Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Małgorzata Śleszyńska-Nowak

Silne kliki w grafach

Rozprawa doktorska

Promotor
prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Promotor pomocniczy
dr inż. Michał Dębski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Czerwiec 2020

Oświadczenie autora rozprawy:

oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

01.06.2020 r. ..... M. Śleszyńska-Nowak .....

data *Małgorzata Śleszyńska-Nowak*

Oświadczenie promotora rozprawy:

niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

01.06.2020 r. ..... J. Grytczuk .....

data *prof. dr hab. Jarosław Grytczuk*

Oświadczenie promotora pomocniczego rozprawy:

niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

01.06.2020 r. ..... Michał Dębski .....

data *dr inż. Michał Dębski*

Streszczenie

Silnym kolorowaniem krawędzi grafu G nazywamy kolorowanie krawędzi G, w którym każde dwie krawędzie będące od siebie w odległości co najwyżej 2 mają inny kolor. **Silnym indeksem chromatycznym** grafu G, ozn. $\chi'_s(G)$, nazywamy najmniejszą możliwą liczbę kolorów w silnym kolorowaniu krawędzi G. W 1985 r. Erdős i Nešetřil postawili hipotezę, według której dla każdego grafu G o maksymalnym stopniu Δ zachodzi $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$. Hipoteza ta cały czas pozostaje otwarta; najlepsze górne ograniczenie na $\chi'_s(G)$ wynosi obecnie $1,835\Delta^2$. W niniejszej rozprawie dowodzimy jej prawdziwości dla grafów bez szponów o $\Delta \geq 12$. Pokazujemy także ograniczenia na $\chi'_s(G)$ dla grafów bez $K_{1,r}$, grafów przecięć dysków jednostkowych i grafów bezcięciwowych.

Silną kliką w grafie G nazywamy podzbiór krawędzi G, w którym każde dwie krawędzie są od siebie w odległości co najwyżej 2, w konsekwencji każda krawędź silnej kliki ma inny kolor w silnym kolorowaniu krawędzi G. Maksymalny rozmiar silnej kliki w G oznaczamy przez $\omega_s(G)$. Faudree i in. postawili hipotezę, według której dla każdego grafu G o maksymalnym stopniu Δ zachodzi $\omega_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$. Nasze główne twierdzenie mówi, że $\omega_s(G) \leq 1,5\Delta^2$. Przez kilka lat było to najlepsze znane ograniczenie; nasz wynik został poprawiony przez Farona i Postle'a na $\frac{4}{3}\Delta^2$. Pokazujemy także ograniczenie na $\omega_s(G)$ dla grafów bez szponów.

Badamy także $t-$**silne kolorowanie krawędzi** grafu i $t-$**silne kliki** (są to uogólnienia powyższych definicji na odległość t). Najlepsze znane górne ograniczenie na $t-$silny indeks chromatyczny wynosi $(2-\epsilon)\Delta^t$. Dowodzimy, że $t-$silne kliki mają co najwyżej $1,75\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$ krawędzi, dla grafów dwudzielnych pokazujemy ograniczenie $\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$. Ograniczamy także rozmiar $t-$silnych klik w innych klasach grafów. Poprzez powiązanie problemu $t-$silnych klik z problemem stopnia–średnicy pokazujemy, że górne ograniczenie na $t-$silny indeks chromatyczny i na rozmiar $t-$silnych klik nie może być mniejsze od $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,59}\right)^{t-1}\Delta^t$.

Słowa kluczowe: silny indeks chromatyczny, silne kliki, skojarzenie indukowane, kolorowanie krawędzi grafów, $t-$silny indeks chromatyczny, $t-$silne kliki.

Klasyfikacja AMS: 05C15, 05C35, 05C69, 05C70, 05C72, 05C76.

Abstract

A **strong edge coloring** of a graph G is an edge coloring of G such that every two edges which are at distance at most 2 receive different colors. A **strong chromatic index** of a graph G, denoted by $\chi'_s(G)$, is the minimum number of colors in a strong edge coloring of G. In 1985 Erdős and Nešetřil conjectured that for every graph G with maximum degree Δ the strong chromatic index of G is at most $\frac{5}{4}\Delta^2$. This conjecture is still open; the best known upper bound on $\chi'_s(G)$ is $1,835\Delta^2$. In this dissertation we prove it for claw-free graphs with maximum degree at least 12. We also show upper bounds on $\chi'_s(G)$ for $K_{1,r}-$free graphs, unit disk graphs and chordless graphs.

A **strong clique** in a graph G is a subset of edges of G such that every two eges are at distance at most 2; it means that every edge has a different color in a strong edge coloring of G. The maximum size of a strong clique in G is denoted by $\omega_s(G)$. Faudree et al. conjectured that $\omega_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ for every graph G with maximum degree Δ. Our main theorem says that $\omega_s(G) \leq 1,5\Delta^2$. For several years it was the best known upper bound; our result was improved by Faron and Postle to $\frac{4}{3}\Delta^2$. We also show the bound on $\omega_s(G)$ for claw-free graphs.

We also study a $t-$**strong edge coloring** of a graph and $t-$**strong cliques** (these are generalizations of aforementioned definitions to distance t). The best known upper bound on $t-$strong chromatic index is $(2-\epsilon)\Delta^t$. We prove that $t-$strong cliques have at most $1,75\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$ edges, for bipartite graphs we show the bound $\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$. We also present results for some special classes of graphs. By noticing a connection between $t-$strong cliques and a degree-diameter problem, we show that upper bounds on $t-$strong chromatic index and $t-$strong cliques cannot be smaller than $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,59}\right)^{t-1}\Delta^t$.

Keywords: strong chromatic index, strong cliques, induced matching, graph edge coloring, $t-$strong chromatic index, $t-$strong cliques.

AMS Classification: 05C15, 05C35, 05C69, 05C70, 05C72, 05C76.

Podziękowania

Dziękuję mojemu promotorowi Jarosławowi Grytczukowi, który pokazał mi piękno świata nauki, przedstawił mnóstwo interesujących problemów, wiele nauczył i wspierał na każdym kroku. Dzięki Niemu usłyszałam o silnym kolorowaniu krawędzi grafów i pokochałam je. Jest najlepszym mentorem i prawdziwym przyjacielem.

Dziękuję mojemu promotorowi pomocniczemu i przyjacielowi ze studenckiej ławki Michałowi "Jajko" Dębskiemu. Dzięki Niemu kolorowałam grafy pilnując śpiących dzieci, motywował mnie do pracy w trakcie urlopów macierzyńskich i w momentach trudnych powrotów. Dziękuję za godziny dyskusji online i za konstruktywne uwagi odnośnie rozprawy.

Dziękuję Konstantemu Junoszy-Szaniawskiemu za cudowną współpracę, motywację, zrozumienie, przyjaźń i nieocenione wsparcie. Za to, że w każdej sytuacji mogłam na Niego liczyć.

Z całego serca dziękuję mojej rodzinie i przyjaciołom za wiarę we mnie i motywację. Mojej Teściowej, która robiła wszystko, żebym mogła wrócić do pracy. Mamie i Tacie, dzięki którym matematykę kocham od najmłodszych lat. Byli, są i zawsze będą moimi największymi autorytetami.

No koniec chciałabym złożyć specjalne podziękowania mojemu mężowi Danielowi, który wierzył we mnie, nawet gdy ja sama wątpiłam, wpierał mnie, zajmował się dziećmi i przynosił gorącą kawę, kiedy pisałam. Bez Niego napisanie tej rozprawy byłoby niewykonalne. A także Zosi i Hani za to, że rozumiały, że mama pracuje nad doktoratem, więc klocki muszą poczekać.

Badania prezentowane w tej rozprawie były częściowo wspierane przez Narodowe Centrum Nauki, grant nr 2017/25/N/ST1/00459.

Spis treści

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Podstawowe oznaczenia

Grafem nazywamy parę (V, E), gdzie V jest niepustym zbiorem skończonym, a E jest podzbiorem zbioru nieuporządkowanych par elelementów z V. Elementy zbioru V nazywamy **wierzchołkami**, a elementy zbioru E **krawędziami**. Przez $V(G)$ oznaczamy zbiór wierzchołków grafu G, a przez $E(G)$ zbiór krawędzi grafu G.

Krawędź $e = \{u, v\}$ oznaczamy przez uv. Mówimy, że wierzchołki u i v są incydentne z krawędzią uv, a krawędź uv jest incydentna z wierzchołkami u i v. Wierzchołki u i v nazywamy **końcami** krawędzi uv. Dwa wierzchołki należące do tej samej krawędzi nazywamy sąsiadującymi (lub sąsiednimi, sąsiadami), dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku nazywamy sąsiadującymi (lub sąsiednimi).

Sąsiedztwem wierzchołka v w grafie G, oznaczanym przez $N_G(v)$, nazywamy zbiór wszystkich wierzchołków grafu G, które są sąsiadami v, czyli $N_G(v) = \{u : V(G) : uv \in E(G)\}$. Dla $X \subset V(G)$ przez $N_G(X)$ oznaczamy zbiór $\{u \in V(G) \setminus X : \exists_{v \in X} uv \in E(G)\}$. Oznaczenia $N_G(v)$ i $N_G(X)$ zastępujemy przez $N(v)$ i $N(X)$, gdy graf G w sposób oczywisty wynika z kontekstu.

Stopniem wierzchołka v w grafie G, oznaczanym przez $\deg_G(v)$, nazywamy liczbę krawędzi incydentnych z v w G. **Maksymalny stopień** grafu G, oznaczany przez Δ_G, to maksimum ze wszystkich stopni wierzchołków z G. **Średni stopień** grafu G jest równy

średniej arytmetycznej ze stopni wszystkich wierzchołków z G. Oznaczenia $\deg_G(v)$ i Δ_G zastępujemy przez $\deg(v)$ i Δ, gdy graf G w sposób oczywisty wynika z kontekstu.

Graf H nazywamy **podgrafem** grafu G jeżeli $V(H) \subset V(G)$ i $E(H) \subset E(G)$. Graf G jest wówczas nazywany **nadgrafem** grafu H.

Niech G będzie grafem, a W będzie podzbiorem wierzchołków grafu G. Przez $G[W]$ oznaczamy podgraf G **indukowany wierzchołkowo** przez W, tzn. graf o zbiorze wierzchołków W i zbiorze krawędzi składającym się ze wszystkich krawędzi grafu G, których oba końce należą do W. Przez $G \setminus W$ oznaczamy $G[V(G) \setminus W]$.

Graf H jest **podgrafem indukowanym** grafu G, jeżeli H jest podgrafem grafu G indukowanym wierzchołkowo przez $V(H)$.

Niech G będzie grafem, a K będzie podzbiorem krawędzi grafu G. Przez $G[K]$ oznaczamy podgraf G **indukowany krawędziowo** przez K, tzn. graf o zbiorze wierzchołków składającym się ze wszystkich końców krawędzi z K i zbiorze krawędzi równym K.

Dopełnieniem grafu G nazywamy graf o zbiorze wierzchołków $V(G)$, w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w G.

Grafem krawędziowym grafu G, oznaczanym przez $L(G)$, nazywamy graf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór krawędzi grafu G, dwa wierzchołki z $L(G)$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie z grafu G sąsiadują ze sobą.

Spacerem w grafie G łączącym dwa wierzchołki v_0 i v_n nazywamy ciąg $v_0e_0v_1e_1 \dots e_{n-1}v_n$, taki że dla każdego $i \in \{0, \dots n\}$ zachodzi $v_i \in V(G)$ oraz dla każdego $i \in \{0, \dots n-1\}$ zachodzi $e_i \in E(G)$ i $v_i, v_{i+1} \in e_i$.

Ścieżką w grafie G łączącą dwa wierzchołki v_0 i v_n nazywamy spacer, w którym żadna krawędź i żaden wierzchołek nie powtarzają się. **Długością ścieżki** nazywamy liczbę krawędzi do niej należących. Ścieżkę, w której pierwszy i ostatni wierzchołek sąsiadują ze sobą nazywamy **cyklem**.

Średnica grafu G to najmniejsza liczba n, taka że każde dwa wierzchołki z G są połączone ścieżką o długości co najwyżej n.

Talia grafu G to długość najkrótszego cyklu zawartego w G.

Odległością między wierzchołkami u i v w grafie G, oznaczaną przez $\mathrm{dist}_G(u, v)$

(lub $\mathrm{dist}(u, v)$, gdy G jest oczywisty), nazywamy długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v w G.

Odległością między krawędzią $e = (x, y)$ **i wierzchołkiem** v w grafie G nazywamy $\min(\mathrm{dist}(x, v), \mathrm{dist}(y, v))$. Oznacza to, że krawędzie incydentne z v są w odległości 0 od v.

Dla każdych dwóch różnych krawędzi e, f grafu G definiujemy $\mathrm{dist}_{\mathrm{G}}(e, f)$ jako odległość w grafie krawędziowym grafu G pomiędzy wierzchołkami odpowiadającymi e i f (indeks jest pomijany, gdy w sposób oczywisty wynika z kontekstu). Oznacza to, że $\mathrm{dist}_{\mathrm{G}}(e, f) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy e i f mają wspólny wierzchołek. Gdy $\mathrm{dist}_{\mathrm{G}}(e, f) = d$ mówimy, że krawędzie e i f są w odległości d w grafie G.

Zbiorem niezależnym w grafie G nazywamy taki podzbiór $I \subset V(G)$, że dla każdej pary wierzchołków $u, v \in I$, uv nie jest krawędzią grafu G.

Kolorowaniem wierzchołków grafu G nazywamy funkcję $c : V(G) \to \mathcal{N}$, która każdemu wierzchołkowi z G przypisuje liczbę naturalną, zwaną **kolorem wierzchołka**. Zbiór wszystkich wierzchołków o tym samym kolorze nazywamy **klasą koloru**. Kolorowanie wierzchołków grafu jest **poprawne**, gdy każde dwa sąsiadujące wierzchołki mają różne kolory.

Liczbą chromatyczną grafu G, oznaczaną przez $\chi(G)$, nazywamy najmniejszą możliwą liczbę kolorów w poprawnym kolorowaniu wierzchołków G.

Kolorowaniem krawędzi grafu G nazywamy funkcję $c : E(G) \to \mathcal{N}$, która każdej krawędzi z G przypisuje liczbę naturalną, zwaną **kolorem krawędzi**. Zbiór wszystkich krawędzi o tym samym kolorze nazywamy **klasą koloru**. Kolorowanie krawędzi grafu jest **poprawne**, gdy każde dwie sąsiadujące krawędzie mają różne kolory.

Indeksem chromatycznym grafu G, oznaczanym przez $\chi'(G)$, nazywamy najmniejszą możliwą liczbę kolorów w poprawnym kolorowaniu krawędzi G.

Ułamkowym $k-$**kolorowaniem** wierzchołków grafu G, gdzie k jest liczbą rzeczywistą, nazywamy ważenie $w : \mathcal{I}_G \to [0, 1]$, gdzie $\mathcal{I}_G$ jest zbiorem zbiorów niezależnych z G, takie że suma wszystkich wag wynosi co najwyżej k i dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ suma wag wszystkich zbiorów niezależnych, do których należy v, wynosi co najwyżej 1. **Ułamkową liczbą chromatyczną** grafu G, oznaczaną przez $\chi_f(G)$, nazywamy infimum

po wszystkich dodatnich k, dla których istnieje ułamkowe $k-$kolorowanie wierzchołków G.

Średnicą zbioru $S \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy supremum z odległości euklidesowych pomiędzy każdymi dwoma punktami z S.

1.2 Klasy grafów

Graf G nazywamy **kliką** lub grafem **pełnym**, jeżeli każde dwa wierzchołki z $V(G)$ sąsiadują ze sobą. Graf pełny o n wierzchołkach oznaczamy przez K_n. **Liczbą klikową** grafu G, oznaczaną przez $\omega(G)$, nazywamy liczbę wierzchołków w największym pełnym podgrafie grafu G.

Graf G nazywamy **skojarzeniem**, jeżeli żadne dwie krawędzie z $E(G)$ nie mają wspólnego wierzchołka. Mówiąc o skojarzeniu będziemy myśleć o jego zbiorze krawędzi. **Skojarzeniem indukowanym** w grafie G nazywamy skojarzenie, które jest podgrafem indukowanym G.

Graf G nazywamy grafem **dwudzielnym**, jeżeli zbiór wierzchołków $V(G)$ możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory T i W w taki sposób, że każda krawędź z $E(G)$ ma jeden koniec w T, a drugi koniec w W. T i W nazywamy klasami dwudzielności. Graf **pełny dwudzielny**, oznaczany przez $K_{t,w}$, to graf dwudzielny z klasami dwudzielności o liczności odpowiednio t i w, w którym pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków należących do różnych klas dwudzielności istnieje krawędź.

Graf G nazywamy $k-$**zdegenerowanym**, jeżeli każdy indukowany podgraf grafu G zawiera wierzchołek o stopniu co najwyżej k.

Graf G nazywamy grafem **bez** H, jeżeli G nie zawiera indukowanej kopii H. Graf $K_{1,3}$ nazywamy **szponem**, a grafy bez $K_{1,3}$ nazywamy grafami **bez szponów**.

Graf G nazywamy grafem **przecięć dysków jednostkowych**, jeżeli wierzchołki G są punktami w $\mathbb{R}^2$ i każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im punkty są w odległości euklidesowej co najwyżej 1.

Graf G jest **spójny**, jeżeli dla każdych dwóch wierzchołków z $V(G)$ istnieje ścieżka, która je łączy.

Graf G nazywamy **drzewem**, jeżeli jest spójny i nie zawiera cykli. **Liściem** drzewa nazywamy wierzchołek o stopniu 1.

Graf G nazywamy **gwiazdą**, jeżeli jest drzewem i co najwyżej jeden wierzchołek z $V(G)$ nie jest liściem.

1.3 Znane twierdzenia i hipotezy

W bieżącej sekcji przedstawiamy znane twierdzenia i hipotezy, do których będziemy się odwoływać w niniejszej rozprawie.

W dowodach naszych twierdzeń wielokrotnie korzystamy z twierdzenia Turána, w którym podane jest górne ograniczenie na liczbę krawędzi grafów niezawierających kliki o zadanym rozmiarze.

Twierdzenie 1.1 (P. Turán, 1941 [47]). *Niech G będzie grafem bez K_r o p wierzchołkach. Wówczas*

$$|E(G)| \leq \frac{p^2(r-2)}{2(r-1)}.$$

Kilkukrotnie będziemy się odwoływać także do hipotezy Reeda, w której ograniczenie na liczbę chromatyczną grafu uzależnione jest od jego maksymalnego stopnia i liczby klikowej. Gdyby hipoteza Reeda była prawdziwa, z ograniczenia na rozmiar silnych klik w grafach wynikałoby ograniczenie na silny indeks chromatyczny (analogicznie dla $t-$silnych klik i $t-$silnego indeksu chromatycznego).

Hipoteza 1.2 (B. Reed, 1998 [44]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ i największej klice rozmiaru ω. Wówczas*

$$\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta + 1 + \omega}{2} \right\rceil.$$

Hipoteza Reeda została udowodniona w wersji ułamkowej. Z poniższego twierdzenia korzystamy dowodząc ograniczenia na ułamkowy silny indeks chromatyczny i ułamkowy $t-$silny indeks chromatyczny.

