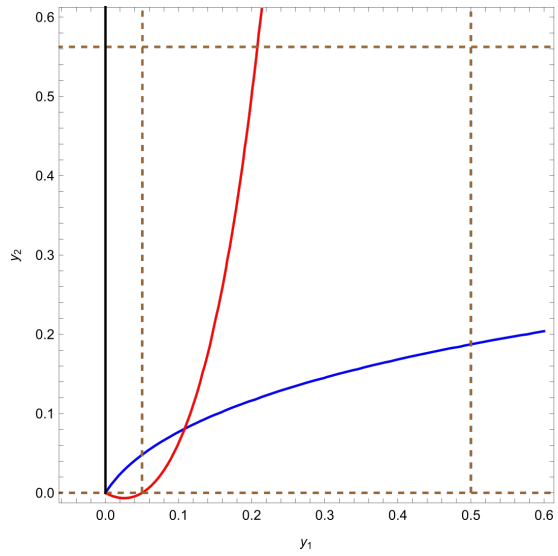
i nie istnieje w przeciwnym przypadku (por. rysunek 3.7).

□

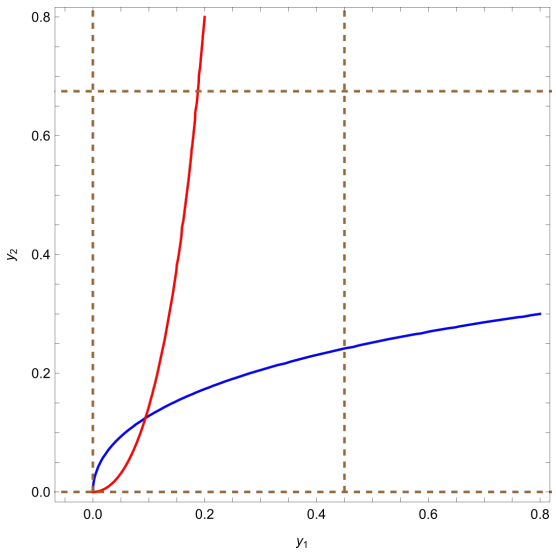


(a)

(b)

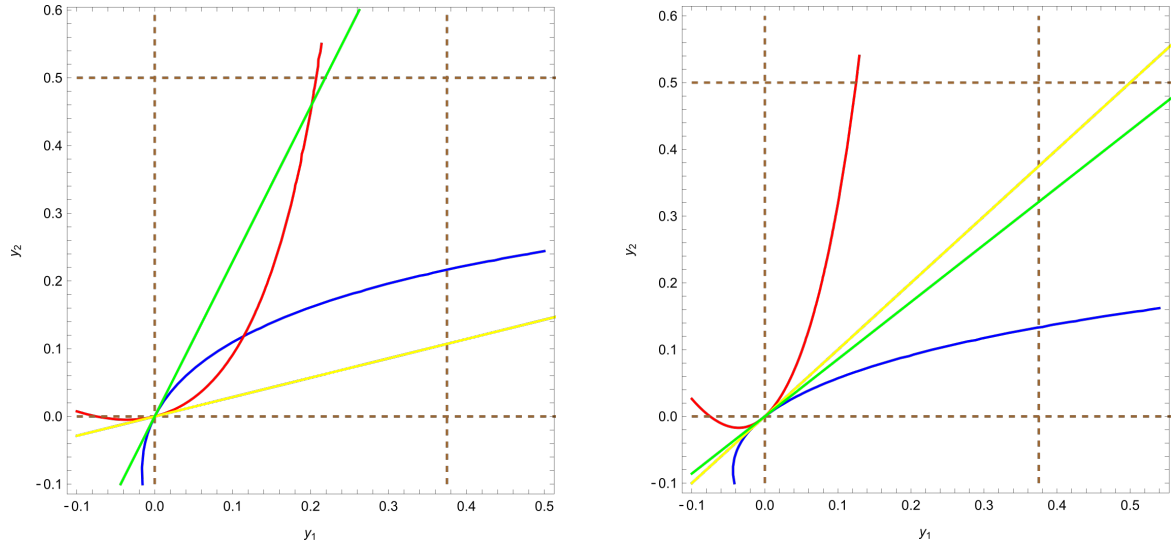


(c)



(d)

Rysunek 3.6: Graficzna reprezentacja rozwiązań układu (3.41) dla przypadków (a) $C_1 > \mu_1 k_1$ i $C_2 > \mu_2 k_2$, (b) $C_1 < \mu_1 k_1$ i $C_2 > \mu_2 k_2$, (c) $C_1 > \mu_1 k_1$ i $C_2 < \mu_2 k_2$, (d) $C_1 = \mu_1 k_1$ i $C_2 = \mu_2 k_2$. Czerwone krzywe reprezentują wykres funkcji $y_2(y_1)$, niebieskie reprezentują wykres $y_1(y_2)$. Linie przerywane ograniczają obszar zdefiniowany jako $\left(\xi_1, \frac{C_1}{\mu_1 \kappa_1}\right) \times \left(\xi_2, \frac{C_2}{\mu_2 \kappa_2}\right)$. Przyjęto wartości parametrów: $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,5$, $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,7$, $\eta = 0,9$, $\mu_1 = 0,2$, $\mu_2 = 0,3$. Parametry C_1 i C_2 mają wartości (a) $C_1 = 0,4$, $C_2 = 0,65$, (b) $C_1 = 0,2$, $C_2 = 0,65$, (c) $C_1 = 0,4$, $C_2 = 0,45$, (d) $C_1 = 0,36$, $C_2 = 0,54$.



(a) (b)

Rysunek 3.7: Graficzna reprezentacja rozwiązania układu (3.41) dla (N), jeśli warunek (3.42) zachodzi (a) i nie zachodzi (b). Czerwone krzywe obrazują wykres funkcji $y_2(y_1)$, niebieskie krzywe reprezentują wykres funkcji $y_1(y_2)$. Żółta linia jest styczną do funkcji $y_2(y_1)$ w zerze, zielona – styczną do funkcji $y_1(y_2)$ w zerze. Przerywane linie ograniczają obszar zdefiniowany jako $\left(\xi_1, \frac{C_1}{\mu_1\kappa_1}\right) \times \left(\xi_2, \frac{C_2}{\mu_2\kappa_2}\right)$. W symulacjach użyto wartości parametrów: $C_1 = 0,3$, $C_2 = 0,4$, $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,5$, $\eta = 0,9$, $\mu_1 = 0,2$, $\mu_2 = 0,3$ oraz w (a) $\beta_1 = 0,2$, $\beta_2 = 0,3$ i w (b) $\beta_1 = 0,7$, $\beta_2 = 0,8$.

3.2.2 Współczynnik odnowienia choroby oraz lokalna stabilność stanu stacjonarnego wolnego od epidemii

W tym paragrafie wyznaczymy współczynnik odnowienia $\mathcal{R}_0$ układu (3.36). Jak było wspomniane we wstępie, współczynnik ten można traktować jako parametr progowy, w tym jako parametr bifurkacyjny. Jeśli $\mathcal{R}_0 < 1$, to jeden zainfekowany osobnik może wywołać średnio mniej niż jedno nowe zakażenie podczas całego swojego okresu zakażenia, przez co choroba nie może rozprzestrzenić się w całej populacji. Jeśli $\mathcal{R}_0 > 1$, to wtedy jeden zainfekowany osobnik może wywołać średnio więcej niż jedno nowe zakażenie i może nastąpić ekspansja choroby w całej populacji. Jeśli rozważa się tylko jedną grupę osób zainfekowanych, to $\mathcal{R}_0$ jest iloczynem czasu trwania infekcji oraz stopnia zakażenia. W takim przypadku warunek $\mathcal{R}_0 < 1$ również oznacza, że stan stacjonarny wolny od epidemii jest lokalnie asymptotycznie stabilny i niestabilny w pozostałych przypadkach [52].

Dla modeli, w których występuje więcej niż jedna grupa osób chorych, definicję $\mathcal{R}_0$ można oprzeć na przykład na koncepcji macierzy następnego pokolenia. Wówczas $\mathcal{R}_0$ definiuje się, jak to zrobił Diekmann w [38], jako promień spektralny tej macierzy. W dalszej części rozprawy będziemy posługiwać się tą definicją. W takim podejściu $\mathcal{R}_0$ zależy od liczby grup osób zainfekowanych w danym modelu.

Nasze rozważania oprzemy na koncepcji macierzy następnego pokolenia przedstawionej w [39]. Przytoczymy najpierw postać ogólnego modelu transmisji choroby i potrzebne oznaczenia.

Załóżmy, że populację dzielimy na n grup. Za $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ przyjmijmy nieujemny wektor, gdzie każdy element oznacza liczbę osobników w odpowiedniej grupie. Zakładamy ponadto, że pierwsze m elementów z wektora x odpowiada liczebnościom grup osobników chorych, natomiast kolejne $m - n$ elementów odzwierciedla liczebności grup osób zdrowych. Wówczas

$$X_s := \{x \geq 0 : x_j = 0,\ j = 1, \ldots, m\}$$

oznacza zbiór wszystkich stanów wolnych od epidemii. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_j(x)$ funkcję opisującą występowanie nowych infekcji w j-tej grupie. Niech $\mathcal{V}_j^+(x)$ opisuje przechodzenie osobników do j-tej grupy innym sposobami niż zachorowanie, z kolei $\mathcal{V}_j^-(x)$ – odchodzenie osobników z j-tej grupy w sposób inny niż nabycie infekcji. Należy podkreślić, że przechodzenia osobników między grupami osób chorych nie

traktuje się jako nową infekcję, więc taki przypadek znajduje odzwierciedlenie w funkcjach $\mathcal{V}_j^+$ i $\mathcal{V}_j^-$. Model transmisji choroby wraz z nieujemnym warunkiem początkowym można przedstawić jako zagadnienie początkowe postaci

$$\dot{x}_j = f_j(x) = \mathcal{F}_j(x) - \mathcal{V}_j(x), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3.43}$$

gdzie $\mathcal{V}_j(x) = \mathcal{V}_j^-(x) - \mathcal{V}_j^+(x)$. Oznaczmy przez x_0 taki stan stacjonarny, że $x_0 \in X_s$. Stan x_0 jest zatem stanem wolnym od epidemii. Teraz zdefiniujmy macierze pomocnicze wymiaru $m \times m$:

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_j(x)}{\partial x_{\widehat{j}}} \right)\Bigg|_{x_0}, \quad V = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_j(x)}{\partial x_{\widehat{j}}} \right)\Bigg|_{x_0}, \qquad 1 \leq j,\ \widehat{j} \leq m.$$

Macierzą następnego pokolenia układu (3.43) nazywamy macierz FV^{-1}, natomiast współczynnik odnowienia w układzie (3.43) definiujemy jako

$$\mathcal{R}_0 = \varrho\left(FV^{-1}\right), \tag{3.44}$$

gdzie ϱ oznacza promień spektralny.

Wróćmy do układu (3.36). Zgodnie z [39] porządkujemy zmienne układu w taki sposób, że pierwszymi są te dotyczące osobników chorych. Wprowadźmy zatem wektor $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (y_1, y_2, x_1, x_2)$. Przy takim oznaczeniu stan stacjonarny wolny od epidemii ma postać

$$z_0 = (0, 0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \left(0, 0, \frac{C_1}{\mu_1}, \frac{C_2}{\mu_2}\right)$$

i układ (3.36) można zapisać jako

$$z' = f(z) = \mathcal{F}(z) - \mathcal{V}(z), \tag{3.45}$$

gdzie

$$\mathcal{F}(z) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 \\ x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(z) = \begin{pmatrix} k_1 y_1 \\ k_2 y_2 \\ -C_1 + x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - y_1 + \mu_1 x_1 \\ -C_2 + x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - \eta y_2 + \mu_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Następnie otrzymujemy

$$F(z)\Big|_{z_0} = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\mu_1} & \frac{\beta_1 C_1}{\mu_1} \\ \frac{\beta_2 C_2}{\mu_2} & \frac{C_2}{\mu_2} \end{pmatrix}, \quad V(z)\Big|_{z_0} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \quad FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{\mu_1 k_1} & \frac{\beta_1 C_1}{\mu_1 k_2} \\ \frac{\beta_2 C_2}{\mu_2 k_1} & \frac{C_2}{\mu_2 k_2} \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie współczynnik odnowienia dla modelu (3.36) wynosi

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1} + \frac{C_2}{\mu_2 k_2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1} - \frac{C_2}{\mu_2 k_2} \right)^2 + \frac{4\beta_1 \beta_2 C_1 C_2}{\mu_1 \mu_2 k_1 k_2}} \right). \tag{3.46}$$

Określmy teraz warunki stabilności stanu wolnego od epidemii E_{df}. Korzystamy z [39], gdzie podano potrzebne założenia i twierdzenie. Przytoczmy najpierw założenia:

I jeśli $x \geq 0$, to $\mathcal{F}_j(x) \geq 0$, $\mathcal{V}_j^+(x) \geq 0$ oraz $\mathcal{V}_j^-(x) \geq 0$ dla $j = 1, \ldots, n$,

II jeśli $x_j = 0$, to $\mathcal{V}_j^-(x) = 0$, w szczególności jeżeli $x \in X_s$, to $\mathcal{V}_j^-(x) = 0$ dla $j = 1, \ldots, m$,

III jeśli $j > m$, to $\mathcal{F}_j = 0$,

IV jeśli $x \in X_s$, to $\mathcal{F}_j(x) = 0$ i $\mathcal{V}_j^+(x) = 0$ dla $j = 1, \ldots, m$,

V jeśli $\mathcal{F}(x) = 0$, to wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego prawej strony układu $(\mathcal{F} - \mathcal{V})(x)$ w punkcie $x = x_0$, gdzie $x_0 \in X_s$, mają ujemne części rzeczywiste.

Teraz przedstawimy twierdzenie w postaci lematu pomocniczego, z którego skorzystamy w dowodzie następnego twierdzenia.

Lemat 3.14. *Rozważmy model transmisji choroby opisany wzorem* (3.43). *Niech* $f(x)$ *spełnia założenia* $I - V$. *Jeśli* x_0 *jest stanem stacjonarnym wolnym od epidemii, to jest on lokalnie asympotycznie stabilny dla* $\mathcal{R}_0 < 1$ *i niestabilny dla* $\mathcal{R}_0 > 1$, *gdzie* $\mathcal{R}_0$ *definiujemy wzorem* (3.44).

Dowód tego lematu przedstawiono w [39].

Teraz sformułujemy twierdzenie odnoszące się do modelu (3.36).

Twierdzenie 3.15. *Stan stacjonarny wolny od epidemii* E_{df} *układu* (3.36) *jest lokalnie asympotycznie stabilny, jeśli* $\mathcal{R}_0 < 1$ *oraz niestabilny dla* $\mathcal{R}_0 > 1$, *gdzie* $\mathcal{R}_0$ *jest dane wzorem* (3.46).

Dowód. Najpierw należy sprawdzić, czy założenia I – V są spełnione.

Wektor $\mathcal{V}(z)$ zapiszmy jako różnicę $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}^-(z) - \mathcal{V}^+(z)$, gdzie

$$\mathcal{V}^-(z) = \begin{pmatrix} k_1 y_1 \\ k_2 y_2 \\ x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 + \mu_1 x_1 \\ x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 + \mu_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^+(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 + y_1 \\ C_2 + \eta y_2 \end{pmatrix}.$$

Wektory $\mathcal{F}(z)$, $\mathcal{V}^-(z)$ oraz $\mathcal{V}^+(z)$ są nieujemne dla nieujemnych zmiennych układu (3.36), zatem założenie I jest spełnione.

Ponadto zauważmy, że jeżeli zmienne y_1 i y_2 (odzwierciedlające liczebności grup osób zainfekowanych) są zerowe, to odpowiadające tym zmiennym pierwszy i drugi elementy wektora $\mathcal{V}^-(z)$ są również równe zero, czyli założenie II jest spełnione.

Trzeci i czwarty element wektora $\mathcal{F}(z)$ (odpowiadające zmiennym dotyczącym osób zdrowych x_1 i x_2) wynoszą zero, zatem spełnione jest założenie III.

Zauważmy, że jedyny stan stacjonarny wolny od epidemii w układzie (3.45) to z_0. Dla tego stanu dwa pierwsze elementy wektorów $\mathcal{F}(z_0)$ oraz $\mathcal{V}^+(z_0)$ są zerowe. Ta własność zapewnia spełnienie założenia IV.

Sprawdźmy teraz warunek V. Zakładamy, że dla dowolnego stanu stacjonarnego $z = (y_1, y_2, x_1, x_2)$ układu (3.45) zachodzi zależność $x_i < k_i$, obowiązująca dla układu (3.36). Zbudujmy macierz Jacobiego dla prawej strony układu $(\mathcal{F} - \mathcal{V})(z)$. Oznaczamy tę macierz przez J_{F-V}. Ma ona postać

$$J_{F-V}(z) = \begin{pmatrix} x_1 - k_1 & \beta_1 x_1 & y_1 + \beta_1 y_2 & 0 \\ \beta_2 x_2 & x_2 - k_2 & 0 & y_2 + \beta_2 y_1 \\ -x_1 + 1 & -\beta_1 x_1 & -y_1 - \mu_1 & 0 \\ -\beta_2 x_2 & -x_2 + \eta & 0 & -y_2 - \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Zbadamy macierz Jacobiego dla takich stanów z, dla których zachodzi $\mathcal{F}(z) = 0$. Odpowiada to sytuacji, kiedy nie ma nowych infekcji. W naszym modelu jedynym stanem spełniającym powyższą równość jest z_0. Wyznaczmy dla tego stanu macierz J_{F-V}. Otrzymujemy

$$J_{F-V}(z_0) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - k_1 & \beta_1 \tilde{x}_1 & 0 & 0 \\ \beta_2 \tilde{x}_2 & \tilde{x}_2 - k_2 & 0 & 0 \\ -\tilde{x}_1 + 1 & -\beta_1 \tilde{x}_1 & -\mu_1 & 0 \\ -\beta_2 \tilde{x}_2 & -\tilde{x}_2 + \eta & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Wyznaczmy wartości własne tej macierzy. Podaną macierz przedstawmy w postaci blokowej

$$\begin{pmatrix} J_{1*} & 0 \\ J_{2*} & J_{3*} \end{pmatrix},$$

gdzie J_{1*}, J_{2*} i J_{3*} to macierze wymiaru 2×2. Wartości własne macierzy J_{3*} są równe

$$\lambda_1 = -\mu_1, \qquad \lambda_2 = -\mu_2. \tag{3.48}$$

Macierz J_{1*} ma wartości własne

$$\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \cdot \left(k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2 \pm \sqrt{\Upsilon} \right), \tag{3.49}$$

gdzie

$$\Upsilon = \left(k_1 - \tilde{x}_1 - (k_2 - \tilde{x}_2) \right)^2 + 4\beta_1 \beta_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2. \tag{3.50}$$

Załóżmy, że zachodzi (N). Mamy $\Upsilon \geq 0$, więc $\lambda_{3,4} \in \mathbb{R}$. Zawsze zachodzi $\lambda_3 < 0$, natomiast $\lambda_4 < 0$ dla

$$(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) > \beta_1 \beta_2 C_1 C_2. \tag{W}$$

(skrót W przyjęto od słowa *większy*). Liczby $\lambda_{1,2,3,4}$ są wartościami własnymi macierzy $J_{F-V}(z_0)$, zatem wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego prawej strony układu $(\mathcal{F}-\mathcal{V})(z)$ dla wektora $\mathcal{F}(z)$ równego zero mają ujemne części rzeczywiste przy założeniach (N) oraz (W). Stąd mamy spełnione założenie V dla tych nierówności.

Spełnione są założenia I – V. zatem z lematu 3.14 uzyskujemy, że stan wolny od epidemii jest lokalnie stabilny dla $\mathcal{R}_0 < 1$ i niestabilny dla $\mathcal{R}_0 > 1$, gdzie $\mathcal{R}_0$ jest zdefiniowany wzorem (3.46) oraz jeśli zachodzą (N) oraz (W). □

Zauważmy, że z warunku $R_0 < 1$ dla układu (3.36) wynika, że lokalną stabilność stanu E_{df} gwarantują nierówności (W) oraz

$$2 > \frac{C_1}{\mu_1 k_1} + \frac{C_2}{\mu_2 k_2}. \tag{3.51}$$

Łatwo zauważyć, że nierówność (W) jest spełniona tylko wtedy, gdy zachodzi (N) albo

$$C_i > \mu_i k_i, \quad i = 1, 2. \tag{P}$$

to znaczy gdy zachodzi nierówność przeciwna do (N). Zauważmy, że sumując obie zależności z (P) postaci $\frac{C_i}{\mu_i k_i} > 1$ dostajemy warunek sprzeczny z (3.51), nie bierzemy więc (P) pod uwagę. Mamy zatem nierówności

$$\frac{C_1}{\mu_1 k_1} < 1, \quad \frac{C_2}{\mu_1 k_2} < 1,$$

ich suma daje (3.51).

Zapiszmy zatem warunki (3.51) i (W) w postaci takiej, jak w twierdzeniu 3.13 o istnieniu stanu dodatniego. Dostajemy stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.16. *Stan stacjonarny wolny od choroby E_{df} układu* (3.36) *jest lokalnie stabilny, jeśli zachodzą nierówności* (N) *oraz* (W) *i jest niestabilny, gdy co najmniej jedna z tych nierówności jest nieprawdziwa.*

Zauważmy, że jeśli zachodzi $C_i \geq \mu_i k_i$, to (N) nie jest prawdziwa. Jeżeli natomiast zachodzą jednocześnie $C_1 \geq \mu_1 k_1$ oraz

$$C_2 < \mu_2 k_2 \tag{N2}$$

lub gdy spełniona jest para nierówności $C_1 \leq \mu_1 k_1$ oraz

$$C_2 > \mu_2 k_2 \tag{P2}$$

albo gdy prawdziwe są zależności $(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) \leq \beta_1 \beta_2 C_1 C_2$ i (N), to (W) nie zachodzi. Oznacza to, że dla $\mathcal{R}_0 \geq 1$ warunki z twierdzenia 3.13 są spełnione i dodatni (endemiczny) stan stacjonarny E_e istnieje. Co więcej, jeśli ten stan istnieje, to stan E_{df} traci stabilność.

Spójrzmy jeszcze na nierówność (W). Można zauważyć, że wraz z malejącymi parametrami β_1 i β_2 warunek ten jest spełniony dla większego zakresu parametrów. Oznacza to, że im rzadziej będą występowały zakażenia między osobnikami z różnych podpopulacji, tym bardziej jest prawdopodobne, że stan wolny od epidemii utrzyma się w całej populacji niejednorodnej.

3.2.3 Lokalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego

Sprawdzimy warunki, dla których stan $E_e = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ jest lokalnie stabilny. Załóżmy zatem, że stan ten istnieje. Dla $\bar{x}_i \neq 0$, z równań (3.36a) i (3.36c) mamy

$$-\bar{y}_1 - \beta_1 \bar{y}_2 - \mu_1 = -\frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1} - \frac{C_1}{\bar{x}_1}, \qquad -\bar{y}_2 - \beta_2 \bar{y}_1 - \mu_2 = -\frac{\eta \bar{y}_2}{\bar{x}_2} - \frac{C_2}{\bar{x}_2},$$

natomiast z (3.36b) i (3.36d) uzyskujemy

$$\bar{y}_1 + \beta_1 \bar{y}_2 = k_1 \frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1}, \qquad \bar{y}_2 + \beta_2 \bar{y}_1 = k_2 \frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2}.$$

Macierz Jacobiego dla stanu E_e zapisujemy w postaci

$$J(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{x}_2,\bar{y}_2)=\begin{pmatrix} -\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1} & -\bar{x}_1+1 & 0 & -\beta_1\bar{x}_1 \\ k_1\frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1} & \bar{x}_1-k_1 & 0 & \beta_1\bar{x}_1 \\ 0 & -\beta_2\bar{x}_2 & -\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2} & -\bar{x}_2+\eta \\ 0 & \beta_2\bar{x}_2 & k_2\frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2} & \bar{x}_2-k_2 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczając wielomian charakterystyczny dostajemy

$$P(\lambda)=\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_1 &= k_1-\bar{x}_1+k_2-\bar{x}_2+\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}+\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}>0,\\
a_2 &= (k_1-\bar{x}_1)(k_2-\bar{x}_2)-\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2+(k_1-\bar{x}_1+k_2-\bar{x}_2)\left(\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}+\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}\right)\\
&\quad+\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}\cdot\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}+k_2\frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2}(\bar{x}_2-\eta)+k_1\frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1}(\bar{x}_1-1),\\
a_3 &= \left(\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}+\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}\right)\Big((k_1-\bar{x}_1)(k_2-\bar{x}_2)-\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2\Big)\\
&\quad+k_1\frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1}\left((\bar{x}_1-1)(k_2-\bar{x}_2)+\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2+(\bar{x}_1-1)\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}\right)\\
&\quad+k_2\frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2}\left((k_1-\bar{x}_1)(\bar{x}_2-\eta)+\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2+(\bar{x}_2-\eta)\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}\right)\\
&\quad+(k_1-\bar{x}_1+k_2-\bar{x}_2)\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}\cdot\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2},\\
a_4 &= \frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}\cdot\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}\Big((k_1-\bar{x}_1)(k_2-\bar{x}_2)-\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2\Big)\\
&\quad+k_1\frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1}\frac{\eta\bar{y}_2+C_2}{\bar{x}_2}\Big((\bar{x}_1-1)(k_2-\bar{x}_2)+\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2\Big)\\
&\quad+k_2\frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2}\frac{\bar{y}_1+C_1}{\bar{x}_1}\Big((k_1-\bar{x}_1)(\bar{x}_2-\eta)+\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2\Big)+k_1k_2\frac{\bar{y}_1\bar{y}_2}{\bar{x}_1\bar{x}_2}\Big((\bar{x}_1-1)(\bar{x}_2-\eta)-\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2\Big).
\end{aligned}$$

Zastosujemy kryterium Routha-Hurwitza. Tworzymy macierz pomocniczą

$$M_{RH}=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli macierz ma wszystkie elementy i minory główne dodatnie, to stan E_e jest lokalnie stabilny zgodnie z kryterium. Załóżmy, że wartości C_i są wystarczająco duże, by zachodziły nierówności

$$\bar{y}_1<\frac{C_1-\mu_1}{\mu_1\kappa_1},\qquad \bar{y}_2<\frac{C_2-\mu_2\eta}{\mu_2\kappa_2}. \tag{3.52}$$

Wówczas z równania (3.39) mamy $\bar{x}_1>1$ i $\bar{x}_2>\eta$. Załóżmy, że

$$\beta_1<\min\left\{\frac{k_1-\bar{x}_1}{\bar{x}_1},\frac{\bar{x}_1-1}{\bar{x}_1}\right\},\qquad \beta_2<\min\left\{\frac{k_2-\bar{x}_2}{\bar{x}_2},\frac{\bar{x}_2-\eta}{\bar{x}_2}\right\}. \tag{3.53}$$

Dostajemy wtedy

$$k_1-\bar{x}_1>\beta_1x_1,\quad \bar{x}_1-1>\beta_1x_1,\quad k_2-\bar{x}_2>\beta_2x_2,\quad \bar{x}_2-\eta>\beta_2x_2.$$

Warunki (3.53) są wystarczające, żeby współczynniki a_j, $j=1,2,3,4$, były dodatnie. Minory główne macierzy M_{RH} mają postać

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=a_1a_2-a_3,\quad \Delta_3=a_1a_2a_3-a_3^2-a_4a_1^2,\quad \Delta_4=a_4\left(a_1a_2a_3-a_3^2-a_4a_1^2\right).$$

Analogicznie jak w analizie lokalnej stabilności stanu endemicznego układu (3.3) stwierdzamy, że nierówność

$$a_1 a_2 - a_3 > \frac{a_4 a_1^2}{a_3}, \tag{3.54}$$

przy założeniu spełnienia (3.52) i (3.53), jest warunkiem lokalnej stabilności stanu E_e. Ostatecznie otrzymujemy następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.17. *Jeżeli β_1 i β_2 są wystarczająco małe, tak że zachodzą nierówności* (3.53)*, oraz jeśli C_1 i C_2 są wystarczająco duże, tak że zależności* (3.52) *są spełnione, to dodatni stan stacjonarny E_e układu* (3.36) *istnieje i jest lokalnie stabilny, jeśli zachodzi nierówność* (3.54)*.*

3.2.4 Przypadek bez napływu osób do podpopulacji wysokiego ryzyka

Rozważmy układ (3.36) dla $C_2 = 0$, co obrazuje sytuację, kiedy nie ma napływu osób do podpopulacji wysokiego ryzyka. Ten przypadek można odnieść do rozważanego przykładu epidemii gruźlicy. Wówczas powyższa równość oznacza, że w populacji nie pojawiają się nowi bezdomni. Jest to wyidealizowana sytuacja, do której powinno się dążyć. Należy mieć jednak na uwadze, że choć taki przypadek może zaistnieć, to jest on w rzeczywistości trudny do zrealizowania.

Analiza stanów stacjonarnych układu (3.36) dla $C_2 = 0$ prowadzi do stwierdzenia:

Stwierdzenie 3.18. *Załóżmy, że w układzie* (3.36) *mamy $C_2 = 0$. Jeżeli*

$$C_1 < \mu_1 k_1, \tag{N1}$$

to istnieje tylko jeden stan stacjonarny $E^*_{df} := (\tilde{x}_1, 0, 0, 0)$, gdzie $\tilde{x}_1 = \frac{C_1}{\mu_1}$, który jest lokalnie stabilny. Jeśli zachodzi

$$C_1 > \mu_1 k_1, \tag{P1}$$

to istnieje dodatkowo lokalnie stabilny półdodatni stan stacjonarny

$$E_p := \left(k_1, \frac{C_1 - \mu_1 k_1}{k_1 - 1}, 0, 0\right).$$

Dowód. Zbadajmy najpierw, jak zmieniają się stany stacjonarne, gdy C_2 przyjmuje wartość zero. Stan E_{df} zmienia się w stan E^*_{df}. Sprawdźmy następnie, czy istnieje dodatni stan stacjonarny (x_1, y_1, x_2, y_2). Dodanie do siebie dwóch ostatnich równości z (3.36), gdzie $C_2 = 0$, prowadzi do zależności $\eta y_2 - k_2 y_2 - \mu_2 x_2 = 0$. Ponieważ $k_2 > \eta$, to dla takiego stanu dostajemy

$$x_2 = -\frac{y_2(k_2 - \eta)}{\mu_2} < 0,$$

co oznacza, że dodatni stan stacjonarny nie istnieje dla $C_2 = 0$.

Rozważmy teraz półdodatni stan stacjonarny E_p postaci $(x_p, y_p, 0, 0)$ dla $x_p > 0$ i $y_p > 0$. Z równania (3.36b) dostajemy $x_p = k_1$ i z (3.36a) mamy $y_p = \frac{C_1 - \mu_1 k_1}{k_1 - 1}$. Z ostatniej równości wynika, że stan E_p istnieje tylko wtedy, gdy (P1).

Przejdźmy teraz do analizy lokalnej stabilność stanów E^*_{df} i E_p. Zauważmy, że postać macierzy Jacobiego J_{F-V}, której postać podano na stronie 105, nie zmienia się dla $C_2 = 0$ w porównaniu do przypadku $C_2 > 0$. Można stwierdzić zatem, że dla stanu E^*_{df} mamy trzy ujemne wartości własne równe $-\mu_1$, $-\mu_2$ i $-k_2$, podczas gdy wartość własna równa $\tilde{x}_1 - k_1$ jest ujemna przy założeniu (N1).

Dla stanu E_p dostajemy macierz Jacobiego

$$J(E_p) = \begin{pmatrix} -y_p - \mu_1 & -k_1 + 1 & 0 & -\beta_1 k_1 \\ y_p & 0 & 0 & \beta_1 k_1 \\ 0 & 0 & -\beta_2\ y_p - \mu_2 & \eta \\ 0 & 0 & \beta_2 y_p & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$P(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda),$$

gdzie

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\,(y_p + \mu_1) + y_p\,(k_1 - 1)\,,$$
$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\,(\beta_2 y_p + \mu_2 + k_2) + k_2\,(\beta_2 y_p + \mu_2) - \beta_2 y_p \eta.$$

Wielomian P_1 ma albo dwa rzeczywiste pierwiastki ujemne, albo dwa zespolone pierwiastki z ujemną częścią rzeczywistą. Ponieważ zachodzi $k_2 > \eta$, to $k_2\,(\beta_2 y_p + \mu_2) - \beta_2 y_p \eta = \beta_2 y_p (k_2 - \eta) + \mu_2 k_2 > 0$. Stąd wynika, że wielomian P_2 ma takie same własności jak P_1. Oznacza to, że macierz $J(E_p)$ ma cztery wartości własne z ujemnymi częściami rzeczywistymi, czyli stan E_p jest zawsze lokalnie stabilny, o ile istnieje. □

3.2.5 Bifurkacja nadkrytyczna

W tej części rozdziału współczynnik odnowienia $\mathcal{R}_0$ będzie traktowany jako parametr bifurkacyjny. Zbadamy zachowanie rozwiązań blisko progu $\mathcal{R}_0 = 1$. Jak wykazaliśmy wcześniej, stan wolny od epidemii jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeśli $\mathcal{R}_0 < 1$ i niestabilny, gdy $\mathcal{R}_0 > 1$. W ogólności, w układach modelujących epidemię występują dwie różne bifurkacje dla $\mathcal{R}_0 = 1$: nadkrytyczna (w przód) i podkrytyczna (w tył).

Bifurkacja nadkrytyczna występuje, gdy nie ma endemicznego stanu stacjonarnego blisko lokalnie asymptotycznie stabilnego stanu wolnego od epidemii dla $\mathcal{R}_0 < 1$. Jeżeli natomiast $\mathcal{R}_0 > 1$, to pojawiają się lokalnie stabilne endemiczne stany stacjonarne.

Z drugiej strony, bifurkacja podkrytyczna zachodzi, gdy endemiczny stan stacjonarny istnieje dla $\mathcal{R}_0 < 1$ i stan wolny od choroby może istnieć dla $\mathcal{R}_0 > 1$. Oznacza to, że obniżanie $\mathcal{R}_0$ poniżej 1 jest niewystarczające, aby zapewnić wyeliminiowanie epidemii. Ten typ bifurkacji pozwala na zwielokrotnienie stabilnych stanów stacjonarnych z ustalonymi parametrami. Ponadto, duże zmiany zachowań stanów stacjonarnych mogą powstać na skutek małej zmiany parametrów [40]. Jednakże, jak wcześniej stwierdziliśmy, dla rozważanego modelu, jeśli istnieje endemiczny stan stacjonarny, to stan wolny od choroby traci stabilność. W związku z tym w naszym przypadku nie występuje bifurkacja w tył dla $\mathcal{R}_0 < 1$.

Stosując twierdzenie o rozmaitości centralnej na podstawie [39] zbadamy istnienie i lokalną stabilność endemicznego stanu stacjonarnego blisko progu $\mathcal{R}_0 = 1$. Najpierw wprowadźmy potrzebne oznaczenia.

Ponieważ współczynnik $\mathcal{R}_0$, ze względu na możliwą złożoną postać, często jest niewygodny do bezpośredniego stosowania jako parametr bifurkacyjny, wprowadza się parametr bifurkacyjny ξ taki, że zachodzi $\mathcal{R}_0 < 1$ dla $\xi < 0$ i $\mathcal{R}_0 > 1$ dla $\xi > 0$.

Będziemy rozważać układ

$$\dot{z} = f(z, \xi), \tag{3.55}$$

gdzie $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ definiujemy tak samo jak w (3.43), przy czym dodatkowo zakładamy, że f jest różniczkowalna co najmniej dwukrotnie ze względu na z i ξ.

Niech macierz Jacobiego układu (3.55) dla stanu wolnego od epidemii z_0 ma jednokrotną wartość własną (to założenie wystąpi w lemacie przytoczonym poniżej). Wówczas tworzymy lewy i prawy wektor własny stowarzyszony z tą wartością własną. Oznaczmy je odpowiednio przez v i u. Wektory te wybieramy tak, by było spełnione $vu = 1$. Defniujemy wówczas

$$a := \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, j_3 = 1}^{n} v_{j_1} u_{j_2} u_{j_3} \frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial z_{j_2} \partial z_{j_3}}(z_0, 0) \tag{3.56}$$

oraz

$$b := \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} v_{j_1} u_{j_2} \frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial z_{j_2} \partial \xi}(z_0, 0). \tag{3.57}$$

Teraz przedstawimy twierdzenie w postaci lematu pomocniczego (bez dowodu, który można znaleźć w [39]) potrzebnego do dowodu kolejnego twierdzenia.

Lemat 3.19. *Rozważmy model transmisji choroby* (3.55) *z funkcją $f(z, \xi)$ spełniającą założenia $I - V$ oraz parametrem ξ. Załóżmy, że zerowa wartość własna macierzy Jacobiego układu* (3.55) *dla stanu wolnego od epidemii z_0 jest jednokrotna. Niech a i b bedą zdefiniowane jak w odpowiednio* (3.56) *i* (3.57) *oraz niech $b \neq 0$. Istnieje wówczas $\delta > 0$ taka, że*

- *jeśli $a < 0$, to istnieją lokalnie asymptotycznie stabilne endemiczne stany stacjonarne blisko stanu z_0 dla $0 < \xi < \delta$,*
- *jeśli $a > 0$, to istnieją niestabilne endemiczne stany stacjonarne blisko stanu z_0 dla $-\delta < \xi < 0$.*

Znak parametru a determinuje zatem zachowanie stanu endemicznego blisko punktu bifurkacyjnego.

Teraz sformułujmy twierdzenie w kontekście naszych rozważań. Aby zachować zgodność oznaczeń z [39], będziemy analizować układ postaci (3.45).

Twierdzenie 3.20. *Rozważamy układ* (3.45) *dla warunku* (N). *Przy przekraczeniu przez $\mathcal{R}_0$ wartości* 1 *stan wolny od choroby z_0 traci lokalną stabilność, pojawiają się zaś lokalnie asymptotycznie stabilne endemiczne stany stacjonarne.*

Dowód. Przyjrzyjmy się najpierw wartościom własnym macierzy $J_{F-V}(z_0)$ opisanej wzorem (3.47). Zauważmy, że dla $\mathcal{R}_0 = 1$ dostajemy warunek

$$(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) = \beta_1 \beta_2 C_1 C_2.$$

Wówczas z (3.50) dostajemy

$$\Upsilon = \Big(k_1 - \tilde{x}_1 + (k_2 - \tilde{x}_2)\Big)^2,$$

natomiast z (3.49) mamy

$$\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \cdot \Big(k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2 \pm |k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2|\Big).$$

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że powyższe wyrażenie w module jest dodatnie (założenie o ujemnym znaku nie wpływa na dalsze rozumowanie). Wówczas

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -(k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2).$$

Jeśli zachodzi (N), to $\lambda_4 < 0$. Pozostałe wartości własne z (3.48) nie zmieniają się. Stwierdzamy więc, że dla $\mathcal{R}_0 = 1$ oraz (N) macierz $J_{F-V}(z_0)$ ma jednokrotną zerową wartość własną.

Niech $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ i $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ będą odpowiednio lewym oraz prawym wektorem własnym odnoszącym się do otrzymanej zerowej wartości własnej. Przyjmujemy, że $vu = 1$. Przy tak zdefiniowanych wektorach otrzymujemy

$$(J(z_0) - \lambda \mathbb{I})\, u = 0 \quad \text{i} \quad \big(J(z_0)^T - \lambda \mathbb{I}\big)\, v = 0.$$

Jeśli $\mathcal{R}_0 = 1$, to mamy jednokrotną zerową wartość własną i oba powyższe równania można zapisać jako układ równań niezależnych. Z obliczeń wynika, że wektory v i u mogą być wybrane jako

$$v = \left(v_1, v_1 \frac{\mu_2(\mu_1 k_1 - C_1)}{\beta_2 C_2 \mu_1}, 0, 0\right)^T,$$
$$u = \left(u_1, u_1 \frac{\beta_2 C_2}{\mu_2 k_2 - C_2}, -u_1 \frac{k_1 - 1}{\mu_1}, -u_1 \frac{\beta_2 C_2 (k_2 - \eta)}{\mu_2(\mu_2 k_2 - C_2)}\right)^T,$$

gdzie $v_1, u_1 > 0$ dobieramy tak, by $vu = 1$. Zauważmy, że zachodzą nierówności $k_1 > 1$, $k_2 > \eta$ oraz (N), jeśli $\mathcal{R}_0 = 1$. Ostatecznie stwierdzamy, że

$$v_1, v_2, u_1, u_2 > 0, \quad u_3, u_4 < 0. \tag{3.58}$$

Niech ξ będzie parametrem bifurkacyjnym takim, że $\mathcal{R}_0 < 1$ dla $\xi < 0$ i $\mathcal{R}_0 > 1$ dla $\xi > 0$. Rozważmy układ $z' = f(z, \xi)$, gdzie $f = f(z, \xi)$ jest prawą stroną układu (3.45). W (3.56) drugie pochodne f_1 i f_2 oprócz

$$\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1 \partial x_1}\right|_{(z_0,0)} = 1, \qquad \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_2 \partial x_1}\right|_{(z_0,0)} = \beta_1, \qquad \left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1 \partial x_2}\right|_{(z_0,0)} = \beta_2, \qquad \left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_2 \partial x_2}\right|_{(z_0,0)} = 1$$

są równe zero. Wartości pochodnych f_3 i f_4 nie są istotne, ponieważ $v_3 = v_4 = 0$.

Stąd mamy

$$a = v_1u_3(u_1 + u_2\beta_1) + v_2u_4(u_1\beta_2 + u_2),$$

natomiast z (3.58) dostajemy $a < 0$.

Teraz zajmijmy się wyznaczeniem wartości parametru b. W tym celu podajmy najpierw dokładną wartość parametru bifurkacyjnego ξ. W celu znalezienia tej wartości porównujemy prawą stronę definicji (3.46) do 1. Widzimy, że warunek $\mathcal{R}_0 = 1$ jest spełniony dla równości

$$(\mu_1k_1 - C_1)(\mu_2k_2 - C_2) = \beta_1\beta_2C_1C_2,$$

z której otrzymujemy

$$\xi = (\mu_1k_1 - C_1)(\mu_2k_2 - C_2) - \beta_1\beta_2C_1C_2. \tag{3.59}$$

Oczywiście zachodzi $\mathcal{R}_0 < 1$ dla $\xi < 0$ oraz $\mathcal{R}_0 > 1$ dla $\xi > 0$.

Pochodną po ξ definiujemy jako

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{2}\Bigg(k_i(\mu_{3-i}k_{3-i} - C_{3-i})\frac{\partial}{\partial\mu_i} + \mu_i(\mu_{3-i}k_{3-i} - C_{3-i})\frac{\partial}{\partial k_i} - (\mu_{3-i}k_{3-i} - C_{3-i} + \beta_i\beta_{3-i}C_{3-i})\frac{\partial}{\partial C_i} - \beta_{3-i}C_iC_{3-i}\frac{\partial}{\partial\beta_i}\Bigg).$$

W kontekście rozważanego przez nas układu ze wzoru (3.57) dostajemy zależność

$$b = \sum_{j,k=1}^{4} v_ju_k\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_k\partial\xi}(z_0, 0).$$

Z obliczeń otrzymuje się tylko sześć (trzy symetryczne pary) niezerowych drugich pochodnych:

$$\left.\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_i\partial\xi}\right|_{(z_0,0)} = -\frac{1}{\mu_i\left(\mu_{3-i}k_{3-i} - C_{3-i}\right)},$$

$$\left.\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{3-i}\partial\xi}\right|_{(z_0,0)} = -\frac{1}{\mu_i\beta_{3-i}C_{3-i}}, \qquad \left.\frac{\partial^2 f_{5-i}}{\partial y_i\partial\xi}\right|_{(z_0,0)} = \frac{1}{\mu_{3-i}\beta_iC_i}.$$

Parametr b wynosi

$$b = -\left(\frac{v_1u_1}{\mu_1(\mu_2k_2 - C_2)} + \frac{v_1u_2}{\mu_1\beta_2C_2} + \frac{v_2u_1}{\mu_2\beta_1C_1} + \frac{v_2u_2}{\mu_2(\mu_1k_1 - C_1)}\right).$$

Stwierdzamy, że $b < 0$, o ile zachodzi (N), można więc skorzystać z lematu 3.19 dla przypadku $a < 0$. Ponadto zauważmy, że punkty z_0 oraz E_{df} są tożsame, dlatego można oprzeć się na wynikach analizy stabilności dla stanu E_{df}. □

Twierdzenie 3.20 mówi, że dla (N) istnieje zbiór ponadprogowych endemicznych stanów stacjonarnych i występuje bifurkacja nadkrytyczna dla $\mathcal{R}_0 = 1$.

3.2.6 Globalna stabilność stanów stacjonarnych modelu krzyżowego

Przejdziemy teraz do zbadania globalnej stabilności stanów stacjonarnych układu (3.36). Na początku skupmy się na stanie wolnym od epidemii E_{df}.

Globalna stabilność stanu wolnego od epidemii

Tak jak w przypadku endemicznego stanu stacjonarnego układu (1.14), w dowodzie globalnej stabilności stanu E_{df} układu (3.36) można zdefiniować odpowiednią funkcję Lapunowa. Dowód z wykorzystaniem tej funkcji można znaleźć w dodatku B. Tutaj skorzystamy z koncepcji przedstawionej w [64].

Najpierw przedstawmy potrzebne oznaczenia. Wprowadzamy $\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$ oraz $\mathcal{X}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, gdzie $\mathcal{X}_1$ obrazuje liczebność każdej z n_1 grup złożonych wyłącznie z osób niezainfekowanych, natomiast $\mathcal{X}_2$ mówi

o liczebności każdej z n_2 grup, którą tworzą tylko zainfekowane osobniki. Zdefinujmy też $\mathcal{X} := (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ oraz $\mathcal{X}^* := (\mathcal{X}_1^*, 0)$, co odpowiada stanowi wolnemu od epidemii.

Rozważamy układ:

$$\dot{\mathcal{X}}_1 = \mathbb{M}_1(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X}_1 + \mathbb{M}_2(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X}_2, \tag{3.60a}$$

$$\dot{\mathcal{X}}_2 = \mathbb{M}(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{X}_2, \tag{3.60b}$$

gdzie $\mathbb{M}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbb{M}_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ oraz $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ są macierzami związanymi z procesami zachodzącymi w populacji. Układ rozważany jest na dodatnio niezmienniczym zbiorze $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}_+^{n_1+n_2}$.

Teraz przedstawmy założenia potrzebne do lematu.

A Układ (3.60) jest określony na dodatnio niezmiennyczym zbiorze $\overline{\Omega}$ zlokalizowanym w nieujemnym ortancie (przez ortant rozumiemy uogólnienie ćwiartki dwuwymiarowego układu współrzędnych na wyższe wymiary); trajektorie układu (3.60) są ograniczone z góry.

B Podukład $\dot{\mathcal{X}}_1 = \mathbb{M}_1(\mathcal{X}_1, 0) \cdot \mathcal{X}_1$ ma globalnie asymptotycznie stabilny stan stacjonarny $\mathcal{X}_1^*$ w kanonicznym rzucie przestrzeni $\overline{\Omega}$ na $\mathbb{R}_+^{n_1}$.

C Dla dowolnego $\mathcal{X} \in \overline{\Omega}$ macierz $\mathbb{M}$ jest nieredukowalna oraz elementy macierzy $\mathbb{M}$ poza główną przekątną są nieujemne.

D Istnieje macierz $\widehat{\mathbb{M}}$ będąca górnym ograniczeniem macierzy $\mathbb{M}$ określona na zbiorze ilorazowym $\mathcal{M} := \{\mathbb{M}(x_1, x_2, y_1, y_2)/(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \overline{\Omega}\}$ taka, że zachodzi:

- albo $\widehat{\mathbb{M}} \notin \mathcal{M}$,
- albo jeśli $\widehat{\mathbb{M}} \in \mathcal{M}$ (to znaczy $\widehat{\mathbb{M}} = \max_{\overline{\Omega}} \mathcal{M}$), to dla dowolnego $\overline{\mathcal{X}} \in \overline{\Omega}$ takiego, że $\widehat{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(\overline{\Omega})$, mamy $\overline{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}_+^{n_1} \times \{0\}$ (inaczej można powiedzieć, że punkty, dla których osiąga się maksimum zbioru $\mathcal{M}$, są zawarte w podrozmaitości obrazującej brak epidemii).

E Maksymalna wartość własna macierzy $\widehat{\mathbb{M}}$ jest nieujemna.

Powyższe założenia uwzględnione są w twierdzeniu 4.3 z [64], dowód tam zamieszczony został pominięty w rozprawie. Przedstawimy to twierdzenie jako lemat pomocniczy.

Lemat 3.21. *Jeśli spełnione są założenia A – E, to stan wolny od epidemii układu* (3.60) *jest globalnie asymptotycznie stabilny w* $\overline{\Omega}$.

Teraz w kontekście naszych rozważań sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 3.22. *Stan stacjonarny wolny od epidemii* E_{df} *układu* (3.36) *jest globalnie asymptotycznie stabilny w* Ω *przy spełnieniu nierówności*

$$\begin{aligned} C_i &\leq \mu_i k_i, \\ \beta_1 \beta_2 C_1 C_2 &\leq (C_1 - \mu_1 k_1)(C_2 - \mu_2 k_2). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Dowód. Sprawdźmy najpierw, czy założenia A – E są spełnione. W dowodzie przyjmujemy $\overline{\Omega} = \Omega$. Istnienie i własności niezmienniczego zbioru (3.38) układu (3.36) implikują spełnienie założenia A. Teraz ze względu na zmienne x_i wyróżnijmy w układzie (3.36) podukłady

$$x_1' = C_1 - \mu_1 x_1, \tag{3.62a}$$

$$x_2' = C_2 - \mu_2 x_2. \tag{3.62b}$$

Każdy z podukładów (3.62a) i (3.62b) ma stan stacjonarny odpowiednio $x_1 = \widehat{x}_1$ i $x_2 = \widehat{x}_2$. Łatwo pokazać, że para stanów $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ jest globalnie asymptotycznie stabilna w przestrzeni

$$\Omega_p = \left\{ (x_1, x_2) : \; x_i \in \left[\frac{C_i}{\alpha_i + \mu_i}, \frac{C_i}{\mu_i} \right] \right\},$$

która stanowi kanoniczny rzut Ω na $\mathbb{R}_+^2$. Stąd spełnione jest założenie B.

Przejdźmy do analizy założenia C. Z układu (3.36) wyodrębnijmy podukład

$$y_1' = x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - (1 + \alpha_1 + \mu_1) y_1,$$
$$y_2' = x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - (\eta_2 + \alpha_2 + \mu_2) y_2,$$

który można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbb{M}(x_1, x_2, y_1, y_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - k_1 & \beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 & x_2 - k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zwrócmy uwagę, że dla dowolnych $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Omega$ elementy macierzy $\mathbb{M}$ poza główną przekątną macierzy są nieujemne i wówczas $\mathbb{M}$ jest nieredukowalna. Obie wspomniane własności macierzy $\mathbb{M}$ gwarantują spełnienie warunku C.

Przejdźmy do omówienia założenia D. Dla dowolnych $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Omega$ istnieje górne ograniczenie macierzy $\mathbb{M}$ postaci

$$\widehat{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - k_1 & \beta_1 \tilde{x}_1 \\ \beta_2 \tilde{x}_2 & \tilde{x}_2 - k_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_i = \frac{C_i}{\mu_i}, \quad i = 1, 2.$$

Zauważmy, że podana macierz jest elementem maksymalnym zbioru ilorazowego $\{\mathbb{M}(x_1, x_2, y_1, y_2)/(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Omega\}$. Co więcej, własność

$$\widehat{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(x) \tag{3.63}$$

jest spełniona tylko wtedy, gdy $x = \left(\frac{C_1}{\mu_1}, 0, \frac{C_2}{\mu_2}, 0\right)$ (w ogólnym przypadku powyższa zależność ma być spełniona dla x takich, które są stanami wolnymi od epidemii). Ostatecznie stwierdzamy, że spełniony jest warunek D.

Wykażemy teraz, że spełnione jest założenie E. Największa wartość własna macierzy $\widehat{\mathbb{M}}$ wynosi

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1 - k_1 + \tilde{x}_2 - k_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\tilde{x}_1 - k_1 + \tilde{x}_2 - k_2)^2 - 4\Big((\tilde{x}_1 - k_1)(\tilde{x}_2 - k_2) - \beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2\Big)}.$$

Warunki niedodatniości $\lambda_{\max}$ przyjmują postać

$$\tilde{x}_i \le k_i,$$
$$\beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \le (\tilde{x}_1 - k_1)(\tilde{x}_2 - k_2),$$

co można zapisać w postaci zależności (3.61), więc spełnione jest założenie E. Na mocy lematu 3.21 stwierdzamy zatem, że stan wolny od epidemii układu (3.36) jest globalnie asympotycznie stabilny, o ile zachodzą nierówności (3.61). □

Powiążmy jeszcze stabilność stanu wolnego od epidemii ze współczynnikiem odnowienia, jak to zostało uwzględnione we wniosku 4.4 w [64], który przedstawimy również w postaci lematu pomocniczego. Dowód wniosku znajduje się w [64].

Lemat 3.23. *Niech będą spełnione założenia lematu 3.21 i niech zachodzi* $\widehat{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(\mathcal{X}_1^*, 0)$. *Wtedy stan stacjonarny wolny od epidemii układu* (3.60) *jest globalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik odnowienia w układzie* (3.60) *jest mniejszy bądź równy* 1.

Zauważmy, że zachodzi zależność

$$\widehat{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(E_{df}). \tag{3.64}$$

Tutaj, w przeciwieństwie do (3.63), równość ma być spełniona tylko dla tego stanu wolnego od epidemii, który występuje w twierdzeniu 3.22. Skoro zachodzą równość (3.64) oraz twierdzenie 3.22, to na podstawie lematu 3.23 możemy stwierdzić, że

Stwierdzenie 3.24. *Stan stacjonarny wolny od epidemii* E_{df} *układu* (3.36) *jest globalnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{R}_0 \le 1$.

Oznacza to, że warunki (3.61) są równoważne nierówności $\mathcal{R}_0 \le 1$.

Zwróćmy uwagę, że w równoważności ze stwierdzenia 3.24 dopuszczalny jest przypadek $C_i = \mu_i k_i$. Spełnienie co najmniej jednej z tych równości odpowiada przypadkowi $\mathcal{R}_0 = 1$. Wówczas co najmniej jeden ze współczynników β_1 lub β_2 wynosi zero, co stoi w sprzeczności z założeniem modelu krzyżowego. Należy podkreślić, że podejście z [64] można stosować nie tylko w modelach krzyżowych, ale też w takich, gdzie dynamika krzyżowa nie występuje lub jest niepełna (to znaczy, gdy tylko jeden ze wspomnianych współczynników wynosi zero).

Globalna stabilność stanu endemicznego

Przejdźmy teraz do stanu endemicznego E_e i określmy warunki jego globalnej stabilności. Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 3.25. *Endemiczny stan układu* (3.36) *jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeśli spełnione są warunki jego istnienia (twierdzenie 3.13) oraz jeśli spełnione są nierówności:*

$$\mu_1\left(\alpha_1+\mu_1+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}\right)-\left(\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)y_2}{2y_1}\right)^2>0, \tag{3.65}$$

$$\mu_2\left(\alpha_2+\mu_2+\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1\bar{x}_2}{y_2\bar{y}_2}\right)-\left(\frac{\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)y_1}{2y_2}\right)^2>0 \tag{3.66}$$

dla

$$y_i\in\left[\frac{C_i}{\alpha_i+\mu_i}-k_i \quad ,\frac{C_i}{\mu_i}\right]. \tag{3.67}$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcję Lapunowa:

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2,y_1,y_2):=&\frac{1}{2}\left(x_1-\bar{x}_1+y_1-\bar{y}_1\right)^2+\frac{1}{2}\left(x_2-\bar{x}_2+y_2-\bar{y}_2\right)^2\\&+(\alpha_1+2\mu_1)\left(y_1-\bar{y}_1-\bar{y}_1\ln\frac{y_1}{\bar{y}_1}\right)+(\alpha_2+2\mu_2)\left(y_2-\bar{y}_2-\bar{y}_2\ln\frac{y_2}{\bar{y}_2}\right).\end{aligned}$$

Z postaci tej funkcji wynika, że $V(x_1,x_2,y_1,y_2)$ jest nieujemna dla wszystkich $x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0$. Ponadto stwierdzamy, że $V(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1,x_2,y_1,y_2)=(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{x}_2,\bar{y}_2)$.

Zauważmy, że po dodaniu równań (3.36a) i (3.36c) lub (3.36b) i (3.36d) dla stanu E_e otrzymujemy

$$C_i=-\mu_i\bar{x}_i+(\alpha_i+\mu_i)\bar{y}_i.$$

Po dodaniu stronami wyrażenia $-(\alpha_i+\mu_i)y_i-\mu_i x_i$ do powyższego równania uzyskujemy równość

$$C_i-(\alpha_i+\mu_i)y_i-\mu_i x_i=-\mu_i(x_i-\bar{x}_i)-(\alpha_i+\mu_i)(y_i-\bar{y}_i). \tag{3.68}$$

Ponadto dla stanu E_e z równania (3.36b) dostajemy

$$(k_1-\bar{x}_1)\bar{y}_1=\beta_1\bar{x}_1\bar{y}_2 \quad\Rightarrow\quad k_1-\bar{x}_1=\beta_1\frac{\bar{x}_1\bar{y}_2}{\bar{y}_1}. \tag{3.69}$$

Analogicznie z równania (3.36d) mamy

$$k_2-\bar{x}_2=\beta_2\frac{\bar{x}_2\bar{y}_1}{\bar{y}_2}.$$

Obliczmy pochodną funkcji V wzdłuż trajektorii układu (3.36). Uzyskujemy

$$\begin{aligned}V'=&\left(x_1-\bar{x}_1+y_1-\bar{y}_1\right)\Big(C_1-(\alpha_1+\mu_1)y_1-\mu_1x_1\Big)+\left(x_2-\bar{x}_2+y_2-\bar{y}_2\right)\Big(C_2-(\alpha_2+\mu_2)y_2-\mu_2x_2\Big)\\&+(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_1-\bar{y}_1}{y_1}\Big(y_1(x_1-k_1)+\beta_1x_1y_2\Big)+(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_2-\bar{y}_2}{y_2}\Big(y_2(x_2-k_2)+\beta_2x_2y_1\Big).\end{aligned}$$

Podstawiając (3.68) do dwóch pierwszych składników powyższej sumy dostajemy

$$\begin{aligned}V'=&\left(x_1-\bar{x}_1+y_1-\bar{y}_1\right)\Big(-\mu_1(x_1-\bar{x}_1)-(\alpha_1+\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)\Big)\\&+\left(x_2-\bar{x}_2+y_2-\bar{y}_2\right)\Big(-\mu_2(x_2-\bar{x}_2)-(\alpha_2+\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)\Big)\\&+(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_1-\bar{y}_1}{y_1}\Big(y_1(x_1-k_1)+\beta_1x_1y_2\Big)+(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_2-\bar{y}_2}{y_2}\Big(y_2(x_2-k_2)+\beta_2x_2y_1\Big).\end{aligned}$$

Rozpiszmy powyższą równość w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
V' = &-\mu_1(x_1-\bar{x}_1)^2-\mu_2(x_2-\bar{x}_2)^2-(\alpha_1+\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)^2-(\alpha_2+\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)^2\\
&-(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)(x_1-\bar{x}_1-x_1+k_1)+(\alpha_1+2\mu_1)\beta_1\frac{x_1y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1)\\
&-(\alpha_2+2\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)(x_2-\bar{x}_2-x_2+k_2)+(\alpha_2+2\mu_2)\beta_2\frac{x_2y_1}{y_2}(y_2-\bar{y}_2)\\
= &-\mu_1(x_1-\bar{x}_1)^2-\mu_2(x_2-\bar{x}_2)^2-(\alpha_1+\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)^2-(\alpha_2+\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)^2\\
&-(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)(k_1-\bar{x}_1)+(\alpha_1+2\mu_1)\beta_1\frac{x_1y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1)\\
&-(\alpha_2+2\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)(k_2-\bar{x}_2)+(\alpha_2+2\mu_2)\beta_2\frac{x_2y_1}{y_2}(y_2-\bar{y}_2).
\end{aligned}$$

Rozważmy wyrażenie

$$-(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)(k_1-\bar{x}_1)+(\alpha_1+2\mu_1)\beta_1\frac{x_1y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1), \tag{3.70}$$

które przedstawimy w sposób przydatny do dalszych rozważań. Korzystajac z (3.69) zapisujemy

$$\begin{aligned}
&-(\alpha_1+2\mu_1)(k_1-\bar{x}_1)(y_1-\bar{y}_1)+(\alpha_1+2\mu_1)\beta_1\frac{x_1y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1)\\
=&-(\alpha_1+2\mu_1)\beta_1\frac{\bar{x}_1\bar{y}_2}{\bar{y}_1}(y_1-\bar{y}_1)+(\alpha_1+2\mu_1)\beta_1\frac{x_1y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1)\\
=&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_1-\bar{y}_1}{y_1\bar{y}_1}\left(\bar{x}_1\bar{y}_2y_1-x_1y_2\bar{y}_1\right).
\end{aligned}$$

Dodajmy $-\bar{x}_1y_1y_2+\bar{x}_1y_1y_2$ do ostatniego czynnika w ostatnim wyrażeniu, przez co jego wartość nie zmieni się. Dostajemy

$$\begin{aligned}
&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)\frac{\bar{x}_1\bar{y}_2y_1-\bar{x}_1y_1y_2+\bar{x}_1y_1y_2-x_1y_2\bar{y}_1}{y_1\bar{y}_1}\\
=&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)\left(\frac{\bar{x}_1(\bar{y}_2-y_2)}{\bar{y}_1}-\frac{y_2(\bar{x}_1y_1-x_1\bar{y}_1)}{y_1\bar{y}_1}\right)\\
=&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)\left((\bar{y}_2-y_2)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}-\frac{y_2(\bar{x}_1y_1-\bar{x}_1\bar{y}_1+\bar{x}_1\bar{y}_1-x_1\bar{y}_1)}{y_1\bar{y}_1}\right)\\
=&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)\left((\bar{y}_2-y_2)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}-y_2\frac{\bar{x}_1(y_1-\bar{y}_1)-\bar{y}_1(x_1-\bar{x}_1)}{y_1\bar{y}_1}\right)\\
=&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}(y_1-\bar{y}_1)(\bar{y}_2-y_2)-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}(y_1-\bar{y}_1)^2\\
&+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1)(x_1-\bar{x}_1).
\end{aligned}$$

Analogicznie można przekształcić wyrażenie

$$-(\alpha_2+2\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)(k_2-\bar{x}_2)+(\alpha_2+2\mu_2)\beta_2\frac{x_2y_1}{y_2}(y_2-\bar{y}_2), \tag{3.71}$$

żeby uzyskać

$$-\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{\bar{x}_2}{\bar{y}_2}(y_2-\bar{y}_2)(\bar{y}_1-y_1)-\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1\bar{x}_2}{y_2\bar{y}_2}(y_2-\bar{y}_2)^2+\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1}{y_2}(y_2-\bar{y}_2)(x_2-\bar{x}_2).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
V' = &-\mu_1(x_1-\bar{x}_1)^2-\mu_2(x_2-\bar{x}_2)^2-(\alpha_1+\mu_1)(y_1-\bar{y}_1)^2-(\alpha_2+\mu_2)(y_2-\bar{y}_2)^2\\
&-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}(y_1-\bar{y}_1)(\bar{y}_2-y_2)-\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}(y_1-\bar{y}_1)^2\\
&+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2}{y_1}(y_1-\bar{y}_1)(x_1-\bar{x}_1)-\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{\bar{x}_2}{\bar{y}_2}(y_2-\bar{y}_2)(\bar{y}_1-y_1)\\
&-\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1\bar{x}_2}{y_2\bar{y}_2}(y_2-\bar{y}_2)^2+\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1}{y_2}(y_2-\bar{y}_2)(x_2-\bar{x}_2).
\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że dla $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ pochodna V' wynosi zero. Określmy warunki, przy których V' jest ujemna dla dowolnego nieujemnego stanu (x_1, y_1, x_2, y_2). Sprawdzimy równoważny warunek gwarantujący dodatniość wyrażenia $-V'$. Macierz formy kwadratowej $-V'(x_1 - \bar{x}_1, y_1 - \bar{y}_1, x_2 - \bar{x}_2, y_2 - \bar{y}_2)$, oznaczona przez M_V, ma postać

$$M_V = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & -\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)y_2}{2y_1} & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -\frac{\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)y_1}{2y_2} \\ -\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)y_2}{2y_1} & 0 & \alpha_1+\mu_1+m_1\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}(m_1+m_2) \\ 0 & -\frac{\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)y_1}{2y_2} & \frac{1}{2}(m_1+m_2) & \alpha_2+\mu_2+m_2\frac{y_1}{y_2} \end{pmatrix},$$

gdzie

$$m_1 = \beta_1(\alpha_1 + 2\mu_1)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}, \quad m_2 = \beta_2(\alpha_2 + 2\mu_2)\frac{\bar{x}_2}{\bar{y}_2}.$$

Analizując znaki kolejnych minorów wiodących otrzymujemy warunki ujemności formy kwadratowej $V'(x_1 - \bar{x}_1, y_1 - \bar{y}_1, x_2 - \bar{x}_2, y_2 - \bar{y}_2)$:

- z minoru wiodącego pierwszego rzędu: $\mu_1 > 0$ – ten warunek jest zawsze spełniony zgodnie z założeniami modelu,
- z minoru wiodącego drugiego rzędu: $\mu_1\mu_2 > 0$ – również zawsze spełniony,
- z minoru wiodącego trzeciego rzędu:

$$\mu_2\left(\mu_1\left(\alpha_1+\mu_1+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}\right)-\left(\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)y_2}{2y_1}\right)^2\right)>0 \tag{3.72}$$

  dla każdego

$$y_i \in \left[\frac{C_i}{\alpha_i+\mu_i}-k_i, \quad \frac{C_i}{\mu_i}\right],$$

  co można zapisać w postaci jednego warunku

$$\begin{aligned}&\mu_2\left(\mu_1\left(\alpha_1+\mu_1+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}\right)-\left(\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)y_2}{2y_1}\right)^2\right)\\ &>\mu_2\left(\mu_1\left(\alpha_1+\mu_1+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}\frac{\frac{C_2}{\alpha_2+\mu_2}-k_2}{\frac{C_1}{\mu_1}}\right)-\left(\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{C_2}{\mu_2}}{2\left(\frac{C_1}{\alpha_1+\mu_1}-k_1\right)}\right)^2\right)>0,\end{aligned}$$

- z minoru wiodącego czwartego rzędu:

$$\mu_1 q_1 - q_2 > 0, \tag{3.73}$$

  gdzie

$$\begin{aligned}q_1 &= \mu_2\left(\alpha_1+\mu_1+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}\right)\left(\alpha_2+\mu_2+\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1\bar{x}_2}{y_2\bar{y}_2}\right)\\ &\quad-\left(\frac{\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)y_1}{2y_2}\right)^2\left(\alpha_1+\mu_1+\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{y_2\bar{x}_1}{y_1\bar{y}_1}\right)\\ &\quad-\mu_2\left(\frac{1}{2}\left(\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}+\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{\bar{x}_2}{\bar{y}_2}\right)\right)^2,\\ q_2 &= \left(\mu_2\left(\alpha_2+\mu_2+\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)\frac{y_1\bar{x}_2}{y_2\bar{y}_2}\right)-\left(\frac{\beta_2(\alpha_2+2\mu_2)y_1}{2y_2}\right)^2\right)\left(-\frac{\beta_1(\alpha_1+2\mu_1)y_2}{2y_1}\right)^2.\end{aligned}$$

Warunek (3.73) można zapisać za pomocą trzech zależności: (3.65), (3.66) oraz (3.67).