Twierdzenie 1.3 (M. Molloy, B. Reed, 2002 [40, Theorem 21.7]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ i największej klice rozmiaru ω. Wówczas*

$$\chi_f(G) \leq \frac{\Delta + 1 + \omega}{2}.$$

Rozdział 2

Silny indeks chromatyczny grafów

2.1 Wprowadzenie

2.1.1 Silne kolorowanie krawędzi grafu

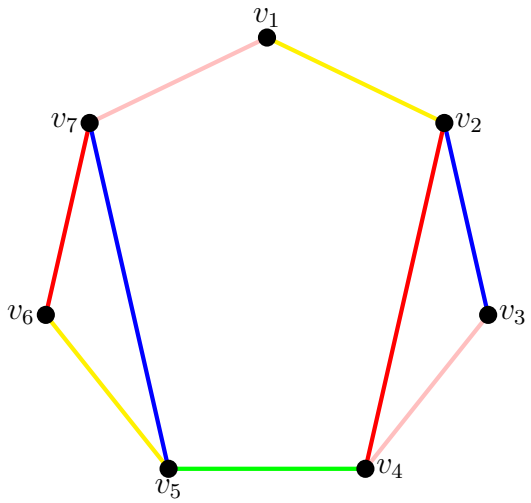
Poprawne kolorowanie krawędzi grafu G możemy zdefiniować jako kolorowanie, w którym każda ścieżka zawierająca dokładnie dwie krawędzie musi być różnokolorowa. Oznacza to, że każda klasa koloru tworzy skojarzenie w G. W niniejszej rozprawie będziemy rozważać kolorowanie spełniające silniejszy warunek. W silnym kolorowaniu krawędzi grafu G każda ścieżka składająca się z dwóch lub trzech krawędzi musi być różnokolorowa; to znaczy, że żadne dwie krawędzie tej ścieżki nie mogą być w tym samym kolorze. W kolorowaniu tym każda klasa koloru tworzy skojarzenie indukowane w G.

Definicja 2.1. *Niech G będzie grafem.*

Silnym kolorowaniem krawędzi *grafu G nazywamy takie kolorowanie krawędzi G, w którym każda klasa koloru jest skojarzeniem indukowanym w G.*

Silnym indeksem chromatycznym *grafu G, oznaczanym przez $\chi'_s(G)$, nazywamy najmniejszą możliwą liczbę kolorów w silnym kolorowaniu krawędzi G.*

Przykład silnego kolorowania krawędzi grafu przedstawia Rysunek 2.1. Graf pokolorowany jest na 5 kolorów. Pary krawędzi o tych samych kolorach to v_1v_7 i v_3v_4, v_1v_2 i v_5v_6, v_2v_3 i v_5v_7 oraz v_2v_4 i v_6v_7. Zauważmy, że każde dwie krawędzie, które mają ten sam kolor,



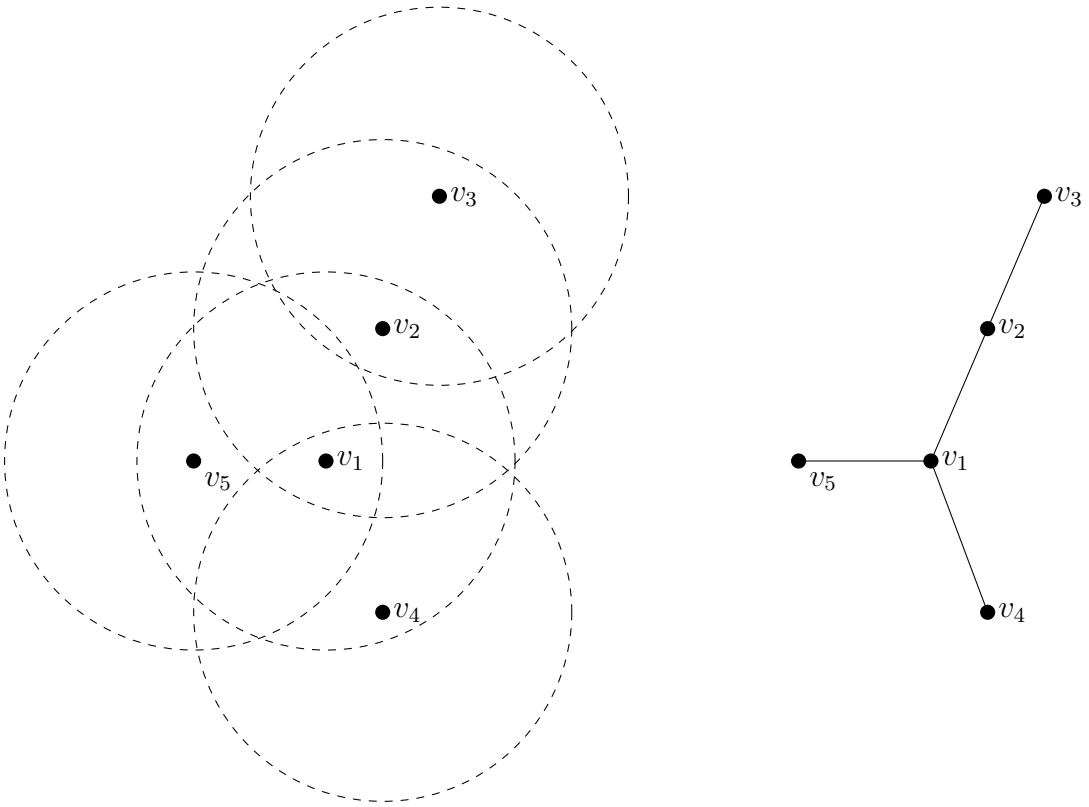
Rysunek 2.1: Silne kolorowanie krawędzi grafu.

są od siebie w odległości 3, zatem podane kolorowanie jest silne. Ile wynosi silny indeks chromatyczny tego grafu? Każde dwie z pięciu krawędzi v_1v_2, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_7 i v_7v_1 są od siebie w odległości co najwyżej 2, zatem nie możemy użyć mniej niż 5 kolorów. Wynika stąd, że silny indeks chromatyczny podanego grafu wynosi 5.

2.1.2 Bezprzewodowe sieci radiowe – motywacja

Rozważmy bezprzewodowe sieci radiowe składające się ze stacji nadawczo-odbiorczych, które mogą zarówno wysyłać, jak i odbierać wiadomości. Stacje radiowe mają ustalony zasięg (region geograficzny), w którym mogą komunikować się z innymi. Komunikacja pomiędzy dwoma stacjami jest możliwa, jeżeli obie leżą w swoich zasięgach. Każdą taką sieć możemy przedstawić za pomocą grafu. Wierzchołki odpowiadają stacjom nadawczo-odbiorczym, dwa wierzchołki połączone są krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy mogą wysyłać pomiędzy sobą wiadomości. Przykład sieci i modelującego ją grafu przedstawia Rysunek 2.2.

Zauważmy, że w naszym przykładzie komunikacja pomiędzy stacjami v_1–v_5 oraz v_1–v_4 nie może odbywać się na tej samej częstotliwości – w stacji v_1 dochodziłoby do zakłóceń transmisji ze stacji v_5 i v_4 – takie zakłócenia nazywamy interferencją pierwotną. Komunikacje pomiędzy stacjami v_1–v_5 i v_1–v_4 nie mogą również odbywać się na tej samej



Rysunek 2.2: Bezprzewodowa sieć radiowa i modelujący ją graf.

częstotliwości co komunikacja pomiędzy v_2–v_3, inaczej transmisje ze stacji v_1 zakłócałyby w węźle v_2 transmisje ze stacji v_3 – jest to interferencja wtórna.

Przypisanie stacjom radiowym częstotliwości, na których komunikują się z innymi stacjami w taki sposób, aby uniknąć interferencji pierwotnych i wtórnych, odpowiada silnemu kolorowaniu krawędzi grafu modelującego sieć ([4], [43]). Kolor krawędzi pomiędzy dwoma wierzchołkami odpowiada częstotliwości, której będą używać do komunikacji stacje radiowe odpowiadające tym wierzchołkom. Przypisanie różnych kolorów krawędziom w odległości 1 pozwala na uniknięcie interferencji pierwotnych, a krawędziom w odległości 2 na uniknięcie interferencji wtórnych. Chcemy, żeby szerokość pasma wykorzystywanego przez sieć była jak najmniejsza; ponieważ każdy kolor oznacza inną częstotliwość, ważne jest, aby użyć jak najmniej kolorów – czyli aby znaleźć silny indeks chromatyczny grafu modelującego sieć.

2.1.3 Hipoteza Erdősa i Nešetřila

Silne kolorowanie krawędzi grafu po raz pierwszy pojawiło się w literaturze w 1983 r. w pracy Fouqueta i Joliveta [27], [28]. Głównym problemem w tej tematyce jest określenie, jak duży może być silny indeks chromatyczny grafu o maksymalnym stopniu Δ. W 1985 r. na seminarium w Pradze Erdős i Nešetřil postawili hipotezę, która cały czas pozostaje otwarta (hipoteza została opublikowana w [23], a później opisana w [3] wraz z dyskusją na temat znanych wyników).

Hipoteza 2.2 (P. Erdős, J. Nešetřil, 1985 [23])**.** *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta^2, & \text{gdy } \Delta \text{ jest parzyste,} \\ \frac{5}{4}\Delta^2 - \frac{2\Delta-1}{4}, & \text{gdy } \Delta \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

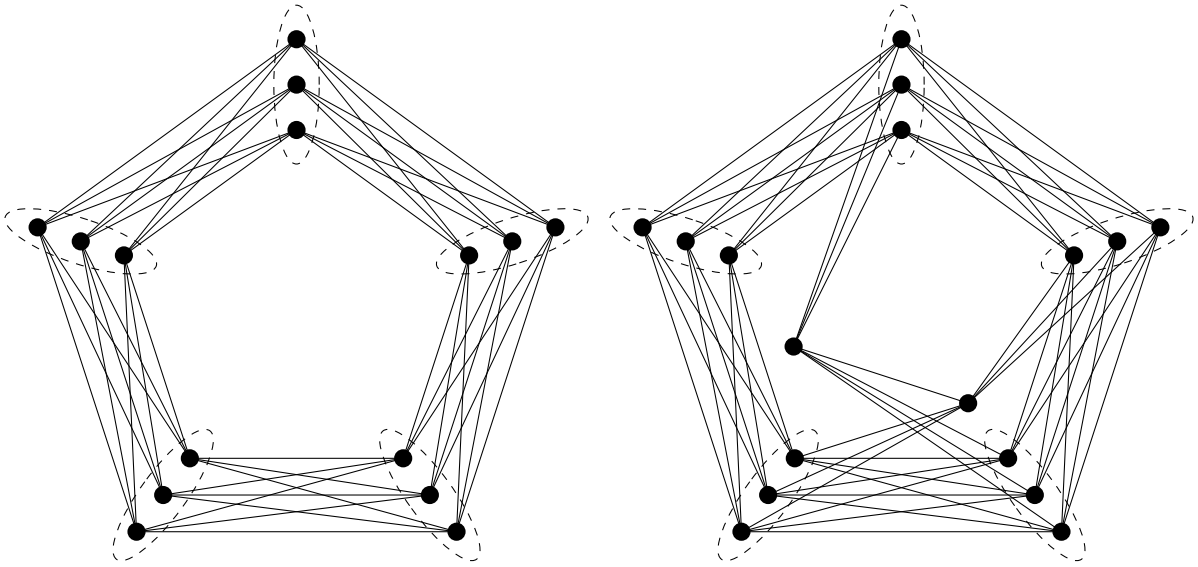
Wiadomo, że ograniczenie z hipotezy Erdősa i Nešetřila, jeżeli tylko jest prawdziwe, jest optymalne. Pokazuje to poniższa obserwacja.

Obserwacja 2.3. *Dla każdego Δ będącego liczbą naturalną, istnieje graf G_Δ, dla którego*

$$\chi'_s(G) = \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta^2, & \text{gdy } \Delta \text{ jest parzyste,} \\ \frac{5}{4}\Delta^2 - \frac{2\Delta-1}{4}, & \text{gdy } \Delta \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Dowód Obserwacji 2.3. Załóżmy najpierw, że Δ jest parzyste. Graf G_Δ konstruujemy z cyklu C_5 poprzez rozdmuchanie każdego wierzchołka do zbioru niezależnego o rozmiarze $\frac{\Delta}{2}$. Wierzchołki grafu G_Δ to uporządkowane pary (i, j), gdzie $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a $j \in \{1, 2, \ldots, \frac{\Delta}{2}\}$. Krawędzie G_Δ to nieuporządkowane pary $\{(i, j), (i', j')\}$, takie że $(i' = i + 1 \pmod 5$ lub $i' = i - 1 \pmod 5)$ i $j, j' \in \{1, 2, \ldots, \frac{\Delta}{2}\}$ (patrz Rysunek 2.3a). Zauważmy, że każde dwie krawędzie grafu G_Δ są w odległości co najwyżej 2, zatem każda z nich musi zostać pokolorowana na inny kolor. Krawędzi tych jest dokładnie $\frac{5}{4}\Delta^2$, więc do pokolorowania całego grafu G_Δ potrzebujemy dokładnie tylu kolorów.

Załóżmy teraz, że Δ jest nieparzyste. Graf G_Δ konstruujemy wówczas poprzez dodanie do grafu $G_{\Delta-1}$ ($\Delta - 1$ jest parzyste) dwóch gwiazd. Zbiorem wierzchołków grafu G_Δ jest $V(G_{\Delta-1}) \cup \{u, v\}$. Zbiorem krawędzi G_Δ jest $E(G_{\Delta-1})$ wraz ze wszystkimi parami



(a) Przypadek parzysty, $\Delta = 6$.

(b) Przypadek nieparzysty, $\Delta = 7$.

Rysunek 2.3: Grafy G_Δ o największym znanym silnym indeksie chromatycznym.

$\{u, (1, j)\}, \{u, (3, j)\}, \{v, (2, j)\}, \{v, (4, j)\}$ oraz krawędź $\{u, v\}$ (patrz Rysunek 2.3b). Zauważmy, że także w tym przypadku każde dwie krawędzie grafu G_Δ są w odległości co najwyżej 2, zatem każda z nich musi zostać pokolorowana na inny kolor. Krawędzi tych jest dokładnie $\frac{5}{4}\Delta^2 - \frac{2\Delta-1}{4}$, więc do pokolorowania całego grafu G_Δ potrzebujemy dokładnie tylu kolorów.

Pokazaliśmy, że w obu przypadkach w silnym kolorowaniu krawędzi grafu G_Δ potrzebujemy dokładnie tylu kolorów, ile podaje teza obserwacji, dowód jest więc kompletny. $\square$

2.1.4 Ograniczenie na silny indeks chromatyczny

W sekcji 2.1.3 przedstawiliśmy hipotezę Erdősa i Nešetřila (Hipoteza 2.2), która mówi, że silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest ograniczony przez $\frac{5}{4}\Delta^2$ (dla nieparzystego Δ ograniczenie jest trochę mniejsze, ale interesuje nas przede wszystkim współczynnik przy Δ^2). Hipoteza jest cały czas otwarta i szeroko badana. W niniejszej sekcji przedstawimy postępy w pracach nad znalezieniem odpowiedzi na pytanie: jak duży może być silny indeks chromatyczny grafów o zadanym maksymalnym stopniu?

Z prostego algorytmu zachłannego wynika, że silny indeks chromatyczny grafu o maksymalnym stopniu Δ jest ograniczony przez $2\Delta^2$. Pokazuje to poniższa obserwacja.

Obserwacja 2.4. *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\chi'_s(G) \leq 2\Delta^2 - 2\Delta + 1.$$

Dowód Obserwacji 2.4. Pokolorujemy krawędzie grafu G przy pomocy algorytmu zachłannego. Ustalmy dowolną kolejność krawędzi z G. Nasz algorytm będzie miał $|E(G)|$ kroków. W $i-$tym kroku kolorujemy krawędź e_i na wolny kolor, tzn. taki, który nie jest przypisany do żadnej pokolorowanej krawędzi, która jest w odległości co najwyżej 2 od e_i.

Zauważmy, że dla każdej krawędzi e_i grafu G jest co najwyżej $2(\Delta-1)$ sąsiadów wierzchołków incydentnych z e_i (innych niż końce e_i), a każdy z tych sąsiadów jest incydentny z co najwyżej Δ krawędziami – liczba krawędzi w odległości co najwyżej 2 od e_i nie przekracza zatem $2\Delta^2 - 2\Delta$. Algorytm zachłanny znajdzie więc silne kolorowanie krawędzi grafu G na co najwyżej $2\Delta^2 - 2\Delta + 1$ kolorów, co kończy dowód obserwacji. □

Przez wiele lat ograniczenie $2\Delta^2$ było jedynym znanym wynikiem. Pojawiało się pytanie: czy można udowodnić, że silny indeks chromatyczny grafu o maksymalnym stopniu Δ jest mniejszy od $2\Delta^2$? W 1997 r. został opublikowany przełomowy artykuł, w którym Molloy i Reed odpowiedzieli na to pytanie pozytywnie. W dowodzie autorzy użyli metody probabilistycznej.

Twierdzenie 2.5 (M. Molloy, B. Reed, 1997 [39])**.** *Niech G będzie grafem z wystarczająco dużym maksymalnym stopniem Δ. Wówczas*

$$\chi'_s(G) \leq 1,998\Delta^2.$$

Autorzy twierdzenia wspomnieli, że widzą możliwość poprawy ich ograniczenia do $1,99\Delta^2$.

To, jakim wyzwaniem jest zweryfikowanie hipotezy Erdősa i Nešetřila pokazuje fakt, że wynik Molloya i Reeda był najlepszym znanym ograniczeniem przez 18 lat. Dopiero w 2015 r. Bruhn i Joos poprawili ten rezultat.

Twierdzenie 2.6 (H. Bruhn, F. Joos, 2015 [9]). [1] *Niech G będzie grafem z wystarczająco dużym maksymalnym stopniem Δ. Wówczas*

$$\chi'_s(G) \leq 1,93\Delta^2.$$

Trzy lata później na arXiv ukazała się praca z obecnie najlepszym znanym górnym ograniczeniem na silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ. Bonamy, Perrett i Postle osiągnęli znaczący postęp w stosunku do poprzednich wyników.

Twierdzenie 2.7 (M. Bonamy, T. Perrett, L. Postle, 2018 [6]). *Niech G będzie grafem z wystarczająco dużym maksymalnym stopniem Δ. Wówczas*

$$\chi'_s(G) \leq 1,835\Delta^2.$$

Zauważmy, że najlepsze udowodnione do tej pory ograniczenie wciąż jest dalekie od $\frac{5}{4}\Delta^2$ z hipotezy Erdősa i Nešetřila. Wiadomo jednak, że hipoteza jest prawdziwa dla grafów, w których każde dwie krawędzie są od siebie w odległości nie większej od 2 (tzn. każda krawędź musi dostać inny kolor w silnym kolorowaniu krawędzi). Chung, Gyárfás, Trotter i Tuza udowodnili poniższe ograniczenie na liczbę krawędzi w takich grafach.

Twierdzenie 2.8 (F. R. K. Chung, A. Gyárfás, W. T. Trotter, Z. Tuza, 1990 [15]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ, niezawierającym żadnej pary krawędzi w odległości większej od 2. Wówczas*

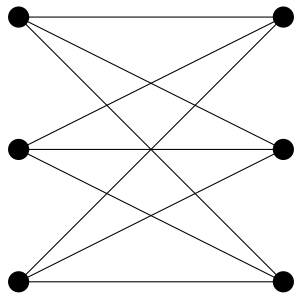
$$|E(G)| \leq \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta^2, & \text{gdy } \Delta \text{ jest parzyste,} \\ \frac{5}{4}\Delta^2 - \frac{2\Delta-1}{4}, & \text{gdy } \Delta \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Jedną z najważniejszych klas grafów, dla których hipoteza Erdősa i Nešetřila jest wciąż otwarta, są grafy dwudzielne. Chociaż grafy te mają jasno określoną strukturę, nikomu nie udało się wykorzystać ich właściwości do poprawy ogólnego wyniku $1,835\Delta^2$ z Twierdzenia 2.7. A co wiadomo o dolnym ograniczeniu? Grafy z Obserwacji 2.3 o silnym indeksie chromatycznym $\frac{5}{4}\Delta^2$ nie są dwudzielne. Nie są znane żadne przykłady grafów dwudzielnych o silnym indeksie chromatycznym większym od Δ^2; w poniższej obserwacji przedstawione zostały grafy dwudzielne o silnym indeksie chromatycznym równym Δ^2.

[1] Praca z pełnym dowodem twierdzenia ukazała się w 2018 r.; patrz [10]

Obserwacja 2.9. *Dla każdego Δ będącego liczbą naturalną, istnieje graf dwudzielny G_Δ, dla którego $\chi'_s(G_\Delta) = \Delta^2$.*

Dowód Obserwacji 2.9. Dla każdego Δ graf G_Δ to graf dwudzielny pełny $K_{\Delta,\Delta}$. Ma on dokładnie Δ^2 krawędzi i każde dwie krawędzie są w odległości nie większej od 2 (patrz Rysunek 2.4). □



Rysunek 2.4: Graf dwudzielny $G_{\Delta,\Delta}$ o silnym indeksie chromatycznym równym Δ^2, dla $\Delta = 3$.

Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza w 1989 r. postawili hipotezę, w której przypuszczają, że dla każdego grafu dwudzielnego o maksymalnym stopniu Δ wystarczy Δ^2 kolorów, aby silnie pokolorować jego krawędzie.

Hipoteza 2.10 (R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, 1989 [25])**.** *Niech G będzie grafem dwudzielnym o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas $\chi'_s(G) \leq \Delta^2$.*

Hipoteza 2.10 została udowodniona dla $\Delta \leq 3$ (patrz [45]). Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza w swojej hipotezie uzależnili wielkość silnego indeksu chromatycznego od maksymalnego stopnia grafu dwudzielnego. W grafach dwudzielnych można brać pod uwagę także maksymalne stopnie wierzchołków w każdej z klas dwudzielności. Mocniejszą wersję Hipotezy 2.10 postawili Brualdi i Quinn Massey.

Hipoteza 2.11 (R. A. Brualdi, J. J. Quinn Massey, 1993 [8])**.** *Niech G będzie grafem dwudzielnym, takim że wierzchołki w $i-$tej klasie dwudzielności mają maksymalny stopień Δ_i, dla $i \in \{1, 2\}$. Wówczas $\chi'_s(G) \leq \Delta_1\Delta_2$.*

Hipoteza 2.11 została udowodniona dla pewnych specjalnych klas grafów (patrz [8], [41], [42]).

Problem silnego kolorowania krawędzi badany jest także dla grafów o małym maksymalnym stopniu. Hipoteza Erdősa i Nešetřila jest prawdziwa dla $\Delta \leq 2$ (przypadek trywialny) i dla $\Delta = 3$ ([2] i [31]). Jednak już dla $\Delta = 4$, pomimo prób wielu badaczy, udowodnione ograniczenie cały czas jest wyższe niż to wynikające z hipotezy. W 1990 r. Horák pokazał, że silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu 4 jest nie większy od 23 ([30]), w 2006 r. Cranston poprawił to ograniczenie do 22 ([16]), a w 2018 r. Huang, Santana i Yu udowodnili najlepszy obecnie znany wynik: 21([32]). Ograniczenie postulowane w hipotezie jest o 1 mniejsze – wynosi 20.

Silne kolorowanie krawędzi grafów badane jest również dla wielu innych klas grafów, takich jak np. grafy planarne (patrz [33] i [36]), grafy losowe (patrz [29]) czy grafy bezcięciwowe (patrz [5]).

Przytaczając najistotniejsze wyniki dotyczące ograniczeń na silny indeks chromatyczny grafów, warto wspomnieć o twierdzeniu Alona, Moitra'y i Sudakova. W 2012 r. pokazali oni, że istnieją grafy o n wierzchołkach, które są prawie pełne, a mają zaskakująco niski silny indeks chromatyczny – rzędu $n^{1+\epsilon}$ (silny indeks grafów pełnych jest oczywiście rzędu n^2).

Twierdzenie 2.12 (N. Alon, A. Moitra, B. Sudakov, 2012 [1])**.** *Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że dla każdego wystarczająco dużego n istnieje graf G o n wierzchołkach, dla którego zachodzi*

$$\chi'_s(G) \leq n^{1+\epsilon} \quad i \quad |E(G)| \geq \binom{n}{2} - n^{2-\delta}.$$

W następnej sekcji przedstawimy kolejne klasy grafów o silnym indeksie chromatycznym rzędu mniejszego od Δ^2.

2.2 Grafy rzadkie o silnym indeksie chromatycznym rzędu mniejszego od Δ^2

Wiemy już, że w ogólnym przypadku górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ musi być rzędu Δ^2 (Obserwacje 2.3 i 2.4). W niniejszej sekcji skupimy się na grafach rzadkich, dla których udowodnione zostały ograniczenia niższego rzędu.

2.2.1 Grafy z małą liczbą cykli C_4

W 2000 r. ukazała się praca Mahdiana [37], w której zajmował się grafami bez C_4 (tzn. grafami, które nie zawierają cyklu C_4 jako indukowanego podgrafu). Mahdian zauważył, że grafy te mają interesujące własności, które można wykorzystać do znaczącego poprawienia górnego ograniczenia na silny indeks chromatyczny. Udowodnił, że jeżeli graf nie ma cyklu długości 4 i jego maksymalny stopień Δ jest wystarczająco duży, to jego silny indeks chromatyczny jest rzędu co najwyżej $\frac{\Delta^2}{\ln \Delta}$; hipoteza Erdősa i Nešetřila (Hipoteza 2.2) dla tej klasy grafów jest więc prawdziwa.

Twierdzenie 2.13 (M. Mahdian, 2000 [37]). *Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje Δ_0, taka że dla każdego grafu G o maksymalnym stopniu $\Delta \geq \Delta_0$, który nie zawiera C_4 jako indukowanego podgrafu, zachodzi*

$$\chi'_s(G) \leq (2+\epsilon)\frac{\Delta^2}{\ln \Delta}.$$

Twierdzenie 2.13 jest asymptotycznie optymalne, tzn. istnieją grafy bez C_4, których silny indeks chromatyczny wynosi co najmniej $\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \frac{\Delta^2}{\ln \Delta}$.

W 2018 r. Dębski pogłębił rozważania Mahdiana i zauważył, że nawet gdy w grafie występują cykle C_4, ale każda krawędź należy do wystarczająco małej ich liczby, to dalej górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny jest rzędu co najwyżej $\frac{\Delta^2}{\ln \Delta}$.

Twierdzenie 2.14 (M. Dębski, 2019 [18]). *Istnieje stała K, taka że dla każdego grafu G o maksymalnym stopniu Δ, którego każda krawędź należy do co najwyżej $\frac{\Delta^2}{g}$ cykli o dłu-*

gości 4, *gdzie* $1 < g \leq \Delta^2$, *zachodzi*

$$\chi'_s(G) \leq K\frac{\Delta^2}{\ln g}.$$

2.2.2 Grafy $k-$zdegenerowane, hipoteza Changa i Narayanana

Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza w 1990 r. udowodnili, że dla grafów dwudzielnych, w których każdy cykl ma długość podzielną przez 4, Hipoteza 2.10 (mówiąca o tym, że silny indeks grafów dwudzielnych o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najwyżej Δ^2) jest prawdziwa.

Twierdzenie 2.15 (R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, 1990 [26])**.** *Niech G będzie grafem dwudzielnym o maksymalnym stopniu Δ, w którym każdy cykl ma długość podzielną przez* 4*. Wówczas* $\chi'_s(G) \leq \Delta^2$.

Autorzy zaznaczyli, że ich wynik prawdopodobnie można poprawić. Oczekiwali, że silny indeks chromatyczny grafów dwudzielnych o cyklach długości podzielnej przez 4 jest dużo niższy, być może liniowy ze względu na Δ. W 2012 Chang i Narayanan potwierdzili ich przypuszczenie. Przypomnijmy, że graf G nazywamy $k-$**zdegenerowanym**, jeżeli każdy jego indukowany podgraf zawiera wierzchołek o stopniu nie większym od k. Grafy, w których każdy cykl ma długość podzielną przez 4 są $2-$zdegenerowane (patrz [13]).

Twierdzenie 2.16 (G. J. Chang, N. Narayanan, 2012 [13])**.** *Niech G będzie grafem $2-$zdegenerowanym o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas* $\chi'_s(G) \leq 10\Delta - 10$.

Chang i Narayanan postawili hipotezę, że ograniczenie liniowe ze względu na Δ może być rozszerzone na wszystkie grafy $k-$zdegenerowane.

Hipoteza 2.17 (G. J. Chang, N. Narayanan, 2012 [13])**.** *Istnieje stała c, taka że dla każdego $k-$zdegenerowanego grafu G o maksymalnym stopniu Δ zachodzi* $\chi'_s(G) \leq ck^2\Delta$.

Autorzy hipotezy sugerowali, że ograniczenie prawdopodobnie jest silniejsze i k^2 może być zastąpione przez k.

Razem z M. Dębskim i J. Grytczukiem potwierdziliśmy tę hipotezę i udowodniliśmy ograniczenie $\chi'_s(G) \leq (4k-1)\Delta - k(2k+1) + 1$ dla grafów $k-$zdegenerowanych (patrz

[19]). Pomijamy tu dowód wspomnianego twierdzenia, ponieważ okazało się, że hipoteza Changa i Narayanana została potwierdzona jeszcze zanim została postawiona. W 2006 r. Barrett, Kumar, Marathe, Thite, Istrate i Thulasidasan udowodnili poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.18 (C. L. Barrett, V. S. A. Kumar, M. V. Marathe, S. Thite, G. Istrate i S. Thulasidasan, 2006 [4][2]). *Niech G będzie grafem $k-$zdegenerowanym o maksymalnym stopniu Δ, gdzie $k \leq \Delta$. Wówczas*

$$\chi'_s(G) \leq (4k-1)\Delta - 2k^2 - k + 1.$$

2.2.3 Grafy bezcięciwowe

Niech C będzie dowolnym cyklem w grafie G. Krawędź grafu, która nie należy do cyklu C, ale ma oba końce należące do C, nazywamy **cięciwą cyklu** C. Mówimy, że graf G jest **bezcięciwowy**, jeżeli żaden cykl w G nie ma cięciwy – oznacza to, że każdy cykl w G jest indukowany. Klasa grafów bezcięciwowych jest podklasą grafów $2-$zdegenerowanych (patrz [13]).

W 2012 r. Chang i Narayanan udowodnili, że krawędzie grafów bezcięciwowych można silnie pokolorować na nie więcej niż $8\Delta - 6$ kolorów (patrz [13]). Chociaż ten wynik jest słabszy niż $7\Delta - 9$ z Twierdzenia 2.18, dowód jest bardzo pouczający. Wykorzystuje on poniższy lemat dotyczący struktury grafów bezcięciwowych.

Lemat 2.19 (G. J. Chang, N. Narayanan, 2012 [13]). *Każdy graf bezcięciwowy G zawiera wierzchołek v, którego co najmniej* $\deg(v) - 1$ *sąsiadów ma stopień co najwyżej* 2.

Razem z M. Dębskim i J. Grytczukiem poprawiliśmy ograniczenie na silny indeks chromatyczny grafów bezcięciwowych. W naszym dowodzie korzystamy z lematu Changa i Narayanana (Lemat 2.19).

Twierdzenie 2.20 (M. Dębski, J. Grytczuk, M. Ś-N., 2015 [19]). *Niech G będzie grafem bezcięciwowym o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas $\chi'(G) \leq 4\Delta - 3$.*

[2] W Twierdzeniu był mały błąd, autorzy podali, że współczynnik przy Δ wynosi $(4k-3)$, prezentujemy poprawną wersję twierdzenia.

Mówimy, że wierzchołek v jest **miły** w grafie G, jeżeli v ma co najmniej jednego sąsiada o stopniu co najwyżej 2 i co najwyżej jednego sąsiada o stopniu większym od 2.

W dowodzie korzystamy z poniższego lematu, dotyczącego struktury grafów bezcięciwowych.

Lemat 2.21 (M. Dębski, J. Grytczuk, M. Ś-N., 2015 [19]). *Niech G będzie grafem bezcięciwowym o co najmniej jednej krawędzi, niech X będzie zbiorem wszystkich wierzchołków grafu G o stopniu równym 1. Wówczas w G lub w $G \setminus X$ istnieje miły wierzchołek.*

Dowód Lematu 2.21. Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że G nie zawiera wierzchołków izolowanych. Jeżeli G nie zawiera wierzchołków o stopniu 1, wówczas twierdzenie jest prawdziwe z Lematu 2.19. W przeciwnej sytuacji mamy trzy możliwe przypadki:

Przypadek 1: $G \setminus X$ nie zawiera żadnych wierzchołków. Oznacza to, że wszystkie wierzchołki z G mają stopień równy 1, czyli każdy wierzchołek jest miły w G.

Przypadek 2: $G \setminus X$ zawiera wierzchołek o stopniu co najwyżej 1, nazwijmy go v. Zauważmy, że v jest miłym wierzchołkiem w G – skoro w $G \setminus X$ ma stopień co najwyżej 1, to w G ma co najmniej jednego sąsiada należącego do X (czyli o stopniu 1) i co najwyżej jednego sąsiada o stopniu większym od 1 (z $G \setminus X$).

Przypadek 3: Wszystkie wierzchołki z $G \setminus X$ mają stopień co najmniej 2. Z Lematu 2.19 wiemy, że $G \setminus X$ zawiera wierzchołek v, którego co najmniej $\deg_{G \setminus X}(v) - 1$ sąsiadów ma stopień co najwyżej 2 i co najwyżej 1 sąsiad ma stopień większy od 2. Wierzchołek v jest więc miły w $G \setminus X$.

We wszystkich przypadkach wskazaliśmy co najmniej jeden miły wierzchołek w G lub w $G \setminus X$, dowód lematu jest więc kompletny. □

W dowodzie Twierdzenia 2.20 przedstawiamy algorytm do znajdowania silnego kolorowania krawędzi grafów bezcięciwowych. Pokazujemy, że nasze ograniczenie na liczbę użytych kolorów może być osiągnięte przez algorytm zachłanny, który koloruje krawędzie grafu w odpowiedniej kolejności.

Dowód Twierdzenia 2.20. Uporządkujemy krawędzie grafu G w taki sposób, że każda krawędź będzie w odległości co najwyżej 2 od nie więcej niż $4\Delta - 4$ krawędzi, które wystę-

pują przed nią. Listę krawędzi będziemy konstruować od końca (tzn. za każdym razem będziemy dodawać krawędź na początek listy), dodawana krawędź będzie w odległości co najwyżej 2 od nie więcej niż $4\Delta - 4$ krawędzi, które nie są jeszcze dodane do listy. Konstrukcję listy będziemy wykonywać krokami. Niech L_i będzie listą otrzymaną w $i - tym$ kroku, zaczniemy od listy L_0, która jest pusta.

Załóżmy, że mamy skonstruowaną listę L_i, dla $i \geq 0$. Niech $I_i \subset E(G)$ będzie zbiorem krawędzi, które występują na liście L_i; krawędzie te będziemy nazywać nieaktywnymi. Niech H_i będzie podgrafem grafu G indukowanym przez aktywne krawędzie, tzn $H_i = G[E(G) \setminus I_i]$, niech X_i będzie zbiorem wszystkich wierzchołków z H_i o stopniu równym 1. Rozważmy wierzchołek v_i, który jest miły w H_i lub w $H_i \setminus X_i$; z Lematu 2.21 wiemy, że taki wierzchołek istnieje. Każdy krok algorytmu konstruującego listę będzie składał się z dwóch części.

(A) Jeżeli v_i jest miłym wierzchołkiem w H_i, wówczas $A_i := \emptyset$. W przeciwnym przypadku niech A_i będzie zbiorem wszystkich krawędzi z H_i, których jednym końcem jest sąsiad wierzchołka v_i o stopniu co najwyżej 2 w $H_i \setminus X_i$, a drugim końcem jest wierzchołek o stopniu 1 w H_i. Niech L'_i będzie listą otrzymaną przez dodanie na początek listy L_i wszystkich krawędzi z A_i (w dowolnej kolejności). Niech $H'_i = H_i \setminus A_i$. Zauważmy, że v_i jest miłym wierzchołkiem w H'_i (patrz Rysunek 2.5).

(B) Niech B_i będzie zbiorem wszystkich krawędzi z H'_i incydentnych z wierzchołkiem v_i i z wierzchołkiem o stopniu nie większym od 2, tzn. $B_i = \{v_i u \in E(H'_i) : \deg_{H'_i}(u) \leq 2\}$. Listę L_{i+1} tworzymy z listy L'_i poprzez dodanie na początek wszystkich krawędzi z B_i (w dowolnej kolejności). B_i zawsze zawiera co najmniej jedną krawędź, zatem dla pewnego s lista L_s będzie zawierała wszystkie krawędzie grafu G.

Pokażemy, że na każdym etapie konstrukcji naszej listy, wierzchołek incydentny z nieaktywną krawędzią jest incydentny z co najwyżej jedną aktywną krawędzią. Udowodnimy następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.22. *Dla każdego $i = 0, 1, \ldots, s$ i każdego wierzchołka $v \in V(G)$, jeżeli v jest incydentny z co najmniej jedną krawędzią z I_i, to jest incydentny z co najwyżej jedną krawędzią spoza I_i.*

Dowód Stwierdzenia 2.22. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na i. Dla $i = 0$ mamy $I_i = 0$, teza jest prawdziwa. Załóżmy teraz, że stwierdzenie jest prawdziwe dla pewnego i, takiego że $0 \leq i < s$. Rozważmy wierzchołek v incydentny z co najmniej jedną krawędzią z I_{i+1}. Zauważmy, że jeżeli v jest incydentny z co najmniej jedną krawędzią z I_i, wówczas, z założenia indukcyjnego, teza stwierdzenia jest prawdziwa (ponieważ $I_i \subset I_{i+1}$). Załóżmy więc, że tak nie jest. Mamy trzy możliwości.

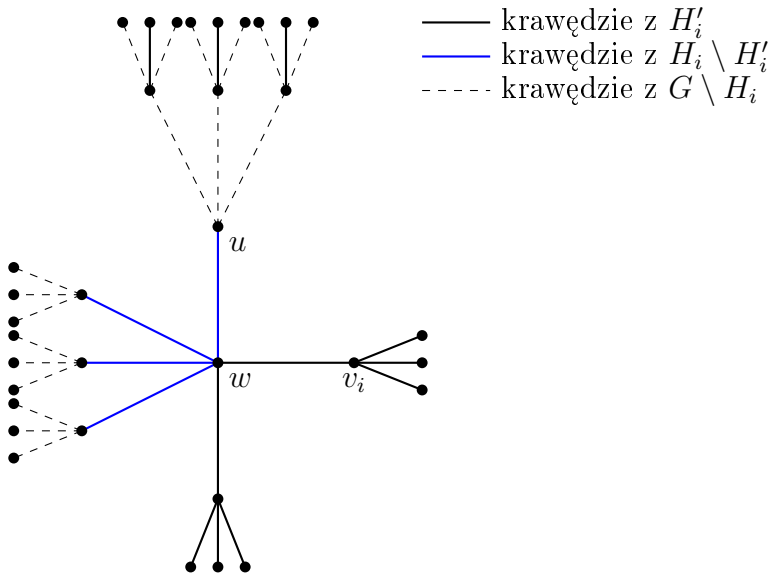
Przypadek 1: v ma stopień 1 w H_i. Wówczas wszystkie krawędzie incydentne z v są w I_{i+1}.

Przypadek 2: v jest sąsiadem wierzchołka v_i w H_i o stopniu co najwyżej 2 w H'_i. W tym przypadku krawędź vv_i należy do B_i, zatem poza I_{i+1} istnieje co najwyżej jedna krawędź incydentna z v.

Przypadek 3: v jest wierzchołkiem v_i, czyli jest miłym wierzchołkiem w H'_i i co najwyżej jedna krawędź incydentna z v w H'_i jest spoza B_i.