Zawuażmy, że warunki (3.72) oraz (3.65) są równoważne. Ostatecznie otrzymujemy zatem spełnienie tezy postawionej w twierdzeniu. □

Okazuje się, że można zaproponować kolejną funkcję Lapunowa mającą pożądane własności. Jej postać oraz obliczenia z nią związane znajdują się w dodatku C.

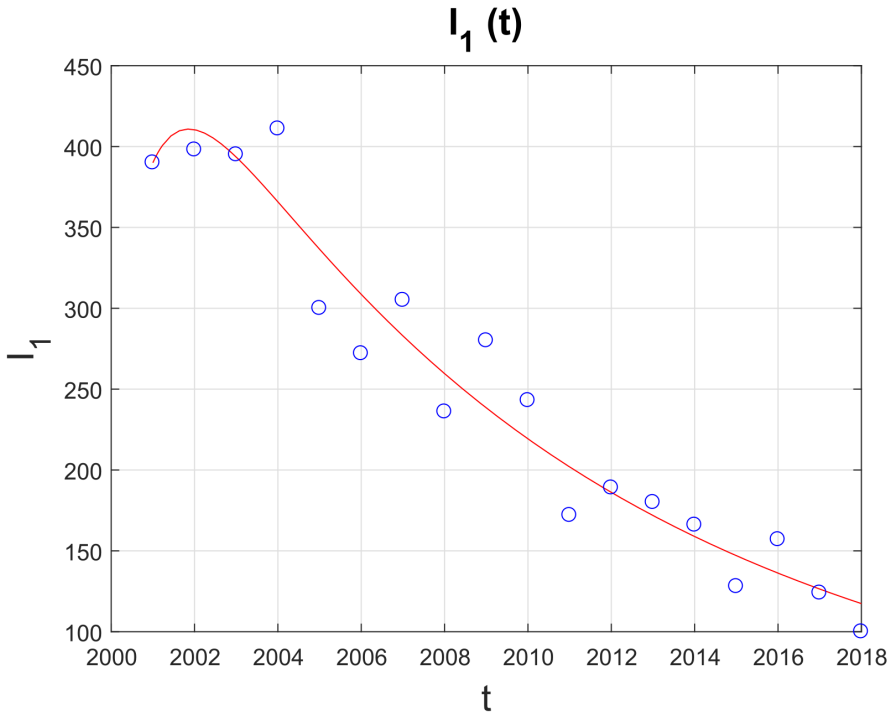
3.2.7 Symulacje numeryczne

Zobrazujmy dynamikę układu (3.35) dla parametrów dopasowanych do danych rzeczywistych. Wartości parametrów użytych w symulacjach przedstawiono w tabeli 3.3.

Tabela 3.3: Wartości parametrów modelu opisywanego układem (3.35). Wartości współczynników transmisji zostały dopasowane, wartości pozostałych parametrów zostały wzięte z [25].

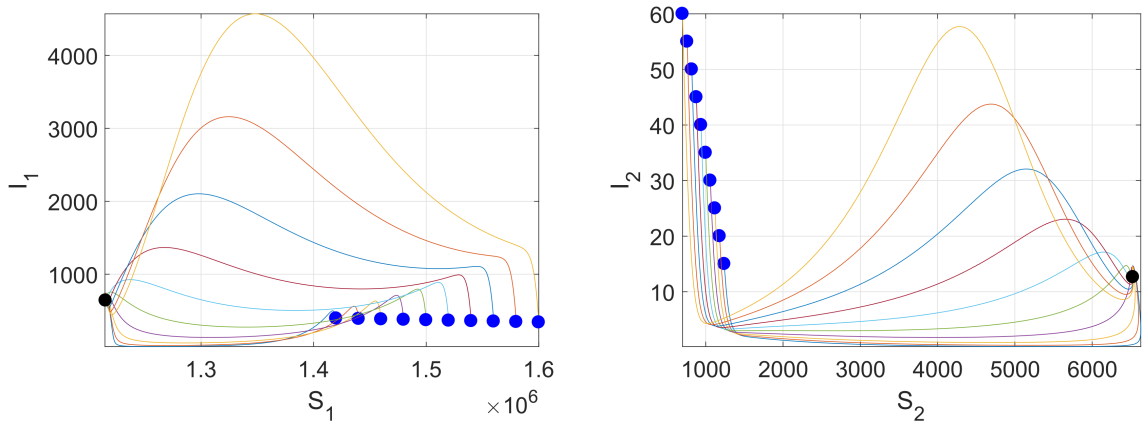
Symbol	Zjawisko opisywane przez współczynnik	Wartość
α_1, α_2	śmierć z powodu choroby	$0,09$
γ_1, γ_2	wyzdrowienie	$0,9$
μ_1, μ_2	śmierć naturalna	$0,009$
C_1	napływ do podpopulacji niebezdomnych	11000
C_2	napływ do podpopulacji bezdomnych	60
β_{11}	transmisja choroby	$6,0827 \cdot 10^{-7}$
β_{12}	transmisja choroby	$1,0830 \cdot 10^{-5}$
β_{21}	transmisja choroby	$3,0208 \cdot 10^{-6}$
β_{22}	transmisja choroby	$5,1231 \cdot 10^{-8}$

W dalszych symulacjach parametry α_1, α_2, γ_1, γ_2, μ_1, μ_2, C_1 i C_2 będą miały tę samą wartość, dlatego nie będą ponownie podawane. Porównanie między danymi rzeczywistymi a symulowanymi zobrazowano na rysunku 3.8.



Rysunek 3.8: Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w przeciągu lat 2001–2018 (liczba osób chorych niebezdomnych). Porównanie między danymi rzeczywistymi a symulowanymi.

Wykresy na rysunku 3.9 przedstawiają portrety fazowe układu (3.35) w podprzestrzeniach fazowych (S_1, I_1) i (S_2, I_2), dla wartości parametrów przedstawionych w tabeli 3.3. W tym przypadku stan wolny od epidemii E_{df} jest globalnie stabilny, endemiczny stan E_e zaś nie istnieje.



(a) (b)

Rysunek 3.9: Portrety fazowe dla układu (3.35) w przestrzeniach fazowych (S_1, I_1) (a) i (S_2, I_2) (b) dla dopasowanych wartości parametrów przedstawionych w tabeli 3.3. Punkty początkowe trajektorii zaznaczono na niebiesko, końcowy – na czarno.

3.3 Dyskusja

W tym rozdziale przedstawiliśmy analizę dwóch modeli krzyżowych rozprzestrzeniania się epidemii w populacji złożonej z dwóch podpopulacji różniących się stopniem ryzyka zachorowalności lub zakażalności (albo tymi dwoma cechami). Obie te podpopulacje nazywamy odpowiednio podpopulacją niskiego i wysokiego ryzyka. Pierwszy z modeli postaci (3.3) zakłada zmienny napływ osobników do populacji. To założenie zostało spełnione poprzez uwzględnienie współczynnika przyrostu netto populacji, który odzwierciedla narodziny, migrację oraz śmierć osobników. Przyjęto, że przyrosty te w obu podpopulacjach przebiegają niezależnie i wzrost lub spadek liczebności podpopulacji są proporcjonalne do tych liczebności. Drugi model, mający postać (3.36), opisuje stały napływ osobników. W modelu tym dla każdej z podpopulacji przyjęto dwa współczynniki, które opisują odpowiednio napływ oraz śmiertelność osobników danej podpopulacji. Oba te procesy odbywają się odrębnie w każdej z podpopulacji. Napływ osobników jest niezależny od liczebności podpopulacji, liczba zmarłych osobników zaś jest proporcjonalna do tej liczebności.

W pierwszym podrozdziale omówiliśmy model (3.3). Stwierdziliśmy, że ten model ma własności maltuzjańskie – dla określonego zbioru parametrów każda z podpopulacji może rozrastać się nieograniczenie lub wymierać. Należy mieć jednak na uwadze, że stosujemy model do przewidywania dynamiki epidemii w krótkim horyzoncie czasowym, zatem wspomniana cecha może być traktowana tylko jako tendencja we wzroście lub spadku rozmiaru populacji. Analizowaliśmy istnienie i stabilność stanów stacjonarnych badanego układu. Przedstawiliśmy dwie wersje modelu – bez oraz z aktywnym wykrywaniem.

W układzie bez aktywnego wykrywania istnieją następujące stany stacjonarne: zerowy (E_0), endemiczny (E_e) i dwa półdodatnie (E_1 i E_2), które odnoszą się do przypadku ekstynkcji jednej z podpopulacji. Włączanie aktywnego wykrywania wyklucza istnienie stanów E_0 i E_1, ale nie eliminuje maltuzjańskiej natury modelu.

Rozważmy teraz model opisany układem (3.3) dla populacji niejednorodnej i dwa modele dla odseparowanych podpopulacji jednorodnych, to jest przypadek gdy $\beta_1 = \beta_2 = 0$. W tym celu odniesiemy się do układu (1.3) dla pierwszej podpopulacji z parametrami α_1 i A_1, a dla drugiej z parametrami α_2 i A_2, przy czym występuje dodatkowo współczynnik η_i przy y_i w drugim składniku sumy w prawej stronie równania (1.3a).

Z analizy przeprowadzonej w paragrafie 1.1.2 wynika, że dla modeli dla odseparowanych podpopulacji warunkami istnienia i stabilności dodatnich stanów stacjonarnych są nierówności $0 < A_i < \alpha_i$. Należy podkreślić, że chociaż te warunki gwarantują istnienie i stabilność dodatnich stanów stacjonarnych dla podpopulacji rozpatrywanych oddzielnie, to nie gwarantują one istnienia dodatniego stanu dla populacji niejednorodnej.

Rysunek (3.2) przedstawia diagram bifurkacyjny, gdzie A_1 i A_2 są traktowane jako parametry bifurkacyjne. Zauważmy, że dodatni stan E_e istnieje tylko w regionie III, podczas gdy oba dodatnie stany układu (1.3) dla odseparowanych podpopulacji istnieją i są stabilne w każdym z regionów I, II i III. Rysunki 3.5a i 3.5b ilustrują portrety fazowe układu (3.3) dla ustalonych wartości parametrów gwarantujących, że dodatni stan stacjonarny E_e nie istnieje, natomiast półdodatni stan E_2 istnieje i jest stabilny. Dla tych samych wartości parametrów dodatnie stany stacjonarne odpowiadające odseparowanym podpopulacjom istnieją i są stabilne. Odpowiednie portrety fazowe przedstawiono na rysunkach 3.5c i 3.5d. Można stwierdzić zatem, że dynamika modelu krzyżowego różni się od dynamiki odpowiednich modeli dla odseparowanych podpopulacji. W przypadku podpopulacji rozpatrywanych oddzielnie, obie te podpopulacje mogą istnieć, podczas gdy w przypadku uwzględnienia interakcji między podpopulacjami, jedna z nich wymiera z powodu międzypodpopulacyjnej transmisji choroby. Uzyskaliśmy więc potwierdzenie hipotezy badawczej postawionej we wstępie pracy, wskazującej na konieczność stosowania modeli krzyżowych do badania przebiegu epidemii w populacjach niejednorodnych.

Rozważając dwie podpopulacje różniące się określoną cechą (w naszych rozważaniach jest to stopień zachorowalności) potwierdziliśmy hipotezę, że choroba może być przenoszona z jednej podpopulacji (tutaj jest to podpopulacja wysokiego ryzyka) do całej populacji, co prowadzi do rozprzestrzeniania się epidemii [109]. Oznacza to, że aby kontrolować transmisję choroby w populacji niejednorodnej nie wystarczy analiza dynamiki choroby w każdej z podpopulacji osobno, zwłaszcza kiedy podpopulacje różnią się ryzykiem zakażenia.

W drugim podrozdziale przedstawiliśmy analizę kolejnego modelu krzyżowego epidemii w populacji niejednorodnej. Zauważmy, że w układzie (3.36), w przeciwieństwie do układu (3.3), nie występują własności maltuzjańskie. Oznacza to, że w modelu (3.36) nie ma sytuacji, kiedy jedna lub obie podpopulacje wymierają lub rozrastają się nieograniczenie.

Zbadaliśmy warunki implikujące istnienie oraz lokalną stabilność stanów stacjonarnych układu (3.36). Rozważaliśmy współczynnik odnowienia choroby jako parametr bifurkacyjny układu. Stan wolny od epidemii jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeśli $\mathcal{R}_0 < 1$ i traci stabilność, gdy $\mathcal{R}_0$ przekracza 1. Oznacza to, że jeśli $\mathcal{R}_0 > 1$, to choroba rozprzestrzeni się i prawdopodobnie utrzyma się w podpopulacji niskiego ryzyka. Jeśli $\mathcal{R}_0 < 1$, to choroba nie będzie mogła się utrzymać w populacji. Warunki konieczne stabilności endemicznego stanu stacjonarnego E_e są trudne do sformułowania. W świetle powyższej analizy można stwierdzić, że:

- jeśli zachodzi (N), to albo stan E_{df} istnieje i jest lokalnie stabilny, albo oba stany E_{df} i E_e istnieją, ale E_{df} jest niestabilny,
- w pozostałych przypadkach stan E_e istnieje i stan E_{df} traci stabilność.

Z twierdzenia o rozmaitości centralnej otrzymaliśmy jednak, że blisko stanu wolnego od epidemii istnieje gałąź ponadprogowych endemicznych stanów stacjonarnych. Kiedy $\mathcal{R}_0$ jest nieznacznie większe od 1, wtedy istnieją endemiczne stany stacjonarne, które są lokalnie asymptotycznie stabilne. Stąd otrzymujemy wniosek, że zmniejszanie wartości $\mathcal{R}_0$ poniżej 1 zmniejsza poziom zachorowalności do momentu wygaśnięcia choroby, kiedy $\mathcal{R}_0$ będzie miało wartość poniżej 1. Warto jednak zauważyć, że chociaż dodatni stan stacjonarny E_e istnieje, to może być niestabilny, w szczególności, gdy jeden ze współczynników napływu jest wystarczająco duży, podczas gdy drugi jest wystarczająco mały.

Zwróćmy uwagę, że dla populacji jednorodnej warunek wystarczający wyeliminowania choroby to $C < k\mu$. Ten warunek nie gwarantuje jednak, że choroba nie będzie się rozwijać w populacji niejednorodnej. Jeśli $C_i > \mu_i k_i$ i $C_j < \mu_j k_j$, gdzie $j = 1, 2$ i $i \neq j$, to współczynnik odnowienia choroby przewyższa 1 i infekcja może się rozprzestrzeniać. Co więcej, jeśli zachodzi (N), ale spełniony jest warunek $(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) < \beta_1 \beta_2 C_1 C_2$, to choroba może wciąż się rozwijać.

Z analizy modelu (3.36) można zatem wywnioskować, że transmisja choroby z jednej podpopulacji do drugiej może znacząco przyczynić się do rozwoju epidemii w całej populacji. Nawet jeśli współczynnik odnowienia choroby dla jednej podpopulacji jest mniejszy niż 1 i gwarantuje, że infekcja nie utrzyma się w danej odizolowanej podpopulacji, to choroba może być przeniesiona z jednej podpopulacji na drugą i choroba może rozwinąć się w populacji niejednorodnej. Oznacza to, że rozważanie dynamiki epidemii osobno w każdej podpopulacji nie jest wystarczające do kontroli rozwoju choroby. Aby wyeliminować infekcję, należy rozważać krzyżową dynamikę epidemii. Jest to najważniejsza hipoteza rozprawy, która została potwierdzona także w tym modelu.

Powróćmy teraz do modelu opisywanego przez układ (3.35) i wyjściowe parametry. Korzystając z pa-

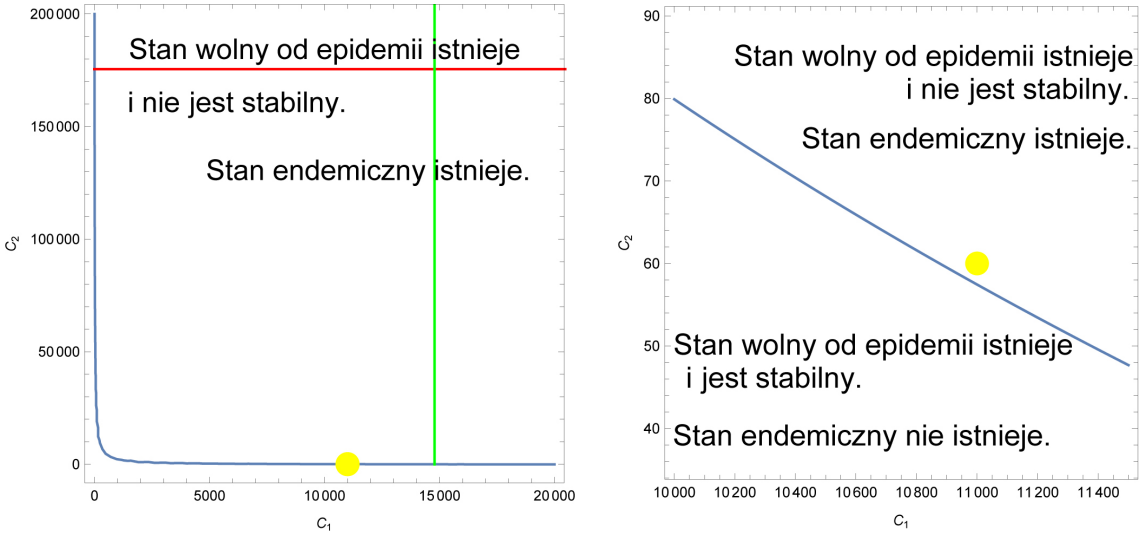
rametrów z tabeli 3.3 dostajemy

$$C_i < \frac{\mu_i(\gamma_i + \alpha_i + \mu_i)}{\beta_{ii}},$$

co jest równoważne warunkowi (N) dla układu (3.36). Co więcej, na podstawie parametrów z tabeli 3.3 uzyskujemy dla modelu (3.35) zależność

$$\Big(\mu_1(\gamma_1 + \alpha_1 + \mu_1) - C_1\beta_{11}\Big)\Big(\mu_2(\gamma_2 + \alpha_2 + \mu_2) - C_2\beta_{22}\Big) < \beta_{12}\beta_{21}C_1C_2,$$

która jest równoważna nierówności $(\mu_1 k_1 - C_1)(\mu_2 k_2 - C_2) < \beta_1\beta_2 C_1 C_2$ dla modelu (3.36). Oznacza to, że stan wolny od epidemii jest niestabilny oraz stan endemiczny istnieje. W istocie uzyskujemy, że w tym przypadku stan endemiczny jest lokalnie stabilny (rysunek 3.9). Na rysunku 3.10 przedstawiono diagram bifurkacyjny. Zauważmy, że jeśli wartość C_2 jest wystarczająco mała, żeby przekroczyć niebieską linię, to stan endemiczny bifurkuje do stabilnego stanu wolnego od epidemii. Oznacza to, że niezależnie od współczynników transmisji, sposobem na zahamowanie rozprzestrzeniania się epidemii w populacji jest ograniczanie napływu do podpopulacji osób bezdomnych. To potwierdza medyczną hipotezę [19], że gruźlica może rozprzestrzeniać się z grupy bezdomnych do całej populacji. Własności modelu (3.35) (a co za tym idzie, również (3.36)) wskazują też na słuszność hipotezy postawionej w rozprawie, że w populacji niejednorodnej może nastąpic transmisja choroby z jednej podpopulacji do całej populacji, co przyczynia się do rozwoju epidemii.



(a) (b)

Rysunek 3.10: Diagram bifurkacyjny dla układu (3.35) i powiększenie diagramu. Niebieska linia obrazuje wykres $\big(\mu_1(\gamma_1 + \alpha_1 + \mu_1) - C_1\beta_{11}\big)\big(\mu_2(\gamma_2 + \alpha_2 + \mu_2) - C_2\beta_{22}\big) - \beta_{12}\beta_{21}C_1C_2 = 0$. Linia zielona opisuje prostą $C_1 = \frac{\mu_1(\gamma_1+\alpha_1+\mu_1)}{\beta_{12}}$, czerwona – prostą $C_2 = \frac{\mu_2(\gamma_2+\alpha_2+\mu_2)}{\beta_{21}}$. Na żółto zaznaczono punkt (C_1, C_2) dla wartości C_1 i C_2 wziętych z tabeli 3.3. Do symulacji użyto parametrów z tabeli 3.3.

Ponieważ nierówności (3.52)–(3.54) opisujące warunki wystarczające stabilności endemicznego stanu stacjonarnego E_e są trudne do zinterpretowania, skupimy się na prostszym przypadku, gdy β_1 i β_2 dążą do zera. Wówczas z równań (3.40) mamy $\bar{x}_i^\diamondsuit = k_i$, natomiast z (3.39) dostajemy $\bar{y}_i^\diamondsuit = \frac{C_i - \mu_i k_i}{\mu_i \kappa_i}$. Stwierdzamy zatem, że dodatni stan stacjonarny $E_e^\diamondsuit = (\bar{x}_1^\diamondsuit, \bar{y}_1^\diamondsuit, \bar{x}_2^\diamondsuit, \bar{y}_2^\diamondsuit)$ istnieje, jeśli zachodzi (P). Mamy

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} -\bar{y}_1^\diamondsuit - \mu_1 & -k_1 + 1 & 0 & 0 \\ \bar{y}_1^\diamondsuit & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{y}_2^\diamondsuit - \mu_2 & -k_2 + \eta \\ 0 & 0 & \bar{y}_2^\diamondsuit & 0 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $J(E_4)$ ma postać

$$P(\lambda) = \Big(\lambda^2 + \lambda\Big(\bar{y}_1^\diamondsuit + \mu_1\Big) + \bar{y}_1^\diamondsuit\,(k_1 - 1)\Big)\Big(\lambda^2 + \lambda\Big(\bar{y}_2^\diamondsuit + \mu_2\Big) + \bar{y}_2^\diamondsuit\,(k_2 - \eta)\Big).$$

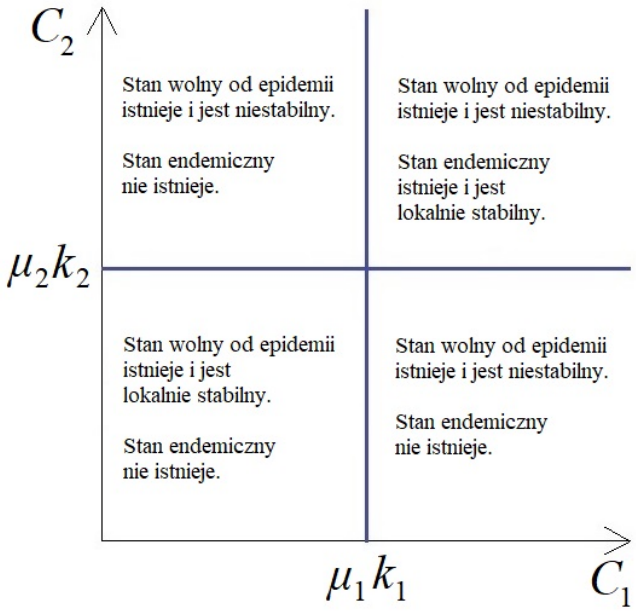
Zauważmy, że zachodzą zależności

$$\bar{y}_i^{\diamond} + \mu_i > 0, \quad \bar{y}_1^{\diamond}\,(k_1 - 1) = y_1(\alpha_1 + \mu_1) > 0, \quad \bar{y}_2^{\diamond}\,(k_2 - \eta) = y_2(\alpha_2 + \mu_2) > 0.$$

Wielomian $P(\lambda)$ ma zatem cztery miejsca zerowe z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Oznacza to, że niezależnie od wartości parametrów modelu, stan $E_e^{\diamond}$ jest zawsze lokalnie stabilny. Dla $\beta_1,\ \beta_2 \to 0$ możemy zatem stwierdzić, że

- jeśli zachodzi (P), to stan E_{df} istnieje i jest niestabilny, natomiast stan $E_e^{\diamond}$ istnieje i jest lokalnie stabilny,
- jeśli zachodzi (N), to stan E_{df} istnieje i jest lokalnie stabilny, natomiast stan $E_e^{\diamond}$ nie istnieje,
- w pozostałych przypadkach stan E_{df} istnieje i jest niestabilny, natomiast stan $E_e^{\diamond}$ nie istnieje.

Na podstawie powyższego wniosku możemy zatem stwierdzić, że podprzestrzeń parametrów (C_1, C_2) jest podzielona na cztery regiony w taki sposób, że przejście z jednego regionu do drugiego zmienia stabilność danego stanu stacjonarnego. Wyniki te zobrazowano na rysunku 3.11. Zauważmy, że jeśli zachodzą zależności $C_i > \mu_i k_i$ i $C_j < \mu_j k_j$, $i \neq j$, to dla pierwszej podpopulacji istnieje lokalnie stabilny endemiczny stan stacjonarny $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $\bar{x}_i, \bar{y}_i > 0$, natomiast dla drugiej podpopulacji istnieje lokalnie stabilny stan stacjonarny wolny od epidemii $(\bar{x}_j, 0)$, $\bar{x}_j > 0$.



Rysunek 3.11: Diagram bifurkacyjny dla układu (3.36) przy założeniu, że parametry $\beta_1,\ \beta_2$ dążą do zera. Niebieskie pogrubione linie przedstawiają proste $C_1 = \mu_1 k_1$ i $C_2 = \mu_2 k_2$.

Powróćmy jeszcze do wniosku wynikającego z analizy obydwu modeli (3.3) i (3.36) mówiącego o tym, że w przypadku epidemii w populacji niejednorodnej z podpopulacjami o różnym stopniu ryzyka zakażenia analiza dynamiki choroby w każdej z podpopulacji osobno jest niewystarczająca. Ten wniosek uwydatnia koncepcję istotności tak zwanych roznosicieli z grupy rdzeniowej w rozprzestrzenianiu się i trwaniu choroby zakaźnej [54], [118]. Grupę rdzeniową tworzą osobnicy przenoszący chorobę na tyle skutecznie, że gwarantuje to transmisję choroby w populacji, ale w przypadku ich braku infekcja może wygasnąć [8], [53].

Ponieważ osobniki z grupy rdzeniowej mają nieproporcjonalny wkład w przenoszeniu choroby, jest bardzo ważne, aby skutecznie ich identyfikować, co może skutkować zaprzestaniem rozprzestrzeniania się epidemii. Wskazanie osobników z wysokim ryzykiem zakażenia może mieć główny wpływ na transmisję choroby. Istnienie grupy rdzeniowej sugeruje zatem, że odnalezienie i leczenie osób z tej grupy może być efektywnym użyciem zasobów dostępnych do kontroli rozprzestrzeniania się epidemii. W szczególności

wskazuje się, że względnie mała część populacji przyczynia się do utrzymania epidemii. Z drugiej strony, trudność może sprawić określenie, który z czynników ryzyka może być przydatny, żeby zidentyfikować grupę rdzeniową tak, aby można było dokonać okresowych badań przesiewowych, żeby pacjenci z tej grupy zostali wyleczeni i byli zdrowi przez długi czas. W przypadku gruźlicy w województwie warmińsko-mazurskim grupą rdzeniową są osoby bezdomne. Akcje aktywnego wykrywania wśród tych osób z pewnością przyczyniły się do radykalnego zmniejszenia liczby osób, które zachorowały na gruźlicę w kolejnych latach. Obecnie najnowszym zagadnieniem epidemiologicznym jest badanie dynamiki COVID-19. Dla tej choroby na ten moment trudno wskazać grupę rdzeniową.

Rozdział 4

Modele dyskretne dla populacji niejednorodnej

Po analizie modeli ciągłych dla populacji niejednorodnych przejdziemy do analizy analogicznych modeli dyskretnych. Tak jak w rozdziale 2 dokonamy dwóch rodzajów dyskretyzacji – za pomocą otwartego schematu Eulera (EEM) oraz dyskretyzacji niestandardowej ($NSDM$). W podrozdziale 3.3 stwierdziliśmy, że w układzie (3.36) nie występują zachowania maltuzjańskie, co miało miejsce w układzie (3.3). Z tego powodu układ (3.36) uznajemy za bardziej odpowiedni do modelowania dynamiki epidemii, zatem w tym rozdziale zajmiemy się dyskretyzacją tylko tego układu. Tak jak w rozdziale 3 przyjmujemy założenie (HH).

4.1 Model oparty na otwartym schemacie Eulera

W tym podrozdziale przeprowadzimy dyskretyzację układu (3.36) za pomocą EEM i dokonamy analizy tak powstałego układu. Otrzymany układ ma postać

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(1)} &= x_n^{(1)} + h\left(C_1 - x_n^{(1)}y_n^{(1)} - \beta_1 x_n^{(1)}y_n^{(2)} + y_n^{(1)} - \mu_1 x_n^{(1)}\right),\\
y_{n+1}^{(1)} &= y_n^{(1)} + h\left(x_n^{(1)}y_n^{(1)} + \beta_1 x_n^{(1)}y_n^{(2)} - k_1 y_n^{(1)}\right),\\
x_{n+1}^{(2)} &= x_n^{(2)} + h\left(C_2 - x_n^{(2)}y_n^{(2)} - \beta_2 x_n^{(2)}y_n^{(1)} + \eta y_n^{(2)} - \mu_2 x_n^{(2)}\right),\\
y_{n+1}^{(2)} &= y_n^{(2)} + h\left(x_n^{(2)}y_n^{(2)} + \beta_2 x_n^{(2)}y_n^{(1)} - k_2 y_n^{(2)}\right),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie $x_n^{(i)}$ i $y_n^{(i)}$ są rozmiarami odpowiednich grup osób i-tej podpopulacji w n-tym kroku. Przyjmujemy $n \in \mathbb{N}$ oraz $h > 0$.