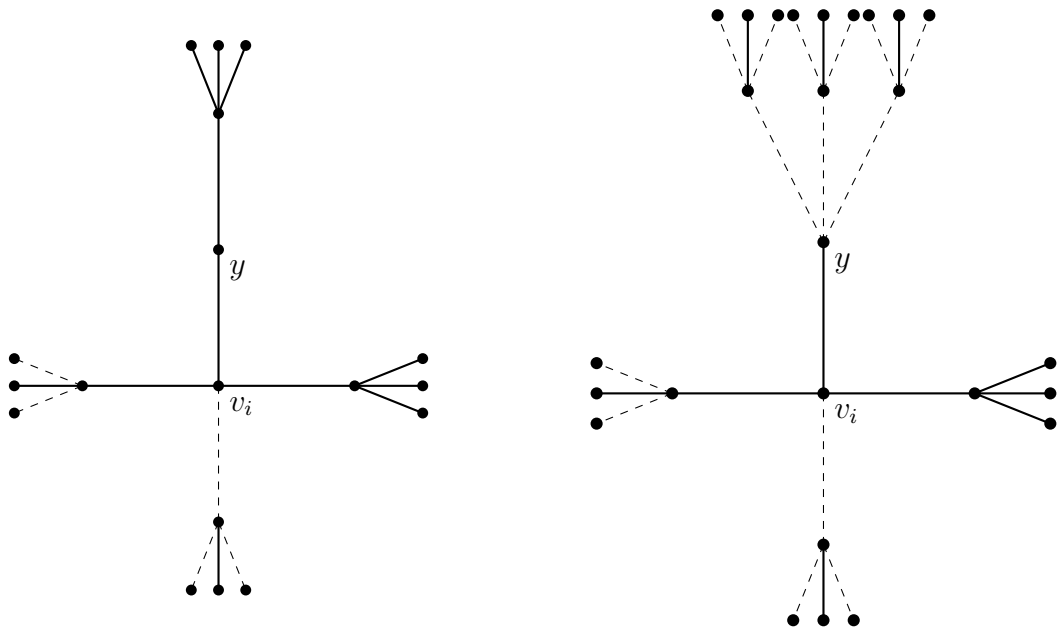
Dowód stwierdzenia jest więc kompletny. □

Dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ policzymy teraz, ile krawędzi w odległości co najwyżej 2 od e występuje na liście L_s przed e. Dla pewnego $i \in \{0, 1, \ldots, s\}$ zachodzi albo $e \in A_i$ albo $e \in B_i$.



Rysunek 2.5: Wierzchołek v_i jest miły w H_i, $uw \in A_i$.

Jeżeli $e \in A_i$, musimy policzyć krawędzie z H_i w odległości co najwyżej 2 od e w grafie G. Niech $e = uw$, gdzie u jest wierzchołkiem o stopniu równym 1 w H_i, a w jest wierzchołkiem o stopniu co najwyżej 2 w H_i' (patrz Rysunek 2.5). Zauważmy, że u ma co najwyżej $\Delta - 1$ sąsiadów w G innych niż w; ze Stwierdzenia 2.22 wynika, że każdy z nich jest incydentny z co najwyżej jedną krawędzią z H_i. Z definicji A_i wiemy, że w ma co najwyżej 2 sąsiadów w H_i, którzy są incydentni z więcej niż jedną krawędzią z H_i, a ze Stwierdzenia 2.22 wynika, że wszyscy inni sąsiedzi w w G (różni od u) są incydentni z co najwyżej jedną krawędzią z H_i. Liczba krawędzi grafu H_i w odległości co najwyżej 2 od e w G wynosi zatem co najwyżej $(\Delta - 1) + 2\Delta + (\Delta - 3) = 4\Delta - 4$.



y ma stopień 2 w H_i'.

y ma stopień 1 w H_i'.

Rysunek 2.6: Wierzchołek v_i jest miły w H_i', $v_iy \in B_i$ (ciągła linia oznacza krawędzie z H_i', linia przerywana krawędzie z $G \setminus H_i'$).

Jeżeli $e \in B_i$, musimy policzyć krawędzie z H_i' w odległości co najwyżej 2 od e w grafie G. Niech $e = v_iy$, gdzie y jest wierzchołkiem o stopniu co najwyżej 2 w H_i' (patrz Rysunek 2.6). Wierzchołek y albo ma stopień równy 2 w H_i' i, ze Stwierdzenia 2.22, nie jest incydentny z żadną krawędzią z I_i, albo ma stopień równy 1 w H_i' i, ponownie ze Stwierdzenia 2.22, każdy sąsiad y w G (inny niż v_i) ma stopień co najwyżej 1 w H_i'.

Sąsiedzi wierzchołka y w G różni od v_i są zatem incydentni w sumie z co najwyżej $\Delta - 1$ krawędziami z H'_i. Przypomnijmy, że wierzchołek v_i jest miły w H'_i, czyli w H'_i ma co najwyżej jednego sąsiada o stopniu większym od 2. Ze Stwierdzenia 2.22 wynika, że każdy sąsiad wierzchołka v_i z $G \setminus H'_i$ ma stopień co najwyżej 1 w H'_i. Sąsiedzi wierzchołka v_i w G, różni od y, są zatem incydentni z co najwyżej $\Delta + 2(\Delta - 2) = 3\Delta - 4$ krawędziami z H'_i. Krawędź e jest zatem w odległości co najwyżej 2 od nie więcej niż $4\Delta - 5$ krawędzi z H'_i.

Pokazaliśmy, że dla każdej krawędzi e grafu G co najwyżej $4\Delta - 4$ krawędzi występujących przed e na liście L_s musi mieć inny kolor niż e. Algorytm zachłanny, kolorując krawędzie w kolejności zgodnej z listą L_s, znajdzie więc silne kolorowanie krawędzi grafu G na co najwyżej $4\Delta - 3$ kolorów. Dowód twierdzenia jest zatem kompletny. □

2.2.4 Liniowe ograniczenie na silny indeks chromatyczny – dyskusja

W bieżącym rozdziale zajmowaliśmy się grafami rzadkimi. Pokazaliśmy dla nich ograniczenie na silny indeks chromatyczny, które jest liniowe ze względu na maksymalny stopień grafu. Czy potrafimy znaleźć gęstsze grafy, dla których takie ograniczenie jest prawdziwe? Czy jesteśmy w stanie wskazać klasę grafów o nieograniczonym średnim stopniu wierzchołków i liniowym ograniczeniu na silny indeks chromatyczny? Odpowiedź jest twierdząca.

Niech $\deg(G)$ oznacza średni stopień wierzchołków w grafie G. Dla ustalonej stałej $c > 0$, niech $\mathcal{F}_c$ oznacza rodzinę grafów G, dla których zachodzi $\chi'_s(G) \leq c \deg(G)$. Niech $f_c(n) = \max\{\deg(G) : G \in \mathcal{F}_c, |V(G)| \leq n\}$. Pokażemy najpierw, że dla $c < 2$ klasa $\mathcal{F}_c$ jest pusta.

Obserwacja 2.23 (patrz [19]). *Dla każdego grafu G zachodzi*

$$\chi'_s(G) \geq 2 \deg(G) - 1.$$

W dowodzie powyższej obserwacji korzystamy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza.

Twierdzenie 2.24 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza). *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Dowód Obserwacji 2.23. Niech G będzie grafem o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dla każdej krawędzi $e = uv \in E(G)$ przez $s(e)$ będziemy oznaczać sumę stopni jej końców, $s(e) := \deg(u) + \deg(v)$. Niech $M = \max\{s(e) : e \in E(G)\}$. Jako, że $\chi'_s(G) \geq M - 1$, wystarczy pokazać, że $M \geq 2\deg(G)$.

Zauważmy najpierw, że

$$\sum_{e \in E(G)} s(e) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)^2.$$

Rozważmy teraz dwa $n-$wymiarowe wektory $x = (\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ i $y = (1, 1, \ldots, 1)$. Po zastosowaniu nierówności Cauchy'ego-Schwarza (Twierdzenie 2.24) do wektorów x i y otrzymujemy

$$\left(\sum_{v \in V(G)} \deg(v)\right)^2 \leq \left(\sum_{v \in V(G)} \deg(v)^2\right) \cdot n,$$

a po przekształceniu

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)^2}.$$

Mamy zatem

$$2\,|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{e \in E(G)} s(e)} \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{M\,|E(G)|}.$$

Po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy $4\,|E(G)|^2 \leq nM\,|E(G)|$, zatem $M \geq \frac{4|E(G)|}{n} = 2\deg(G)$, co kończy dowód obserwacji. □

Teraz pokażemy, że $f_2(n)$ jest nieograniczone.

Obserwacja 2.25 (patrz [19]). *Dla $k \geq 1$ i $n = 2^k$ istnieje $(\log_2 n)-$regularny graf G o n wierzchołkach, dla którego zachodzi $\chi'_s(G) = 2\log_2 n$.*

Dowód Obserwacji 2.25. Pokażemy konstrukcję grafu G. Zbiorem wierzchołków grafu G jest zbiór wszystkich ciągów binarnych o długości k. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią, jeżeli odległość Hamminga pomiędzy odpowiadającymi im ciągami binarnymi wynosi dokładnie $k-1$, czyli ciągi te zgadzają się na dokładnie jednej pozycji. Zauważmy, że G jest grafem $(\log_2 n)-$regularnym o $n = 2^k$ wierzchołkach. Krawędzie grafu G kolorujemy zbiorem par $C = \{(i,j) : i \in \{1,2,\ldots,k\}, j \in \{0,1\}\}$. Krawędź uv zostaje pokolorowana na kolor (i,j) wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi binarne odpowiadające wierzchołkom u i v na $i-$tej pozycji mają wartość j. Wszystkich kolorów jest $2k = 2\log_2 n$. Dla każdej krawędzi e wszystkie krawędzie w odległości mniejszej bądź równej 2 od e mają inny kolor niż e, zatem $\chi'_s(G) = 2\log_2 n$, co mieliśmy udowodnić. □

Z Obserwacji 2.25 wiemy, że $f_2(n)$ jest nieograniczone. Nie wiemy jednak jaki jest jego rząd wielkości. A co z rzędem wielkości $f_c(n)$ dla większych wartości c? Problemy te pozostają otwarte.

2.3 Silny indeks chromatyczny grafów bez $K_{1,r}$

Przypomnijmy, że graf $K_{1,r}$ to graf pełny dwudzielny, o jednej klasie dwudzielności liczności 1, a drugiej liczności r. Graf $K_{1,3}$ nazywamy szponem. Grafy bez $K_{1,r}$ to grafy, które nie zawierają indukowanej kopii $K_{1,r}$. W niniejszej sekcji przedstawimy nasze twierdzenia podające najlepsze znane ograniczenia na silny indeks chromatyczny grafów bez $K_{1,r}$; dowody twierdzeń zawierają opisy algorytmów do silnego kolorowania krawędzi tych grafów.

2.3.1 Grafy bez szponów

Razem z M. Dębskim i K. Junosza-Szaniawskim udowodniliśmy, że górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny grafów bez szponów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większe od $1,125\Delta^2 + \Delta$; oznacza to prawdziwość hipotezy Erdősa i Nešetřila (Hipoteza 2.2) dla grafów bez szponów o maksymalnym stopniu większym bądź równym 12.

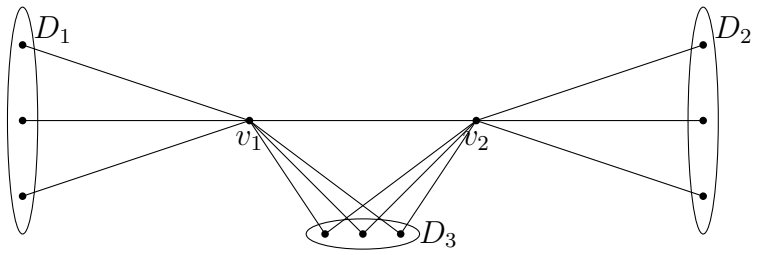
Twierdzenie 2.26 (M. Dębski, K. Junosza-Szaniawski, M. Ś-N, 2020 [20]). *Niech G będzie grafem bez szponów o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas $\chi'_s(G) \leq 1,125\Delta^2 + \Delta$.*

W dowodzie twierdzenia przedstawiamy algorytm wielomianowy do znajdowania silnego kolorowania krawędzi grafu bez szponów. Pokażemy, że nasze ograniczenie na liczbę użytych kolorów może być osiągnięte przez algorytm zachłanny, który koloruje krawędzie grafu w kolejności zależnej od liczby trójkątów, do których należą.

Dowód Twierdzenia 2.26. Twierdzenie jest w sposób oczywisty prawdziwe dla $\Delta \leq 2$. Zatem od teraz zakładamy, że $\Delta \geq 3$.

Będziemy kolorować krawędzie grafu G zachłannie, w kolejności określonej przez liczbę trójkątów, do których należą – krawędź e będzie kolorowana po tym, jak wszystkie krawędzie, należące do mniejszej liczby trójkątów niż e, zostaną już pokolorowane.

Niech v_1v_2 będzie krawędzią grafu G. Policzymy ile krawędzi w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2, będzie pokolorowane przed krawędzią v_1v_2 – tzn. ile krawędzi w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2 należy do co najwyżej tylu trójkątów co v_1v_2.



Rysunek 2.7: Zbiory D_1, D_2, D_3.

Niech D_1 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_1 i niesąsiadujących z v_2, D_2 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_2 i niesąsiadujących z v_1, a D_3 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_1 i v_2 (patrz Rysunek 2.7). Niech $d_1 := |D_1|$, $d_2 := |D_2|$ i $d_3 := |D_3|$. Następujące ograniczenia są oczywiste:

$$d_1, d_2, d_3 \geq 0, \tag{2.1}$$

$$d_1, d_2, d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.2}$$

$$d_1 + d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.3}$$

$$d_2 + d_3 \leq \Delta - 1. \tag{2.4}$$

Niech b będzie liczbą krawędzi o obu końcach w D_3. Zauważmy, że $G[D_3]$ nie zawiera zbioru niezależnego o rozmiarze 3 – w przeciwnym przypadku wierzchołki należące do tego zbioru indukowałyby szpon razem z v_1 – zatem dopełnienie $G[D_3]$ jest grafem bez K_3. Z Twierdzenia Turána (Twierdzenie 1.1) dostajemy następujące ograniczenie na b:

$$\binom{d_3}{2} - \frac{d_3^2}{4} \leq b \leq \binom{d_3}{2}. \tag{2.5}$$

Policzymy teraz krawędzie grafu G w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2, które są już pokolorowane w momencie, gdy v_1v_2 otrzymuje swój kolor. Twierdzimy, że jest ich co najwyżej

$$\begin{aligned} \Delta\left(d_1 + d_2 + d_3\right) - \binom{d_1}{2} - \binom{d_2}{2} - b - \frac{\left(\binom{d_3}{2} - b\right)\left(d_1 + d_2\right)}{d_3 - 1} + \\ - I_{d_1 > d_3+1}\binom{d_1}{2} - I_{d_2 > d_3+1}\binom{d_2}{2}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie $I_{d_i > d_3+1}$ wynosi 1 gdy $d_i > d_3 + 1$, a 0 w przeciwnym przypadku.

Ograniczenie (2.6) uzyskaliśmy w następujący sposób. W pierwszym składniku liczymy krawędzie incydentne z wierzchołkami z $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. W następnych czterech składnikach odejmujemy liczbę krawędzi o obu końcach w $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ – policzyliśmy je wcześniej podwójnie. Zauważmy, że $G[D_1]$ jest grafem pełnym – gdyby w $G[D_1]$ istniały dwa wierzchołki niepołączone krawędzią, indukowałyby one szpon razem z v_1 i v_2. Zatem mamy dokładnie $\binom{d_1}{2}$ krawędzi o obu końcach w D_1. W trzecim i czwartym składniku odejmujemy krawędzie o obu końcach odpowiednio w D_2 (jest ich $\binom{d_2}{2}$) i w D_3 (jest ich b).

Piąty składnik jest dolnym ograniczeniem na liczbę krawędzi o jednym końcu w $D_1 \cup D_2$, a drugim w D_3. Zauważmy, że dla każdej trójki wierzchołków x, y, z, takich że $x, y \in D_3$, $z \in D_1 \cup D_2$ oraz $xy \notin E(G)$, z musi być połączony krawędzią z x lub y – w przeciwnym przypadku x, y, z i v_1 lub v_2 indukowałyby szpon. Krawędź o jednym końcu w x lub y, a drugim w z będziemy nazywać **spajającą** dla pary x, y. Jest $d_1 + d_2$ możliwości wyboru z, zatem dla każdej pary x, y potrzebujemy $d_1 + d_2$ krawędzi spajających. Parę x, y możemy wybrać na $\binom{d_3}{2} - b$ sposobów, zatem suma krawędzi spajających

dla wszystkich możliwych par x, y wynosi co najmniej $\left(\binom{d_3}{2} - b\right)(d_1 + d_2)$. Każda pojedyncza krawędź pomiędzy $D_1 \cup D_2$, a D_3 jest spajająca dla co najwyżej $d_3 - 1$ par x, y. Liczba krawędzi o jednym końcu w $D_1 \cup D_2$, a drugim w D_3 wynosi zatem co najmniej $\frac{\left(\binom{d_3}{2}-b\right)(d_1+d_2)}{d_3-1}$.

Ostatnie dwa składniki z (2.6) odpowiadają krawędziom, które zostały policzone, mimo że będą pokolorowane dopiero po krawędzi v_1v_2. Zauważmy, że krawędź v_1v_2 należy do dokładnie d_3 trójkątów, a każda krawędź z $G[D_1]$ do co najmniej $d_1 - 1$ trójkątów, zatem jeżeli $d_1 > d_3 + 1$, wówczas wszystkie $\binom{d_1}{2}$ krawędzie z $G[D_1]$ będą pokolorowane po v_1v_2; analogicznie dla $d_2 > d_3 + 1$ i krawędzi z $G[D_2]$.

W dalszej części dowodu użyjemy poniższego stwierdzenia. Jego dowód umieszczony jest po niniejszym dowodzie.

Stwierdzenie 2.27. *Wartość wyrażenia (2.6), przy ograniczeniach (2.1)-(2.5), wynosi co najwyżej* $\frac{9}{8}\Delta^2 + \Delta - 1$.

Ze Stwierdzenia 2.27 wiemy, że w momencie kolorowania krawędzi v_1v_2 pokolorowanych jest co najwyżej $\frac{9}{8}\Delta^2 + \Delta - 1$ krawędzi w odległości ≤ 2 od v_1v_2. Potrzebujemy zatem co najwyżej $\frac{9}{8}\Delta^2 + \Delta$ kolorów do pokolorowania wszystkich krawędzi grafu G. Dowód twierdzenia jest więc kompletny. □

Dowód Stwierdzenia 2.27. Rozważmy następujące przypadki.

Przypadek 1: $d_1 + d_2 \geq d_3$. Popatrzmy na składniki wyrażenia (2.6) zależne od b. Są to $-b + b\frac{d_1+d_2}{d_3-1}$. Ich suma jest dodatnia dla $d_1 + d_2 \geq d_3$, zatem w tym przypadku (2.6) jest rosnące względem b i ma wartość nie większą od

$$\Delta\,(d_1 + d_2 + d_3) - \binom{d_1}{2} - \binom{d_2}{2} - \binom{d_3}{2} - I_{d_1>d_3+1}\binom{d_1}{2} - I_{d_2>d_3+1}\binom{d_2}{2}. \tag{2.7}$$

Zauważmy, że wszystkie ograniczenia są symetryczne względem d_1 i d_2 i wyrażenie (2.7) ma formę $f(d_1, d_3) + f(d_2, d_3)$ dla pewnej funkcji f. Zatem (2.7) – przy ograniczeniach (2.1)-(2.5) – osiąga maksymalną wartość dla $d_1 = d_2$; jest więc ona nie większa od maksymalnej wartości wyrażenia

$$\Delta\,(2d_1 + d_3) - 2\binom{d_1}{2} - \binom{d_3}{2} - I_{d_1>d_3+1}2\binom{d_1}{2}. \tag{2.8}$$

Pochodna cząstkowa z (2.8) po d_3, przy zignorowaniu $-I_{d_1>d_3+1}2\binom{d_1}{2}$, wynosi $\Delta-d_3+\frac{1}{2}$; co jest większe od 0 z (2.2). $-I_{d_1>d_3+1}2\binom{d_1}{2}$ jest oczywiście niemalejące względem d_3, więc (2.8) jest rosnące względem d_3. Z (2.3) wynika, że (2.8) jest maksymalizowane przez $d_3 = \Delta - d_1 - 1$, więc wynosi co najwyżej

$$\Delta\left(\Delta + d_1 - 1\right) - 2\binom{d_1}{2} - \binom{\Delta - d_1 - 1}{2} - I_{d_1>\Delta-d_1}2\binom{d_1}{2}. \tag{2.9}$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1.1: $d_1 > \frac{\Delta}{2}$. W tym przypadku (2.9) jest równe

$$\Delta\left(\Delta + d_1 - 1\right) - 4\binom{d_1}{2} - \binom{\Delta - d_1 - 1}{2}. \tag{2.10}$$

Pochodna z (2.10) po d_1 wynosi $2\Delta - 5d_1 + \frac{3}{2}$, zatem dla $\Delta \geq 3$ i $d_1 > \frac{\Delta}{2}$ wyrażenie (2.10) jest malejące względem d_1. Oznacza to, że (2.10) jest nie większe od jego wartości dla $d_1 = \frac{\Delta}{2}$, która wynosi

$$\frac{7}{8}\Delta^2 + \frac{3}{4}\Delta - \frac{3}{2}. \tag{2.11}$$

Przypadek 1.2: $d_1 \leq \frac{\Delta}{2}$. W tym przypadku (2.9) jest równe

$$\Delta\left(\Delta + d_1 - 1\right) - 2\binom{d_1}{2} - \binom{\Delta - d_1 - 1}{2}. \tag{2.12}$$

Pochodna z (2.12) po d_1 wynosi $2\Delta - 3d_1$. Zatem, dla $d_1 \geq \frac{\Delta}{2}$ wyrażenie (2.12) jest rosnące względem d_1 i osiąga swoją maksymalną wartość dla $d_1 = \frac{\Delta}{2}$, która wynosi

$$\frac{9}{8}\Delta^2 - \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Przypadek 2: $d_1 + d_2 < d_3$. W tym przypadku $I_{d_1>d_3+1}$ i $I_{d_1>d_3+1}$ wynoszą 0, więc (2.6) jest równe

$$\Delta\left(d_1 + d_2 + d_3\right) - \binom{d_1}{2} - \binom{d_2}{2} - b - \frac{\left(\binom{d_3}{2} - b\right)\left(d_1 + d_2\right)}{d_3 - 1}. \tag{2.14}$$

Zauważmy, że (2.14) jest nierosnące względem b. Zatem, z (2.5), osiąga maksymalną wartość dla $b = \binom{d_3}{2} - \frac{d_3^2}{4}$, wynosi więc co najwyżej

$$\Delta\left(d_1 + d_2 + d_3\right) - \binom{d_1}{2} - \binom{d_2}{2} - \binom{d_3}{2} + \frac{d_3^2}{4} - \frac{d_3^2}{4}\frac{\left(d_1 + d_2\right)}{d_3 - 1}. \tag{2.15}$$

Jako, że ostatni składnik z (2.15) jest zawsze ujemny, możemy go pominąć. Zatem (2.15) jest nie większe od

$$\Delta\left(d_1+d_2+d_3\right)-\binom{d_1}{2}-\binom{d_2}{2}-\binom{d_3}{2}+\frac{d_3^2}{4}. \tag{2.16}$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

Przypadek 2.1: $d_3 \leq \frac{2}{3}\Delta$. Z (2.2), wyrażenie (2.16) jest rosnące względem d_2. Zatem, biorąc pod uwagę ograniczenie $d_1+d_2 \leq d_3$ (założenie Przypadku 2), maksymalna wartość (2.16) jest osiągana dla $d_2 = d_3 - d_1$ i wynosi

$$2\Delta d_3-\binom{d_1}{2}-\binom{d_3-d_1}{2}-\binom{d_3}{2}+\frac{d_3^2}{4}. \tag{2.17}$$

Ponieważ $\binom{d_1}{2}+\binom{d_3-d_1}{2}$ ma najmniejszą wartość dla $d_1 = \frac{d_3}{2}$, wartość powyższego wyrażenia wynosi co najwyżej

$$2\Delta d_3-2\binom{\frac{d_3}{2}}{2}-\binom{d_3}{2}+\frac{d_3^2}{4}=2\Delta d_3-\frac{d_3^2}{2}+d_3. \tag{2.18}$$

Pochodna z (2.18) po d_3 jest dodatnia, zatem wartość maksymalna (2.18) jest osiągana dla $d_3 = \frac{2}{3}\Delta$ i wynosi

$$\frac{10}{9}\Delta^2+\frac{2}{3}\Delta. \tag{2.19}$$

Przypadek 2.2: $d_3 \geq \frac{2}{3}\Delta$. W tym przypadku (2.16) jest rosnące względem d_1 i d_2. Zatem, z (2.3) i (2.4), osiąga swoją maksymalną wartość dla $d_1 = d_2 = \Delta - d_3 - 1$, która wynosi

$$\Delta(2\Delta-d_3-2)-2\binom{\Delta-d_3-1}{2}-\binom{d_3}{2}+\frac{d_3^2}{4}=\Delta^2+\Delta d_3-\frac{5}{4}d_3^2-\frac{3}{2}d_3. \tag{2.20}$$

Pochodna z (2.20) po d_3 wynosi $\Delta-\frac{5}{2}d_3-\frac{3}{2}$, co jest ujemne dla $d_3 \geq \frac{2}{3}\Delta$. Wynika z tego, że maksimum (2.20) jest osiągane dla $d_3 = \frac{2}{3}\Delta$ i wynosi

$$\frac{8}{9}\Delta^2-\Delta. \tag{2.21}$$

Ponieważ wyrażenia (2.11), (2.13), (2.19), (2.21) są mniejsze od $\frac{9}{8}\Delta^2+\Delta-1$, wartość wyrażenia (2.6) wynosi również nie więcej niż $\frac{9}{8}\Delta^2+\Delta-1$, co kończy dowód stwierdzenia.

□

2.3.2 Przypadek ogólny

Dla grafów bez $K_{1,r}$, gdzie $r \geq 4$, udowodniliśmy, że górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny jest nie większe od $\left(2 - \frac{1}{r-2}\right)\Delta^2$. To najlepszy znany wynik dla tej klasy grafów, hipoteza Erdősa i Nešetřila (Hipoteza 2.2) cały czas pozostaje tu otwarta.

Twierdzenie 2.28 (M. Dębski, K. Junosza-Szaniawski, M. Ś-N, 2020 [20]). *Niech G będzie grafem bez $K_{1,r}$ o maksymalnym stopniu Δ. Dla każdego $r \geq 4$ zachodzi*

$$\chi'_s(G) \leq \left(2 - \frac{1}{r-2}\right)\Delta^2 - \frac{r-4}{r-2}\Delta - \frac{1}{r-2}.$$

Dowód Twierdzenia 2.28. Niech v_1v_2 będzie krawędzią grafu G. Policzymy ile jest krawędzi w G, które są w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2.

Niech $D_1, D_2, D_3, d_1, d_2, d_3$ będą zdefiniowane jak w dowodzie Twierdzenia 2.26: D_1 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_1 i niesąsiadujących z v_2, D_2 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_2 i niesąsiadujących z v_1, D_3 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_1 i v_2, $d_1 := |D_1|$, $d_2 := |D_2|$ i $d_3 := |D_3|$. W sposób oczywisty, ograniczenia (2.1)-(2.4) dalej są spełnione.

$$d_1, d_2, d_3 \geq 0, \tag{2.1}$$

$$d_1, d_2, d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.2}$$

$$d_1 + d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.3}$$

$$d_2 + d_3 \leq \Delta - 1. \tag{2.4}$$

Zauważmy, że $G[D_1]$ nie zawiera zbioru niezależnego o rozmiarze $r-1$ – gdyby zawierał, wierzchołki z tego zbioru razem z v_1 i v_2 indukowałyby $K_{1,t}$ w G. Z Twierdzenia Turána (Twierdzenie 1.1), zastosowanego do dopełnienia $G[D_1]$, wynika, że G zawiera co najmniej $\frac{d_1(d_1-1)}{2} - \frac{d_1^2(t-3)}{2(t-2)}$ krawędzi o obu końcach w D_1. Analogicznie dla D_2 – w G jest co najmniej $\frac{d_2(d_2-1)}{2} - \frac{d_2^2(t-3)}{2(t-2)}$ krawędzi o obu końcach D_2. Podobnie dla $G[D_3]$ – nie zawiera on zbioru niezależnego o rozmiarze t – gdyby zawierał, wierzchołki z tego zbioru indukowałyby $K_{1,t}$ razem z v_1. Zatem w G jest co najmniej $\frac{d_3(d_3-1)}{2} - \frac{d_3^2(t-2)}{2(t-1)}$ krawędzi o obu końcach w D_3.

Niech J będzie liczbą krawędzi grafu G, które są w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2. W sposób oczywisty, J jest mniejsze bądź równe $(d_1 + d_2 + d_3)\Delta$ minus liczba krawędzi o obu końcach w $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} J \leq d_1\Delta - \left(\frac{d_1(d_1-1)}{2} - \frac{d_1^2(t-3)}{2(t-2)}\right) + d_2\Delta - \left(\frac{d_2(d_2-1)}{2} - \frac{d_2^2(t-3)}{2(t-2)}\right) \\ + d_3\Delta - \left(\frac{d_3(d_3-1)}{2} - \frac{d_3^2(t-2)}{2(t-1)}\right) \\ = -\frac{1}{2(t-2)}d_1^2 + \left(\Delta + \frac{1}{2}\right)d_1 - \frac{1}{2(t-2)}d_2^2 + \left(\Delta + \frac{1}{2}\right)d_2 - \frac{1}{2(t-1)}d_3^2 + \left(\Delta + \frac{1}{2}\right)d_3. \end{aligned}$$

Dla $d_1 \leq \Delta - 1$ i $d_2 \leq \Delta - 1$ powyższe wyrażenie jest rosnące względem d_1 i d_2, zatem po podstawieniu $d_1 = d_2 = \Delta - 1 - d_3$ mamy $J \leq f(d_3)$, gdzie

$$f(d_3) = -\frac{3t-4}{2(t-1)(t-2)}d_3^2 + \frac{4\Delta - \Delta t + 1 - \frac{t}{2}}{t-2}d_3 + (\Delta - 1)\left(2\Delta + 1 - \frac{\Delta - 1}{t-2}\right). \quad (2.22)$$

Zauważmy, że $f(d_3)$ jest funkcją kwadratową z maksimum w $d_3^{\max} = \frac{(4-t)(t-1)}{3t-4}\Delta - \frac{(\frac{t}{2}-1)(t-1)}{3t-4}$. Jako, że dla $t \geq 4$ wartość $d_3^{\max}$ jest nie większa od 0, mamy

$$J \leq f(0) = \left(2 - \frac{1}{t-2}\right)\Delta^2 - \frac{t-4}{t-2}\Delta - \frac{t-1}{t-2}. \quad (2.23)$$

Skoro każda krawędź G jest w odległości co najwyżej 2 od nie więcej niż J innych krawędzi, możemy algorytmem zachłannym znaleźć silne pokolorowanie krawędzi grafu G na $J + 1$ kolorów, co kończy dowód twierdzenia.

□

2.3.3 Grafy przecięć dysków jednostkowych

Przypomnijmy, że grafy przecięć dysków jednostkowych to grafy, których wierzchołki są punktami w $\mathbb{R}^2$ i każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im punkty są w odległości euklidesowej co najwyżej 1. Grafy przecięć dysków jednostkowych są grafami bez $K_{1,6}$, z Twierdzenia 2.28 wynika więc, że ich silny indeks chromatyczny jest nie większy od $1,75\Delta^2$. Poprawiliśmy to ograniczenie na $1,625\Delta^2$.

Twierdzenie 2.29 (M. Dębski, K. Junosza-Szaniawski, M. Ś-N, 2020 [20]). *Niech G będzie grafem przecięć dysków jednostkowych o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas $\chi'_s(G) \leq 1,625\Delta^2$.*

W dowodzie twierdzenia przedstawiamy wielomianowy algorytm do znajdowania silnego kolorowania krawędzi grafu przecięć dysków jednostkowych, przy założeniu, że graf dany jest razem z jego reprezentacją na płaszczyźnie (tzn. dla każdego wierzchołka znany jest odpowiadający mu punkt w $\mathbb{R}^2$). W algorytmie wykorzystujemy technikę zamiatania płaszczyzny pionową prostą zamiatającą.

Dowód Twierdzenia 2.29. Rozważmy reprezentację grafu G przez przecinające się dyski jednostkowe. Bez straty ogólności możemy założyć, że żadne dwa wierzchołki nie leżą na tej samej prostej pionowej – jeżeli by tak nie było, wystarczy obrócić wszystkie punkty wokół $(0,0)$ o mały kąt. Będziemy przetwarzać krawędzie z G od lewej do prawej, używając prostej zamiatającej. Krawędź będzie kolorowana w momencie, gdy prosta zamiatająca osiągnie jej koniec leżący bardziej na prawo, tzn. krawędź $e = v_iv_j$, taka że współrzędna x-owa v_i jest mniejsza od współrzędnej x-owej v_j, będzie kolorowana w momencie przejścia prostej zamiatającej przez v_j.

Niech v_1v_2 będzie krawędzią grafu G, która jest kolorowana w momencie przejścia prostej zamiatającej przez punkt v_2 (tzn. v_2 leży na prawo od v_1). Policzymy, ile pokolorowanych krawędzi z G jest w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2.

Ponownie, niech $D_1, D_2, D_3, d_1, d_2, d_3$ będą zdefiniowane jak w dowodzie Twierdzenia 2.26: D_1 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_1 i niesąsiadujących z v_2, D_2 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_2 i niesąsiadujących z v_1, D_3 będzie zbiorem wierzchołków sąsiadujących z v_1 i v_2, $d_1 := |D_1|$, $d_2 := |D_2|$ i $d_3 := |D_3|$. W sposób oczywisty, ograniczenia (2.1)-(2.4) także i tym razem są spełnione.

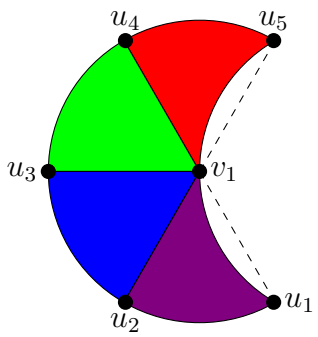
$$d_1, d_2, d_3 \geq 0, \tag{2.1}$$

$$d_1, d_2, d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.2}$$

$$d_1 + d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.3}$$

$$d_2 + d_3 \leq \Delta - 1. \tag{2.4}$$

Pokażemy, że zbiory niezależne w $G[D_1]$ mają rozmiar co najwyżej 4.



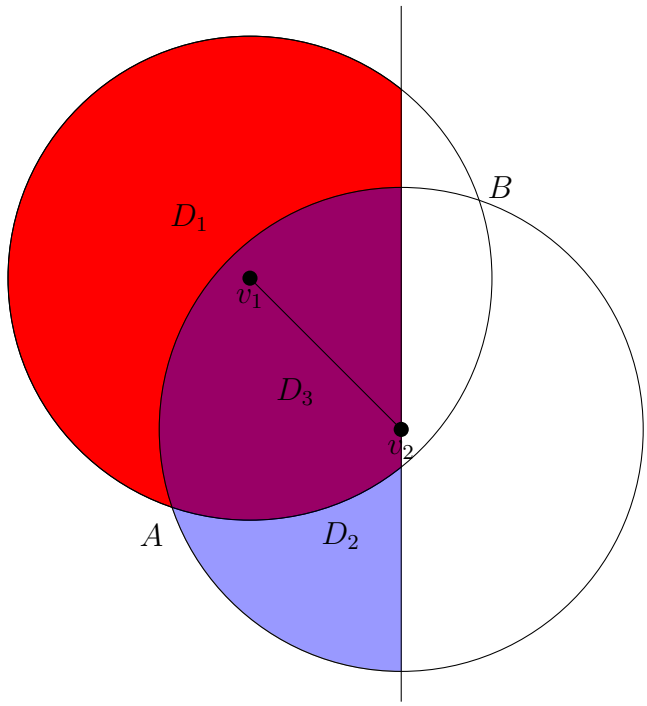
Rysunek 2.8: Graf $G[D_1]$. Różne kolory pokazują zbiory o średnicy 1 zawierające kolejne u_i.

Załóżmy, że w D_1 istnieje 5 sąsiadów wierzchołka v_1, którzy tworzą zbiór niezależny w G. Oznaczmy je przez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 zgodnie z ruchem wskazówek zegara w odniesieniu do v_1 (patrzy Rysunek 2.8). Ponieważ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 są niezależne i leżą w odległości co najwyżej 1 od v_1, kąt $\angle u_i v_1 u_{i+1}$ jest większy od $\pi/3$, dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. W związku z tym, kąt $\angle u_1 v_1 u_5$ jest większy od $4\pi/3$. Z drugiej strony, niech A i B będą punktami przecięcia okręgów o środkach w v_1 i v_2 o promieniu 1 (patrz Rysunek 2.9). Ponieważ odległość pomiędzy v_1 i v_2 wynosi co najwyżej 1, kąt $\angle A v_1 B$ zawierający v_2 jest nie mniejszy od $2\pi/3$, a jego dopełnienie, czyli kąt $\angle A v_1 B$ niezawierający v_2, jest nie większy od $4\pi/3$. Jednocześnie kąt $\angle A v_1 B$ niezawierający v_2 jest większy lub równy kątowi $\angle u_1 v_1 u_5$, otrzymaliśmy więc sprzeczność.

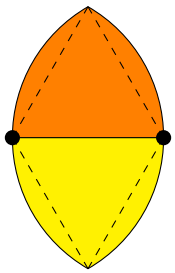
Przyjrzyjmy się teraz $G[D_3]$. Obszar domknięty zawierający D_3 można pokryć dwoma zbiorami o średnicy 1, co oznacza, że D_3 można pokryć dwiema klikami (patrz Rysunek 2.10). Zbiory niezależne w $G[D_3]$ mają więc rozmiar co najwyżej 2.

Podobnie dla D_2 – obszar domknięty zawierający D_2 można pokryć dwoma zbiorami o średnicy 1 (patrz Rysunek 2.11 i 2.12 – mamy tu dwa możliwe przypadki), zatem zbiory niezależne w D_2 mają rozmiar co najwyżej 2.

Zauważmy, że skoro zbiory niezależne w $G[D_1]$ mają rozmiar co najwyżej 4, to dopełnienie $G[D_1]$ jest grafem bez K_5 o d_1 wierzchołkach. Z Twierdzenia Turána (Twierdzenie 1.1) dostajemy, że dopełnienie $G[D_1]$ ma co najwyżej $\frac{3}{8}d_1^2$ krawędzi, zatem G zawiera co



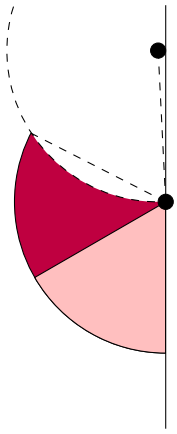
Rysunek 2.9: Zbiory D_1, D_2, D_3 w grafie przecięć dysków jednostkowych.



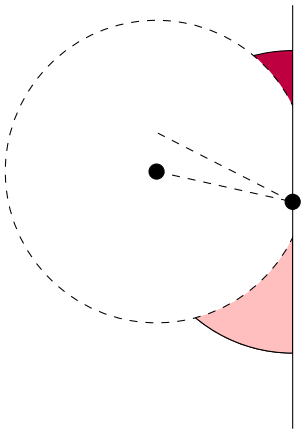
Rysunek 2.10: Graf $G[D_3]$. Kolory pokazują dwa zbiory o średnicy 1.

najmniej $\frac{d_1(d_1-1)}{2} - \frac{3}{8}d_1^2$ krawędzi o obu końcach w D_1. Przeprowadzając analogiczne rozumowania dla $G[D_2]$ i $G[D_3]$ dostajemy, że G zawiera co najmniej $\frac{d_2(d_2-1)}{2} - \frac{1}{4}d_2^2$ krawędzi o obu końcach w D_2 i co najmniej $\frac{d_3(d_3-1)}{2} - \frac{1}{4}d_3^2$ krawędzi o obu końcach w D_3.

Niech J będzie liczbą krawędzi w odległości co najwyżej 2 od v_1v_2, które są już pokolorowane w momencie kolorowania v_1v_2. W sposób oczywisty, J jest nie większe od $(d_1 + d_2 + d_3)\Delta$ minus liczba krawędzi o obu końcach w $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Mamy zatem



Rysunek 2.11: $G[D_2]$, pierwszy przypadek.