W celu poprawy czytelności zapisu wprowadzamy oznaczenia:

$$x_n^{(i)} = x_i, \quad y_n^{(i)} = y_i, \quad x_i^+ = x_{n+1}^{(i)}, \quad y_i^+ = y_{n+1}^{(i)}, \tag{4.2}$$

które będziemy stosować również dla pozostałych układów dyskretnych. Tam, gdzie może prowadzić to do niejednoznaczności, zastosujemy wcześniejsze oznaczenia. Korzystając z (4.2) zapiszmy układ (4.1) w postaci

$$x_1^+ = x_1 + h\left(C_1 - x_1y_1 - \beta_1 x_1y_2 + y_1 - \mu_1 x_1\right), \tag{4.3a}$$
$$y_1^+ = y_1 + h\left(x_1y_1 + \beta_1 x_1y_2 - k_1 y_1\right), \tag{4.3b}$$
$$x_2^+ = x_2 + h\left(C_2 - x_2y_2 - \beta_2 x_2y_2 + \eta y_2 - \mu_2 x_2\right), \tag{4.3c}$$
$$y_2^+ = y_2 + h\left(x_2y_2 + \beta_2 x_2y_2 - k_2 y_2\right). \tag{4.3d}$$

4.1.1 Podstawowe własności modelu

Przejdźmy do omówienia podstawowych własności modelu (4.3). Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym, oszacujmy rozmiar każdej z podpopulacji. Wprowadźmy $w_i = x_i + y_i$. Dodając stronami

(4.3a) i (4.3b) lub (4.3c) i (4.3d) dostajemy

$$w_i^+ = w_i + h\left(C_i - \mu_i w_i - \alpha_i y_i\right) \leq w_i + h\left(C_i - \mu_i w_i\right),$$

przy czym powyższe szacowanie zachodzi przy założeniu $y_i \geq 0$. Jeśli

$$h < \min\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right), \tag{4.4}$$

to otrzymujemy ograniczenie górne

$$w_n^{(i)} \leq w_0^{(i)} + \frac{C_i}{\mu_i},$$

tak samo jak dla modelu (2.1), por. str. 29. Oznacza to, że liczebności obu podpopulacji są ograniczone z góry. Z tego oczywiście wynika, że liczebność całej populacji jest również ograniczona z góry. Możemy też sformułować wniosek:

Wniosek 4.1. *Jeśli zachodzi* (4.4) *oraz* $w_0^{(i)} \leq \frac{C_i}{\mu_i}$, *to* $w_n^{(i)} \leq \frac{C_i}{\mu_i}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}_+$.

W dalszej części tego rozdziału zakładamy, że zachodzi nierówność (4.4). Wprowadźmy czterowymiarowy zbiór

$$\widehat{\Omega} := \left\{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : \quad 0 < x_i + y_i \leq \frac{C_i}{\mu_i}\right\}.$$

Sprawdźmy warunki gwarantujące niezmienniczość tego zbioru dla układu (4.3). Sformułujmy najpierw twierdzenie:

Twierdzenie 4.2. *Jeśli*

$$\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right) \in \widehat{\Omega}, \tag{4.5}$$

$$h < \min\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}\right), \tag{4.6}$$

$$h \leq \frac{1}{\beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_1}{\mu_1} + \mu_1} \tag{4.7}$$

oraz

$$h \leq \frac{1}{\beta_2 \frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2} + \mu_2}, \tag{4.8}$$

to rozwiązania $\left(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\right)$ *układu* (4.3) *pozostają w zbiorze* $\widehat{\Omega}$ *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}_+$.

Dowód. Zakładamy, że zachodzi (4.5). Z postaci równań (4.3b) i (4.3d) stwierdzamy, że warunkiem gwarantującym dodatniość zmiennych y_1 i y_2 są odpowiednio nierówności

$$y_1 > hky_1, \quad y_2 > hky_2.$$

Możemy je zapisać w postaci $h < \frac{1}{k_1}$ i $h < \frac{1}{k_2}$, te zaś łącznie jako (4.6).

Przejdźmy do zbadania warunków dodatniości zmiennej x_1. W tym celu prawą stronę równania (4.3a) zapiszmy jako funkcję

$$G_1(x_1, y_1, y_2) := x_1 + h\left(C_1 - x_1 y_1 - \beta_1 x_1 y_2 + y_1 - \mu_1 x_1\right).$$

Potrzebna jest nierówność $G_1(x_1, y_1, y_2) \geq 0$, czyli

$$x_1 + h\left(C_1 - x_1 y_1 - \beta_1 x_1 y_2 + y_1 - \mu_1 x_1\right) \geq 0.$$

Zapiszmy powyższą nierówność w postaci

$$x_1 + h\left(C_1 + y_1\right) \geq h x_1\left(y_1 + \beta_1 y_2 + \mu_1\right). \tag{4.9}$$

Określenie warunków gwarantujących nieujemność $G_1(x_1, y_1, y_2)$ na podstawie (4.9) jest skomplikowane. Rozpatrzymy więc łatwiejszą do analizy nierówność, która jest silniejsza niż (4.9), czyli

$$x_1 + hC_1 \geq hx_1 \left(y_1 + \beta_1 y_2 + \mu_1\right). \tag{4.10}$$

Z wniosku 4.1 mamy

$$y_1 \leq \frac{C_1}{\mu_1} - x_1, \quad y_2 \leq \frac{C_2}{\mu_2}.$$

Wzmocnijmy nierówność (4.10) uwzględniając w niej powyższe zależności. Dostajemy

$$x_1 + hC_1 \geq hx_1 \left(\frac{C_1}{\mu_1} - x_1 + \beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \mu_1\right).$$

Zapiszmy tę nierówność tak, by po lewej stronie pojawił się trójmian kwadratowy zmiennej x_1. Uzyskujemy

$$\mathcal{P}(x_1) := hx_1^2 + \left(1 - h\left(\beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_1}{\mu_1} + \mu_1\right)\right) x_1 + hC_1 \geq 0.$$

Współczynnik przy najwyższej potędze x_1 oraz wyraz wolny trójmianu są zawsze dodatnie. Istnienie miejsc zerowych determinuje więc znak wyrażenia

$$a = 1 - h\left(\beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_1}{\mu_1} + \mu_1\right).$$

Wówczas $\mathcal{P}(x_1) > 0$ dla $x_1 \geq 0$, jeśli zachodzi jeden z zestawów warunków:

- albo gdy $a \geq 0$,
- albo gdy $a < 0$ oraz wyróżnik wielomianu $\mathcal{P}(x_1)$ jest ujemny.

Najpierw załóżmy, że $a \geq 0$. Wówczas z nierówności

$$1 \geq h\left(\beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_1}{\mu_1} + \mu_1\right).$$

dostajemy szacowanie

$$h \leq \frac{1}{\beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_1}{\mu_1} + \mu_1}.$$

W drugim przypadku musi zachodzić

$$h > \frac{1}{\beta_1 \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_1}{\mu_1} + \mu_1},$$

co oznacza, że h nie może być dowolnie małe i stoi w sprzeczności z założeniami o górnym ograniczeniu kroku h.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla zmiennej x_2. Prowadzi ono do szacowania

$$h \leq \frac{1}{\beta_2 \frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2} + \mu_2},$$

Zauważmy, że (4.6) implikuje (4.4), co wraz z (4.5) daje wniosek 4.1. Ostatecznie dostajemy więc tezę twierdzenia. □

Przyjrzyjmy się ponownie nierównościom (4.6)–(4.8). Zauważmy, że warunki (4.7) oraz (4.8), które gwarantują dodatniość zmiennych x_1 i x_2, zapewniają też dodatniość zmiennych y_1 i y_2, ponieważ obie nierówności (4.7) i (4.8) są razem silniejsze od warunku (4.6) ze względu na (HH). Należy jednak zwrócić uwagę, że zależności (4.7) i (4.8) wynikają z konkretnego szacowania nierówności (4.9). Może się jednak okazać, że określony warunek początkowy i parametry układu (4.3) mają takie wartości, że tego typu szacowanie nie jest konieczne i zamiast (4.7) i (4.8) otrzyma się warunki spełnione dla większego zakresu parametrów i tak uzyskane warunki nie muszą być silniejsze od (4.6). Z tego powodu nierówność (4.6) została przytoczna w treści twierdzenia 4.2.

Wspomnijmy jeszcze o współczynniku $\mathcal{R}_0$ dla układu (4.3). W celu jego wyznaczenia ponownie skorzystaliśmy z podejścia przedstawionego w [7]. Otrzymana wartość współczynnika jest taka sama, co w przypadku analogicznego układu ciągłego (3.36). Obliczenia prowadzące do wyznaczenia $\mathcal{R}_0$ (zdefiniowanego wzorem (3.46)) dla obu układów są bardzo podobne, zatem dla przypadku dyskretnego zostały pominięte.

4.1.2 Stany stacjonarne i ich lokalna stabilność

W tej części przedstawimy warunki lokalnej stabilności stanów stacjonarnych układu (4.3). Oczywiście stany stacjonarne układu (4.3) są takie same jak w odpowiednim modelu ciągłym. Przypomnijmy postaci tych stanów:

- stan wolny od epidemii $E_{df} = (\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_2, 0) = \left(\frac{C_1}{\mu_1}, 0, \frac{C_2}{\mu_2}, 0\right)$ istniejący zawsze;
- stan endemiczny $E_e = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ – warunki jego istnienia przedstawiono w twierdzeniu 3.13.

Warunki gwarantujące istnienie tych stanów w układzie ciągłym pokrywają się z warunkami ich istnienia w układzie (4.3). Ponadto w modelu dyskretnym dla stanu wolnego od epidemii uwzględniamy warunki (4.7)–(4.8), dla stanu endemicznego zaś zależności (4.6)–(4.8). W przypadku obu stanów dodatkowo zakładamy (4.5).

Przejdźmy do zbadania lokalnej stabilności stanów stacjonarnych układu (4.3). Macierz Jacobiego tego układu (4.3) ma postać

$$J_d(x_1, y_1, x_2, y_2) := \begin{pmatrix} 1-h(y_1+\beta_1 y_2+\mu_1) & h(1-x_1) & 0 & -h\beta_1 x_1 \\ h(y_1+\beta_1 y_2) & 1+h(x_1-k_1) & 0 & h\beta_1 x_1 \\ 0 & -h\beta_2 x_2 & 1-h(y_2+\beta_2 y_1+\mu_2) & h(\eta-x_2) \\ 0 & h\beta_2 x_2 & h(y_2+\beta_2 y_1) & 1+h(x_2-k_2) \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy

$$u_1 := y_1 + \beta_1 y_2, \quad u_2 := y_2 + \beta_2 y_1, \tag{4.11}$$

aby powyższą macierz zapisać prościej jako

$$J_d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 1-h(u_1+\mu_1) & h(1-x_1) & 0 & -h\beta_1 x_1 \\ hu_1 & 1+h(x_1-k_1) & 0 & h\beta_1 x_1 \\ 0 & -h\beta_2 x_2 & 1-h(u_2+\mu_2) & h(\eta-x_2) \\ 0 & h\beta_2 x_2 & hu_2 & 1+h(x_2-k_2) \end{pmatrix}.$$

Lokalna stabilność stanu stacjonarnego wolnego od epidemii

Zacznijmy od analizy lokalnej stabilności stanu E_{df}. W poniższym twierdzeniu i jego dowodzie skorzystamy z oznaczenia

$$\theta = (k_1 - \tilde{x}_1 - k_2 + \tilde{x}_2)^2 + 4\beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 > 0. \tag{4.12}$$

Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 4.3. *Stan stacjonarny E_{df} układu* (4.3) *jest lokalnie stabilny, jeśli zachodzą nierówności* (N), (W) *oraz*

$$h < \frac{4}{k_1 - \frac{C_1}{\mu_1} + k_2 - \frac{C_2}{\mu_2} + \sqrt{\theta}}. \tag{4.13}$$

Dowód. Zakładamy istnienie stanu E_{df}. Zapiszmy macierz Jacobiego układu (4.3) dla stanu E_{df}:

$$J_d(E_{df}) = \begin{pmatrix} 1-h\mu_1 & h(1-\tilde{x}_1) & 0 & -h\beta_1\tilde{x}_1 \\ 0 & 1+h(\tilde{x}_1-k_1) & 0 & h\beta_1\tilde{x}_1 \\ 0 & -h\beta_2\tilde{x}_2 & 1-h\mu_2 & h(\eta-\tilde{x}_2) \\ 0 & h\beta_2\tilde{x}_2 & 0 & 1+h(\tilde{x}_2-k_2) \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$\mathcal{P}_1(\lambda) = (1-h\mu_1-\lambda)(1-h\mu_2-\lambda)\mathcal{P}_2(\lambda),$$

gdzie

$$\mathcal{P}_2(\lambda) = \Big(1+h(\tilde{x}_1-k_1)-\lambda\Big)\Big(1+h(\tilde{x}_2-k_2)-\lambda\Big) - h^2\beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2.$$

Wartości własne macierzy $J_d(E_{df})$ wynoszą $\lambda_1 = 1-h\mu_1$, $\lambda_2 = 1-h\mu_2$ oraz

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}\left(2 + h\left(\tilde{x}_1 - k_1 + \tilde{x}_2 - k_2\right) \pm h\sqrt{\theta}\right),$$

gdzie $h^2\theta$ jest wyróżnikiem wielomianu $\mathcal{P}_2(h)$.

Lokalną stabilność stanu E_{df} gwarantują warunki $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Zauważmy, że (4.6) implikuje (4.4), stąd mamy $\lambda_{1,2} > 0$ oraz $\lambda_{1,2} < 1$. Dostajemy więc $|\lambda_{1,2}| < 1$.

W przypadku $\lambda_{3,4}$ wystarczy sprawdzić $\lambda_3 < 1$ oraz $\lambda_4 > -1$. Pierwszą nierówność można zapisać jako

$$\frac{1}{2}\left(2 + h\left(\tilde{x}_1 - k_1 + \tilde{x}_2 - k_2\right) + h\sqrt{\theta}\right) < 1,$$

$$h\left(\tilde{x}_1 - k_1 + \tilde{x}_2 - k_2\right) + h\sqrt{\theta} < 0,$$

czyli

$$k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2 > \sqrt{\theta}. \tag{4.15}$$

Dodatniość (4.15) jest zapewniona przez zależność $k_i > \tilde{x}_i = \frac{C_i}{\mu_i}$, tzn. (N). Podnosząc obie strony (4.15) do kwadratu mamy

$$\left(k_1 - \tilde{x}_1 + (k_2 - \tilde{x}_2)\right)^2 > \theta.$$

Po podstawieniu (4.12) dostajemy

$$(k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2)^2 > \Big(k_1 - \tilde{x}_1 - (k_2 - \tilde{x}_2)\Big)^2 + 4\beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2,$$

$$(k_1 - \tilde{x}_1)^2 + 2(k_1 - \tilde{x}_1)(k_2 - \tilde{x}_2) + (k_2 - \tilde{x}_2)^2$$
$$> (k_1 - \tilde{x}_1)^2 - 2(k_1 - \tilde{x}_1)(k_2 - \tilde{x}_2) + (k_2 - \tilde{x}_2)^2 + 4\beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2,$$

$$4(k_1 - \tilde{x}_1)(k_2 - \tilde{x}_2) > 4\beta_1\beta_2\tilde{x}_1\tilde{x}_2,$$

$$\left(k_1 - \frac{C_1}{\mu_1}\right)\left(k_2 - \frac{C_2}{\mu_2}\right) > \beta_1\beta_2\frac{C_1}{\mu_1}\frac{C_2}{\mu_2},$$

Po przemnożeniu obu stron przez $\mu_1\mu_2$ uzyskujemy (W).

Nierówność $\lambda_4 > -1$ zapisujemy jako

$$\frac{1}{2}\left(2 + h\left(\tilde{x}_1 - k_1 + \tilde{x}_2 - k_2\right) - h\sqrt{\theta}\right) > -1,$$

$$h\left(k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2 + \sqrt{\theta}\right) < 4,$$

$$h < \frac{4}{k_1 - \tilde{x}_1 + k_2 - \tilde{x}_2 + \sqrt{\theta}}.$$

Ostatnia nierówność jest tożsama z (4.13). □

Podkreślmy, że dyskretyzacja modelu ciągłego (3.36) wymusiła dodatkowy warunek lokalnej stabilności stanu E_{df} postaci (4.13), dotyczący kroku dyskretyzacji.

Lokalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego

Przejdźmy teraz do omówienia lokalnej stabilności stanu endemicznego E_e. Określenie lokalnej stabilności tego stanu za pomocą wartości własnych macierzy Jacobiego $J_d(E_e)$ albo za pomocą kryterium Juryego prowadzi do skomplikowanych rachunków. Z tego powodu zastosujemy podejście przedstawione w [20]. Podane tam twierdzenie pozwala zbadać lokalną stabilność danego stanu stacjonarnego w czterowymiarowym układzie dyskretnym.

Przytoczmy treść tego twierdzenia, jego dowód można znaleźć w [20].

Niech dany będzie czterowymiarowy układ dyskretny

$$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, u_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n, u_n), \tag{4.16}$$

gdzie x_n. y_n, z_n, u_n są wartościami zmiennych odpowiednio x, y, z, u w n-tym kroku dyskretyzacji dla $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy stan stacjonarny układu (4.16) $S := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$. Wprowadźmy oznaczenia:

- J_S – macierz Jacobiego układu (4.16) dla stanu stacjonarnego S,

- $\det_S$ – wyznacznik macierzy J_S,
- M_S – suma minorów głównych rzędu trzeciego macierzy J_S,
- S_S – suma minorów głównych rzędu drugiego macierzy J_S,
- tr_S – ślad macierzy J_S.

Twierdzenie 4.4. *Stan stacjonarny S układu* (4.16) *jest lokalnie stabilny, gdy spełnione są nierówności*

$$|det_S| < 1, \tag{4.17a}$$
$$\left|\left(1 - det_S^2\right) S_S + M_S^2 + det_S tr_S^2\right| < 1 + (M_S tr_S - det_S)\,(1 + det_S) + det_S^3, \tag{4.17b}$$
$$|tr_S + M_S| < 1 + S_S + det_S, \tag{4.17c}$$
$$\frac{1}{2}S_S - \frac{3}{16}tr_S M_S + \frac{1}{16}M_S^2 < 1, \tag{4.17d}$$
$$|3tr_S + M_S| < 4 + 2S_S. \tag{4.17e}$$

Teraz zastosujmy powyższe twierdzenie do naszych rozważań.

Twierdzenie 4.5. *Załóżmy, że zachodzi* (4.5) *oraz endemiczny stan stacjonarny E_e układu* (4.3) *istnieje. Wówczas jest on lokalnie stabilny, jeśli*

$$\beta_i < \frac{k_i - \bar{x}_i}{\bar{x}_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{4.18}$$

krok dyskretyzacji jest wystarczająco mały, a C_i są wystarczająco duże, że zachodzi (3.52).

Dowód. Zakładamy istnienie stanu E_e. Macierz Jacobiego dla tego stanu ma postać

$$\begin{pmatrix} 1 - h(u_1 + \mu_1) & h(1 - \bar{x}_1) & 0 & -h\beta_1\bar{x}_1 \\ hu_1 & 1 + h(\bar{x}_1 - k_1) & 0 & h\beta_1\bar{x}_1 \\ 0 & -h\beta_2\bar{x}_2 & 1 - h(u_2 + \mu_2) & h(\eta - \bar{x}_2) \\ 0 & h\beta_2\bar{x}_2 & hu_2 & 1 + h(\bar{x}_2 - k_2) \end{pmatrix},$$

gdzie z (4.11) mamy $u_1 = \bar{y}_1 + \beta_1\bar{y}_2 > 0$ oraz $u_2 = \bar{y}_2 + \beta_2\bar{y}_1 > 0$. W celu dalszego uproszczenia zapisu wprowadźmy parametry

$$\bar{k}_i := k_i - \bar{x}_i.$$

Przypomnijmy, że dla stanu stacjonarnego E_e mamy $k_i > \bar{x}_i$, co implikuje $\bar{k}_i > 0$.

Zastosujmy teraz twierdzenie 4.4. Zapiszmy nierówności (4.17a)–(4.17e) w kontekście naszych rozważań.

- Z (4.17a) dostajemy

$$-\left(u_1 + u_2 + \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \mu_1 + \mu_2\right) + \sum_{j=1}^{3} a_j h^j < 0 \tag{4.19}$$

oraz

$$2 + \sum_{j=1}^{4} b_j h^j > 0, \tag{4.20}$$

gdzie w podanych nierównościach symbole a_j i b_j oznaczają współczynniki niezależne od h. Znaki tych współczynników zależą od wielkości pozostałych parametrów układu, jednak w naszych rozważaniach znaki te nie są istotne. To samo znaczenie i założenie o tych współczynnikach przyjmiemy również dalej.

Lewa strona (4.19) jest wielomianem trzeciego stopnia zależnym od h. Wyraz wolny tego wielomianu jest ujemny. Stwierdzamy zatem, że (4.19) zachodzi dla dostatecznie małych h. Analogicznie (4.20) zachodzi dla dostatecznie małego h.

- Z (4.17b) uzyskujemy

$$64 + \sum_{j=1}^{12} a_j h^j > 0 \tag{4.21}$$

oraz

$$\sum_{j=0}^{6} b_j h^j < 0, \tag{4.22}$$

gdzie postać b_0 przedstawiono w Dodatku D. Nierówność (4.21) zachodzi dla dostatecznie małych h. Nierówność (4.22) zachodzi dla dostatecznie małego h, o ile $b_0 < 0$. Ta nierówność zachodzi, gdy spełniony jest zestaw warunków:

$$(1-\bar{x}_1)(\eta-\bar{x}_2) < \bar{k}_1\bar{k}_2, \tag{4.23}$$

$$\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2 < \bar{k}_1\bar{k}_2, \tag{4.24}$$

$$\bar{x}_1 < 1, \qquad \bar{x}_2 < \eta. \tag{4.25}$$

Rozpatrzmy najpierw (4.23). Zwróćmy uwagę, że zachodzi

$$\bar{k}_1 - (1-\bar{x}_1) = k_1 - \bar{x}_1 - 1 + \bar{x}_1 = \alpha_1 + \mu_1 > 0. \tag{4.26}$$

Analogicznie zapisujemy

$$\bar{k}_2 - (\eta - \bar{x}_2) = \alpha_2 + \mu_2 > 0. \tag{4.27}$$

Z (4.26) i (4.27) dostajemy odpowiednio

$$\bar{k}_1 > 1 - \bar{x}_1, \quad \bar{k}_2 > \eta - \bar{x}_2.$$

Spełnienie obu tych nierówności daje (4.23). Stwierdzamy więc, że warunek (4.23) zawsze zachodzi.

Przejdźmy do zależności (4.24). Zauważmy, że jest ona spełniona, gdy zachodzi (4.18). Przypomnijmy z analizy modelu ciągłego, że warunek (4.25) zachodzi, gdy dla wystarczająco dużych C_1 i C_2 mamy (3.52).

• Rozpisując (4.17c) otrzymujemy

$$\mu_1\mu_2\left(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{k}_1\bar{k}_2\right) - u_1u_2(\alpha_1+\mu_1)(\alpha_2+\mu_2) - (\alpha_1+\mu_1)\mu_2\bar{k}_2u_1 - (\alpha_2+\mu_2)\mu_1\bar{k}_1u_2 < 0 \tag{4.28}$$

oraz

$$16 + \sum_{j=1}^{4} b_j h^j > 0. \tag{4.29}$$

Stwierdzamy, że (4.28) zachodzi przy założeniu $\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2 < \bar{k}_1\bar{k}_2$, co znów wynika z (4.18). Nierówność (4.29) jest spełniona dla dostatecznie małego h.

• Z zależności (4.17d) mamy

$$\begin{aligned}
&-3\Big((\mu_1+\mu_2)\left((\mu_1+\mu_2)(s_1+s_2)+(s_1^2+s_2^2)+\mu_1\mu_2\right)\Big) + (\mu_1+\mu_2)\left(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2 - 7\bar{k}_1\bar{k}_2\right)\\
&\quad + 3(\bar{k}_1+\bar{k}_2+u_1+u_2)\left(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{k}_1\bar{k}_2\right) - 3\bar{k}_1\bar{k}_2(u_1+u_2) - 3(\alpha_1+\mu_1)(u_1+\mu_1+\bar{k}_1)u_1\\
&\quad - 3(\alpha_2+\mu_2)(u_2+\mu_2+\bar{k}_2)u_2 - (\alpha_1+\mu_1+\alpha_2+\mu_2)u_1u_2 - (\alpha_1+\mu_1)\mu_2u_1 - (\alpha_2+\mu_2)\mu_1u_2\\
&\quad - (7\mu_1\mu_2+6u_1u_2)(\bar{k}_1+\bar{k}_2) - (6\bar{k}_1\bar{k}_2+6\mu_1\mu_2+3u_1u_2)(u_1+u_2) - 6u_1u_2(\mu_1+\mu_2)\\
&\quad - 3\mu_1u_2(\mu_1+u_2) - 3\mu_2u_1(\mu_2+u_1) - 6(\mu_1\bar{k}_2u_2+\mu_2\bar{k}_1u_1) - 7(\mu_1\bar{k}_1u_2+\mu_2\bar{k}_2u_1)\\
&\quad - 6(\mu_2\bar{k}_1u_2+\mu_1\bar{k}_2u_1) - 3(\mu_2\bar{k}_2u_2+\mu_1\bar{k}_1u_1) < 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

oraz

$$2 + \sum_{j=3}^{6} a_j h^j > 0. \tag{4.31}$$

Nierówność (4.30) jest prawdziwa przy założeniu $\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2 < \bar{k}_1\bar{k}_2$, a więc również przy spełnieniu (4.18). Zależność (4.31) zachodzi dla dostatecznie małych h.

• Z (4.17e) dostajemy

$$\begin{aligned}&(\mu_1+\mu_2)\left(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2\right)-\mu_1\mu_2(\bar{k}_1+\bar{k}_2)-\mu_1\bar{k}_1u_1-\mu_2\bar{k}_2u_2\\&-(\mu_1+\alpha_1)(\mu_2+\bar{k}_2+u_2)u_1-(\mu_2+\alpha_2)(\mu_1+\bar{k}_1+u_1)u_2<0\end{aligned}\tag{4.32}$$

oraz

$$32+\sum_{j=1}^{3}a_jh^j>0.\tag{4.33}$$

Ponownie (4.32) wynika ze spełnienia nierówności $\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2<\bar{k}_1\bar{k}_2$ tożsamej z (4.18). Nierówność (4.33) jest spełniona dla dostatecznie małych h.

Po zastosowaniu do naszych rozważań twierdzenia 4.4 stwierdzamy, że stan E_e jest lokalnie stabilny, jeśli zachodzi (4.18), h jest wystarczająco małe oraz gdy C_i są wystarczająco duże, że zachodzi (3.52). □

Określenie progowej wartości kroku dyskretyzacji, po przekroczeniu której stan E_e traci lokalną stabilność, jest skomplikowane i zostało pominięte w niniejszej rozprawie.

Przyjrzyjmy się jeszcze warunkom lokalnej stabilności stanu E_e. Nierówności (4.18) stanowią jedną ze składowych warunków stabilności stanu endemicznego w analogicznym modelu ciągłym (3.36). Warunki te są zawarte w stwierdzeniu 3.17 na stronie 108. Warunek dotyczący ograniczoności kroku dyskretyzacji w twierdzeniu 4.5 wynika oczywiście z zastosowania dyskretyzacji.

4.2 Dyskretyzacja niestandardowa – przypadek ogólny

Przejdźmy do niestandardowej dyskretyzacji modelu (3.36) dla populacji niejednorodnej. Powstały model ma postać

$$\begin{aligned}x_1^+&=x_1+h\left(C_1-x_1^+y_1-\beta_1x_1^+y_2+y_1-\mu_1x_1\right),\\y_1^+&=y_1+h\left(x_1y_1+\beta_1x_1y_2-k_1y_1\right),\\x_2^+&=x_2+h\left(C_2-x_2^+y_2-\beta_2x_2^+y_1+\eta y_2-\mu_2x_2\right),\\y_2^+&=y_2+h\left(x_2y_2+\beta_2x_2y_1-k_2y_2\right).\end{aligned}$$

Powyższy układ można zapisać jako

$$\begin{aligned}x_1^+&=\frac{x_1(1-h\mu_1)+hy_1+hC_1}{1+hy_1+h\beta_1y_2},\\y_1^+&=y_1+h\left(x_1y_1+\beta_1x_1y_2-k_1y_1\right),\\x_2^+&=\frac{x_2(1-h\mu_2)+h\eta y_2+hC_2}{1+hy_2+h\beta_2y_1},\\y_2^+&=y_2+h\left(x_2y_2+\beta_2x_2y_1-k_2y_2\right).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Zauważmy, że dodatniość zmiennych x_1 i x_2 zapewnia warunek (4.4). Dodatniość y_1 i y_2 mamy przy spełnieniu (4.6), co jest silniejsze niż (4.4). Stąd warunkiem dodatniości rozwiązań układu (4.34) jest nierówność (4.6).

Podkreślmy, że warunek gwarantujący nieujemność rozwiązań układu (4.34) uzyskujemy bezpośrednio z jego postaci. Warunek ten jest znacznie prostszy niż w przypadku układu (4.3) opartego na EEM.

Lokalna stabilność stanów stacjonarnych

Przejdźmy teraz do analizy lokalnej stabilności stanów stacjonarnych układu (4.34), które oczywiście mają taką samą postać jak w układach (3.36) i (4.3).

Zajmijmy się określeniem warunków lokalnej stabilności stanów stacjonarnych. Macierz Jacobiego układu (4.34) ma postać

$$\tilde{J}(x_1,y_1,x_2,y_2):=\begin{pmatrix}\frac{1-h\mu_1}{1+hu_1}&\frac{h^2(\beta_1y_2+\mu_1x_1-C_1)+h(1-x_1)}{(1+hu_1)^2}&0&-\frac{h\beta_1(x_1(1-h\mu_1)+hy_1+hC_1)}{(1+hu_1)^2}\\hu_1&1+h(x_1-k_1)&0&h\beta_1x_1\\0&-\frac{h\beta_2(x_2(1-h\mu_2)+h\eta y_2+hC_2)}{(1+hu_2)^2}&\frac{1-h\mu_2}{1+hu_2}&\frac{h^2(\eta\beta_2y_1+\mu_2x_2-C_2)+h(\eta-x_2)}{(1+hu_2)^2}\\0&h\beta_2x_2&hu_2&1+h(x_2-k_2)\end{pmatrix},$$

gdzie analogicznie jak w (4.11) przyjmujemy $u_1 = y_1 + \beta_1 y_2$ oraz $u_2 = y_2 + \beta_2 y_1$.

Zapiszmy tę macierz w prostszej postaci. Dla każdego stanu stacjonarnego z pierwszego równania (4.34) przy uwzględnieniu (4.11) dostajemy

$$x_1 = \frac{x_1(1-h\mu_1) + hy_1 + hC_1}{1+hu_1},$$

$$x_1(1-h\mu_1) + hC_1 = x_1(1+hu_1) - hy_1. \tag{4.35}$$

Niech $\tilde{J}_{m,n}$ oznacza element z m-tego wiersza i n-tej kolumny macierz $\tilde{J}$, gdzie $m,n \in \{1,2,3,4\}$. Zapiszmy

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{1,2} &= \frac{h^2(\beta_1 y_2 + \mu_1 x_1 - C_1) + h(1-x_1)}{(1+hu_1)^2} \\ &= \frac{h(h\mu_1 x_1 - hC_1 - x_1) + h^2\beta_1 y_2 + h}{(1+hu_1)^2} = \frac{-h\Big((1-h\mu_1)x_1 + hC_1\Big) + h^2\beta_1 y_2 + h}{(1+hu_1)^2}.\end{aligned}$$

Uwzględnienie (4.35) w powyższym wzorze prowadzi do

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{1,2} &= \frac{-hx_1(1+hu_1) + h^2 y_1 + h^2\beta_1 y_2 + h}{(1+hu_1)^2} \\ &= \frac{-hx_1}{1+hu_1} + \frac{h^2 u_1 + h}{(1+hu_1)^2} = \frac{-hx_1}{1+hu_1} + \frac{h(1+hu_1)}{(1+hu_1)^2} = \frac{h(1-x_1)}{1+hu_1}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Teraz ponownie stosując (4.35) przekształćmy

$$\tilde{J}_{1,4} = -\frac{h\beta_1\big(x_1(1-h\mu_1) + hy_1 + hC_1\big)}{(1+hu_1)^2} = -\frac{h\beta_1 x_1(1+hu_1)}{(1+hu_1)^2} = -\frac{h\beta_1 x_1}{1+hu_1}. \tag{4.37}$$

Analogicznie dostajemy

$$\tilde{J}_{3,2} = -\frac{h\beta_2 x_2}{1+hu_2}, \quad \tilde{J}_{3,4} = \frac{h(\eta - x_2)}{1+hu_2}. \tag{4.38}$$

Uwzględniając (4.36), (4.37) i (4.38) zapisujemy macierz $\tilde{J}$ jako

$$\tilde{J}(x_1,y_1,x_2,y_2) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} & \frac{h(1-x_1)}{1+hu_1} & 0 & -\frac{h\beta_1 x_1}{1+hu_1} \\ hu_1 & 1+h(x_1-k_1) & 0 & h\beta_1 x_1 \\ 0 & -\frac{h\beta_2 x_2}{1+hu_2} & \frac{1-h\mu_2}{1+hu_2} & \frac{h(\eta-x_2)}{1+hu_2} \\ 0 & h\beta_2 x_2 & hu_2 & 1+h(x_2-k_2) \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Zacznijmy od zbadania stabilności stanu E_{df}. Dla tego stanu

$$\tilde{J}(E_{df}) = \begin{pmatrix} 1-h\mu_1 & h(1-\tilde{x}_1) & 0 & -h\beta_1\tilde{x}_1 \\ 0 & 1+h(\tilde{x}_1-k_1) & 0 & h\beta_1 x_1 \\ 0 & -h\beta_2\tilde{x}_2 & 1-h\mu_2 & h(\eta-\tilde{x}_2) \\ 0 & h\beta_2\tilde{x}_2 & 0 & 1+h(\tilde{x}_2-k_2) \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz $\tilde{J}(E_{df})$ ma tę samą postać co macierz Jacobiego (4.14) układu (4.3). Z tego wynika, że wartości własne obu macierzy są jednakowe. Stąd warunki gwarantujące lokalną stabilność stanu E_{df} w układach (4.3) i (4.34) również mają tę samą postać i są to nierówności (W) i (4.13).