Rysunek 2.12: $G[D_2]$, drugi przypadek.

$$J \leq d_1\Delta - \left(\frac{d_1(d_1-1)}{2} - \frac{3}{8}d_1^2\right) + d_2\Delta - \left(\frac{d_2(d_2-1)}{2} - \frac{1}{4}d_2^2\right) + d_3\Delta - \left(\frac{d_3(d_3-1)}{2} - \frac{1}{4}d_3^2\right)$$
$$= -\frac{1}{8}d_1^2 + \left(\Delta + \frac{1}{2}\right)d_1 - \frac{1}{4}d_2^2 + \left(\Delta + \frac{1}{2}\right)d_2 - \frac{1}{4}d_3^2 + \left(\Delta + \frac{1}{2}\right)d_3.$$

Dla $d_1 \leq \Delta - 1$ i $d_2 \leq \Delta - 1$ powyższe wyrażenie jest rosnące względem d_1 i d_2 (pochodna po d_1 wynosi $-\frac{1}{4}d_1 + \Delta + \frac{1}{2}$ i dla $d_1 \leq \Delta - 1$ jest dodatnia; analogicznie dla d_2). Zatem, po podstawieniu $d_1 = d_2 = \Delta - 1 - d_3$, otrzymujemy

$$J \leq f(d_3) = -\frac{5}{8}d_3^2 - \left(\frac{1}{4}\Delta + \frac{5}{4}\right)d_3 + \frac{13}{8}\Delta^2 - \frac{1}{4}\Delta - \frac{11}{8}. \tag{2.24}$$

Zauważmy, że $f(d_3)$ jest funkcją kwadratową z maksimum w $d_3^{\max} = -\frac{1}{5}\Delta - 1$. Jako że $d_3^{\max}$ jest ujemne, otrzymujemy

$$J \leq f(0) = \frac{13}{8}\Delta^2 - \frac{1}{4}\Delta - \frac{11}{8} \leq 1,625\Delta^2 - 1. \tag{2.25}$$

Skoro każda krawędź z G jest w momencie kolorowania w odległości co najwyżej 2 od nie więcej niż J pokolorowanych krawędzi, algorytm zachłanny znajdzie silne kolorowanie krawędzi grafu G na co najwyżej $J + 1$ kolorów, co kończy dowód twierdzenia.

□

2.3.4 Kierunek dalszych badań

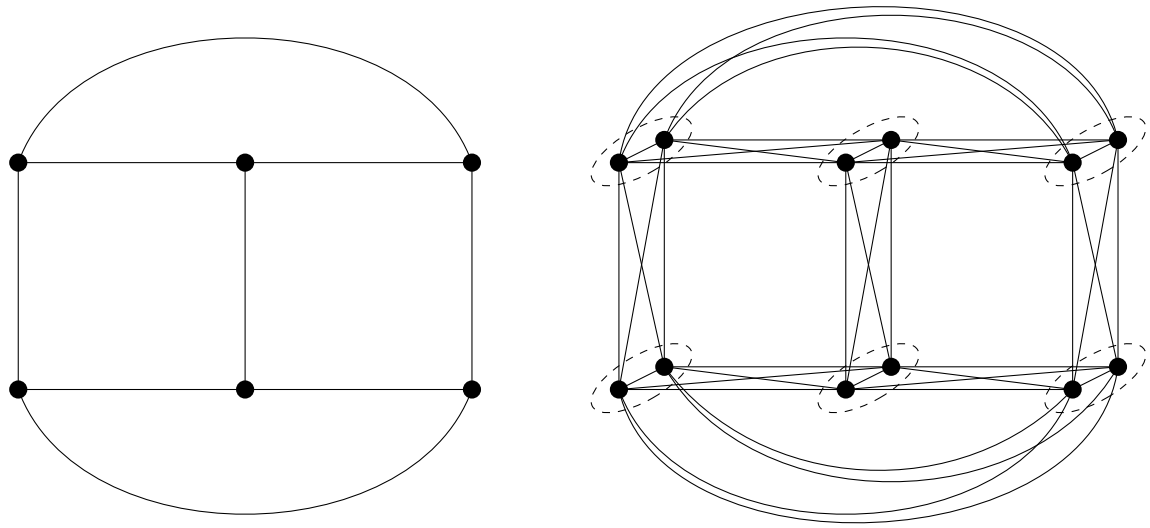
Udowodniliśmy, że silny indeks chromatyczny grafów bez szponów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $\frac{9}{8}\Delta^2+\Delta$. Czy to ograniczenie jest osiągalne? Stałą $\frac{9}{8}$ można prawdopodobnie delikatnie poprawić poprzez rozważenie gęstości sąsiedztwa w kwadracie grafu krawędziowego, podobnie jak w dowodzie Molloya i Reeda [39] lub Bruhna i Joosa [9]. Wierzymy jednak, że optymalna stała może być dużo niższa. Krawędzie grafu bez szponów o największym silnym indeksie chromatycznym, jaki udało nam się skonstruować, można silnie pokolorować na $\frac{9}{16}(\Delta+1)^2$ kolorów. Konstrukcję przedstawiamy w poniższej obserwacji.

Obserwacja 2.30. *Dla dowolnego naturalnego $k \geq 1$ istnieje graf bez szponów G_k o maksymalnym stopniu $\Delta = 4k-1$ i silnym indeksie chromatycznym równym $\frac{9}{16}(\Delta+1)^2$.*

Dowód Obserwacji 2.30. Graf G_k otrzymujemy z grafu G_1, przedstawionego na Rysunku 2.13a, poprzez rozdmuchanie każdego wierzchołka do kliki o rozmiarze k. Wierzchołki G_k to uporządkowane pary (i,j), gdzie $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $j \in \{1,2,\ldots,k\}$. Krawędzie G_k to nieuporządkowane pary $\{(i,j),(i',j')\}$, takie że $i = i'$ oraz $j,j' \in \{1,2,\ldots,k\}$ lub $ii' \in E(G_S)$ oraz $j,j' \in \{1,2,\ldots,k\}$ (patrz Rysunek 2.13b). Zauważmy, że każde dwie krawędzie grafu G_k o końcach w różnych klikach, są w odległości co najwyżej 2, zatem każda z nich musi zostać pokolorowana na inny kolor. Krawędzi tych jest dokładnie $9k^2 = \frac{9}{16}(\Delta+1)^2$, więc do pokolorowania całego grafu G_k potrzebujemy dokładnie tylu kolorów. □

Dalsze badania mogą zmierzać w dwóch kierunkach: skonstruowania grafu bez szponów o większym silnym indeksie chromatycznym lub znaczne poprawienie naszego górnego ograniczenia.

Ten sam problem można postawić dla grafów bez $K_{1,r}$: jaki jest największy możliwy silny indeks chromatyczny grafu $K_{1,r}$−wolnego o maksymalnym stopniu Δ? Przypomnijmy, że nasze górne ograniczenie z Twierdzenia 2.28 wynosi około $\left(2-\frac{1}{r-2}\right)\Delta^2$. Dla $r=4$ potrafimy skonstruować graf, którego silny indeks chromatyczny wynosi $\frac{3}{4}(\Delta+1)^2$. Konstrukcję przedstawiamy w poniższej obserwacji.



(a) Graf G_1.

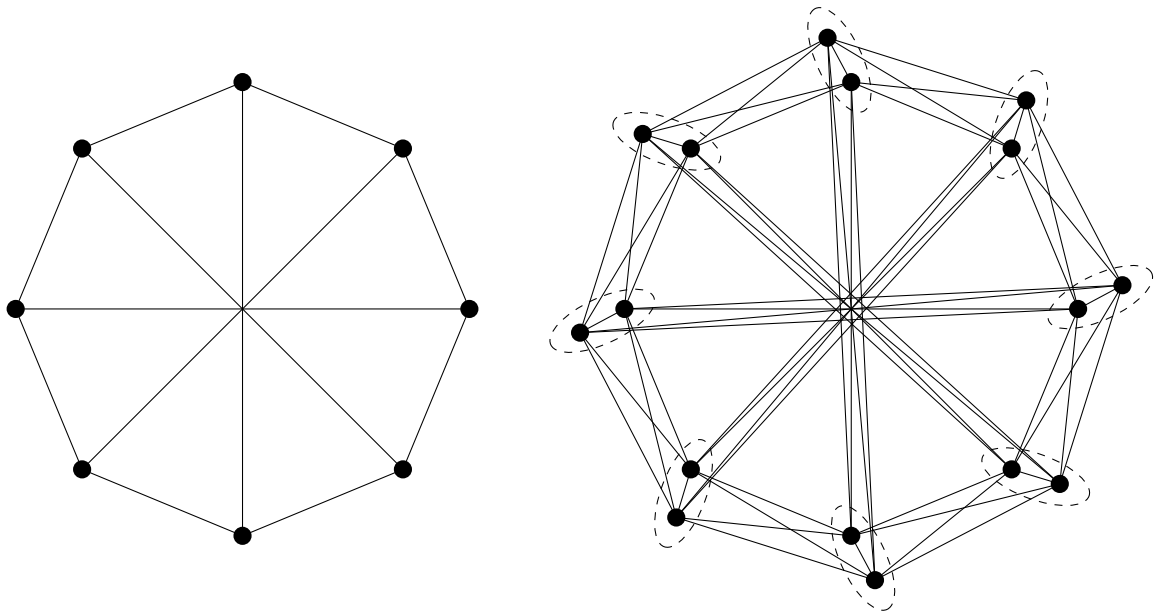
(b) Graf G_2, $\Delta = 7$.

Rysunek 2.13: Konstrukcja grafu G_k

Obserwacja 2.31. *Dla dowolnego naturalnego $k \geq 1$ istnieje graf bez $K_{1,4}$ H_k o maksymalnym stopniu $\Delta = 4k - 1$ i silnym indeksie chromatycznym równym $\frac{3}{4}(\Delta + 1)^2$.*

Dowód Obserwacji 2.31. Graf H_k otrzymujemy z grafu H_1, przedstawionego na Rysunku 2.14a, poprzez rozdmuchanie każdego wierzchołka do kliki o rozmiarze k. Wierzchołki H_k to uporządkowane pary (i, j), gdzie $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Krawędzie H_k to nieuporządkowane pary $\{(i, j), (i', j')\}$, takie że $i = i'$ oraz $j, j' \in \{1, 2, \ldots, k\}$ lub $ii' \in E(H_S)$ oraz $j, j' \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (patrz Rysunek 2.14b). Zauważmy, że każde dwie krawędzie grafu H_k o końcach w różnych klikach, są w odległości co najwyżej 2, zatem każda z nich musi zostać pokolorowana na inny kolor. Krawędzi tych jest dokładnie $12k^2 = \frac{3}{4}(\Delta + 1)^2$, więc do pokolorowania całego grafu H_k potrzebujemy co najmniej tylu kolorów. □

Problem znalezienia grafu $K_{1,r}-$wolnego o dużym silnym indeksie chromatycznym jest szczególnie intrygujący w przypadku małych wartości t. Kiedy t staje się bardzo duże, możemy przybliżyć się do $\frac{5}{4}\Delta^2$ poprzez konstrukcję analogiczną jak ta pokazująca osiągalność ograniczenia z Hipotezy Erdős'a i Nešetřil'a – każdy wierzchołek z grafu C_5



(a) Graf H_1.

(b) Graf H_2, $\Delta = 7$.

Rysunek 2.14: Konstrukcja grafu H_k.

rozdmuchujemy do zbioru niezależnego o rozmiarze $\frac{t-1}{2}$, a następnie każdy wierzchołek z uzyskanego grafu rozdmuchujemy do kliki o rozmiarze $\frac{\Delta}{t}$.

Dla grafów przecięć dysków jednostkowych, rodzina grafów o największym silnym indeksie chromatycznym, jaką umiemy skonstruować, to wspomniana w Obserwacji 2.30 rodzina grafów bez szponów o silnym indeksie chromatycznym równym $\frac{9}{16}(\Delta+1)^2$. Zauważmy, że stała przy Δ^2 jest znacznie mniejsza od udowodnionej przez nas $1,625$ z Twierdzenia 2.29. Ponownie, zarówno znalezienie klasy grafów przecięć dysków o większym silnym indeksie chromatycznym, jak i poprawienie naszego górnego ograniczenia, byłoby niezmiernie interesujące. Jest jeszcze jeden ciekawy kierunek badań dotyczący tej klasy grafów. Przypomnijmy, że wielomianowy algorytm podany w dowodzie Twierdzenia 2.29 używa reprezentacji grafu. Jako, że problem znalezienia reprezentacji danego grafu przecięć dysków jednostkowych jest NP-trudny (patrz [7]), ciekawe byłoby przedstawienie wielomianowego algorytmu znajdującego silne kolorowanie krawędzi grafu przecięć dysków jednostkowych na około $1.625\Delta^2$ kolorów bez używania reprezentacji grafu.

Rozdział 3

Silne kliki w grafach

3.1 Wprowadzenie

3.1.1 Inne spojrzenie na silne kolorowanie krawędzi grafów

W Rozdziale 2 zdefiniowaliśmy silne kolorowanie krawędzi grafu jako kolorowanie, w którym każda klasa koloru tworzy skojarzenie indukowane (Definicja 2.1). Na silne kolorowanie krawędzi grafu G można patrzeć także z innej strony. Niech $L^2(G)$ będzie kwadratem grafu krawędziowego grafu G; tzn. każdy wierzchołek grafu $L^2(G)$ odpowiada krawędzi grafu G, a dwa wierzchołki z $L^2(G)$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie z grafu G są w odległości nie większej od 2. W silnym kolorowaniu krawędzi G chcemy, żeby krawędzie w odległości nie większej od 2 miały różne kolory – jest to równoważne z poprawnym kolorowaniem wierzchołków grafu $L^2(G)$. Silny indeks chromatyczny grafu jest zatem równy liczbie chromatycznej kwadratu jego grafu krawędziowego.

Kolorując poprawnie wierzchołki dowolnego grafu na pewno potrzebujemy co najmniej tylu kolorów, jaki jest rozmiar największej kliki w tym grafie – liczba chromatyczna grafu jest zawsze większa bądź równa jego liczbie klikowej. Otrzymujemy zatem

$$\chi'_s(G) = \chi(L^2(G)) \geq \omega(L^2(G)). \tag{3.1}$$

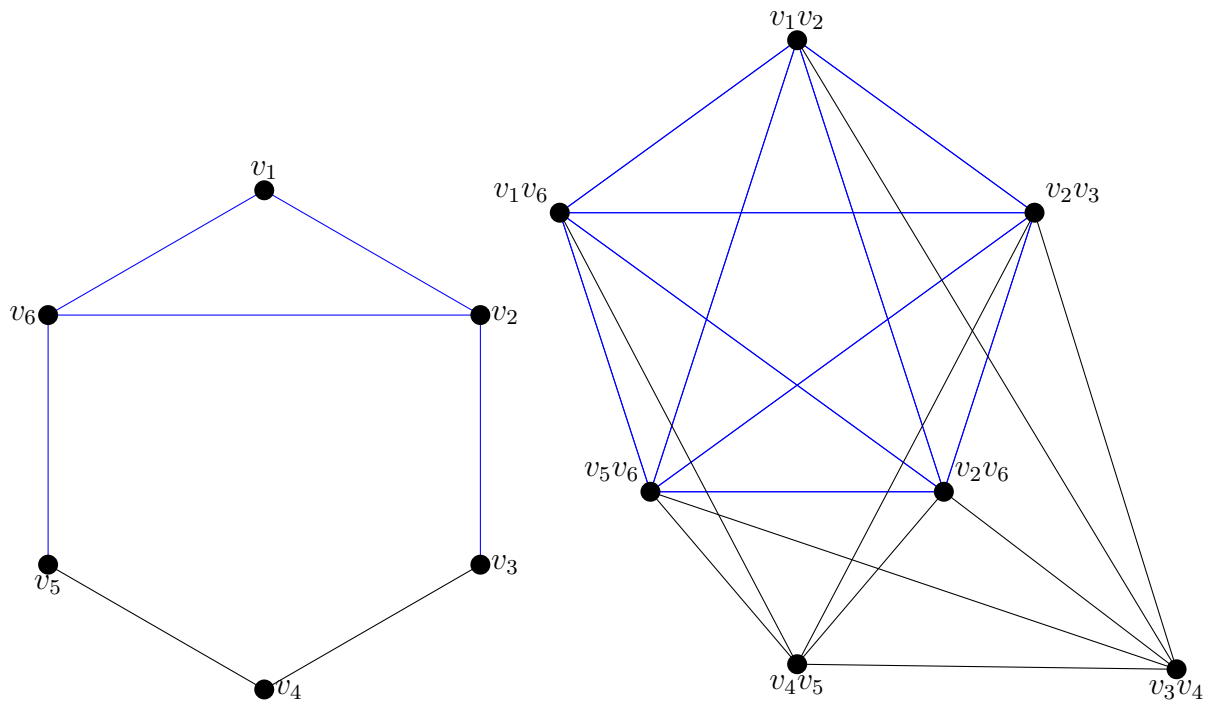
Zdefiniujmy teraz tytułową silną klikę w grafie G jako zbiór tych krawędzi z G, dla

których odpowiadające im wierzchołki z $L^2(G)$ parami sąsiadują ze sobą; krawędzie te muszą więc otrzymać różne kolory w silnym kolorowaniu krawędzi grafu G. Innymi słowy, silna klika w grafie odpowiada klice w kwadracie jego grafu krawędziowego.

Definicja 3.1. *Niech G będzie grafem.*

Silną kliką *w grafie G nazywamy podzbiór krawędzi G, w którym każde dwie krawędzie są od siebie w odległości nie większej od 2 w G. Rozmiar największej silnej kliki w G oznaczamy przez $\omega_s(G)$.*

Rysunek 3.1 przedstawia przykładowy graf G z zaznaczoną silną kliką (Rysunek 3.1a) i odpowiadającą jej klikę w grafie $L^2(G)$ (Rysunek 3.1b).



(a) Graf G.

(b) Graf $L^2(G)$.

Rysunek 3.1: Grafy G i $L^2(G)$, na niebiesko zaznaczono krawędzie silnej kliki w G i odpowiadającej jej kliki w $L^2(G)$.

3.1.2 Ograniczenie na $\omega_s(G)$

W poprzedniej sekcji zdefiniowaliśmy, czym są silne kliki w grafie. Co możemy powiedzieć o ich rozmiarze? Maksymalny rozmiar silnej kliki w grafie G jest oczywiście równy liczbie klikowej grafu $L^2(G)$, zatem z (3.1) otrzymujemy

$$\chi'_s(G) \geq \omega_s(G). \tag{3.2}$$

W Obserwacji 2.3 pokazaliśmy, że jeżeli górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny grafu o maksymalnym stopniu Δ z hipotezy Erdősa i Nešetřila (Hipoteza 2.2) jest prawdziwe, to jest ono optymalne. Przypomnijmy sobie graf G_Δ, który dowodzi tej obserwacji. Dla danego Δ graf G_Δ konstruujemy z cyklu C_5 poprzez rozdmuchanie każdego wierzchołka do zbioru niezależnego o rozmiarze $\frac{\Delta}{2}$ (dokładną konstrukcję opisaliśmy w dowodzie wspomnianej obserwacji). Zauważmy, że wszystkie krawędzie grafu G_Δ tworzą w nim silną klikę. Wiemy zatem, że istnieją grafy, których silne kliki mają $\frac{5}{4}\Delta^2$ krawędzi. W 1990 r. Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza postawili hipotezę mówiącą o tym, że maksymalny rozmiar silnej kliki w grafie o maksymalnym stopniu Δ nie przekracza $\frac{5}{4}\Delta^2$.

Hipoteza 3.2 (R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, 1990 [26])**.** *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta^2, & \textit{gdy } \Delta \textit{ jest parzyste,} \\ \frac{5}{4}\Delta^2 - \frac{2\Delta-1}{4}, & \textit{gdy } \Delta \textit{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Hipoteza 3.2 wydaje się łatwiejsza od hipotezy Erdősa i Nešetřila; znane wyniki dotyczące silnych klik są mocniejsze od wyników dotyczących silnego indeksu chromatycznego. Udowodnienie prawdziwości Hipotezy 3.2 byłoby silnym argumentem przemawiającym za prawdziwością hipotezy Erdősa i Nešetřila. Badanie maksymalnego rozmiaru silnych klik w grafach może przełożyć się na lepszą intuicję odnośnie silnego indeksu chromatycznego.

Co wiemy o maksymalnym rozmiarze silnych klik w grafie o maksymalnym stopniu Δ? W sposób oczywisty wszystkie ograniczenia na silny indeks chromatyczny są także ograniczeniami na maksymalny rozmiar silnych klik. O silnych klikach wiadomo jednak

więcej. Przedstawimy jak w ciągu ostatnich 30 lat wyglądały postępy prac nad znalezieniem górnego ograniczenia na rozmiar silnych klik w grafach.

Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza pokazali, że silne kliki mają co najwyżej $(2-\epsilon)\Delta^2$ krawędzi.

Twierdzenie 3.3 (R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, 1990 [26]). *Niech G będzie grafem o wystarczająco dużym maksymalnym stopniu Δ. Wówczas istnieje $\epsilon > 0$, taki że*

$$\omega_s(G) \leq (2-\epsilon)\Delta^2.$$

Przez wiele lat nie pojawił się żaden nowy wynik dotyczący rozmiaru silnych klik w grafach. Dopiero w ciągu ostatnich kilku lat znacząco poprawiono ograniczenie na $\omega_s(G)$. W 2015 r. Bruhn i Joos udowodnili, że silne kliki w grafie o odpowiednio dużym maksymalnym stopniu Δ mają nie więcej niż $1,74\Delta^2$ krawędzi.

Twierdzenie 3.4 (H. Bruhn, F. Joos, 2015 [9]). [1] *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu $\Delta > 400$. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq 1,74\Delta^2.$$

W 2016 r. poprawiliśmy ten wynik.

Twierdzenie 3.5 (M. Ś-N., 2016 [46]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq 1,5\Delta^2.$$

Dowód Twierdzenia 3.5 przedstawimy w sekcji 3.2.2.

Najlepszy obecnie znany wynik udowodnili Faron i Postle w 2019 r. Pokazali oni, że silne kliki w grafie o maksymalnym stopniu Δ mają co najwyżej $\frac{4}{3}\Delta^2$ krawędzi.

Twierdzenie 3.6 (M. Faron, L. Postle, 2019 [24]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq \frac{4}{3}\Delta^2.$$

[1] Praca z pełnym dowodem twierdzenia ukazała się w 2018 r.; patrz [10]

Zauważmy, że ograniczenie $\frac{4}{3}\Delta^2$ z Twierdzenia 3.6 jest już całkiem bliskie $\frac{5}{4}\Delta^2$ z Hipotezy 3.2. Hipoteza nadal pozostaje jednak otwarta.

Wspominaliśmy już, że Chung, Gyárfás, Trotter i Tuza w 1990 r. udowodnili, że jeżeli graf nie zawiera żadnej pary krawędzi w odległości większej od 2, to wówczas ma co najwyżej $\frac{5}{4}\Delta^2$ krawędzi (Twierdzenie 2.8). Oznacza to, że dla grafów, których wszystkie krawędzie należą do silnej kliki, Hipoteza 3.2 jest prawdziwa. Fakt ten nie dowodzi hipotezy w ogólnym przypadku, gdyż nie wszystkie krawędzie muszą należeć do największej silnej kliki w grafie.

Przejdźmy teraz do twierdzeń dowodzących prawdziwość Hipotezy 3.2 dla wybranych klas grafów. W 1990 r. Faudree, Gyárfás, Schelp i Tuza udowodnili, że maksymalny rozmiar silnych klik w grafach dwudzielnych o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od Δ^2.

Twierdzenie 3.7 (R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, 1990 [26]). *Niech G będzie grafem dwudzielnym o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq \Delta^2.$$

Ograniczenie to jest osiągalne; w grafie pełnym dwudzielnym wszystkie krawędzie tworzą silną klikę (patrz Obserwacja 2.9). Przypomnijmy, że Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza postawili hipotezę, że silny indeks grafów dwudzielnych o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od Δ^2 (Hipoteza 2.10). Na podstawie Twierdzenia 3.7 można przypuszczać, że hipoteza ta jest prawdziwa.

Grafy dwudzielne to grafy, które nie zawierają cykli o nieparzystej długości. Cames van Batenburg, Kang, i Pirot odkryli ostatnio, że wystarczy aby graf nie zawierał tylko cykli o długości 5, aby można było ograniczyć rozmiar silnych klik przez Δ^2.

Twierdzenie 3.8 (W. Cames van Batenburg, R. J. Kang, F. Pirot, 2020 [11]). *Niech G będzie grafem bez C_5 o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq \Delta^2.$$

Cames van Batenburg, Kang, i Pirot rozważali także grafy bez nieparzystych cykli o innych długościach. Udowodnili, że rozmiar silnych klik w grafach bez C_3 o maksymalnym

stopniu Δ wynosi co najwyżej $\frac{5}{4}\Delta^2$, a w grafach bez C_{2k+1}, gdzie $k \geq 3$ i $\Delta \geq 3k^2 + 10k$, co najwyżej Δ^2. Tym samym potwierdzili Hipotezę 2.10 dla tych klas grafów.

Cames van Batenburg, Kang, i Pirot postawili hipotezę, że dla grafów dwudzielnych z zabronionym parzystym cyklem, maksymalny rozmiar silnych klik jest co najwyżej liniowy względem Δ. Ostatnio na arXiv ukazała się praca, w której Cho, Choi, Kim i Park potwierdzają silniejszą wersję tej hipotezy. Udowodnili oni liniowe ograniczenie na rozmiar silnych klik w grafach bez C_5 i bez parzystego cyklu.

Twierdzenie 3.9 (E-K. Cho, I. Choi, R. Kim, B. Park, 2020 [14]). *Niech G będzie grafem bez $\{C_5, C_{2k}\}$, dla pewnego $k \geq 2$, o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

- *dla $k \geq 4$, $\omega_s(G) \leq k\Delta - (k-1)$.*
- *dla $k \in \{2, 3\}$, jeżeli G jest także grafem bez C_3, to $\omega_s(G) \leq k\Delta - (k-1)$.*

W następnej sekcji przedstawimy dowody naszych twierdzeń ograniczających rozmiar silnych klik w grafach.

3.2 Maksymalny rozmiar silnych klik w grafach – uzyskane wyniki

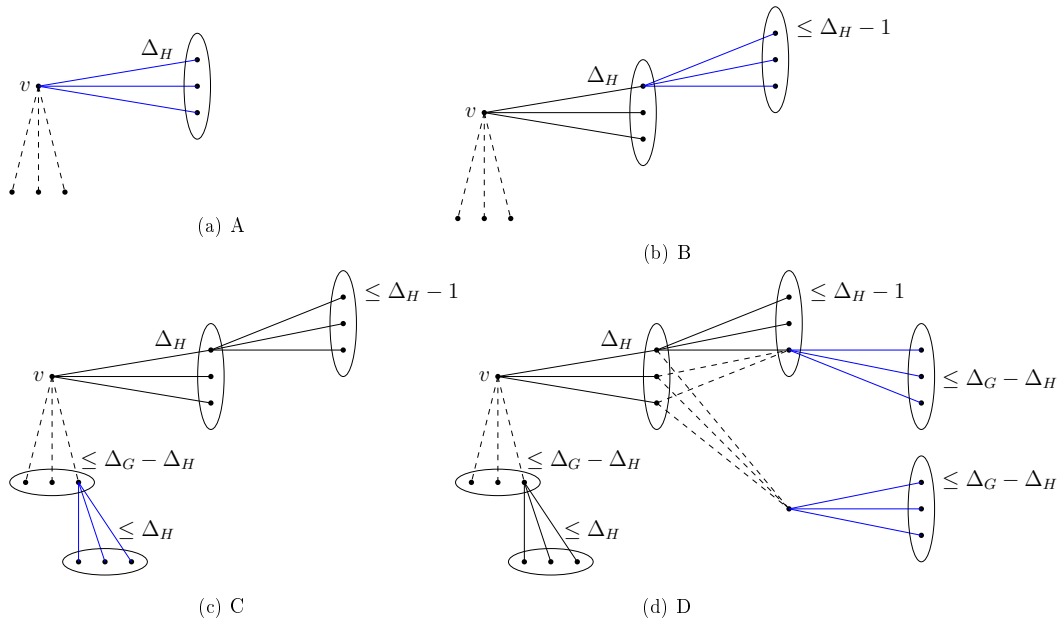
W naszym głównym twierdzeniu (Twierdzenie 3.5) udowodniliśmy ograniczenie na rozmiar silnych klik w grafach o maksymalnym stopniu Δ równe $1,5\Delta^2$. Zaczniemy jednak od przedstawienia dowodu znanego ograniczenia dla grafów dwudzielnych; użyliśmy w nim podobnej metody, ale dowód ten jest o wiele mniej skomplikowany i pozwoli lepiej zrozumieć naszą technikę. Następnie przejdziemy do dowodu ograniczenia na rozmiar silnych klik w grafach bez szponów.

3.2.1 Grafy dwudzielne

Twierdzenie 3.7 (R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, 1990 [26]). *Niech G będzie grafem dwudzielnym o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq \Delta^2.$$

Dowód Twierdzenia 3.7. Niech H będzie podgrafem grafu G, którego krawędzie tworzą silną klikę w G, tzn. dla każdej pary krawędzi $e, f \in E(H)$ zachodzi $dist_G(e, f) \leq 2$. Pokażemy, że H ma co najwyżej Δ_G^2 krawędzi.



Rysunek 3.2: Zbiory A, B, C, D (na niebiesko). Linie przerywane oznaczają krawędzie z G, które nie są w H.

Rozważmy wierzchołek $v \in V(H)$ o stopniu Δ_H; pamiętajmy, że $\Delta_H \leq \Delta_G$. Krawędzie grafu H możemy podzielić na następujące zbiory (patrz Rysunek 3.2):

- $A = \{e \in E(H) : v \in e\}$, $|A| = \Delta_H$

  A jest zbiorem krawędzi grafu H, które są incydentne z v.

  Zauważmy, że wszystkie inne krawędzie z H są w grafie G w odległości co najwyżej 2 od wszystkich krawędzi z A.

- $B = \{e \in E(H) : e \notin A \wedge \exists_{f \in A} e$ i f mają wspólny wierzchołek$\}$, $|B| \leq \Delta_H(\Delta_H - 1)$

  B jest zbiorem krawędzi grafu H, które mają wspólny wierzchołek z przynajmniej jedną krawędzią z A i nie należą do A.

- $C = \{e \in E(H) : \exists_{f \in E(G)}(v \in f \wedge f \notin E(H) \wedge e$ i f mają wspólny wierzchołek$)\}$, $|C| \leq (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_H$

C jest zbiorem krawędzi grafu H, które mają wspólny wierzchołek z przynajmniej jedną krawędzią z $G - H$ incydentną z v.

- $D = \{e \in E(H) : e \notin C \wedge \forall_{f \in A} dist_G(e, f) = 2\}$

  D jest zbiorem krawędzi grafu H, które są w grafie G w odległości 2 od wszystkich krawędzi z A i nie należą do C.

  Niech S będzie podgrafem grafu H indukowanym przez D.

Wierzchołek, różny od v, który sąsiaduje w G ze wszystkimi sąsiadami v z H, będziemy nazywać **super wierzchołkiem**. Ponieważ G jest grafem dwudzielnym, każda krawędź z S zawiera dokładnie jeden super wierzchołek. Każdy sąsiad v z H jest połączony krawędzią w G z co najwyżej $\Delta_G - 1$ wierzchołkami różnymi od v. Zatem w G jest co najwyżej $\Delta_G - 1$ super wierzchołków. Ponadto, każdy super wierzchołek jest incydentny w S z co najwyżej $\Delta_G - \Delta_H$ krawędziami (ponieważ jest dokładnie Δ_H krawędzi łączących w G sąsiadów v z H z każdym super wierzchołkiem). Liczność zbioru S jest więc nie większa od

$$(\Delta_G - 1)(\Delta_G - \Delta_H).$$

Możemy teraz wyznaczyć liczbę krawędzi grafu H.

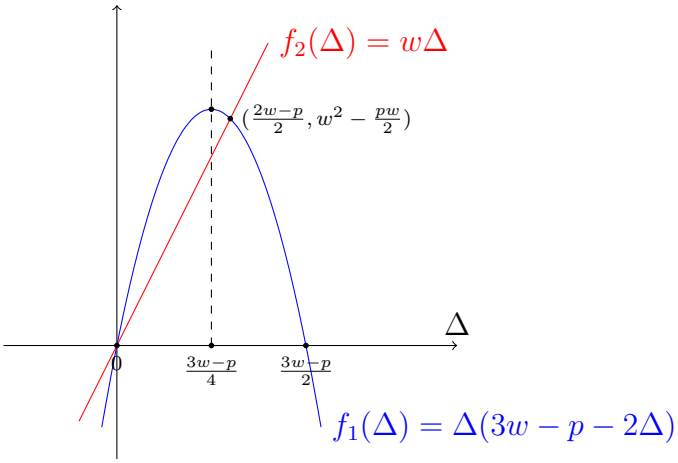
$$|E(H)| \leq \Delta_H + \Delta_H(\Delta_H - 1) + (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_H + (\Delta_G - 1)(\Delta_G - \Delta_H) = \Delta_G^2 - \Delta_G + \Delta_H \leq \Delta_G^2,$$

dowód twierdzenia jest więc kompletny. □

3.2.2 Przypadek ogólny – dowód Twierdzenia 3.5

Zanim przejdziemy do właściwego dowodu, udowodnimy lemat, z którego będziemy korzystać.

Lemat 3.10 (M. Ś-N., 2016 [46]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ, niech p i w będą liczbami całkowitymi takimi, że $\Delta \leq p \leq w$ i $\Delta > w - p$. Rozważmy p pokryć wierzchołkowych grafu G (niekoniecznie różnych) takich, że każde pokrycie wierzchołkowe zawiera co najwyżej w wierzchołków. Załóżmy dodatkowo, że dla każdego wierzchołka*



Rysunek 3.3: Funkcje $f_1(\Delta)$ i $f_2(\Delta)$

$v \in V(G)$ zachodzi $\deg(v) \leq w - a$, gdzie a jest liczbą pokryć wierzchołkowych, które zawierają v.

Wówczas graf G ma co najwyżej $w^2 - \frac{pw}{2}$ krawędzi.

Dowód Lematu 3.10. Niech $v \in V(G)$ będzie wierzchołkiem o stopniu Δ. Wierzchołek v należy do co najwyżej $w - \Delta$ pokryć wierzchołkowych (z założenia lematu), więc każdy sąsiad v należy do co najmniej $p - w + \Delta$ pokryć wierzchołkowych; z założenia wiemy, że $p - w + \Delta > 0$. Zatem każdy sąsiad v ma stopień nie większy od $w - (p - w + \Delta) = 2w - p + \Delta$ (z założenia lematu).

Rozważmy jedno pokrycie wierzchołkowe C, które nie zawiera v. Pokrycie to zawiera dokładnie Δ sąsiadów v o stopniach co najwyżej $2w - p + \Delta$ i co najwyżej $w - \Delta$ innych wierzchołków o stopniach co najwyżej Δ. Każda krawędź z G musi być incydentna z przynajmniej jednym wierzchołkiem z C, zatem

$$|E(G)| \leq f_1(\Delta) = \Delta(2w - p - \Delta) + (w - \Delta)\Delta = \Delta(3w - p - 2\Delta).$$

każde pokrycie zawiera co najwyżej w wierzchołków, każdy z nich ma stopień co najwyżej Δ, stąd

$$|E(G)| \leq f_2(\Delta) = w\Delta.$$

Funkcje f_1 i f_2 przecinają się w punktach $\Delta = \frac{2w-p}{2}$ i $\Delta = 0$ (patrzy Rysunek 3.3). Dla $p \leq w$ oraz $w \geq 0$ zachodzi $\frac{3w-p}{4} \leq \frac{2w-p}{2} \leq \frac{3w-p}{2}$, zatem $|E(G)| \leq f_2(\frac{2w-p}{2}) = w^2 - \frac{pw}{2}$. Dowód lematu jest więc kompletny. $\square$

Uwaga 3.11. *Ograniczenie z Lematu 3.10 jest osiągalne. Graf G ma dokładnie $w^2 - \frac{pw}{2}$ krawędzi dla $G = 2K_{\Delta,\Delta}$, $w = p = 2\Delta$ i następujących pokryć wierzchołkowych: Δ pokryć wierzchołkowych zawierających wszystkie wierzchołki z pierwszej klasy dwudzielności z obu kopii $K_{\Delta,\Delta}$, a drugie Δ pokryć wierzchołkowych zawierających wszystkie wierzchołki z drugiej klasy dwudzielności z obu kopii $K_{\Delta,\Delta}$.*

Przedstawimy teraz dowód Twierdzenia 3.5.

Twierdzenie 3.5 (M. Ś-N., 2016 [46]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega_s(G) \leq 1,5\Delta^2.$$

Dowód Twierdzenia 3.5. Niech H będzie podgrafem grafu G, którego krawędzie tworzą silną klikę w G, tzn. dla każdej pary krawędzi $e, f \in E(H)$ zachodzi $\mathrm{dist}_G(e, f) \leq 2$. Pokażemy, że H ma co najwyżej $1,5\Delta_G^2$ krawędzi. Pamiętajmy, że $0 \leq \Delta_H \leq \Delta_G$.

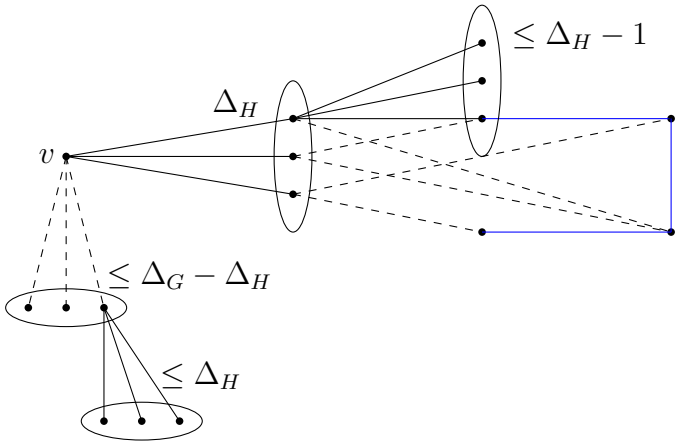
Jeżeli $\Delta_H < 0,75\Delta_G$, wówczas $|E(H)| \leq 2\Delta_G\Delta_H < 1,5\Delta_G^2$, więc twierdzenie jest udowodnione.

Załóżmy zatem, że $0,75\Delta_G \leq \Delta_H \leq \Delta_G$. Rozważmy wierzchołek $v \in V(H)$ o stopniu Δ_H. Krawędzie grafu H możemy podzielić na cztery zbiory, tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 3.7. Przypomnijmy ich definicje.

- $A = \{e \in E(H) : v \in e\}$, $|A| = \Delta_H$
- $B = \{e \in E(H) : e \notin A \wedge \exists_{f \in A} e$ i f mają wspólny wierzchołek$\}$, $|B| \leq \Delta_H(\Delta_H - 1)$
- $C = \{e \in E(H) : \exists_{f \in E(G)}(v \in f \wedge f \notin E(H) \wedge e$ i f mają wspólny wierzchołek$)\}$, $|C| \leq (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_H$
- $D = \{e \in E(H) : e \notin C \wedge \forall_{f \in A} \mathrm{dist}_G(e, f) = 2\}$

  D jest zbiorem krawędzi grafu H, które są w grafie G w odległości 2 od wszystkich krawędzi z A i nie należą do C.

Liczność zbiorów A, B i C jest taka sama, jak w dowodzie Twierdzenia 3.7. Przyjrzyjmy się zbiorowi D (patrz Rysunek 3.4). Niech S będzie podgrafem grafu H indukowanym przez D.



Rysunek 3.4: Zbiór D (na niebiesko). Linie przerywane oznaczają krawędzie z G, które nie są w H.

Stwierdzenie 3.12. *Graf S ma co najwyżej $\Delta_G^2 - \frac{\Delta_G \Delta_H}{2}$ krawędzi.*

Dowód Stwierdzenia 3.12. Zauważmy, że $\Delta_S \leq \Delta_H \leq \Delta_G$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1: $\Delta_S \leq \Delta_G - \Delta_H$

W tym przypadku zachodzi $\Delta_S \leq 0,25\Delta_G$ (ponieważ $0,75\Delta_G \leq \Delta_H \leq \Delta_G$).