Obliczenia dotyczące lokalnej stabilności stanu E_e są skomplikowane. Oczywiście można przedstawić wzory analogiczne do tych dla EEM, ale nie prowadzą one do konstruktywnych wniosków. Z tego powodu pomijamy analizę lokalnej stabilności w ogólnym przypadku, w kolejnym podrozdziale zaś zaprezentujemy odpowiednie rozumowanie dla przypadku $\beta_2 \to 0$. To założenie należy rozumieć w taki sposób, że praktycznie nie występuje przenoszenie choroby z osób z podpopulacji niskiego ryzyka na osoby z podpopulacji wysokiego ryzyka. Wkład takiej transmisji choroby na dynamikę epidemii w całej populacji jest nieistotny w porównaniu do transmisji choroby z osób z podpopulacji wysokiego ryzyka na osoby z podpopulacji niskiego ryzyka. Założenie $\beta_2 \to 0$ ma więc biologiczne uzasadnienie, a jednocześnie powoduje, że model (4.34) upraszcza się i staje się łatwiejszy do analizy. Okazuje się jednak, że tak zmodyfikowany model ma inne własności niż model (4.34). Z tego powodu przypadek ten omówimy dokładnie w podrozdziale 4.3.

4.3 Dyskretyzacja niestandardowa – przypadek $\beta_2 \to 0$

W tym podrozdziale przyjmiemy, że w układzie (4.34) zachodzi $\beta_2 = 0$. Wtedy układ (4.34) przyjmuje postać

$$x_1^+ = \frac{x_1(1-h\mu_1) + hy_1 + hC_1}{1 + hy_1 + h\beta_1 y_2}, \tag{4.40a}$$

$$y_1^+ = y_1 + h\left(x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - k_1 y_1\right), \tag{4.40b}$$

$$x_2^+ = \frac{x_2(1-h\mu_2) + h\eta y_2 + hC_2}{1 + hy_2}, \tag{4.40c}$$

$$y_2^+ = y_2 + h\left(x_2 y_2 - k_2 y_2\right). \tag{4.40d}$$

4.3.1 Podstawowe własności

Przejdźmy do omówienia podstawowych własności układu (4.40). Tak jak dla układu (4.34), dodatniość zmiennych zapewnia nierówność (4.6).

Zbadajmy ograniczoność rozmiaru populacji opisywanej modelem (4.40). Ponieważ $\beta_2 = 0$, dynamika podpopulacji wysokiego ryzyka jest niezależna od dynamiki podpopulacji niskiego ryzyka. Możemy więc podpopulację wysokiego ryzyka traktować jako populację jednorodną i zastosować wyniki otrzymane w paragrafie 2.2.1.

Skorzystamy z oznaczeń z (4.2) oraz

$$w_{n+1}^{(i)} = w_i, \quad w_n^{(i)} = w_i^+, \quad i = 1, 2.$$

W takim zapisie warunek początkowy układu (4.40) przedstawiamy jako $\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right)$. Opierając się na wniosku (2.18) stwierdzamy, co następuje.

Wniosek 4.6. *Jeśli $h < \frac{1}{k_2}$ oraz $x_0^{(2)} \le \frac{C}{\mu}$, to $x_n^{(2)} \le \frac{C}{\mu}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.*

Wniosek 2.19 prowadzi do kolejnego spostrzeżenia:

Wniosek 4.7. *Jeśli $x_0^{(2)} \le \frac{C}{\mu}$ oraz $\frac{C_2}{\mu_2 k_2} < 1$, to dla układu (4.40) zachodzi $y_{n+1}^{(2)} < y_n^{(2)}$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

Z analizy równania (2.169) uzyskujemy następny wniosek:

Wniosek 4.8. *Jeśli $h < \frac{1}{\mu_2}$, $x_{n+1}^{(2)} > x_n^{(2)}$ oraz $w_0^{(2)} \le \frac{C_2}{\mu_2}$, to*

$$w_n^{(2)} \le \frac{C_2}{\mu_2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

Co więcej, stwierdzamy, że jeśli zachodzi $x_{n+1}^{(2)} < x_n^{(2)}$ i jeden z dwóch przypadków

- albo $\frac{C_2}{\mu_2 k_2} < 1$, $x_0^{(2)} < \frac{C_2}{\mu_2}$,
- albo $\frac{C_2}{\mu_2 k_2} > 1$, $x_n^{(2)} < k_2$,

to rozmiar podpopulacji wysokiego ryzyka jest ograniczony z góry.

Teraz przyjrzyjmy się równaniom (4.40a) i (4.40b). Przekształcając je dostajemy

$$\frac{x_1^+ - x_1}{h} = C_1 - x_1^+ y_1 - \beta_1 x_1^+ y_2 + y_1 - \mu_1 x_1,$$
$$\frac{y_1^+ - y_1}{h} = x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 + y_1 - k_1 y_1.$$

Dodając te równania stronami uzyskujemy

$$\frac{w_1^+ - w_1}{h} = C_1 + (y_1 + \beta_1 y_2)(x_1 - x_1^+) - \mu_1 w_1 - \alpha_1 y_1.$$

Założenie $x_1^+ > x_1$ implikuje

$$\frac{w_1^+ - w_1}{h} < C_1 - \mu_1 w_1 - \alpha_1 y_1.$$

Opierając się na analizie równania (2.169) otrzymujemy wniosek analogiczny do wniosku 4.8:

Wniosek 4.9. *Jeśli* $h < \frac{1}{\mu_1}$, $x_{n+1}^{(1)} > x_n^{(1)}$ *oraz* $w_0^{(1)} \leq \frac{C_1}{\mu_1}$, *to*

$$w_n^{(1)} \leq \frac{C_1}{\mu_1} \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

Przypomnijmy definiowany w poprzednim podrozdziale zbiór

$$\widehat{\Omega} = \left\{ (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < x_i + y_i \leq \frac{C_i}{\mu_i} \right\}.$$

Wnioski 4.8 i 4.9 implikują kolejny wniosek:

Wniosek 4.10. *Jeśli*

$$h < \frac{1}{\mu_i}, \quad x_{n+1}^{(i)} > x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

oraz $\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right) \in \widehat{\Omega}$, *to*

$$\left(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\right) \in \widehat{\Omega}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

dla dowolnego rozwiązania układu (4.40).

Wspomnijmy jeszcze o współczynniku odnowienia epidemii $\mathcal{R}_0$ dla układu (4.40). Podobnie jak w przypadku układu (2.1), korzystamy z podejścia przedstawionego w [7]. Obliczenia prowadzące do uzyskania $\mathcal{R}_0$ są podobne do tych przeprowadzonych dla układów (3.36) i (4.3), dlatego zostały pominięte w tym podrozdziale. Dostajemy

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1} + \frac{C_2}{\mu_2 k_2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1} - \frac{C_2}{\mu_2 k_2} \right)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1} + \frac{C_2}{\mu_2 k_2} + \left| \frac{C_1}{\mu_1 k_1} - \frac{C_2}{\mu_2 k_2} \right| \right),$$

co się pokrywa z $\mathcal{R}_0$ dla ogólnego modelu z podstawionym $\beta_2 = 0$.

Mamy trzy możliwe przypadki

$$\mathcal{R}_0 = \begin{cases} \frac{C_1}{\mu_1 k_1} & \text{dla } \frac{C_1}{\mu_1 k_1} > \frac{C_2}{\mu_2 k_2}, \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1} + \frac{C_2}{\mu_2 k_2} \right) & \text{dla } \frac{C_1}{\mu_1 k_1} = \frac{C_2}{\mu_2 k_2}, \\ \frac{C_2}{\mu_2 k_2} & \text{dla } \frac{C_1}{\mu_1 k_1} < \frac{C_2}{\mu_2 k_2}. \end{cases}$$

Drugi przypadek z podanych jest niegeneryczny, więc go pomijamy. Przyjrzyjmy się pozostałym możliwym wartościom $\mathcal{R}_0$ i warunkom je implikującym. Stwierdzamy, że jeśli dana podpopulacja cechuje się większym niż druga stopniem napływu osobników oraz mniejszymi stopniami śmiertelności (naturalnej i z powodu choroby) i wyzdrowienia, to parametry tylko tej jednej podpopulacji mają wpływ na wartość $\mathcal{R}_0$. Należy jednak zaznaczyć, że wartość $\mathcal{R}_0$ nie zależy od β_1, nie możemy więc badać dynamiki epidemii w populacji niejednorodnej wyłącznie w odniesieniu do wartości $\mathcal{R}_0$.

Na podstawie wartości $\mathcal{R}_0$ wnioskujemy:

Wniosek 4.11. *Jeśli*

$$\max\left(\frac{C_1}{\mu_1 k_1}, \frac{C_2}{\mu_2 k_2} \right) < 1,$$

to wprowadzenie do całkowicie zdrowej populacji jednego chorego osobnika (z dowolnej grupy ryzyka) nie spowoduje powstania epidemii.

4.3.2 Stany stacjonarne i ich lokalna stabilność

Teraz zajmijemy się postaciami stanów stacjonarnych układu (4.40). Przypomnijmy, że dynamika podpopulacji wysokiego ryzyka staje się niezależna od dynamiki podpopulacji niskiego ryzyka i dlatego jest ona analogiczna do dynamiki populacji jednorodnej. Z postaci stanów stacjonarnych układu dla populacji jednorodnej stwierdzamy, że współrzędne x_2 i y_2 stanów stacjonarnych układu (4.40) wynoszą

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{C_2}{\mu_2}, 0\right) \tag{4.41}$$

lub

$$(x_2, y_2) = \left(k_2, \frac{C_2 - \mu_2 k_2}{\alpha_2 + \mu_2}\right), \tag{4.42}$$

przy czym (4.42) zachodzi przy założeniu (P2).

Załóżmy, że zachodzi (4.41). Ponieważ $y_2 = 0$, dynamika podpopulacji niskiego ryzyka w stanie stacjonarnym staje się niezależna od dynamiki podpopulacji wysokiego ryzyka i obie podpopulacje są od siebie odseparowane. Uzyskujemy więc

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{C_1}{\mu_1}, 0\right) \tag{4.43}$$

lub

$$(x_1, y_1) = \left(k_1, \frac{C_1 - \mu_1 k_1}{\alpha_1 + \mu_1}\right). \tag{4.44}$$

Łączac (4.41) i (4.43) otrzymujemy zawsze istniejący stan E_{df}.

Z (4.41) i (4.44) dostajemy kolejny stan stacjonarny

$$E_1^* := \left(k_1, \frac{C_1 - \mu_1 k_1}{\alpha_1 + \mu_1}, \frac{C_2}{\mu_2}, 0\right).$$

Stan E_1^* opisuje sytuację, kiedy choroba wygasa w podpopulacji wysokiego ryzyka, utrzymuje się zaś w podpopulacji niskiego ryzyka. Spełnienie (P1) wystarczy, by ten stan istniał.

Teraz określmy postaci stanów stacjonarnych dla przypadku (4.42). Zauważmy, że jeśli założymy $y_1 = 0$, to z (4.40b) mamy $0 = \beta_1 x_1 y_2$, co implikuje $x_1 = 0$. Uwzględnienie $x_1 = 0$ i $y_1 = 0$ dla stanu stacjonarnego w (4.40a) prowadzi do sprzeczności.

Podobnie zauważamy, że uwzględnienie $x_1 = 0$ prowadzi do uzyskania w (4.40b) wyrażenia $0 = k_1 y_1$, czyli $y_1 = 0$. Ponownie uzyskujemy sprzeczność w (4.40a).

Stwierdzamy zatem, że w przypadku (4.42) może istnieć wyłącznie stan stacjonarny z wszystkimi współrzędnymi dodatnimi. Dalej zweryfikujemy istnienie takiego stanu.

Dodatni stan stacjonarny

Sprawdźmy, przy jakich warunkach istnieje dodatni stan stacjonarny. Dla tego stanu z równań (4.40a) i (4.40b) dostajemy odpowiednio

$$x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - k_1 y_1 = 0 \tag{4.45}$$

oraz

$$x_1(1 + hy_1 + h\beta_1 y_2) = x_1(1 - h\mu_1) + hy_1 + hC_1.$$

Z tych zależności otrzymujemy

$$x_1(y_1 + \beta_1 y_2) = k_1 y_1,$$

$$x_1(y_1 + \beta_1 y_2) = -x_1\mu_1 + y_1 + C_1, \tag{4.46}$$

skąd dostajemy

$$(1 + \alpha_1 + \mu_1)y_1 = -x_1\mu_1 + y_1 + C_1,$$

$$y_1 = \frac{C_1 - x_1\mu_1}{\alpha_1 + \mu_1}. \tag{4.47}$$

Na podstawie (4.47) stwierdzamy, że dodatni stan stacjonarny istnieje tylko wtedy, gdy

$$x_1 < \frac{C_1}{\mu_1}. \tag{4.48}$$

Po podstawieniu (4.47) do (4.45) uzyskujemy

$$(x_1 - k_1)\frac{C_1 - x_1\mu_1}{\alpha_1 + \mu_1} + \beta_1 x_1 y_2 = 0,$$

$$(x_1 - k_1)(C_1 - x_1\mu_1) + (\alpha_1 + \mu_1)\beta_1 x_1 y_2 = 0,$$
$$C_1 x_1 - \mu_1 x_1^2 - C_1 k_1 + \mu_1 k_1 x_1 + (\alpha_1 + \mu_1)\beta_1 x_1 y_2 = 0,$$

$$\mathcal{W}(x_1) := \mu_1 x_1^2 - \Big(C_1 + \mu_1 k_1 + \beta_1 y_2(\alpha_1 + \mu_1)\Big)x_1 + C_1 k_1 = 0. \tag{4.49}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\left(\frac{C_1}{\mu_1}\right) &= \mu_1\left(\frac{C_1}{\mu_1}\right)^2 - \Big(C_1 + \mu_1 k_1 + \beta_1 y_2(\alpha_1 + \mu_1)\Big)\frac{C_1}{\mu_1} + C_1 k_1 \\ &= \frac{C_1^2}{\mu_1} - \frac{C_1^2}{\mu_1} - C_1 k_1 - \frac{\beta_1 y_2(\alpha_1 + \mu_1)C_1}{\mu_1} + C_1 k_1 = -\frac{\beta_1 y_2(\alpha_1 + \mu_1)C_1}{\mu_1} < 0.\end{aligned}$$

Na podstawie znaków współczynników wielomianu $\mathcal{W}(x_1)$ stwierdzamy, że tylko jedno rozwiązanie równania (4.49) spełnia (4.48). Stąd mamy, że może istnieć co najwyżej jeden dodatni stan stacjonarny. Dla takiego stanu zachodzi (4.42). Oznaczmy go jako

$$E_e^* := (x_e, y_e, k_2, \breve{y}_2)\,,$$

gdzie

$$\breve{y}_2 := \frac{C_2 - \mu_2 k_2}{\alpha_2 + \mu_2}.$$

Nierówność (P2) stanowi warunek konieczny istnienia stanu E_e^*.

Wyznaczmy wartość x_e. Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy

$$\varsigma := \beta_1\breve{y}_2(\alpha_1 + \mu_1) + C_1 + k_1\mu_1 = \beta_1(C_2 - k_2\mu_2)\frac{\alpha_1 + \mu_1}{\alpha_2 + \mu_2} + C_1 + k_1\mu_1 > 0. \tag{4.50}$$

Równanie (4.49) przyjmuje postać

$$\mu_1 x_e^2 - \varsigma x_e + k_1 C_1 = 0. \tag{4.51}$$

Jego rozwiązanie spełniające (4.48) wynosi

$$x_e = \frac{\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 4\mu_1 k_1 C_1}}{2\mu_1} > 0. \tag{4.52}$$

Z (4.47) dostajemy

$$y_e = \frac{C_1 - x_e\mu_1}{\alpha_1 + \mu_1}.$$

Sprawdźmy, czy zachodzi nierówność

$$x_e < k_1. \tag{4.53}$$

Po podstawieniu $x_e = k_1$ i uwzględnieniu (4.50) w lewej stronie (4.51) mamy

$$\begin{aligned}&\mu_1 k_1 - \varsigma k_1 + k_1 C_1 = \mu_1 k_1 - \Big(\beta_1\breve{y}_2(\alpha_1 + \mu_1) + C_1 + k_1\mu_1\Big)k_1 + k_1 C_1 \\ &= k_1\Big(\mu_1 - \beta_1\breve{y}_2(\alpha_1+\mu_1) - \mu_1 k_1\Big) = k_1\Big(-(\alpha_1+\mu_1)\mu_1 - \beta_1\breve{y}_2(\alpha_1+\mu_1)\Big) = -k_1(\alpha_1+\mu_1)(\mu_1+\beta_1\breve{y}_2) < 0.\end{aligned}$$

Z postaci lewej strony (4.51) dostajemy, że (4.53) zawsze zachodzi.

W dalszej części paragrafu zbadamy lokalną stabilność stanów stacjonarnych układu (4.40). W tym celu wykorzystamy macierz Jacobiego tego układu

$$\widehat{J}(x_1,y_1,x_2,y_2)=\begin{pmatrix} \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} & \frac{h(1-x_1)}{1+hu_1} & 0 & -\frac{h\beta_1 x_1}{1+hu_1} \\ hu_1 & 1+h(x_1-k_1) & 0 & h\beta_1 x_1 \\ 0 & 0 & \frac{1-h\mu_2}{1+hu_2} & \frac{h(\eta-x_2)}{1+hu_2} \\ 0 & 0 & hu_2 & 1+h(x_2-k_2) \end{pmatrix},$$

która ma postać (4.39) z uwzględnieniem $\beta_2=0$.

Lokalna stabilność stanu E_{df}

Zbadajmy najpierw lokalną stabilność stanu E_{df}. Sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 4.12. *Stan stacjonarny wolny od epidemii E_{df} układu* (4.40) *jest lokalnie stabilny, jeśli zachodzą* (N) *oraz* (4.6).

Dowód. Dla stanu E_{df} zależności (4.11) sprowadzają się do $u_1=u_2=0$.

Macierz $\widehat{J}(E_{df})$ przyjmuje postać

$$\widehat{J}(E_{df})=\begin{pmatrix} 1-h\mu_1 & h\left(1-\frac{C_1}{\mu_1}\right) & 0 & -h\beta_1\frac{C_1}{\mu_1} \\ 0 & 1+h\left(\frac{C_1}{\mu_1}-k_1\right) & 0 & h\beta_1\frac{C_1}{\mu_1} \\ 0 & 0 & 1-h\mu_2 & h\left(\eta-\frac{C_2}{\mu_2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1+h\left(\frac{C_2}{\mu_2}-k_2\right) \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

Macierz ta jest górnotrójkątna, zatem jej wartości własne wynoszą

$$\lambda_1=1-h\mu_1,\quad \lambda_2=1-h\mu_2,\quad \lambda_3=1+h\left(\frac{C_1}{\mu_1}-k_1\right),\quad \lambda_4=1+h\left(\frac{C_2}{\mu_2}-k_2\right).$$

Warunek implikujący $|\lambda_1|<1$ i $|\lambda_2|<1$ omówiono w trakcie analizy wartości własnych macierzy $J_d(E_{df})$ o postaci (4.14) dla układu (4.3). Warunek ten zapisuje się jako

$$2>h\mu_i>0,\quad i=1,2,$$

co jest zawsze spełnione ze względu na dodatniość kroku dyskretyzacji oraz nierówność (4.6) gwarantującą dodatniość rozwiązań układu (4.40).

Aby zweryfikować nierówności $|\lambda_3|<1$ i $|\lambda_4|<1$, powołamy się na analizę znaku wartości własnej λ_2 macierzy $M_d(E_{df})$ (2.13) układu (2.1), zdefiniowanej wzorem (2.15). Opierając się na otrzymanych wynikach stwierdzamy, że

$$0<\lambda_{3,4}<1,$$

o ile zachodzą (N) oraz (4.6).

Otrzymujemy więc ostatecznie lokalną stabilność stanu E_{df} przy założeniu (N). □

Zauważmy, że twierdzenie 4.12 jest tożsame z wnioskiem 4.11.

Przypomnijmy jeszcze, że spełnienie (P1) jest warunkiem wystarczającym istnienia stanu E_1^*. Warunek ten stoi w sprzeczności z (N) dla $i=1$. Możemy więc sformułować wniosek:

Wniosek 4.13. *Jeśli istnieje stan stacjonarny E_1^*, to stan E_{df} traci stabilność.*

Lokalna stabilność stanu E_1^*

Przejdźmy do zbadania stanu E_1^*. Dostajemy twierdzenie:

Twierdzenie 4.14. *Załóżmy, że stan stacjonarny E_1^* układu* (4.40) *istnieje. Ponadto niech zachodzi*

$$h < \frac{1}{\mu_1}. \tag{4.55}$$

Stan ten jest lokalnie stabilny przy spełnieniu (N2) *oraz gdy*

$$h < \frac{C_1 - \mu_1}{(\alpha_1 + \mu_1)(C_1 - k_1\mu_1)}. \tag{4.56}$$

Dowód. Załóżmy, że stan E_1^* istnieje. Dla tego stanu zachodzą $u_1 = y_1$, $u_2 = 0$, więc

$$\widehat{J}(E_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1} & \frac{-h(\alpha_1+\mu_1)}{1+hy_1} & 0 & -\frac{h\beta_1 k_1}{1+hy_1} \\ hy_1 & 1 & 0 & h\beta_1 k_1 \\ 0 & 0 & 1-h\mu_2 & h\left(\eta - \frac{C_2}{\mu_2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 + h\left(\frac{C_2}{\mu_2} - k_2\right) \end{pmatrix}.$$

Macierz ta ma postać blokową

$$\widehat{J}(E_1^*) = \begin{pmatrix} J_a & J_b \\ 0 & J_c \end{pmatrix},$$

gdzie macierze J_a, J_b, J_c są wymiaru 2×2. Aby zbadać lokalną stabilność stanu E_1^*, należy wyznaczyć pierwiastki wielomianów charakterystycznych macierzy J_a i J_c.

Przyjrzyjmy się macierzy J_a. Jej wielomian charakterystyczny ma postać

$$P_a(\lambda) := \lambda^2 - \left(1 + \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1}\right)\lambda + \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1} + \frac{h^2 y_1(\alpha_1+\mu_1)}{1+hy_1}. \tag{4.57}$$

Oznaczmy przez δ_P wyróżnik wielomianu $P_a(\lambda)$, przez $\lambda_{1,2}$ zaś wartości własne macierzy J_a. Ponadto przyjmijmy

$$a = 1 + \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1}, \quad b = \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1} + \frac{h^2 y_1(\alpha_1+\mu_1)}{1+hy_1},$$

przez co możemy zapisać $P_a(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + b$. Załóżmy, że zachodzi (4.55). Dostajemy wówczas $a > 0$ oraz $b > 0$. Stąd $P_a(\lambda)$ albo ma dwa dodatnie pierwiastki rzeczywiste, albo ma dwa pierwiastki zespolone.

Dalszą analizę uzależnimy od znaku δ_P.

• Jeśli $\delta_P \geq 0$, to $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, gdzie

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Obie wartości własne są dodatnie, więc aby stan E_1^* był lokalnie stabilny, wystarczy by zachodziło $\lambda_2 < 1$, czyli $a + \sqrt{a^2 - 4b} < 2$. Zapiszmy tę nierówność w postaci

$$\sqrt{a^2 - 4b} < 2 - a. \tag{4.58}$$

Mamy

$$2 - a = 2 - 1 - \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1} = \frac{1+hy_1-1+h\mu_1}{1+hy_1} = h\frac{y_1+\mu_1}{1+hy_1} > 0,$$

zatem podnosimy obie strony (4.58) do kwadratu dostając

$$a^2 - 4b < 4 - 4a + a^2,$$

$$4a < 4 + 4b,$$

$$a < 1 + b,$$

$$1 + \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1} < 1 + \frac{1-h\mu_1}{1+hy_1} + \frac{h^2 y_1(\alpha_1+\mu_1)}{1+hy_1}, \tag{4.59}$$

a ta nierówność jest zawsze prawdziwa.

• Dla $\delta_P < 0$ dostajemy $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ mające postać

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \mp i\sqrt{4b - a^2}}{2}.$$

Lokalną stabilność stanu E_1^* gwarantuje warunek $|\lambda_{1,2}| < 1$. Sprawdźmy równoważny warunek

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4b - a^2}{4} = b < 1,$$

czyli

$$\frac{1 - h\mu_1}{1 + hy_1} + \frac{h^2 y_1(\alpha_1 + \mu_1)}{1 + hy_1} < 1, \tag{4.60}$$

$$1 - h\mu_1 + h^2 y_1(\alpha_1 + \mu_1) < 1 + hy_1,$$

$$-\mu_1 + hy_1(\alpha_1 + \mu_1) < y_1,$$

$$h < \frac{y_1 + \mu_1}{y_1(\alpha_1 + \mu_1)}. \tag{4.61}$$

Zauważmy, że analogicznie jak w (2.33) możemy zapisać

$$y_e + \mu_1 = \frac{C_1 - \mu_1}{k_1 - 1} = \frac{C_1 - \mu_1}{\alpha_1 + \mu_1}. \tag{4.62}$$

Uwzględniając (4.47) i (4.62) w (4.61) otrzymujemy

$$h < \frac{\frac{C_1 - \mu_1}{\alpha_1 + \mu_1}}{(\alpha_1 + \mu_1)\frac{C_1 - k_1\mu_1}{\alpha_1 + \mu_1}},$$

co daje (4.56).

Teraz spójrzmy na macierz J_c. Jest ona górnotrójkątna, więc jej wartości własne wynoszą

$$\lambda_3 = 1 - h\mu_2, \quad \lambda_4 = 1 + h\left(\frac{C_2}{\mu_2} - k_2\right).$$

Odpowiadają one wartościom własnym λ_2 i λ_4 macierzy $\widehat{J}(E_{df})$ postaci (4.54). Opierając się na analizie wartości własnych tej macierzy stwierdzamy, że $|\lambda_{3,4}| < 1$ dla spełnionego (N2). □

Zauważmy, że warunek (N2) lokalnej stabilności stanu E_1^* i warunek (P1) istnienia tego stanu obrazują przeciwstawne procesy w obu podpopulacjach. Pierwszy odzwierciedla dostatecznie mały napływ osobników do podpopulacji wysokiego ryzyka, drugi – dostatecznie duży napływ do podpopulacji niskiego ryzyka. Taka sytuacja z różnymi napływami do danych podpopulacji jest bardzo prawdopodobna. Zwrócmy też uwagę, że w warunku (4.56) ograniczającym wielkość kroku dyskretyzacji występują tylko parametry z grupy niskiego ryzyka.

Lokalna stabilność stanu dodatniego

Przejdźmy do zbadania lokalnej stabilności dodatniego stanu stacjonarnego E_e^*. Stan ten istnieje, jeśli zachodzą (4.6), (P2) oraz (4.48).

W poniższym twierdzeniu i jego dowodzie skorzystamy z oznaczeń

$$u_1 = y_e + \beta_1 \breve{y}_2, \quad k_1^* := k_1 - x_e, \quad x_e^* := x_e - 1. \tag{4.63}$$

Zauważmy, że warunek (4.53) implikuje $k_1^* > 0$.

Teraz załóżmy, że zachodzi nierówność $x_e > 1$. Oznacza ona, że po podstawieniu $x_e = 1$ w lewej stronie (4.51) dostajemy

$$\mu_1 - \varsigma + k_1 C_1 > 0.$$

Uwzględnienie w powyższej nierówności zależności (4.50) prowadzi do

$$\mu_1 - \big(\beta_1 \breve{y}_2(\alpha_1+\mu_1) + C_1 + k_1\mu_1\big) + k_1 C_1 > 0,$$

$$\mu_1 - C_1 - k_1\mu_1 + k_1 C_1 > \beta_1\breve{y}_2(\alpha_1+\mu_1),$$

$$k_1(C_1-\mu_1) - (C_1-\mu_1) > \beta_1\breve{y}_2(\alpha_1+\mu_1),$$

$$(\alpha_1+\mu_1)(C_1-\mu_1) > \beta_1\breve{y}_2(\alpha_1+\mu_1),$$

czyli

$$\breve{y}_2 < \frac{C_1-\mu_1}{\beta_1}. \tag{4.64}$$

Z (HH) wynika dodatniość prawej strony (4.64). Stwierdzamy, że jeśli C_1 jest dostatecznie duże, że zachodzi (4.64), to spełnione są $x_e > 1$ oraz $x_e^* > 0$. Zauważmy, że nierówność przeciwna do (4.64) jest nierealistyczna ze względu na definicję zmiennej y_2 oraz (HH). Zakładamy więc, że zachodzi (4.64), co implikuje $x_e^* > 0$.

Teraz sformułujmy twierdzenie:

Twierdzenie 4.15. *Załóżmy, że zachodzą* (P2), (4.6), (4.48) *oraz* (4.64). *Dodatni stan stacjonarny* E_e^* *układu* (4.40) *jest lokalnie stabilny, jeśli*

$$h < \min\left(\frac{u_1+k_1^*+\mu_1}{\mu_1 k_1^* + u_1 x_e^*}, \frac{C_2-\mu_2\eta_2}{(C_2-\mu_2 k_2)(\alpha_2+\mu_2)}\right).$$

Dowód. Warunki (P2), (4.6) oraz (4.48) gwarantują istnienie stanu E_e^*. Zauważmy, że dla tego stanu z (4.11) wynikają zależności

$$u_1 = y_e + \beta_1\breve{y}_2, \quad u_2 = \breve{y}_2 \tag{4.65}$$

oraz

$$\widehat{J}(E_e^*) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} & \frac{h(1-x_e)}{1+hu_1} & 0 & -\frac{h\beta_1 x_e}{1+hu_1} \\ hu_1 & 1+h(x_e-k_1) & 0 & h\beta_1 x_e \\ 0 & 0 & \frac{1-h\mu_2}{1+h\breve{y}_2} & \frac{-h(\alpha_2+\mu_2)}{1+h\breve{y}_2} \\ 0 & 0 & h\breve{y}_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z oznaczeń x_e^* i k_1^* zapisujemy

$$\widehat{J}(E_e^*) = \begin{pmatrix} \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} & \frac{-hx_e^*}{1+hu_1} & 0 & -\frac{h\beta_1 x_e}{1+hu_1} \\ hu_1 & 1-hk_1^* & 0 & h\beta_1 x_e \\ 0 & 0 & \frac{1-h\mu_2}{1+h\breve{y}_2} & \frac{-h(\alpha_2+\mu_2)}{1+h\breve{y}_2} \\ 0 & 0 & h\breve{y}_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przedstawmy tę macierz w postaci blokowej

$$\widehat{J}(E_e^*) := \begin{pmatrix} M_a & M_b \\ 0 & M_c \end{pmatrix},$$

gdzie macierze M_a, M_b, M_c są wymiaru 2×2. Aby zbadać lokalną stabilność stanu E_e^*, przeanalizujemy pierwiastki wielomianów charakterystycznych macierzy M_a i M_c.

Dalszą część dowodu przeprowadzimy podobnie jak dowód twierdzenia 4.14.

Wielomian charakterystyczny $W_a(\lambda)$ macierzy M_a wynosi

$$W_a(\lambda) = \lambda^2 - \left(1-hk_1^* + \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1}\right)\lambda + \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1}(1-hk_1^*) + \frac{h^2 u_1 x_e^*}{1+hu_1}.$$

Nierówność (4.64) daje $x_e^* > 0$. Z $k_1^* < k_1$ oraz (4.6) wynika implikacja

$$1-hk_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 1-hk_1^* > 0.$$

Wnioskujemy, że wielomian ma dwa pierwiastki, które są albo dodatnie i rzeczywiste, albo zespolone.

• Załóżmy najpierw, że pierwiastki te są dodatnie i rzeczywiste. Otrzymujemy analogiczną do (4.59) nierówność

$$1 - hk_1^* + \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} < 1 + \frac{1-h\mu_1}{1+hu_1}(1-hk_1^*) + \frac{h^2u_1x_e^*}{1+hu_1},$$

która jest równoważna nierówności

$$-hk_1^* < -hk_1^*\frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} + \frac{h^2u_1x_e^*}{1+hu_1},$$

$$k_1^*\frac{1-h\mu_1}{1+hu_1} < k_1^* + \frac{hu_1x_e^*}{1+hu_1},$$

$$k_1^*(1-h\mu_1) < k_1^*(1+hu_1) + hu_1x_e^*,$$

$$0 < hk_1^*\mu_1 + hk_1^*u_1 + hu_1x_e^*.$$

Ostatnia nierówność zawsze zachodzi.

• Teraz przyjmijmy, że pierwiastki są zespolone. Analogicznie do (4.60) sprawdzamy nierówność

$$\frac{1-h\mu_1}{1+hu_1}(1-hk_1^*) + \frac{h^2u_1x_e^*}{1+hu_1} < 1,$$

$$(1-h\mu_1)(1-hk_1^*) + h^2u_1x_e^* < 1+hu_1,$$

$$1 - hk_1^* - h\mu_1 + h^2\mu_1k_1^* + h^2u_1x_e^* < 1+hu_1,$$

$$-k_1^* - \mu_1 + h\mu_1k_1^* + hu_1x_e^* < u_1,$$

$$h\mu_1k_1^* + hu_1x_e^* < u_1 + k_1^* + \mu_1,$$

czyli ostatecznie

$$h < \frac{u_1 + k_1^* + \mu_1}{\mu_1k_1^* + u_1x_e^*}.$$

Wielomian charakterystyczny $W_c(\lambda)$ macierzy M_c wynosi

$$W_c(\lambda) = \lambda^2 - \left(1 + \frac{1-h\mu_2}{1+h\breve{y}_2}\right)\lambda + \frac{1-h\mu_2}{1+h\breve{y}_2} + \frac{h^2\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2)}{1+h\breve{y}_2}.$$

Jak poprzednio, ma on albo dwa pierwiastki rzeczywiste dodatnie, albo dwa pierwiastki zespolone.

• W przypadku rzeczywistych pierwiastków dostajemy nierówność

$$1 + \frac{1-h\mu_1}{1+h\breve{y}_2} < 1 + \frac{1-h\mu_2}{1+h\breve{y}_2} + \frac{h^2\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2)}{1+h\breve{y}_2},$$

równoważną zawsze spełnionej nierówności $\frac{h^2\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2)}{1+h\breve{y}_2} > 0$.

• Dla zespolonych wartości własnych uzyskujemy

$$\frac{1-h\mu_2}{1+h\breve{y}_2} + \frac{h^2\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2)}{1+h\breve{y}_2} < 1,$$

$$1 - h\mu_2 + h^2\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2) < 1 + h\breve{y}_2,$$

$$h\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2) < \breve{y}_2 + \mu_2,$$

czyli

$$h < \frac{\breve{y}_2 + \mu_2}{\breve{y}_2(\alpha_2+\mu_2)}.$$

Analogicznie jak dla (4.62) piszemy

$$\breve{y}_2 + \mu_2 = \frac{C_2 - \mu_2k_2}{\alpha_2+\mu_2} + \mu_2 = \frac{C_2 - \mu_2\eta_2}{\alpha_2+\mu_2}. \tag{4.66}$$

Korzystając z powyższej nierówności oraz definicji $\breve{y}_2$ mamy

$$h < \frac{\frac{C_2-\mu_2\eta_2}{\alpha_2+\mu_2}}{\frac{C_2-\mu_2 k_2}{\alpha_2+\mu_2}(\alpha_2+\mu_2)} = \frac{C_2-\mu_2\eta_2}{(C_2-\mu_2 k_2)(\alpha_2+\mu_2)}.$$

□

4.4 Symulacje numeryczne – modelowanie gruźlicy

W tym podrozdziale przedstawimy symulacje dotyczące omawianych w tym rozdziale modeli dyskretnych.

Najpierw przedstawmy symulację dla dyskretnego układu opartego na EEM. Analogicznie do układu (4.3) tworzymy układ

$$\begin{aligned} S_1^+ &= C_1 - \beta_{11}S_1I_1 - \beta_{12}S_1I_2 + \gamma_1 I_1 - \mu_1 S_1, \\ I_1^+ &= \beta_{11}S_1I_1 + \beta_{12}S_1I_2 - (\gamma_1+\alpha_1+\mu_1)I_1, \\ S_2^+ &= C_2 - \beta_{22}S_2I_2 - \beta_{21}S_2I_1 + \gamma_2 I_2 - \mu_2 S_2, \\ I_2^+ &= \beta_{22}S_2I_2 + \beta_{21}S_2I_1 - (\gamma_2+\alpha_2+\mu_2)I_2, \end{aligned} \tag{4.67}$$

którego ciągłym odpowiednikiem jest (3.35). Zilustrujmy dynamikę układu (4.67). W tabeli 4.1 podano wartości użytych współczynników transmisji.

Tabela 4.1: Wartości współczynników transmisji użyte do symulacji układu (4.67).

Symbol	Wartość
β_{11}	$6.4158 \cdot 10^{-7}$
β_{12}	$6.8310 \cdot 10^{-8}$
β_{21}	$9.8425 \cdot 10^{-5}$
β_{22}	$5.2019 \cdot 10^{-5}$

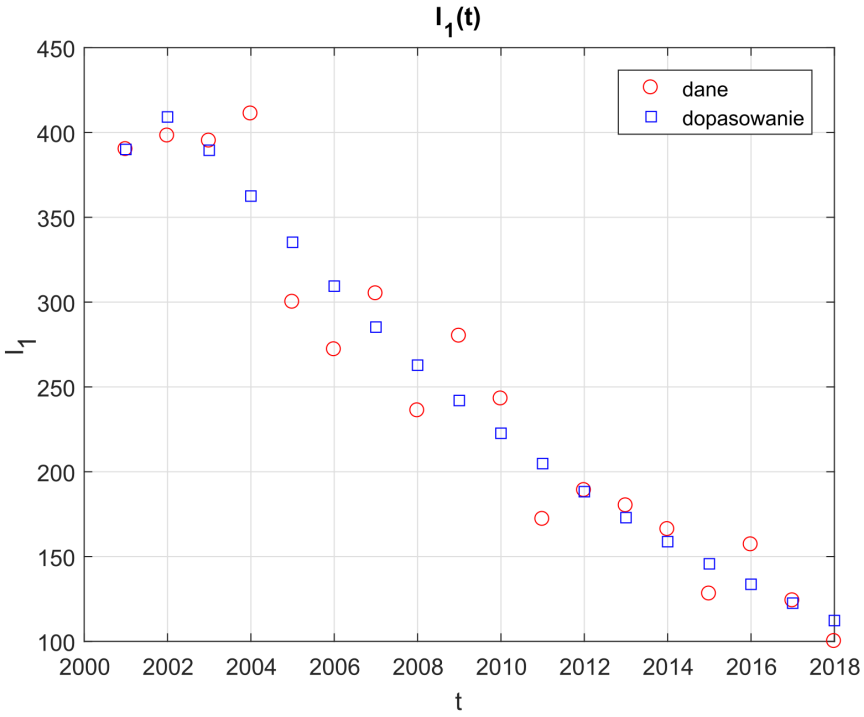
Porównanie pomiędzy danymi rzeczywistymi a symulowanymi zostało przedstawione na rysunku 4.1. Dla układu (4.67) przyjęliśmy krok dyskretyzacji $h = \frac{1}{2}$ odpowiadający połowie roku. Dane rzeczywiste dotyczą poszczególnych lat, zatem na rysunku 4.1 wyświetlamy wartość początkową I_1 oraz wartości I_1 odpowiadające tylko kolejnym nieparzystym iteracjom układu (4.67).

Teraz przedstawimy symulacje modeli opartych na $NSDM$. Dokonaliśmy symulacji odpowiednika układu (4.34) przed skalowaniem. W tabeli 4.2 ujęto wartości współczynników transmisji użytych do symulacji.

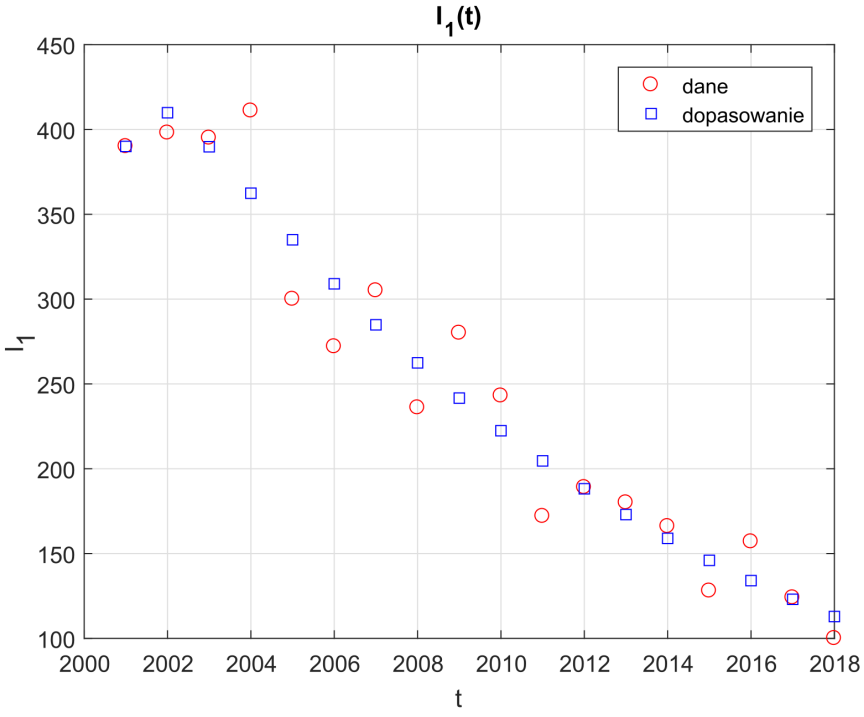
Tabela 4.2: Wartości współczynników transmisji użyte do symulacji.

Symbol	Wartość
β_{11}	$6,3995 \cdot 10^{-7}$
β_{12}	$7,0501 \cdot 10^{-8}$
β_{21}	$1,2435 \cdot 10^{-4}$
β_{22}	$3,3347 \cdot 10^{-5}$

Na rysunku 4.2 widzimy wyniki symulacji oraz dane rzeczywiste. Porównajmy ten rysunek z rysunkiem 4.1 dotyczącym układu (4.67). Zauważmy, że zarówno dla układu dyskretnego opartego na EEM, jak i tego na $NSDM$, dopasowanie wartości symulowanych do danych rzeczywistych jest podobne. Jak w przypadku użycia EEM, zakładamy $h = \frac{1}{2}$, zatem na rysunku 4.2 przedstawiliśmy wartość początkową I_1 oraz wartości I_1 odpowiadające kolejnym nieparzystym iteracjom odpowiedniego układu.



Rysunek 4.1: Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018 (liczba osób chorych niebezdomnych). Porównanie między danymi rzeczywistymi a symulowanymi dla modelu (4.67).



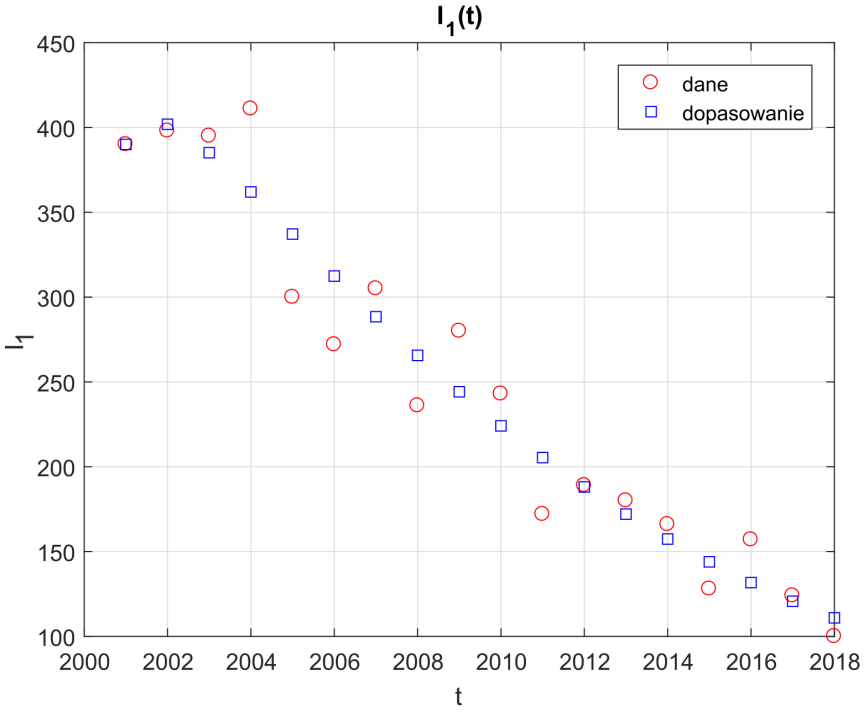
Rysunek 4.2: Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018 (liczba osób chorych niebezdomnych). Porównanie między danymi rzeczywistymi a symulowanymi dla odpowiednika modelu (4.34) przed skalowaniem.

Dokonano również symulacji dyskretnego układu przed skalowaniem opartego na $NSDM$, analogicznego do układu (4.40). Zauważmy, że w takim układzie przyjmujemy $\beta_{21} = 0$. Wartości użytych współczynników transmisji ujęto w tabeli 4.3.

Tabela 4.3: Wartości współczynników transmisji użyte do symulacji.

Symbol	Wartość
β_{11}	$6.4412 \cdot 10^{-7}$
β_{12}	$5.6551 \cdot 10^{-8}$
β_{22}	$9.4996 \cdot 10^{-4}$

Porównanie pomiędzy danymi rzeczywistymi a symulowanymi zostało przedstawione na rysunku 4.3. Podobnie jak w układzie (4.34) przyjęto $h = \frac{1}{2}$. Na rysunku 4.3 przedstawiono tylko wartość początkową I_1 oraz wartości I_1 dla kolejnych nieparzystych iteracji układu. Porównajmy rysunek 4.3 z rysunkiem 4.2, który dotyczy układu (4.34) opartego na $NSDM$ dla $\beta_2 \neq 0$. Wyniki symulacji w obu przypadkach w bardzo podobny sposób przybliżają dane rzeczywiste. Za pomocą wbudowanej w środowisku programistycznym Matlab funkcji *resnorm* obliczono błąd dopasowania, to znaczy sumę kwadratów różnic danych i obliczonych, przy czym w tej sumie uwzględniono wartości rzeczywiste i symulowane zmiennej I_1 dla lat 2001–2018. Dla symulacji układu (4.34) suma ta wynosi około 10302, natomiast dla układu (4.40) około 10599. Druga wartość jest większa od pierwszej o około $2,88\%$, zatem oba wyniki są podobnej wielkości. Stwierdzamy więc, że w modelowaniu dynamiki gruźlicy można przyjąć w modelach przed i po skalowaniu odpowiednio $\beta_{21} = 0$ i $\beta_2 = 0$, co potwierdza zasadność analizowania modelu (4.40) zamiast (4.34) w poprzednim podrozdziale.



Rysunek 4.3: Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018 (liczba osób chorych niebezdomnych). Porównanie między danymi rzeczywistymi a symulowanymi dla odpowiednika modelu (4.40) przed skalowaniem.

Bifurkacja układu – porównanie dyskretyzacji

Badanie bifurkacji układów dyskretnych czterowymiarowych jest trudniejsze niż w przypadku układów dwuwymiarowych. Z tego powodu teoretyczna analiza bifurkacji została w rozprawie pominięta.

Przedstawimy natomiast przykład numeryczny obrazujący bifurkację względem kroku dyskretyzacji dla dyskretnych wersji układu (3.35) (opartych na EEM i $NSDM$) z warunkiem początkowym

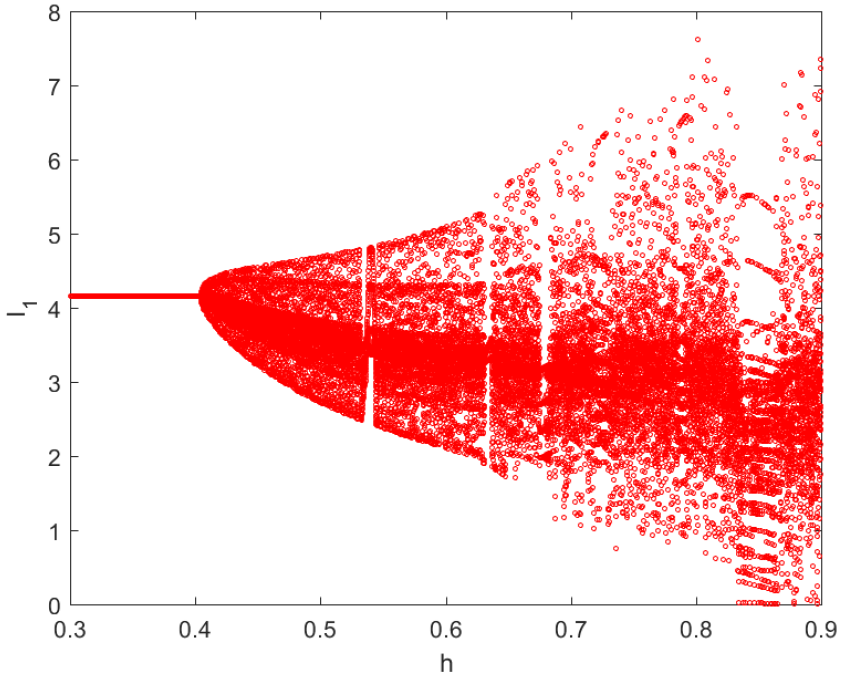
$$\left(S_0^{(1)}, I_0^{(1)}, S_0^{(2)}, I_0^{(2)}\right) = (0,6; 0.2; 0,3; 0,1).$$

Wartości parametrów użytych w symulacjach ujęto w tabeli 4.4. Wybrano je, wraz z warunkiem początkowym, arbitralnie. Jako zakres kroku dyskretyzacji przyjęto przedział $[0,3; 0,9]$. Wartości kroków dyskretyzacji z podanego przedziału tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $0,0001$.

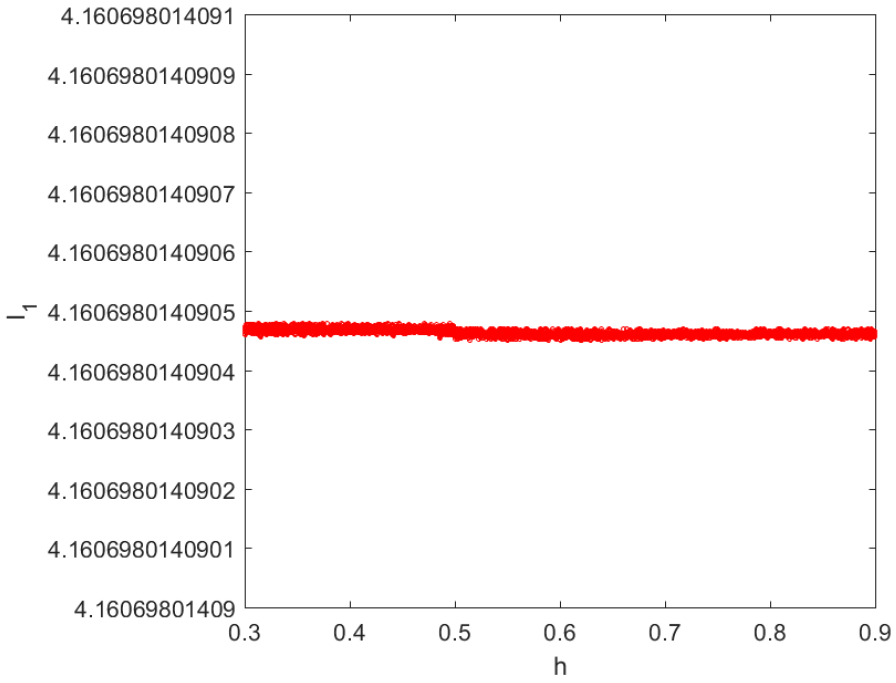
Tabela 4.4: Wartości parametrów użyte do badania bifurkacji.

Symbol	Wartość
C_1	$0,425$
C_2	$0,22$
γ_1	1
γ_2	$0,9$
μ_1, μ_2	$0,01$
α_1, α_2	$0,09$
β_{11}	$0,92$
β_{12}	$0,6$
β_{21}	$0,9$
β_{22}	$0,9$

Najpierw dokonano symulacji dyskretnej wersji układu (3.35) opartego na EEM. Wynik dyskretyzacji przedstawiono na rysunku 4.4. Krytyczna wartość kroku dyskretyzacji wynosi około $0,4$. Dokonano również analogicznej symulacji układu opartego na $NSDM$, przedstawiono ją na rysunku 4.5. Zauważyć można, że w przypadku zastosowania EEM po przekroczeniu progowej wartości kroku dyskretyzacji wynoszącej około $0,4$ pojawia się bifurkacja Neimarka-Sackera. W przypadku użycia NSDM bifurkacja nie występuje.



Rysunek 4.4: Zależność bifurkacyjna zmiennej I_1 od kroku dyskretyzacji h przy użyciu EEM.



Rysunek 4.5: Zależność bifurkacyjna zmiennej I_1 od kroku dyskretyzacji h przy użyciu $NSDM$.

4.5 Dyskusja

Wyniki przedstawione w tym rozdziale dotyczą własności układów dyskretnych, które powstały na skutek dyskretyzacji układu ciągłego (3.36). Do dyskretyzacji zastosowano EEM oraz $NSDM$ uzyskując układy (4.3) i (4.34).

Najpierw zbadaliśmy układ (4.3). Dodatniość zmiennych w tym układzie nie jest bezwarunkowa, co odróżnia go od odpowiedniego układu ciągłego (3.36). Analogiczny wniosek uzyskaliśmy dla przypadku dwuwymiarowego. Potwierdziliśmy zatem wcześniej sformułowane przez nas stwierdzenie, że układy dyskretne oparte na EEM mogą nie być odpowiednie do modelowania dynamiki populacyjnej, a w szczególności epidemii.

Wybrane własności rozwiązań i stanów stacjonarnych układu (4.3) są analogiczne do tych dla dyskretyzowanego modelu ciągłego. Warto tu zwrócić uwagę na ograniczoność rozwiązań i istnienie stanów stacjonarnych. Warunki gwarantujące lokalną stabilność stanów stacjonarnych mają jednak bardziej skomplikowaną postać od tych dla modelu ciągłego. W przypadku modeli dyskretnych pojawiają się dodatkowe zależności związane z krokiem dyskretyzacji.

Badając lokalną stabilność układu (2.1) dla populacji jednorodnej pokazaliśmy, że warunkami wystarczającymi eliminacji epidemii są nierówności

$$C < k\mu, \quad 0 < h < \min\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{\frac{C}{\mu} + \mu + 1}\right).$$

Te warunki nie gwarantują jednak, że choroba nie będzie rozprzestrzeniać się w populacji niejednorodnej. Jeśli zachodzą (N) oraz

$$0 < h < \min\left(\frac{1}{k_i}, \frac{1}{\frac{C_i}{\mu_i} + \mu_i + 1}\right), \quad i = 1, 2,$$

ale co najmniej jeden z warunków (W) lub (4.13) nie zachodzi, to epidemia może dalej się rozwijać. Analiza modeli dyskretnych potwierdza hipotezę badawczą postawioną w rozprawie – aby powstrzymać transmisję choroby w populacji niejednorodnej, należy rozważać dynamikę rozwoju epidemii między podpopulacjami, a nie tylko w każdej z podpopulacji osobno.

Dalej wstępnie omówiliśmy własności układu (4.34). Zbadaliśmy warunki lokalnej stabilności stanu stacjonarnego wolnego od epidemii. Są one tożsame z analogicznymi warunkami w układzie (4.3). Lokalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego E_e jest trudna do zbadania, postanowiliśmy zatem uprościć układ (4.34) poprzez przyjęcie założenia $\beta_2 \to 0$. Odpowiada ono możliwej w rzeczywistości sytuacji, kiedy nie występuje transmisja choroby z podpopulacji niskiego ryzyka do podpopulacji wysokiego ryzyka. Układ (4.34) z tym założeniem przyjmuje postać (4.40). Wyznaczyliśmy stany stacjonarnego tak uproszczonego układu i podaliśmy warunki gwarantujące ich istnienie. Okazuje się, że układ (4.40) ma więcej stanów stacjonarnych niż układ (4.34). Podaliśmy warunki lokalnej stabilności tych stanów. Określenie takich warunków w układzie (4.40) jest prostsze niż w przypadku układu (4.34). Wyznaczone warunki mają jawną postać, czego nie udało się uzyskać dla układu (4.34).

Podobnie jak w przypadku wyników z rozdziału 2 zaakcentujmy, że rezultaty z tego rozdziału można odnieść nie tylko do badania dynamiki epidemii. Przedstawione rozważania wpisują się w tematykę analizy stabilności dyskretnych układów czterowymiarowych, do których zastosowano otwarty schemat Eulera lub dyskretyzację niestandardową. Tak jak w rozdziale 2, uzyskane wyniki (na przykład dla lokalnej stabilności) dla przypadku czterowymiarowego mają jawną postać. Również w tym rozdziale postanowiliśmy uzależnić te wyniki od kroku dyskretyzacji, co jest podejściem nietypowym.

Podsumowanie

Głównym celem przedłożonej rozprawy było zweryfikowanie hipotezy badawczej stwierdzającej, że modele krzyżowe są konieczne do właściwego opisu epidemii w populacjach niejednorodnych. W rozprawie przyjęliśmy, że populacja niejednorodna składa się z dwóch podpopulacji różniących się stopniem zachorowalności i zakaźalności chorobą. Pierwsza z podpopulacji cechuje się stopniem niskim, druga – wysokim. Nazwaliśmy je odpowiednio podpopulacjami niskiego i wysokiego ryzyka. Dodatkowym celem było również sprawdzenie hipotezy, że w przypadku epidemii w populacji niejednorodnej może wystąpić transmisja choroby z jednej podpopulacji do całej populacji, co przyczynia się do rozprzestrzeniania się epidemii w całej populacji.

W pierwszym rozdziale dokonano analizy ciągłych modeli dynamiki epidemii w populacji jednorodnej. Przedstawiono dwa modele – pierwszy obrazował zmienny napływ do populacji, drugi – stały. Uzyskano warunki rozwoju lub zaniku epidemii. W tym celu dokonano analizy istnienia oraz stabilności stanów stacjonarnych układów. Lokalną stabilność pokazano badając wartości własne odpowiednich macierzy Jacobiego. W przypadku globalnej stabilności stanu stacjonarnego wolnego od epidemii dla modelu ze zmiennym napływem korzystano z postaci przedstawionego układu. Dla modelu ze stałym napływem, korzystając z kryterium Dulaca-Bendixona i twierdzenia Poincarégo-Bendixsona, pokazano, że lokalna stabilność stanów stacjonarnych implikuje stabilność globalną. Co więcej, aby udowodnić globalną stabilność endemicznego stanu stacjonarnego E_e, sformułowano dwie odpowiednie funkcje Lapunowa.

Drugi rozdział zawiera analizę dwóch modeli dyskretnych opartych na modelu ciągłym ze stałym napływem. Dla pierwszego z nich zastosowano otwarty schemat Eulera (EEM), dla drugiego – niestandardową metodę dyskretyzacji ($NSDM$). Lokalną stabilność stanów stacjonarnych udowodniono analizując wartości własne macierzy Jacobiego. Globalną stabilność stanu E_{df} dla obu modeli pokazano, opierając się na postaciach układów. W przypadku modelu opartym na EEM globalną stabilność stanu E_e badano korzystając z podejścia przedstawionego w [78]. Stosuje się w nim kryterium porównawcze ciągów i twierdzenie o trzech ciągach.

W trzecim rozdziale dokonano analizy ciągłych modeli dynamiki epidemii w populacji niejednorodnej składającej z dwóch populacji jednorodnych. Rozpatrzono model ze zmiennym napływem do każdej z podpopulacji oraz model z napływem stałym. Dla każdego z tych modeli dokonano analizy istnienia stanów stacjonarnych. Dla pierwszego modelu pokazano lokalną stabilność odpowiednich stanów stacjonarnych badając wartości własne macierzy Jacobiego albo stosując kryterium Routha-Hurwitza. Następnie przeanalizowano stabilność czterowymiarowych stanów E_{df} oraz E_e modelu ze stałym napływem. Należy podkreślić, że w układzie ze zmiennym napływem nie występuje stan E_{df}. Aby wykazać lokalną stabilność stanu E_{df}, skorzystano z koncepcji macierzy następnego pokolenia omówionej w [39]. Posłużono się współczynnikiem odnowienia epidemii $\mathcal{R}_0$, który w [38] został zdefiniowany jako promień spektralny tej macierzy. Globalną stabilność stanu E_{df} pokazano na dwa sposoby. W pierwszym z nich posłużono się odpowiednią funkcją Lapunowa, natomiast w drugim skorzystano z podejścia przedstawionego w [64], gdzie uwzględnia się niezmienniczość odpowiednich zbiorów dodatnich. Lokalną stabilność stanu E_e uzyskano z kryterium Routha-Hurwitza, globalną stabilność zaś wykazano przy użyciu dwóch funkcji Lapunowa.

Czwarty rozdział dotyczy trzech modeli dyskretnych dla populacji niejednorodnej, które zbudowano na podstawie modelu ze stałym napływem z rozdziału trzeciego. Najpierw przedstawiono i przeanalizowano model oparty na EEM. Lokalną stabilność stanu E_{df} pokazano badając wartość własne odpowiedniej macierzy Jacobiego. Analizę lokalnej stabilności stanu E_e oparto na podejściu przedstawionym w [20]. Korzysta się tam z wyznacznika i śladu macierzy Jacobiego oraz jej minorów głównych drugiego i trzeciego rzędu. Następnie zbudowano model dyskretny na podstawie $NSDM$. Obliczenia odnoszące się do lokalnej stabilności stanu E_e w przypadku takiego układu są skomplikowane i wnioski z nich płynące nie są informatywne. Postanowiono zatem uprościć model zakładając brak transmisji choroby z osób

z grupy niskiego ryzyka na osoby z grupy wysokiego ryzyka. Takie założenie jest zasadne z medycznego punktu widzenia. Zauważono jednak, że model z takim uproszczeniem ma inne własności niż model bez uproszczenia. W szczególności pojawia się dodatkowy stan stacjonarny odzwierciedlający sytuację, gdy epidemia zanika w podpopulacji wysokiego ryzyka, utrzymuje się zaś w podpopulacji niskiego ryzyka. Dzięki uproszczeniu lokalną stabilność każdego ze stanów stacjonarnych można udowodnić badając wartości własne odpowiednich macierzy Jacobiego.

Na podstawie otrzymanych wniosków zarówno w przypadku modeli ciągłych, jak i dyskretnych stwierdzono, że przeniesienie zakażenia z jednej podpopulacji do drugiej może istotnie spowodować rozprzestrzenianie się epidemii w całej populacji. Nawet jeśli choroba nie rozwinie się w danej podpopulacji oddzielnie, to infekcja może być przeniesiona z jednej podpopulacji na drugą i epidemia może rozwijać się w populacji niejednorodnej. Wynika z tego, że aby kontrolować rozwój choroby, nie wystarczy rozważać dynamikę epidemii osobno w każdej podpopulacji. Aby móc właściwie opisać przebieg epidemii w populacji niejednorodnej, należy rozważać krzyżową dynamikę epidemii. Jest to najważniejsza hipoteza przedstawionej rozprawy, która została potwierdzona za pomocą modelowania matematycznego.

Cele przedłożonej rozprawy zostały zrealizowane.

Dodatek A

Drugi dowód twierdzenia 1.16

Rozważamy podprzestrzeń U przestrzeni fazowej $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+\}$ zdefiniowaną jak w (1.17).

Dowód. Zaproponujmy funkcję Lapunowa dla stanu E_e postaci

$$L(x,y) := \frac{1}{2}(x-x_e)^2 + (\alpha+\mu)\left(y - y_e - y_e \ln\frac{y}{y_e}\right).$$

Mamy $L(x,y) \geq 0$ dla wszystkich $(x,y) \in U$. Ponadto $L(x,y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = x_e$ oraz $y = y_e$. Obliczmy pochodną funkcji L wzdłuż trajektorii układu (1.14). Dostajemy

$$\begin{aligned} L'(x,y) &= (x-x_e)\left(C - xy - \mu x + \eta y\right) + (\alpha+\mu)\left(\frac{y-y_e}{y}\right) y(x-x_e) \\ &= (\alpha+\mu)(y-y_e)(x-x_e) + (x-x_e)\left(C - xy + x_e y - x_e y - \mu x + \eta y\right) \\ &= (\alpha+\mu)(y-y_e)(x-x_e) - y(x-x_e)^2 + (x-x_e)\Big(C - \mu x + (\eta - x_e)y\Big). \end{aligned}$$

Z notacji $k = 1 + \alpha + \mu$ uzyskujemy

$$1 - x_e = -(\alpha+\mu). \tag{A.1}$$

Stosując zależności (1.19) oraz (A.1) do obliczania L' otrzymujemy

$$L'(x,y) = (\alpha+\mu)(y-y_e)(x-x_e) - y(x-x_e)^2 + (x-x_e)\Big(\mu x_e + (\alpha+\mu)y_e - \mu x - (\alpha+\mu)y\Big)$$

$$= (\alpha+\mu)(y-y_e)(x-x_e) - y(x-x_e)^2 + (x-x_e)\Big(\mu(x_e - x) + (\alpha+\mu)(y_e - y)\Big)$$

$$= (\alpha+\mu)(y-y_e)(x-x_e) - (\alpha+\mu)(y-y_e)(x-x_e) - y(x-x_e)^2 - \mu(x-x_e)^2 = -(y+\mu)(x-x_e)^2.$$

Zauważmy, że $L'(x,y) \leq 0$ dla dowolnych $(x,y) \in U$. Ponadto $L'(x,y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = x_e$. Jeśli jednak $x = x_e$, to jedynym niezmienniczym względem układu (1.14) podzbiorem zbioru, na którym $L' = 0$, jest stan stacjonarny (x_e, y_e). Zasada Lapunowa-LaSalle'a implikuje, że endemiczny stan stacjonarny układu (1.14) jest globalnie asymptotycznie stabilny. □

Dodatek B

Globalna stabilność stanu wolnego od epidemii układu (3.36) z użyciem funkcji Lapunowa

Twierdzenie B.1. *Stan wolny od epidemii E_{df} układu* (3.36) *jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeśli spełnione są warunki* (N1), (N2) *oraz*

$$\beta_i \leq \frac{(k_{3-i} - \tilde{x}_{3-i})(\alpha_{3-i} + 2\mu_{3-i})}{\tilde{x}_i(\alpha_i + 2\mu_i)}.$$

Dowód. Rozpatrzmy funkcję Lapunowa

$$U(x_1, x_2, y_1, y_2) := \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{2} (x_i - \tilde{x}_i + y_i)^2 + (\alpha_i + 2\mu_i) y_i \right),$$

gdzie $\tilde{x}_i = \frac{C_i}{\mu_i}$. Oczywiście zachodzi $U(x_1, x_2, y_1, y_2) \geq 0$ dla wszystkich $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$. Ponadto mamy $U(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_2, 0)$.

Różniczkując funkcję U wzdłuż trajektorii układu (3.36) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
U' = {} & (x_1 - \tilde{x}_1 + y_1)\Big(\mu_1(\tilde{x}_1 - x_1) - (\alpha_1 + \mu_1)y_1\Big) + (x_2 - \tilde{x}_2 + y_2)\Big(\mu_2(\tilde{x}_2 - x_2) - (\alpha_2 + \mu_2)y_2\Big) \\
& + (\alpha_1 + 2\mu_1)(x_1 y_1 + \beta_1 x_1 y_2 - k_1 y_1) + (\alpha_2 + 2\mu_2)(x_2 y_2 + \beta_2 x_2 y_1 - k_2 y_2) \\
= {} & -\mu_1(x_1 - \tilde{x}_1)^2 - (\alpha_1 + \mu_1)y_1^2 - \mu_2(x_2 - \tilde{x}_2)^2 - (\alpha_2 + \mu_2)y_2^2 - (\alpha_1 + 2\mu_1)y_1(x_1 - \tilde{x}_1 - x_1 + k_1) \\
& - (\alpha_2 + 2\mu_2)y_2(x_2 - \tilde{x}_2 - x_2 + k_2) + (\alpha_1 + 2\mu_1)\beta_1 x_1 y_2 + (\alpha_2 + 2\mu_2)\beta_2 x_2 y_1 \\
= {} & -\mu_1(x_1 - \tilde{x}_1)^2 - (\alpha_1 + \mu_1)y_1^2 - \mu_2(x_2 - \tilde{x}_2)^2 - (\alpha_2 + \mu_2)y_2^2 - (\alpha_1 + 2\mu_1)y_1(k_1 - \tilde{x}_1) \\
& - (\alpha_2 + 2\mu_2)y_2(k_2 - \tilde{x}_2) + (\alpha_1 + 2\mu_1)\beta_1 x_1 y_2 + (\alpha_2 + 2\mu_2)\beta_2 x_2 y_1.
\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że badamy układ w zbiorze niezmienniczym $x_i + y_i \in \left[\frac{C_i}{\alpha_i + \mu_i}, \frac{C_i}{\mu_i}\right]$. Stąd

$$x_i \leq x_i + y_i \leq \frac{C_i}{\mu_i} = \tilde{x}_i.$$

Korzystając z powyższej zależności dostajemy

$$(\alpha_1 + 2\mu_1)\beta_1 x_1 y_2 \leq (\alpha_1 + 2\mu_1)\beta_1 \tilde{x}_1 y_2, \quad (\alpha_2 + 2\mu_2)\beta_2 x_2 y_1 \leq (\alpha_2 + 2\mu_2)\beta_2 \tilde{x}_2 y_1.$$

Zauważmy, że przy założeniu $k_1 > \tilde{x}_1$ zachodzi równoważność

$$-y_1\big((\alpha_1 + 2\mu_1)(k_1 - \tilde{x}_1) - \beta_2 \tilde{x}_2(\alpha_2 + 2\mu_2)\big) \leq 0 \tag{B.1}$$

$$\iff \quad \beta_2 \leq \frac{(k_1 - \tilde{x}_1)(\alpha_1 + 2\mu_1)}{\tilde{x}_2(\alpha_2 + 2\mu_2)}. \tag{B.2}$$

Analogicznie przy założeniu $k_2 > \tilde{x}_2$ dostajemy

$$-y_2\big((\alpha_2 + 2\mu_2)(k_2 - \tilde{x}_2) - \beta_1\tilde{x}_1(\alpha_1 + 2\mu_1)\big) \leq 0 \tag{B.3}$$

$$\iff \quad \beta_1 \leq \frac{(k_2 - \tilde{x}_2)(\alpha_2 + 2\mu_2)}{\tilde{x}_1(\alpha_1 + 2\mu_1)}. \tag{B.4}$$

Jeżeli zachodzą nierówności (B.1) i (B.3), to

$$U' \leq -\mu_1(x_1 - \tilde{x}_1)^2 - (\alpha_1 + \mu_1)y_1^2 - \mu_2(x_2 - \tilde{x}_2)^2 - (\alpha_2 + \mu_2)y_2^2.$$

Przypomnijmy, że zależności $k_1 > \tilde{x}_1$ i $k_2 > \tilde{x}_2$ są tożsame odpowiednio z (N1) i (N2). Wobec tego nierówności (B.2), (B.4), (N1) i (N2). implikują $U' \leq 0$ dla dowolnych x_i oraz y_i. W szczególności mamy

$$U' < 0 \quad <=> \quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \neq (\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_2, 0),$$

co kończy dowód. □

Z nierówności (B.2) oraz zależności $\tilde{x}_1 = \frac{C_1}{\mu_1}$ i $\tilde{x}_2 = \frac{C_2}{\mu_2}$ mamy

$$\beta_2\frac{C_2}{\mu_2}(\alpha_2 + \mu_2) \leq \left(k_1 - \frac{C_1}{\mu_1}\right)(\alpha_1 + 2\mu_1).$$

Analogicznie z nierówności (B.4) uzyskujemy

$$\beta_1\frac{C_1}{\mu_1}(\alpha_1 + \mu_1) \leq \left(k_2 - \frac{C_2}{\mu_2}\right)(\alpha_2 + 2\mu_2).$$

Mnożąc (B.2) i (B.4) przez siebie otrzymujemy nierówność

$$\beta_1\beta_2 C_1 C_2 \leq (k_1\mu_1 - C_1)(k_2\mu_2 - C_2). \tag{B.5}$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli w (B.5) przyjmiemy nierówność ostrą, to tak powstała nierówność wraz z (N1) i (N2) tworzy warunki lokalnej stabilności stanu E_{df}.

Jeśli spełnione są zależności (N1), (N2) oraz $\beta_1\beta_2 C_1 C_2 = (k_1\mu_1 - C_1)(k_2\mu_2 - C_2)$, to otrzymujemy $\mathcal{R}_0 = 1$. Stwierdzamy więc, że dzięki zastosowaniu funkcji Lapunowa uzyskujemy warunek globalnej (a zatem również i lokalnej) stabilności stanu stacjonarnego E_{df} dla $\mathcal{R}_0 = 1$. Zauważmy, że przy badaniu lokalnej stabilności stanu E_{df} nie uzyskaliśmy warunku gwarantującego jej dla $\mathcal{R}_0 = 1$.

Podkreślmy też, że nierówności ostrych w (N1) i (N2) nie da się zastąpić nieostrymi. Jeżeli co najmniej jedna z równości: $k_1\mu_1 = C_1$ lub $k_2\mu_2 = C_2$ byłaby prawdziwa, to wówczas co najmniej jeden z parametrów β_1 i β_2 musiałby wynosić zero, co jest sprzeczne z założeniem o dodatniości tych parametrów.

Dodatek C

Globalna stabilność endemicznego stanu stacjonarnego układu (3.36) z użyciem kolejnej funkcji Lapunowa

Proponowana kolejna funkcja Lapunowa ma postać

$$L(x_1,x_2,y_1,y_2) := \frac{1}{2}(x_1-\bar{x}_1)^2 + (\alpha_1+\mu_1)\left(y_1-\bar{y}_1-\bar{y}_1\ln\frac{y_1}{\bar{y}_1}\right) + \frac{1}{2}(x_2-\bar{x}_2)^2 + (\alpha_2+\mu_2)\left(y_2-\bar{y}_2-\bar{y}_2\ln\frac{y_2}{\bar{y}_2}\right).$$

Oczywiście zachodzi $L(x_1,x_2,y_1,y_2)\geq 0$ dla wszystkich $x_1,x_2,y_1,y_2\geq 0$ oraz $L(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1,x_2,y_1,y_2)=(\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{x}_2,\bar{y}_2)$.

Pochodna funkcji L wzdłuż trajektorii układu (3.36) wynosi

$$L' = \sum_{i=1}^{2}\left((x_i-\bar{x}_i)\left(C_i - x_iy_i - \beta_i x_i y_{3-i} + \eta_i y_i - \mu_i x_i\right) + (\alpha_i+\mu_i)(x_iy_i + \beta_i x_i y_{3-i} - k_i y_i)\frac{y_i-\bar{y}_i}{y_i}\right).$$

Zauważmy, że dla stanu endemicznego mamy

$$C_i = \bar{x}_i\bar{y}_i + \beta_i\bar{x}_i\bar{y}_{3-i} - \eta_i\bar{y}_i + \mu_i\bar{x}_i. \tag{C.1}$$

Korzystając z (C.1) dostajemy

$$L' = \sum_{i=1}^{2}\Bigg((x_i-\bar{x}_i)\left(\bar{x}_i\bar{y}_i + \beta_i\bar{x}_i\bar{y}_{3-i} - \eta_i\bar{y}_i + \mu_i\bar{x}_i - x_iy_i - \beta_i x_i y_{3-i} + \eta_i y_i - \mu_i x_i\right) + (\alpha_i+\mu_i)(x_i-k_i)(y_i-\bar{y}_i) + (\alpha_i+\mu_i)\beta_i x_i y_{3-i}\frac{y_i-\bar{y}_i}{y_i}\Bigg).$$

Do powstałego wyrażenia dodajmy

$$\sum_{i=1}^{2}\left((x_i-\bar{x}_i)(-\beta_i x_i\bar{y}_{3-i} + \beta_i x_i\bar{y}_{3-i}) + (\alpha_i+\mu_i)(-\bar{x}_i+\bar{x}_i)(y_i-\bar{y}_i)\right),$$

które jest równe zero. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
L' = &\sum_{i=1}^{2}\Bigg((\bar{x}_i\bar{y}_i - x_i\bar{y}_i + x_i\bar{y}_i - x_iy_i + \beta_i\bar{x}_i\bar{y}_{3-i} - \beta_ix_i\bar{y}_{3-i} + \beta_ix_i\bar{y}_{3-i} - \beta_ix_iy_{3-i})(x_i - \bar{x}_i)\\
&+ (x_i - \bar{x}_i)(-\eta_i\bar{y}_i + \mu_i\bar{x}_i + \eta_iy_i - \mu_ix_i)\\
&+ (\alpha_i + \mu_i)(x_i - \bar{x}_i + \bar{x}_i - k_i)(y_i - \bar{y}_i) + (\alpha_i + \mu_i)\beta_ix_iy_{3-i}\frac{y_i - \bar{y}_i}{y_i}\Bigg)\\
= &\sum_{i=1}^{2}\Bigg(-\bar{y}_i(x_i - \bar{x}_i)^2 - x_i(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i) - \beta_i\bar{y}_{3-i}(x_i - \bar{x}_i)^2\\
&- \beta_ix_i(x_i - \bar{x}_i)(y_{3-i} - \bar{y}_{3-i}) - \mu_i(x_i - \bar{x}_i)^2 + \eta_i(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i)\\
&+ (\alpha_i + \mu_i)(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i) - (\alpha_i + \mu_i)(k_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i) + (\alpha_i + \mu_i)\beta_ix_iy_{3-i}\frac{y_i - \bar{y}_i}{y_i}\Bigg).
\end{aligned}$$

Postępując podobnie jak w przypadku wyrażeń (3.70) i (3.71) zapisujemy

$$-(\alpha_i + \mu_i)(y_i - \bar{y}_i)(k_i - \bar{x}_i) + (\alpha_i + \mu_i)\beta_i\frac{x_iy_{3-i}}{y_i}(y_i - \bar{y}_i)$$

w postaci

$$-\beta_i(\alpha_i + \mu_i)\frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_i}(y_i - \bar{y}_i)(\bar{y}_{3-i} - y_{3-i}) - \beta_i(\alpha_i + \mu_i)\frac{y_{3-i}\bar{x}_i}{y_i\bar{y}_i}(y_i - \bar{y}_i)^2 + \beta_i(\alpha_i + \mu_i)\frac{y_{3-i}}{y_i}(y_i - \bar{y}_i)(x_i - \bar{x}_i),$$

dzięki czemu otrzymujemy

$$\begin{aligned}
L' = &\sum_{i=1}^{2}\Bigg(-\bar{y}_i(x_i - \bar{x}_i)^2 - x_i(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i) - \beta_i\bar{y}_{3-i}(x_i - \bar{x}_i)^2 - \beta_ix_i(x_i - \bar{x}_i)(y_{3-i} - \bar{y}_{3-i})\\
&+ (\eta_i + \alpha_i + \mu_i)(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i) - \beta_i(\alpha_i + 2\mu_i)\frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_i}(y_i - \bar{y}_i)(\bar{y}_{3-i} - y_{3-i})\\
&- \beta_i(\alpha_i + 2\mu_i)\frac{y_{3-i}\bar{x}_i}{y_i\bar{y}_i}(y_i - \bar{y}_i)^2 + \beta_i(\alpha_i + 2\mu_i)\frac{y_{3-i}}{y_i}(y_i - \bar{y}_i)(x_i - \bar{x}_i)\Bigg).
\end{aligned}$$

Oczywiście pochodna L' wynosi zero wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$. Sprawdźmy, dla jakich warunków uzyskujemy $L' < 0$, gdy zmienne x_1, y_1, x_2 oraz y_2 są dodatnie. Analogicznie jak w przypadku analizy funkcji Lapunowa z paragrafu 3.2.6, zbadamy równoważny warunek $-L' > 0$. Oznaczmy przez M_L macierz formy kwadratowej $-L'(x_1 - \bar{x}_1, y_1 - \bar{y}_1, x_2 - \bar{x}_2, y_2 - \bar{y}_2)$, która ma postać

$$\begin{pmatrix}
u_1 & 0 & \frac{x_1}{2} + w_1 - z_1\frac{y_2}{y_1} & \frac{\beta_1}{2}x_1\\
0 & u_2 & \frac{\beta_2}{2}x_2 & \frac{x_2}{2} + w_2 - z_2\frac{y_1}{y_2}\\
\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1\frac{y_2}{y_1} & \frac{\beta_2}{2}x_2 & s_1\frac{y_2}{y_1} & \frac{s_1+s_2}{2}\\
\frac{\beta_1}{2}x_1 & \frac{x_2}{2} + w_2 - z_2\frac{y_1}{y_2} & \frac{s_1+s_2}{2} & s_2\frac{y_1}{y_2}
\end{pmatrix},$$

gdzie

$$u_1 = \bar{y}_1 + \beta_1\bar{y}_2 + \mu_1, \quad u_2 = \bar{y}_2 + \beta_2\bar{y}_1 + \mu_2, \quad w_1 = -\frac{\eta_1 + \alpha_1 + \mu_1}{2}, \quad w_2 = -\frac{\eta_2 + \alpha_2 + \mu_2}{2},$$

$$z_1 = \frac{\beta_1(\alpha_1 + \mu_1)}{2}, \quad z_2 = \frac{\beta_2(\alpha_2 + \mu_2)}{2}, \quad s_1 = \frac{\beta_1(\alpha_1 + \mu_1)}{2}\frac{\bar{x}_1}{\bar{y}_1}, \quad z_2 = \frac{\beta_2(\alpha_2 + \mu_2)}{2}\frac{\bar{x}_2}{\bar{y}_2}.$$

Na podstawie znaków poszczególnych minorów wiodących macierzy M_L możemy określić warunki dodatniości formy $-L$:

- z minoru wiodącego pierwszego rzędu: $u_1 > 0$ – zawsze prawdziwy,
- z minoru wiodącego drugiego rzędu: $u_1u_2 > 0$ – również zawsze spełniony,

- z minoru wiodącego trzeciego rzędu:

$$u_1 u_2 s_1 \frac{y_2}{y_1} - u_2 \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right)^2 - u_1 \left(\frac{\beta_2}{2} x_2 \right)^2 > 0, \tag{C.2}$$

- z minoru wiodącego czwartego rzędu:

$$\begin{aligned}
& u_1 \left(u_2 s_1 s_2 - \left(\frac{s_1 + s_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{2} x_2 \right)^2 \left(s_1 + s_2 - s_1 \frac{y_2}{y_1} - s_2 \frac{y_1}{y_2} \right) \right) \cdot \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \\
& \cdot \left(\frac{s_1 + s_2}{2} u_2 \frac{\beta_1}{2} x_1 + \left(\frac{x_2}{2} + w_2 - z_2 \frac{y_1}{y_2} \right)^2 \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \right) \\
& - \frac{\beta_1}{2} x_1 \frac{\beta_2}{2} x_2 \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \left(\frac{x_2}{2} + w_2 - z_2 \frac{y_1}{y_2} \right) \\
& - s_2 u_2 \frac{y_1}{y_2} \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \\
& - \frac{\beta_1}{2} x_1 \left(u_2 s_1 \frac{y_2}{y_1} \frac{\beta_1}{2} x_1 + \frac{\beta_2}{2} x_2 \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \left(\frac{x_2}{2} + w_2 - z_2 \frac{y_1}{y_2} \right) \right) \\
& - \frac{\beta_1}{2} x_1 \left(-\frac{\beta_1}{2} x_1 \left(\frac{\beta_2}{2} x_2 \right)^2 - \left(\frac{s_1 + s_2}{2} \right)^2 u_2 \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \right) > 0.
\end{aligned}$$

Ostatni warunek zapiszmy jako

$$\begin{aligned}
& \left(u_1 s_2 \frac{y_1}{y_2} - \left(\frac{x_2}{2} + w_2 - z_2 \frac{y_1}{y_2} \right)^2 \right) \left(u_2 s_1 \frac{y_2}{y_1} - \left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right) \\
& + \left(u_1 s_2 \frac{y_1}{y_2} - \left(\frac{\beta_1}{2} x_1 \right)^2 \right) \left(u_2 s_1 \frac{y_2}{y_1} - \left(\frac{\beta_2}{2} x_2 \right)^2 \right) - 2 \left(\left(\frac{x_2}{2} + w_2 - z_2 \frac{y_1}{y_2} \right) \frac{\beta_1}{2} x_1 - u_1 \frac{s_1 + s_2}{2} \right) \\
& \cdot \left(\left(\frac{x_1}{2} + w_1 - z_1 \frac{y_2}{y_1} \right) \frac{\beta_2}{2} x_2 - u_2 \frac{s_1 + s_2}{2} \right) + \frac{u_1 u_2}{2} \left(s_1 + s_2 - 2 s_1 s_2 \right) > 0.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność oraz zależność (C.2) powinny być oczywiście równoważne warunkom (3.65), (3.66) i (3.67).

Dodatek D

Postać współczynnika b_0 z paragrafu 4.1.2

$$
\begin{aligned}
b_0 = -u_1^2u_2^2\Bigg(&\Big((u_1+u_2)(\alpha_1+\mu_1+\alpha_2+\mu_2)+\mu_1\bar{k}_1+\mu_2\bar{k}_2\Big)+2\bar{k}_1\bar{k}_2-2(1-\bar{x}_1)(\eta-\bar{x}_2)\\
&+\sum_{i=1}^{2}\Big((\alpha_i+\mu_i)(2\bar{k}_i+2\mu_i+\bar{k}_{3-i}+3\mu_{3-i})\Big)\Bigg)\\
-\sum_{i=1}^{2}\Bigg(&u_i^3u_{3-i}\Big((\alpha_i+\mu_i)^2+2(\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})(\alpha_i+\mu_i)+(\alpha_{3-i}+\mu_{3-i})(\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})+\alpha_{3-i}\mu_{3-i}\Big)\Bigg)\\
-\sum_{i=1}^{2}\Bigg(&u_i^2u_{3-i}\Big((\alpha_i+\mu_i)^2+(\alpha_i+\mu_i)\Big(3\mu_{3-i}^2+\bar{k}_{3-i}^2+2(\mu_i\bar{k}_i+\mu_{3-i}\bar{k}_{3-i})\\
&+4\big((\bar{k}_i+\mu_i)(\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})+\beta_i\beta_{3-i}\bar{x}_i\bar{x}_{3-i}-\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}\big)\Big)\\
&+(\alpha_{3-i}+\mu_{3-i})\left((\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})^2+3\mu_1(\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})+\beta_i\beta_{3-i}\bar{x}_i\bar{x}_{3-i}-\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i}\bar{k}_i\right)\Big)\Bigg)\\
+\sum_{i=1}^{2}\Bigg(&u_i^2u_{3-i}\Big((\mu_i+\mu_{3-i})(\beta_i\beta_{3-i}\bar{x}_i\bar{x}_{3-i}-\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}-2\mu_i\mu_{3-i}(\bar{k}_i+\bar{k}_{3-i})\Big)\Bigg)\\
+\sum_{i=1}^{2}\Bigg(&u_i^2u_{3-i}\Big(2\mu_{3-i}\big(\bar{k}_1\bar{k}_2-(1-\bar{x}_1)(\eta-\bar{x}_2)\big)\Big)\Bigg)\\
+u_1u_2(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2)\Bigg(&\sum_{i=1}^{2}\Big((\alpha_i+\mu_i)(\mu_i+2\bar{k}_i+\bar{k}_{3-i}+3\mu_i\bar{k}_i)\Big)+2(\mu_1+\mu_2)^2+2(\mu_1\bar{k}_2+\mu_2\bar{k}_1)\Bigg)\\
&-u_1u_2\bar{k}_1\bar{k}_2\Big((1-\bar{x}_1)(\alpha_1+\mu_1)+(\eta-\bar{x}_2)(\alpha_2+\mu_2)\Big)\\
&-2u_1u_2\Big(\bar{k}_1\bar{k}_2-(1-\bar{x}_1)(\eta-\bar{x}_2)\Big)\left(2\mu_1\mu_2+2\mu_2\bar{k}_1+2\mu_1\bar{k}_2\right)\\
&-u_1u_2\sum_{i=1}^{2}\Bigg(2(\alpha_i+\mu_i)\Big(\mu_i^2(\mu_{3-i}+\bar{k}_i+\bar{k}_{3-i})+\bar{k}_i^2(\mu_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2\bar{k}_{3-i}\Big)\Bigg)\\
&-u_1u_2\sum_{i=1}^{2}\Bigg((\alpha_i+\mu_i)\Big(3\mu_{3-i}^2(\bar{k}_i+\mu_i)+4\mu_i\bar{k}_i(\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})+\mu_{3-i}\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}\Big)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- u_1u_2\sum_{i=1}^{2}\Big((\alpha_i+\mu_i)\left(\bar{k}_i^2\bar{k}_{3-i}+\mu_i\bar{k}_{3-i}^2\right)+4\mu_14\mu_2\Big((\bar{k}_i+\bar{k}_{3-i})^2+\mu_1\bar{k}_1+\mu_2\bar{k}_2\Big)\Big)\\
&\qquad- u_1u_2\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i^2\left(\bar{k}_i^2+2\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}+3\mu_{3-i}\bar{k}_{3-i}\right)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^3(\mu_{3-i}+\bar{k}_{3-i})\Big((\alpha_i+\mu_i)(\alpha_i+\mu_i+\mu_{3-i}+\bar{k}_{3-i})+\mu_{3-i}\bar{k}_{3-i}\Big)\Big)\\
&\qquad- (\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2)\sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^2\Big((\alpha_i+\mu_i)(\bar{k}_{3-i}+\mu_i+2\mu_{3-i})+\bar{k}_{3-i}(2\mu_{3-i}+\mu_i)+\mu_{3-i}^2\Big)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^2\Big((\alpha_i+\mu_i)^2\big(\mu_i(\mu_{3+i}+\bar{k}_{3-i})+\bar{k}_i(\mu_{3-i}+1)\big)\Big)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^2(\alpha_i+\mu_i)\Big(\mu_i\mu_{3-i}(2\bar{k}_i+4\bar{k}_{3-i})+\mu_{3-i}^2(2\mu_i+\mu_{3-i}+2\bar{k}_i+\bar{k}_{3-i})\Big)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^2(\alpha_i+\mu_i)\Big(\bar{k}_{3-i}^2(2\mu_1+\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})+\mu_i\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}\Big)\Big)\\
&- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^2\Big(\mu_{3-i}^2\bar{k}_{3-i}(3\mu_1+\mu_{3-i}+2\bar{k}_i+2\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i}\bar{k}_i)+3\mu_1+\mu_i\mu_{3-i}(2\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}+3\bar{k}_{3-i}^2+\mu_{3-i}\bar{k}_i)\Big)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i(\alpha_i+\mu_i)\Big(\mu_i\mu_{3-i}(\mu_i+\mu_{3-i})(\mu_{3-i}+2\bar{k}_i+2\bar{k}_{3-i})\\
&\quad+\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}\big(4\mu_i\mu_{3-i}+2\mu_i^2+\mu_{3-i}\bar{k}_{3-i}+\bar{k}_{3-i}^2+2\mu_i(\bar{k}_i+2\bar{k}_{3-i})+2\bar{k}_i(\mu_{3-i}+\bar{k}_{3-i})\big)\\
&\quad+\big(\mu_i\bar{k}_{3-i}^2(\mu_i+\mu_{3-i}+\bar{k}_{3-i})+\mu_{3-i}^2\bar{k}_i(\mu_i+\mu_{3-i}+\bar{k}_i+\bar{k}_{3-i})\big)\Big)\Big)\\
&+\big(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2\big)\sum_{i=1}^{2}\Big(u_i^2\Big((\beta_i\beta_{3-i}\bar{x}_i\bar{x}_{3-i}+\mu_{3-i}^2)(\mu_i+\mu_{3-i})+\bar{k}_i(\mu_i^2+2\mu_i\mu_{3-i}+2\mu_{3-i}^2)\\
&\quad+\bar{k}_{3-i}(2\mu_i^2+2\mu_{3-i}^2+2\mu_i\bar{k}_{3-i}+\mu_i\bar{k}_{3-i})+\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}(2\mu_i+3\mu_{3-i})+\mu_i\mu_{3-i}(2\bar{k}_i+3\bar{k}_{3-i})\Big)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i\bar{k}_i\mu_i\mu_{3-i}\left(2\mu_i\mu_{3-i}+\mu_i+\mu_{3-i}^2+2\mu_{3-i}\bar{k}_i\right)\Big)-\sum_{i=1}^{2}\Big(u_i\bar{k}_{3-i}^2\mu_{3-i}^2(\bar{k}_{3-i}+\mu_{3-i})\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i\bar{k}_{3-i}\mu_i\mu_{3-i}\Big(3\mu_i\mu_{3-i}+2(\mu_{3-i}^2+\bar{k}_{3-i}^2)+3\mu_i\bar{k}_{3-i}^2+4\mu_{3-i}\bar{k}_{3-i}\Big)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(u_i\bar{k}_i\bar{k}_{3-i}\Big(\mu_{3-i}^2(\mu_{3-i}+\bar{k}_i+2\bar{k}_{3-i})+\mu_i\mu_{3-i}(4\mu_i+2\mu_{3-i}+2\bar{k}_i+4\bar{k}_{3-i})\Big)\Big)\\
&\qquad+\big(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2\big)\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2\Big((\mu_1+\mu_2)(\bar{k}_1+\bar{k}_2)\Big)\\
&\quad+\big(\beta_1\beta_2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{k}_1\bar{k}_2\big)\left(\sum_{i=1}^{2}\Big(\bar{k}_i(\mu_i^3+\mu_i^2\mu_{3-i}+\mu_i\mu_{3-i}^2+\mu_{3-i}^3)\Big)+\sum_{i=1}^{2}\Big(\bar{k}_i^2(\mu_i+\mu_{3-i})^2\Big)\right.\\
&+\left.\sum_{i=1}^{2}\Big(\bar{k}_i^2\bar{k}_{3-i}(\mu_i+\mu_{3-i})\Big)+2\bar{k}_1\bar{k}_2(\mu_1+\mu_2)^2\right)-\mu_1\mu_2\bar{k}_1\bar{k}_2\Big(2(\mu_1+\mu_2)^2+3(\mu_1+\mu_2)(\bar{k}_1+\bar{k}_2)\Big)\\
&\qquad- \sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\mu_{3-i}\bar{k}_i\Big((\mu_i+\mu_{3-i})^2+(\mu_i\mu_{3-i}+\bar{k}_i^2)(\mu_i+\mu_{3-i})\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Spis rysunków

1.1 Schemat transmisji choroby w populacji jednorodnej. 15
1.2 Portret fazowy rozwiązań układu (1.3) dla $f = f_1$ i $A < 0$. 21
1.3 Portrety fazowe rozwiązań układu (1.3) dla $f = f_1$ i $A > 0$. 21
1.4 Portrety fazowe rozwiązań układu (1.3) dla $f = f_2$. 22
1.5 Portrety fazowe rozwiązań układu (1.9). 24
1.6 Portrety fazowe rozwiązań układu (1.14). 27

2.1 Bifurkacja podwojenia okresu – zależność $S(h)$. 49
2.2 Bifurkacja podwojenia okresu – zależność $I(h)$. 49
2.3 Bifurkacja podwojenia okresu – zależność $S(h)$. 50
2.4 Bifurkacja podwojenia okresu – zależność $I(h)$. 50
2.5 Punkt i cykl o okresie 2 układu (2.55). 53
2.6 Cykle o okresie 4 i 8 układu (2.55). 53
2.7 Iteracje układu (2.55). 54
2.8 Iteracje układu (2.55). 54
2.9 Iteracje układu (2.55). 58
2.10 Iteracje układu (2.164). 76
2.11 Iteracje układu (2.164). 76

3.1 Schemat transmisji choroby w populacji niejednorodnej. 80
3.2 Diagram bifurkacyjny dla układu (3.3) z funkcją transmisji f_2 i warunkiem $\beta_1\beta_2 < 1$. . . . 88
3.3 Portret fazowy zrzutowany na płaszczyznę (x_1, y_1) dla $A_1 = 0$. 89
3.4 Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018. 98
3.5 Portrety fazowe dla układu (3.3) z funkcją transmisji f_2. 99
3.6 Graficzna reprezentacja rozwiązań układu (3.41). 102
3.7 Graficzna reprezentacja rozwiązania układu (3.41) dla (N). 103
3.8 Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w przeciągu lat 2001–2018. 117
3.9 Portrety fazowe dla układu (3.35) w podprzestrzeniach fazowych (S_1, I_1) i (S_2, I_2) 118
3.10 Diagram bifurkacyjny dla układu (3.35). 120
3.11 Diagram bifurkacyjny dla układu (3.36) dla $\beta_1, \beta_2 \to 0$. 121

4.1 Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018. 142
4.2 Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018. 142
4.3 Gruźlica w województwie warmińsko-mazurskim w latach 2001–2018. 143
4.4 Bifurkacja I_1 względem h dla otwartego schematu Eulera. 144
4.5 Bifurkacja I_1 względem h dla dyskretnego schematu niestandardowego. 145

Spis tabel

3.1 Wartości współczynników transmisji choroby w populacji niejednorodnej. 80
3.2 Wartości parametrów układu (3.1) dla funkcji $f(S,I) = f_1(S,I)$ i $f(S,I) = f_2(S,I)$. . . . 97
3.3 Wartości parametrów modelu opisywanego układem (3.35). 117

4.1 Wartości współczynników transmisji użyte do symulacji układu (4.67). 141
4.2 Wartości współczynników transmisji użyte do symulacji. 141
4.3 Wartości współczynników transmisji użyte do symulacji. 143
4.4 Wartości parametrów użyte do badania bifurkacji. 144

Bibliografia

[1] H. Abbey, An Examination of the Reed-Frost Theory of Epidemics, *Human Biology*, **24 (3)**, (1952), 201–233.

[2] E. T. Alexander, S. D. McMahon, N. Roberts, E. Sutti, D. Burkow, M. Manning, K. E. Yong, S. Suslov, The Effects of Regional Vaccination Heterogeneity on Measles Outbreaks with France as a Case Study, (2014), `https://arxiv.org/pdf/1408.0695.pdf`, dostęp: 26.03.2020 r.

[3] H. Al-Kahby, F. Dannan, S. Elaydi, Non-Standard Discretization Methods for Some Biological Models, *Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, (2000), 155–180, doi:10.1142/9789812813251_0004.

[4] L. J. S. Allen, A Primer on Stochastic Epidemic Models: Formulation, Numerical Simulation, and Analysis, *Infectious Disease Modelling*, **2 (2)**, (2017), 128–142, doi:10.1016/j.idm.2017.03.001.

[5] L. J. S. Allen, Some Discrete-Time SI, SIR and SIS Epidemic Models, *Mathematical Biosciences*, **124 (1)**, (1994), 83–105, doi:10.1016/0025-5564(94)90025-6.

[6] L. J. S. Allen, A. M. Burgin, Comparison of Deterministic and Stochastic SIS and SIR Models in Discrete Time, *Mathematical Biosciences*, **163 (1)**, (2000) 1–33, doi:10.1016/S0025-5564(99)00047-4.

[7] L. J. S. Allen., P. van den Driessche, The Basic Reproduction Number in Some Discrete Time Epidemic Models, *Journal of Difference Equations and Applications*, **14 (10–11)**, (2008), 1127–1147, doi:10.1080/10236190802332308.

[8] R. M. Anderson, R. May, Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control, *Oxford University Press*, (1991).

[9] J. P. Aparicio, C. Castillo-Chavez, Mathematical Modelling of Tuberculosis Epidemics, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **6 (2)**, (2009), 209–237, doi:10.3934/mbe.2009.6.209.

[10] T. Baxter, Low Infectivity of Tuberculosis, *The Lancet*, **342 (8867)**, (1993), 371, doi:10.1016/0140-6736(93)91516-o.

[11] I. Beardmore, J. White, Spreading Disease through Social Groupings in Competition, *Journal of Theoretical Biology*, **212 (2)**, (2001), 253–269, doi:10.1006/jtbi.2001.2368.

[12] U. Beijer, A. Wolf, S. Fazel, Prevalence of Tuberculosis, Hepatitis C Virus, and HIV in Homeless People: a Systematic Review and Meta-Analysis, *Lancet Infectious Disease*, **12 (11)**, (2012), 859–870, doi:10.1016/S1473-3099(12)70177-9.

[13] J. Berezin, N. Zidkow, Computational Methods (in Russian), **2**, (1962).

[14] D. Bichara, A. Iggidr, Multi-Patch and Multi-Group Epidemic Models: a New Framework, *Journal of Mathematical Biology*, **77 (1)**, (2017), 107–134, doi:10.1007/s00285-017-1191-9.

[15] K. W. Blayneh, S. R. Jang, A Discrete SIS-Model for a Vector-Transmitted Disease, *Applicable Analysis*, **85 (10)**, (2006), 1271–1284, doi:10.1080/00036810600841498.

[16] M. Bodzioch, M. Choiński, U. Foryś, SIS Criss-Cross Model of Tuberculosis in Heterogeneous Population, *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, **24 (5)**, (2019), 2169–2188, doi:10.3934/dcdsb.2019089.

[17] M. Bohner, S. H. Streipert, The *SIS*-Model on Time Scales, *Pliska Studia Mathematica*, **26**, (2016), 11–28, http://www.math.bas.bg/pliska/Pliska-26/Pliska-26-2016-011-028.pdf, dostęp: 11.08.2021 r.

[18] T. F. Brewer, S. J. Heymann, To Control and Beyond: Moving Towards Eliminating the Global Tuberculosis Threat, *Journal of Epidemiology and Community Health*, **58 (10)**, (2004), 822–825, doi:10.1136/jech.2003.008664.

[19] T. F. Brewer, S. J. Heymann, S. M. Krumplitsch, M. E. Wilson, G. A. Colditz, H. V. Fineberg, Strategies to Decrease Tuberculosis in US Homeless Populations: a Computer Simulation Model, *The Journal of the American Medical Association*, **286 (7)**, (2001), 834–842, doi:10.1001/jama.286.7.834.

[20] B. P. Brooks, Linear Stability Conditions for a First Order 4-Dimensional Discrete Dynamic, *Journal of Applied and Computational Mathematics*, **3 (5)**, (2014), 2169–2188, doi:10.4172/2168-9679.1000174.

[21] H. Cao, Y. Zhou, The Discrete Age-Structured *SEIT* Model With Application to Tuberculosis Transmission in China, *Mathematical and Computer Modelling*, **55 (2012)**, (2012), 385–395, doi:10.1016/j.mcm.2011.08.017.

[22] C. Castillo-Chávez, Z. Feng, To Treat or not to Treat: The Case of Tuberculosis, *Journal of Mathematical Biology* , **35**, (1997), 629–656, doi:10.1007/s002850050069.

[23] C. Castillo-Chávez, Z. Feng, W. Huang, P. Van Den Driessche, D. E. Kirschner, A.-A. Yakubu, On the Computation of R_0 and Its Role in Global Stability, *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infection Diseases: An Introduction*, **125**, (2002), 229-–250.

[24] C. Castillo-Chavez, B. Song, Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **1 (2)**, (2004), 361—404, doi:10.3934/mbe.2004.1.361.

[25] Central statistical office of Poland, *Statistical Yearbooks*, (2017), http://stat.gov.pl/en/topics/statistical-yearbooks/, dostęp: 30.04.2018 r.

[26] S. Choi, E. Jung, Optimal Tuberculosis Prevention and Control Strategy from a Mathematical Model Based on Real Data, *Bulletin of Mathematical Biology*, **76 (7)**, (2014), 1566—1589, doi:10.1007/s11538-014-9962-6.

[27] M. Choiński, M. Bodzioch, U. Foryś, A Non-standard Discretized *SIS* Model of Epidemics, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **19 (1)**, (2022), 115–133, doi:10.3934/mbe.2022006.

[28] M. Choiński, M. Bodzioch, U. Foryś, Flip Bifurcation in a Discrete Two-Dimensional System, In: S. Armenia, P. Geril (eds), Modelling and Simulation 2021, The European Simulation and Modelling Conference 2021, *EUROSIS-ETI*, (2021), 262–264, ISBN: 978-9-492-85918-1.

[29] M. Choiński, M. Bodzioch, U. Foryś, Simple Criss-Cross Model of Epidemic for Heterogeneous Populations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **79 (104920)**, (2019), doi:10.1016/j.cnsns.2019.104920.

[30] M. Choiński, M. Bodzioch, U. Foryś, Simple Discrete *SIS* Criss-Cross Model of Tuberculosis in Heterogeneous Population of Homeless and Non-Homeless People, *Mathematica Applicanda*, **47 (1)**, (2019), 103–115, doi:10.14708/ma.v47i1.6496.

[31] M. Choiński, M. Zdanowicz, Criss-Cross Model of Tuberculosis for Homeless and Non-Homeless Subpopulations, Proceedings of the XXIII National Conference on Applications of Mathematics in Biology and Medicine, (2017), 51–56, http://kkzmbm.mimuw.edu.pl/sprawozdania/spr23/Artykul_Choinski.pdf, dostęp: 23.10.2020 r.

[32] S. Contreras, H. A. Villavicencio, D. Medina-Ortiz, J. P. Biron-Lattes, Á. Olivera-Nappa, A Multi-Group *SEIRA* Model for the Spread of COVID-19 Among Heterogeneous Populations, *Chaos Solitons and Fractals*, **136**, (2020), doi:10.1016/j.chaos.2020.109925.

[33] C. Cruz Vargas-De-León, On the Global Stability of *SIS*, *SIR* and *SIRS* Epidemic Models with Standard Incidence, *Chaos, Solitons and Fractals*, **44 (12)**, (2011), 1106—1110, doi:10.1016/j.chaos.2011.09.002.

[34] A. B. Curtis, R. Ridzon, L. F. Novick, J. Driscoll, D. Blair, M. Oxtoby, M. McGarry, B. Hiscox, C. Faulkner, H. Taber, S. Valway, I. M. Onorato, Analysis of Mycobacterium Tuberculosis Transmission Patterns in a Homeless Shelter Outbreak, *International Journal of Tuberculosis and Lung Disease*, **4 (4)**, (2000), 308–313.

[35] D. J. Daley, J. Gani, Epidemic Modelling: An Introduction, *Cambridge Studies in Mathematical Biology*, **(15)**, (1999), doi:10.1017/CBO9780511608834.

[36] S. Y. Del Valle, J. Mac Hyman, N. Chitnis, Mathematical Models of Contact Patterns Between Age Groups for Predicting the Spread of Infectious Diseases, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **10 (5–6)**, (2013), 1475–1497, doi:10.3934/mbe.2013.10.1475.

[37] S. Y. Del Valle, S. M. Mniszwewski, J. M. Hyman, Modeling the Impact of Behavior Changes on the Spread of Pandemic Influenza, *Modeling the Interplay Between Human Behavior and the Spread of Infectious Diseases*, (2013), 59–77, doi:10.1007/978-1-4614-5474-8_4.

[38] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, J. A. J. Metz, On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio R_0 in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations, *Journal of Mathematical Biology*, **28 (4)**, (1990), 365–382, doi:10.1007/BF00178324.

[39] P. van den Driessche, J. Watmough, Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission, *Mathematical Biosciences*, **180 (1–2)**, (2002), 29–48, doi:10.1016/S0025-5564(02)00108-6

[40] J. Dushoff, W. Huang, C. Castillo-Chavez, Backwards Bifurcations and Catastrophe in Simple Models of Fatal Diseases, *Journal of Mathematical Biology*, **36 (3)** (1998), 227–248, doi:10.1007/s002850050099.

[41] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Third Edition, *Springer*, (2005), `https://www.researchgate.net/publication/245346142_An_Introduction_to_Difference_Equation`, dostęp: 31.01.2021 r.

[42] R. Farnoosh, M. Parsamanesh, Disease Extinction and Persistence in a Discrete-Time *SIS* Epidemic Model with Vaccination and Varying Population Size, *Filomat*, **31 (15)**, (2017), 4735—4747, doi:10.2298/FIL1715735F.

[43] F. Fatmawati, U. D. Purwati, F. Riyudha, H. Tasman, Optimal Control of a Discrete Age-Structured Model for Tuberculosis Transmission, *Heliyon*, **6 (e03030)**, (2020), doi:10.1016/j.heliyon.2019.e03030.

[44] J. I. Figueroa-Munoz, P. Ramon-Pardo, Tuberculosis Control in Vulnerable Groups, *Bulletin of the World Health Organization*, **86 (9)**, (2008), 657–736, doi:10.2471/BLT.06.038737.

[45] P. E. Fine, A Commentary on the Mechanical Analogue to the Reed-Frost Epidemic Model, *American Journal of Epidemiology*, **106 (2)**, (1977), 87–100, doi:10.1093/oxfordjournals.aje.a112449.

[46] N. Gao, Y. Song, X. Wang, J. Liu, Dynamics of a Stochastic *SIS* Epidemic Model With Nonlinear Incidence Rates, *Advances in Difference Equations*, **2019 (41)**, (2019), doi:10.1186/s13662-019-1980-0.

[47] J.-M. Grandmont, Nonlinear Difference Equations, Bifurcations and Chaos: an Introduction, *Cepremap*, **8811** (1988) `https://www.cepremap.fr/depot/couv_orange/co8811.pdf`, dostęp: 25.08.2021 r.

[48] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Model and Bifurcation of Vector Fields, *Applied Mathematical Sciences*, **42**, (1983).

[49] J. A. P. Heesterbeek, K. Dietz, The Concept of R_0 in Epidemic Theory, *Statistica Neerlandica*, **50 (1)**, (1996), 89–110, doi:10.1111/j.1467-9574.1996.tb01482.x.

[50] J. M. Heffernan, R. J. Smith, L. M. Wahl, Perspectives on the Basic Reproductive Ratio, *Journal of The Royal Society Interface*, **2 (4)**, (2005), 281–293, doi:10.1098/rsif.2005.0042.

[51] H. W. Hethcote, Three Basic Epidemiological Models, In: S. A. Levin, T. G. Hallam, L. J. Gross (eds) Applied Mathematical Ecology, *Biomathematics*, **18**, (1989), 119–144, doi:10.1007/978-3-642-61317-3_5.

[52] H. W. Hethcote, J. W. van Ark, Epidemiological Models for Heterogeneous Populations: Proportionate Mixing, Parameter Estimation, and Immunization Programs, *Mathematical Biosciences*, **84 (1)**, (1987), 85–118, doi:10.1016/0025-5564(87)90044-7.

[53] H. W. Hethcote, J. A. Yorke, Gonorrhea Transmission Dynamics and Control, *Lecture Notes in Biomathematics*, **56**, (1984).

[54] H. W. Hethcote, J. A. Yorke, A. Nold, Gonorrhea Modeling: a Comparison of Control Methods, *Mathematical Biosciences* **58 (1)**, (1982), 93–109, doi:10.1016/0025-5564(82)90053-0.

[55] H. W. Hethcote, M. Zhien, L. Shengbing, Effects of Quarantine in Six Endemic Models for Infectious Diseases, *Mathematical Biosciences* **180 (1–2)**, (2002), 141–160, doi:10.1016/s0025-5564(02)00111-6.

[56] Z. Hu, Z. Teng, C. Jia, C. Zhang, L. Zhang, Dynamical Analysis and Chaos Control of a Discrete *SIS* Epidemic Model, *Advances in Difference Equations* **58 (2014)**, (2014), 1–20, doi:10.1186/1687-1847-2014-58.

[57] W. Huang, K. L Cooke, C. Castillo-Chávez, Stability and Bifurcation for a Multiple-Group Model for the Dynamics of HIV/AIDS Transmission, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **52 (3)**, (1992), 835–854, doi:10.1137/0152047.

[58] M. O. Ibrahim, C. N. Ejieji, S. A. Egbetade, A Mathematical Model for the Epidemiology of Tuberculosis with Estimate of the Basic Reproduction Number, *Scholarly Journal of Mathematics and Computer Science*, **5 (5)**, (2013), 46–52, doi:10.9790/5728-0554652.

[59] A. Iggidr, G. Sallet, M. O. Souza, On the Dynamics of a Class of Multi-Group Models Forvector-borne Diseases, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **441 (2)**, (2016), 723–743, doi:10.1016/j.jmaa.2016.04.003.

[60] B. Ivorra, M. R. Ferrández, M. Vela-Pérez, A. M. Ramos, Mathematical Modeling of the Spread of the Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Taking Into Account the Undetected Infections. The Case of China, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **88 (105303)**, (2020), doi:10.1016/j.cnsns.2020.105303.

[61] S. Jang, S. Elaydi, Difference Equations From Discretization of a Continuous Epidemic Model With Immigration of Infectives, *Canadian Applied Math Quarterly*, **11 (1)**, (2003), 93–105, `https://digitalcommons.trinity.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1032&context=math_faculty`, dostęp: 25.10.2020 r.

[62] E. Jung, S. Lenhart, Z. Feng, Optimal Control of Treatments in a Two-Strain Tuberculosis, *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, **2 (4)**, (2002), 473–482, doi:10.3934/dcdsb.2002.2.473.

[63] J. Kabziński, P. Mosiołek, Projektowanie nieliniowych układów sterowania, *Wydawnictwo Naukowe PWN SA*, (2018).

[64] J. C. Kamgang, G. Sallet, Computation of Threshold Conditions for Epidemiological Models and Global Stability of the Disease-Free Equilibrium (DFE), *Mathematical Biosciences*, **213 (1)**, (2008), 1–12, doi:10.1016/j.mbs.2008.02.005.

[65] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, **115 (772)**, (1927), 700–721, doi:10.1016/S0092-8240(05)80040-0.

[66] Y. Ko, S.-M. Lee, S. Kim, M. Ki, E. Jung, Ebola Virus Disease Outbreak in Korea: Use of a Mathematical Model and Stochastic Simulation to Estimate Risk, *Epidemiology and Health* **41 (e2019048)**, (2019), doi:10.4178/epih.e2019048.

[67] T. Kuniya, Y. Muroya, Global Stability of a Multi-Group *SIS* Epidemic Model with Varying Total Population Size, *Applied Mathematics and Computation*, **265 (C)**, (2015), 785–798, doi:10.1016/j.amc.2015.05.124.

[68] T. Kuniya, J. Wang, H, Inaba, A Multi-Group *SIR* Epidemic Model With Age Structure, *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, **21 (10)**, (2016), 3515–3550, doi:10.3934/dcdsb.2016109.

[69] Y. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition, *Applied Mathematical Sciences* **112**, (1998), `https://wwwf.imperial.ac.uk/~dturaev/kuznetsov.pdf`, dostęp: 25.10.2020 r.

[70] W. H. Lai, S. L. Kek, T. K. Gaik, Solving Nonlinear Least Squares Problem Using Gauss-Newton Method, *International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology*, **4 (1)**, (2015), 258–262, `http://ijiset.com/vol4/v4s1/IJISET_V4_I01_35.pdf`, dostęp: 25.10.2020 r.

[71] J. Li, Z. Ma, Global Analysis of *SIS* Epidemic Models with Variable Total Population Size, *Mathematical and Computer Modelling*, **39 (11–12)**, (2004), 1231–1242, doi:10.1016/j.mcm.2004.06.004.

[72] M.-T. Li, G.-Q. Sun, Y.-F. Wu, J. Zhang, Z. Jin, Transmission Dynamics of a Multi-Group Brucellosis Model With Mixed Cross Infection in Public Farm, *Applied Mathematics and Computation*, **237**, (2014), 582–594, doi:10.1155/2018/6456107.

[73] Y. Lin, D. Jiang, Dynamics of a Multigroup *SIR* Epidemic Model with Nonlinear Incidence and Stochastic Perturbation, *Abstract and Applied Analysis*, **2013 (917389)**, (2013), doi:10.1155/2013/917389.

[74] J. Liu, B. Peng, T. Zhang, Effect of Discretization on Dynamical Behavior of *SEIR* and *SIR* Models With Nonlinear Incidence, *Applied Mathematics Letters*, **39 (2015)**, (2015), 60–66, doi:10.1016/j.aml.2014.08.012.

[75] M. Lotfi, M. Maziane, K. Hattaf, N. Yousfi, Partial Differential Equations of an Epidemic Model with Spatial Diffusion, *International Journal of Partial Differential Equations*, **2014 (186437)**, (2014), doi:10.1155/2014/186437.

[76] J. Lourenço, R. Paton, M. Ghafari, M. Kraemer, C. Thompson, P. Simmonds, P. Klenerman, S. Gupta, Fundamental Principle of Epidemic Spread Highlight the Immediate Need for Large-Scale Serological Surveys to Assess the Stage of the SARS-CoV-2 Epidemic, doi:10.1101/2020.03.24.20042291.

[77] J. Lukács, V. Tubak, J. Mester, S. Dávid, Z. Bártfai, T. Kubica, S. Niemann and Á. Somosköví, Conventional and Molecular Epidemiology of Tuberculosis in Homeless Patients in Budapest, Hungary, *Journal of Clinical Microbiology*, **42 (12)**, (2004), 5931–5934, doi:10.1128/JCM.42.12.5931-5934.2004.

[78] X. Ma, Y. Zhou, H. Cao, Global Stability of the Endemic Equilibrium of a Discrete *SIR* Epidemic Model, *Advances in Difference Equations*, **42 (2013)**, (2013), doi:10.1186/1687-1847-2013-42.

[79] P. Magal, O. Seydi, G. Webb, Final Size of a Multi-Group *SIR* Epidemic Model: Irreducible and Non-Irreducible Modes of Transmission, *Mathematical Biosciences*, **301**, (2018), 59—67, doi:10.1016/j.mbs.2018.03.020.

[80] M. Maliyoni, P. M. Mwamtobe, S. Musekwa, J. M. Tchuenche, Modelling the Role of Diagnosis, Treatment, and Health Education on Multidrug-Resistant Tuberculosis Dynamics, *ISRN Biomathematics*, **2012 (459829)**, (2012), doi:10.5402/2012/459829.

[81] Marshall office, Regional Center for Social Policy, Olsztyn, Poland, *Information About Homelessness*, (2017), http://warmia.mazury.pl/images/Departamenty/Regionalny_Osrodek_Polityki_Spolecznej/bezdomnosc-raport-2017/Bezdomno%C5%9B%C4%87__2016.doc, dostęp: 30.04.2018 r.

[82] M. Martcheva, An Introduction to Mathematical Epidemiology, *Texts in Applied Mathematics*, **61**, (2015), doi:10.1007/978-1-4899-7612-3.

[83] B. Mathema, J. R. Andrews, T. Cohen, M. W. Borgdorff, M. Behr, J. R. Glynn, R. Rustomjee, B. J. Silk, R. Wood, Drivers of Tuberculosis Transmission, *The Journal of Infectious Diseases*, **216 (Suppl 6)**, (2017), 644—653, doi:10.1093/infdis/jix354.

[84] R. Memarbashi, F. Alipour, A. Ghasemabadi, A Nonstandard Finite Difference Scheme for a *SEI* Epidemic Model, *Journal of Mathematics*, **49 (3)**, (2017), 133–147.

[85] R. E. Mickens, Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations, *Clark Atlanta University*, (1993), doi:10.1142/2081.

[86] Y. Muroya, T. Kuniya, J. Wang, Stability Analysis of a Delayed Multi-Group *SIS* Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rates and Patch Structure, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **425 (1)**, (2015), 415–439, doi:10.1016/j.jmaa.2014.12.019 .

[87] B. M. Murphy, B. H. Singer, S. Anderson, D. Kirschner, Comparing Epidemic Tuberculosis in Demographically Distinct Heterogeneous Populations, *Mathematical Biosciences*, **180**, (2002), 161–185, doi:10.1016/s0025-5564(02)00133-5.

[88] J. D. Murray, Mathematical Biology: I. An Introduction, *Springer*, (1962).

[89] P. Neal, Multitype Randomized Reed-Frost Epidemics and Epidemics Upon Random Graphs, *The Annals of Applied Probability*, **16 (3)**, (2006), 1166—1189, doi:10.1214/105051606000000123.

[90] D. Okuonghae and B. O. Ikhimwin, Dynamics of a Mathematical Model for Tuberculosis with Variability in Susceptibility and Disease Progressions Due to Difference in Awareness Level, *Frontiers in Microbiology*, **6 (1530)**, (2016), doi:10.3389/fmicb.2015.01530.

[91] C. Ozcaglar, A. Shabbeer, S. L. Vandenberg, B. Yener, B. Bennet, Epidemiological Models of Mycobacterium Tuberculosis Complex Infections, *Epidemiological Models of Mycobacterium Tuberculosis Complex Infections*, **236 (2)**, (2012), 77–96, doi:10.1016/j.mbs.2012.02.003.

[92] P. Padmanabhan, P. Seshaiyer, Computational and Mathematical Methods to Estimate the Basic Reproduction Number and Final Size for Single-Stage and Multistage Progression Disease Models for Zika with Preventative Measures, *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **2017 (11)**, (2017), 1–17, doi:10.1155/2017/4290825.

[93] A. Palczewski, Równania różniczkowe zwyczajne, *Wydawnictwa Naukowo-Techniczne*, 2004, Wydanie drugie.

[94] C. M. Peak, R. Kahn, Y. H. Grad, L. M. Childs, R. Li, M. Lipsitch, C. O. Buckee, Comparative Impact of Individual Quarantine vs. Active Monitoring of Contacts for the Mitigation of COVID--19: a Modelling Study, doi:10.1101/2020.03.05.20031088.

[95] K. Prem, Y. Liu, T. W. Russell, A. J. Kucharski, R. M. Eggo, N. Davie, The Effect of Control Strategies to Reduce Social Mixing on Outcomes of the COVID-19 epidemic in Wuhan, China: a Modelling Study, *Lancet Public Health*, **5 (e261–70)**, (2020), 261–270, doi:10.1016/S2468-2667(20)30073-6.

[96] M. U. Rahman, M. Arfan, Z. Shah, P. Kumam, M. Shutaywi, Nonlinear Fractional Mathematical Model of Tuberculosis (TB) Disease With Incomplete Treatment Under Atangana-Baleanu Derivative, *Alexandria Engineering Journal*, **60 (3)**, (2021), 2845—2856, doi:10.1016/j.aej.2021.01.015.

[97] J. J. H. Reynolds, M. Torremorell, M. E. Craft, Mathematical Modeling of Influenza a Virus Dynamics within Swine Farms and the Effects of Vaccination, *PLOS ONE*, **9 (11)**, (2014), doi:10.1371/journal.pone.0106177.

[98] P. Rodrigues, M. Gabriela, M. Gomes, A. Margheri, C. Rebelo, Heterogeneity in Susceptibility to Infection Can Explain High Reinfection Rates, *Journal of Theoretical Biology*, **259 (2)**, (2009), 280–290, doi:10.1016/j.jtbi.2009.03.013.

[99] P. Rodrigues, C. J. Silva, D. F. M. Torres, Cost Effectiveness Analysis of Optimal Control Measures for Tuberculosis, *Bulletin of Mathematical Biology*, **76 (10)**, (2014), 2627—2645, doi:10.1007/s11538-014-0028-6.

[100] L.-I. W. Roeger, Dynamically Consisent Discrete-Time SI and SIS Epidemic Models, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **2013 (special)**, (2013), 653–662, doi:10.3934/proc.2013.2013.653.

[101] J. Romaszko, A. Siemaszko, M. Bodzioch, A. Buciński, A. Doboszyńska, Active Case Finding Among Homeless People as a Means of Reducing the Incidence of Pulmonary Tuberculosis in General Population, *Advances in Experimental Medicine and Biology* **911**, (2016), 67–76, doi:10.1007/5584_2016_225.

[102] W. Sae-Jie, K. Bunwong, E. Moore, The Effect of Time Scales on SIS Epidemic Model, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **9 (10)**, (2010), 757–767, `http://www.wseas.us/e-library/transactions/mathematics/2010/88-383.pdf`, dostęp: 25.10.2020 r.

[103] S. Side, A. M. Utami, Sukarna, M. I. Pratama, Numerical Solution of SIR Model for Transmissionof Tuberculosis by Runge-Kutta Method, *Journal of Physics: Conference Series*, **1040 (012021)**, (2018), doi:10.1088/1742-6596/1040/1/012021.

[104] S. P. N. Singh, N. K. Mehra, H. B. Dingley, J. N. Pande and M. C. Vaidya, Human Leukocyte Antigen (HLA)-Linked Control of Susceptibility to Pulmonary Tuberculosis and Association with HLA-DR Types, *The Journal of Infectious Diseases*, **148 (4)**, (1983), 676–681, doi:10.1093/infdis/148.4.676.

[105] A. Suryanto, A Dynamically Consistent Nonstandard Numerical Scheme for Epidemic Model with Saturated Incidence Rate, *International Journal of Mathematics and Computation*, **13 (D11)**, (2011), 112–123.

[106] N. H. Sweilam, S. M. AL-Mekhlafi, Nonstandard Theta Milstein Method for Solving Stochastic Multi-Strain Tuberculosis Model, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **28 (12)**, (2020), doi:10.1186/s42787-020-00073-9.

[107] N. H. Sweilam, S. M. AL-Mekhlafi, Numerical Study for Multi-Strain Tuberculosis (TB) Model of Variable-Order Fractional Derivatives, *Journal of Advanced Research*, **7 (2)**, (2016), 271—283, doi:10.1016/j.jare.2015.06.004.

[108] N. H. Sweilam, S. M. AL-Mekhlafi, D. Baleanu, Optimal Control for a Fractional Tuberculosis Infection Model Including the Impact of Diabetes and Resistant Strains, *Journal of Advanced Research*, **17**, (2019), 125—137, doi:10.1016/j.jare.2019.01.007.

[109] J. Tan de Bibiana, C. Rossi, P. Rivest, A. Zwerling, L. Thibert, F. McIntosh, M. A. Behr, D. Menzies, K. Schwartzman, Tuberculosis and Homelessness in Montreal: a Retrospective Cohort Study, *BMC Public Health*, **11 (833)**, (2011), 833, doi:10.1186/1471-2458-11-833.

[110] D. Thomas, M. Weedermann, L. Billings, J. Hoffacker, R. A. Washington-Allen, When to Spray: a Time-Scale Calculus Approach to Controlling the Impact of West Nile Virus, *Ecology and Society*, **14(2): 21**, `http://www.ecologyandsociety.org/vol14/iss2/art21/`, dostęp: 04.04.2020 r.

[111] K. Tosh, M. Ravikumar, J. T. Bell, S. Meisner, A. V. S. Hill, R. Pitchappan, Variation in $MICA$ and $MICB$ Genes and Enhanced Susceptibility to Paucibacillary Leprosy in South India, *Human Molecular Genetics*, **15 (19)**, (2006), 2880–2887, doi:10.1093/hmg/ddl229.

[112] B. Traoré, B. Sangaré, S. Traoré, A Mathematical Model of Malaria Transmission with Structured Vector Population and Seasonality, *Journal of Applied Mathematics*, **2017 (6754097)**, (2017), doi:10.1155/2017/6754097.

[113] J. Wang, J. Pang, X. Liu, Modelling Diseases With Relapse and Nonlinear Incidence of Infection: a Multi-Group Epidemic Model, *Journal of Biological Dynamics*, **8 (1)**, (2014), 99—116, doi:10.1080/17513758.2014.912682.

[114] Z. Wang, X. Fan, F. Jiang, Q. Li, Dynamics of Deterministic and Stochastic Multi-Group $MSIRS$ Epidemic Models with Varying Total Population Size, *Advances in Difference Equations*, **2014 (270)**, (2014), doi:10.1186/1687-1847-2014-270.

[115] World Health Organization, Regional Office For Europe, Roadmap to Implement the Tuberculosis Action Plan for the WHO European Region 2016–2020, `http://www.euro.who.int/__data/assets/pdf_file/0020/318233/50148-WHO-TB-Plan_May17_web.pdf`, dostęp: 6.04.2020 r.

[116] World Health Organization, Tuberculosis – Global Report 2019, `https://www.who.int/tb/global-report-2019`, dostęp: 25.03.2020 r.

[117] J. Xu, Y. Geng, A Nonstandard Finite Difference Scheme for a Multi-Group Epidemic Model With Time Delay, *Advances in Difference Equations*, **2017 (38)**, (2017), doi:10.1186/s13662-017-1415-8.

[118] J. A. Yorke, H. W. Hethcote, A. Nold, Dynamics and Control of the Transmission of Gonorrhea, *Sexually Transmitred Diseases*, **5 (2)**, (1978), 51–56.

[119] Y. Zhao, M. Li, S. Yuan, Analysis of Transmission and Control of Tuberculosis in Mainland China, 2005—2016, Based on the Age-Structure Mathematical Model, *International Journal of Environmental Research and Public Health*, **14 (10)**, (2017), p. 1192, doi:10.3390/ijerph14101192.

[120] L. Zhengyuan, T. Jiyuan, Y. Qixiao, A Mathematical Analysis for a Diffusive Epidemic Model with Criss-Cross Dynamics, *Applied Mathematics – A Journal of Chinese Universities*, **14 (4)**, (1999), 389–400, doi:10.1007/s11766-999-0068-0.

[121] J. Zhou, Y. Yang, T. Zhang, Global Stability of a Discrete Multigroup SIR Model with Nonlinear Incidence Rate, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40 (14)**, (2017), 5370–5379, doi:10.1002/mma.4391.