Obliczmy ile krawędzi ma graf S. Każdy sąsiad v z H jest połączony krawędzią w G z co najwyżej Δ_G wierzchołkami, a każdy z nich jest incydentny z co najwyżej Δ_S krawędziami z S; co więcej, każda krawędź z S zawiera co najmniej jeden taki wierzchołek. Zatem

$$|E(S)| \leq \Delta_G \Delta_S \leq 0,25\Delta_G^2 \leq \Delta_G^2 - \frac{\Delta_G \Delta_H}{2},$$

co było do udowodnienia.

Przypadek 2: $\Delta_S > \Delta_G - \Delta_H$

Zastosujemy Lemat 3.10 dla grafu S.

Dla $p = \Delta_H$ i $w = \Delta_G$, mamy następujące p pokryć wierzchołkowych grafu S: dla każdego sąsiada v z H (powiedzmy q), wszystkie wierzchołki z S, które są połączone krawędzią w G z q, tworzą pokrycie wierzchołkowe S. Każde takie pokrycie zawiera co najwyżej w wierzchołków. Zauważmy, że dla każdego wierzchołka u z S zachodzi $\deg_S(u) \leq \Delta_G - a$, gdzie a jest liczbą sąsiadów v z H, którzy są połączeni krawędzią w G

z u, zatem jest to liczba pokryć wierzchołkowych, które zawierają u. Założenia Lematu 3.10 są więc spełnione. Otrzymujemy

$$|E(S)| \leq \Delta_G^2 - \frac{\Delta_G \Delta_H}{2},$$

zatem dowód stwierdzenia jest kompletny. □

Możemy teraz wyznaczyć liczbę krawędzi grafu H.

$$|E(H)| \leq \Delta_H + \Delta_H(\Delta_H - 1) + (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_H + \Delta_G^2 - \frac{\Delta_G \Delta_H}{2} = \Delta_G^2 + \frac{\Delta_G \Delta_H}{2} \leq 1,5\Delta_G^2,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

3.2.3 Grafy bez szponów

Z M. Dębskim udowodniliśmy, że silne kliki w grafach bez szponów o maksymalnym stopniu Δ mają co najwyżej $\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$ krawędzi. Poprzednie najlepsze znane ograniczenie wynikało z ograniczenia na silny indeks chromatyczny tej klasy grafów i wynosiło $1,125\Delta^2 + \Delta$ (patrz Twierdzenie 2.26).

Twierdzenie 3.13 (M. Dębski, M. Ś-N., 2020+ [21]). *Niech G będzie grafem bez szponów o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas*

$$\omega\left(L^2(G)\right) \leq \Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta.$$

Zaczniemy od udowodnienia dwóch pomocniczych lematów, które są modyfikacjami Twierdzenia Turána (Twierdzenie 1.1), przystosowanymi do naszych potrzeb. Dowody lematów są inspirowane klasycznymi dowodami Twierdzenia Turána (pierwszy używa indukcji, drugi klas równoważności).

Lemat 3.14 (M. Dębski, M. Ś-N., 2020+ [21]). *Niech A, B będą zbiorami rozłącznymi, takimi że $|A| \geq |B|$. Niech G będzie grafem o zbiorze wierzchołków $V(G) = A \cup B$, w którym każde dwie krawędzie e, f, takie że e ma oba końce w A, a f ma oba końce w B, są w odległości co najwyżej 2. Niech e_A, e_B i e_{AB} oznaczają odpowiednio liczbę krawędzi*

o obu końcach w A, liczbę krawędzi o obu końcach w B i liczbę krawędzi o jednym końcu w A, a drugim końcu w B. Wówczas

$$e_A + e_B - e_{AB} \leq \binom{|A|}{2}.$$

Dowód Lematu 3.14. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na $|B|$. Zauważmy, że dla $|B| < 2$ zachodzi $e_B = 0$, co razem z $e_A \leq \binom{|A|}{2}$ i $e_{AB} \geq 0$ implikuje poprawność lematu. Załóżmy teraz, że lemat jest prawdziwy, gdy zbiory mają rozmiary odpowiednio $|A| - 2$ i $|B| - 2$.

Niech G będzie grafem maksymalizującym sumę $e_A + e_B - e_{AB}$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1: $e_A = 0$ lub $e_B = 0$. Z założenia lematu wiemy, że $|A| \geq |B|$, zatem w tym przypadku zawsze $e_B = 0$. Jako, że $e_A \leq \binom{|A|}{2}$ i $e_{AB} \geq 0$, to $e_A + e_B - e_{AB} \leq \binom{|A|}{2}$, co mieliśmy udowodnić.

Przypadek 2: $e_A > 0$ i $e_B > 0$. Twierdzimy, że istnieje taka czwórka wierzchołków $u, v \in A$ i $w, x \in B$, że $uv, vx, wx \in E(G)$ i $uw, ux, vw \notin E(G)$. Gdyby tak nie było, to dla każdej pary krawędzi e, f, takich że e ma oba końce w A, f ma oba końce w B, istniałyby co najmniej 2 krawędzie sąsiednie zarówno z e jak i z f. Usunięcie z G krawędzi o jednym końcu w A i jednym końcu w B nie naruszyłoby wówczas wymaganych założeń, co oznaczałoby sprzeczność z maksymalnością grafu G.

Niech $A' = A \setminus \{u, v\}$ i $B' = B \setminus \{w, x\}$. Niech $e_{A'}$, $e_{B'}$ i $e_{A'B'}$ oznaczają odpowiednio liczbę krawędzi o obu końcach w A', liczbę krawędzi o obu końcach w B' i liczbę krawędzi o jednym końcu w A', a drugim końcu w B'. Dla wierzchołka $y \in A' \cup B'$ niech $s(y)$ oznacza udział krawędzi incydentnych z y i z wierzchołkiem z $\{u, v, w, x\}$ w sumie $e_A + e_B - e_{AB}$; to znaczy, że dla $y \in A'$, $s(y)$ jest równe liczbie sąsiadów wierzchołka y w $\{u, v\}$ pomniejszonej o liczbę sąsiadów wierzchołka y w $\{w, x\}$, a dla $y \in B'$, $s(y)$ jest równe liczbie sąsiadów wierzchołka y w $\{w, x\}$ pomniejszonej o liczbę sąsiadów wierzchołka y w $\{u, v\}$. Mamy zatem

$$e_A + e_B - e_{AB} \leq e_{A'} + e_{B'} - e_{A'B'} + \sum_{y \in A' \cup B'} s(y) + 1. \tag{3.3}$$

Twierdzimy, że dla wszystkich wierzchołków $y \in A' \cup B'$ zachodzi $s(y) \leq 1$. Załóżmy,

że jest przeciwnie, tzn. dla pewnego wierzchołka $y \in A'$ mamy $s(y) \geq 2$. Oznacza to, że y jest sąsiadem zarówno u jak i v i nie jest sąsiadem ani w ani x, zatem krawędź uy nie jest w odległości ≤ 2 od krawędzi wx, co jest sprzeczne z założeniami lematu. Ten sam argument zachodzi dla $y \in B'$ i zamienionych (u, v) oraz (w, x). Po podstawieniu $\sum_{y \in A' \cup B'} s(y) \leq |A'| + |B'| = |A| + |B| - 4$ do nierówności 3.3 otrzymujemy

$$e_A + e_B - e_{AB} \leq e_{A'} + e_{B'} - e_{A'B'} + |A| + |B| - 3. \tag{3.4}$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $e_{A'} + e_{B'} - e_{A'B'} \leq \binom{|A'|}{2} = \binom{|A|-2}{2}$, zatem

$$e_A + e_B - e_{AB} \leq \frac{(|A| - 2)(|A| - 3)}{2} + |A| + |B| - 3 = \binom{|A|}{2} + |B| - |A|, \tag{3.5}$$

ponieważ $|A| \geq |B|$, otrzymujemy

$$e_A + e_B - e_{AB} \leq \binom{|A|}{2},$$

co kończy dowód lematu. □

Lemat 3.15 (M. Dębski, M. Ś-N., 2020+ [21]). *Niech A, B będą zbiorami rozłącznymi, $a := |A|$, $b := |B|$, a G będzie grafem o zbiorze wierzchołków $V(G) = A \cup B$. Jeżeli spełnione są poniższe warunki*

(i) A nie zawiera zbioru niezależnego o rozmiarze 3,

(ii) Dla każdej trójki wierzchołków $x, y \in A$ i $z \in B$ jeżeli $xy \notin E(G)$, to $xz \in E(G)$ lub $yz \in E(G)$,

to liczba krawędzi grafu G incydentnych z przynajmniej jednym wierzchołkiem z A wynosi co najmniej $\binom{a}{2}$ dla $a < b$ i co najmniej $\binom{a}{2} - \frac{(a-b)^2}{4}$ dla $a \geq b$.

Dowód Lematu 3.15. Niech A i B będą ustalone, a G będzie grafem o zbiorze wierzchołków $V(G) = A \cup B$ spełniającym (i) oraz (ii) o minimalnej liczbie krawędzi. W dowodzie użyjemy poniższego stwierdzenia.

Stwierdzenie 3.16. *Nie istnieją takie trzy wierzchołki $u, v, w \in A$, dla których zachodzi $uv \notin E(G)$ i $uw, vw \in E(G)$.*

Dowód Stwierdzenia 3.16. Załóżmy, że jest przeciwnie, tzn. istnieją takie 3 wierzchołki u, v, w. Skonstruujemy graf G' o mniejszej liczbie krawędzi niż G, co będzie sprzeczne z założeniem o minimalności grafu G. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1: Jeden z wierzchołków u lub v ma mniejszy stopień niż w. Bez straty ogólności rozważań załóżmy, że jest to u. Graf G' tworzymy z G poprzez usunięcie wszystkich krawędzi incydentnych z w, dodanie krawędzi z w do wszystkich sąsiadów u (z wyjątkiem w) oraz dodanie krawędzi uw. Zauważmy, że $|E(G')| = |E(G)| - \deg_G(w) + \deg_G(u) < |E(G)|$.

Dla G' spełniony jest warunek (i) – gdyby w G' istniał zbiór niezależny S o rozmiarze 3, wówczas S musiałby zawierać w, bo usunęliśmy tylko krawędzie incydentne z w, a także S nie mógłby zawierać u, bo $uw \in E(G')$. Jednak wtedy $S \setminus \{\{w\} \cup \{u\}\}$ byłby zbiorem niezależnym o rozmiarze 3 w G, co jest sprzeczne z założeniami o G.

Dla G' spełniony jest również warunek (ii). Żeby to pokazać, rozważmy wierzchołki $z \in B$ i $x \in A$, taki że $xw \notin E(G')$. Ponieważ w jest incydentny ze wszystkimi sąsiadami wierzchołka u, mamy $xu \notin E(G)$, zatem $xz \in E(G)$ lub $uz \in E(G)$ – co oznacza, że $xz \in E(G')$ lub $wz \in E(G')$.

Przypadek 2: Oba wierzchołki u i v mają stopień nie mniejszy od stopnia w. W tym przypadku tworzymy graf G' poprzez usunięcie z G wszystkich krawędzi incydentnych z u i v, dodanie krawędzi z u i v do wszystkich sąsiadów w oraz dodanie krawędzi uv, uw i vw. Zauważmy, że $\deg_{G'}(u) = \deg_{G'}(v) = \deg_{G'}(w) = \deg_G(w)$, ale krawędź uv jest liczona zarówno w $\deg_{G'}(u)$ jak i w $\deg_{G'}(v)$. Mamy zatem $|E(G')| = |E(G)| - \deg_G(u) - \deg_G(v) + 2\deg_G(w) - 1 < |E(G)|$.

Dla G' spełniony jest warunek (i), ponieważ – tak samo jak w poprzednim przypadku – dla każdego zbioru niezależnego S w G' albo $S \setminus \{\{u, v\} \cup \{w\}\}$ jest zbiorem niezależnym w G o tej samej liczności co S albo S jest rozłączny z $\{u, v, w\}$.

Dla G' spełniony jest również warunek (ii), ponieważ dla każdej pary wierzchołków $z \in B$ i $x \in A$, takiej że $xu \notin E(G')$ lub $xv \notin E(G')$, mamy $xw \notin E(G)$, zatem zachodzi $xz \in E(G')$ lub $uz, vz, wz \in E(G')$. Dowód stwierdzenia jest więc kompletny. □

Rozważmy relację $\sim \subseteq A^2$, taką że $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $xy \in E(G)$ lub

$x = y$. Relacja $\sim$ jest oczywiście zwrotna i symetryczna, a ze Stwierdzenia 3.16 wiemy, że jest również przechodnia, jest ona zatem relacją równoważności na zbiorze A. Ponieważ w A nie ma zbiorów niezależnych o rozmiarze 3, relacja $\sim$ ma co najwyżej dwie klasy abstrakcji.

Niech X będzie mniejszą klasą abstrakcji relacji $\sim$ (jeżeli obie klasy są równe, niech X będzie jedną z nich), zauważmy, że X może być zbiorem pustym. Niech $x := |X|$, $a := |A|$ i $b := |B|$.

Stwierdzenie 3.17. *Każdy wierzchołek należący do B ma co najmniej x sąsiadów w A.*

Dowód Stwierdzenia 3.17. Niech z będzie wierzchołkiem należącym do B. Zauważmy, że albo z sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z $A \setminus X$ – co daje co najmniej $a - x \geq x$ sąsiadów z w A – albo z nie sąsiaduje z pewnym wierzchołkiem $v \in A \setminus X$. W drugim przypadku, z warunku (ii), z musi sąsiadować ze wszystkimi wierzchołkami z X, co daje co najmniej x sąsiadów w A. Dowód stwierdzenia jest więc kompletny. □

Policzmy teraz krawędzie z G incydentne z co najmniej jednym wierzchołkiem z A. Z definicji X, mamy dokładnie $\binom{x}{2} + \binom{a-x}{2}$ krawędzi o obu końcach w A. Ze Stwierdzenia 3.17 wiemy, że krawędzi o jednym końcu w A, a drugim końcu w B jest co najmniej bx. Razem mamy zatem co najmniej

$$f(x) := \binom{a}{2} + x^2 + (b - a)\, x$$

krawędzi.

Zauważmy, że $f(x)$ jest funkcją kwadratową z minimum w $x_{\min} = \frac{a-b}{2}$, która jest rosnąca dla $x > x_{\min}$. Mamy zatem

$$f(x) \geq \begin{cases} f(x_{\min}), & \text{dla } x_{\min} \geq 0, \\ f(0), & \text{dla } x_{\min} < 0, \end{cases}$$

co jest równe

$$f(x) \geq \begin{cases} \binom{a}{2} - \frac{(a-b)^2}{4}, & \text{dla } a \geq b, \\ \binom{a}{2}, & \text{dla } a < b. \end{cases}$$

Dowód lematu jest więc kompletny.

□

Przejdziemy teraz do dowodu Twierdzenia 3.13. Początkowa część dowodu jest podobna do dowodu Twierdzenia 2.26, w którym dla danej krawędzi e liczyliśmy ile maksymalnie krawędzi może być w odległości co najwyżej 2 od e. Tym razem wymagamy dodatkowo, żeby wszystkie te krawędzie były od siebie w odległości nie większej od 2, co pozwala nam na poprawienie stałej przy Δ^2 z $1,125$ na 1.

Dowód Twierdzenia 3.13. Niech $v_1, v_2 \in V(G)$ będą wierzchołkami grafu G, takimi że krawędź $e = v_1v_2 \in E(G)$ należy do największej silnej kliki w G. Niech H będzie podgrafem G zawierającym wszystkie krawędzie z tej silnej kliki.

Zbiory D_1, D_2, D_3 oraz zmienne d_1, d_2, d_3 definiujemy analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2.26: niech D_1 będzie zbiorem wierzchołków z G sąsiadujących z v_1 i niesąsiadujących z v_2, D_2 będzie zbiorem wierzchołków z G sąsiadujących z v_2 i niesąsiadujących z v_1, a D_3 będzie zbiorem wierzchołków z G sąsiadujących z v_1 i v_2 (patrz Rysunek 3.5), niech $d_1 := |D_1|$, $d_2 := |D_2|$ i $d_3 := |D_3|$. Następujące ograniczenia są oczywiste:

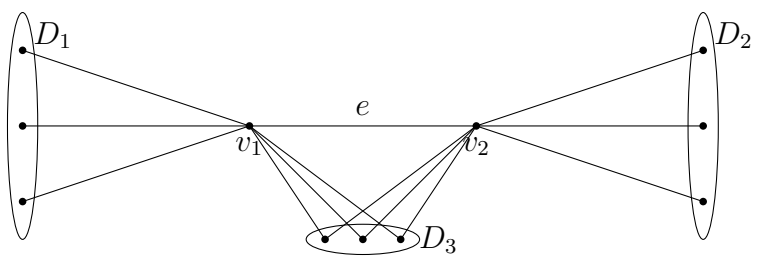
$$d_1, d_2, d_3 \geq 0, \tag{2.1}$$

$$d_1, d_2, d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.2}$$

$$d_1 + d_3 \leq \Delta - 1, \tag{2.3}$$

$$d_2 + d_3 \leq \Delta - 1. \tag{2.4}$$

Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $d_1 \geq d_2$.



Rysunek 3.5: Zbiory D_1, D_2, D_3.

Zauważmy, że $G[D_1]$ i $G[D_2]$ są grafami pełnymi, a $G[D_3]$ nie zawiera zbiorów niezależnych o rozmiarze większym bądź równym 3 (inaczej w G powstałby indukowany szpon – szczegółowe uzasadnienie przedstawiliśmy w dowodzie Twierdzenia 2.26).

Zauważmy, że każda krawędź z H jest w grafie G w odległości co najwyżej 2 od e. Zatem każda krawędź z H, z wyłączeniem e, jest incydentna z co najmniej jednym wierzchołkiem z $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Policzymy teraz krawędzie grafu H. Twierdzimy, że jest ich co najwyżej

$$\Delta\left(d_1+d_2+d_3\right)-\binom{d_1}{2}-2\binom{d_2}{2}-\binom{d_3}{2}+1+I_{d_3>d_1+d_2}\frac{(d_3-d_1-d_2)^2}{4}, \tag{3.6}$$

gdzie $I_{d_i>d_3+1}$ wynosi 1 gdy $d_i > d_3+1$, a 0 w przeciwnym przypadku.

Ograniczenie (3.6) uzyskaliśmy w następujący sposób.

Na początku liczymy krawędzie o dokładnie jednym końcu w $D_1 \cup D_2$. Wszystkie wierzchołki z $D_1 \cup D_2$ są incydentne z co najwyżej $\Delta(d_1+d_2)$ krawędziami. Zauważmy, że niektóre krawędzie policzyliśmy tu dwukrotnie, a nie powinniśmy ich na razie liczyć wcale. Są to krawędzie o obu końcach w D_1 (jest ich Δd_1, bo $G[D_1]$ jest grafem pełnym), obu końcach w D_2 (jest ich Δd_2, bo $G[D_2]$ także jest grafem pełnym) oraz o jednym końcu w D_1, a drugim końcu w D_2 (oznaczmy ich liczbę przez $e_{D_1D_2}$). Zatem liczba krawędzi o dokładnie jednym końcu w $D_1 \cup D_2$ wynosi co najwyżej

$$\Delta(d_1+d_2)-2\binom{d_1}{2}-2\binom{d_2}{2}-2e_{D_1D_2}. \tag{3.7}$$

Teraz dodamy krawędzie o obu końcach w $D_1 \cup D_2$. Niech e_{D_1} oznacza liczbę krawędzi grafu H z $G[D_1]$, a e_{D_2} oznacza liczbę krawędzi grafu H z $G[D_2]$. Liczba krawędzi w H o obu końcach w $D_1 \cup D_2$ wynosi

$$e_{D_1}+e_{D_2}+e_{D_1D_2}. \tag{3.8}$$

Suma (3.7) i (3.8) jest równa

$$\Delta(d_1+d_2)-2\binom{d_1}{2}-2\binom{d_2}{2}+e_{D_1}+e_{D_2}-e_{D_1D_2}. \tag{3.9}$$

Niech S będzie grafem o zbiorze wierzchołków $D_1 \cup D_2$, takim że $xy \in E(S)$ jeżeli $x \in D_1$, $y \in D_2$ i $xy \in E(G)$ lub $x, y \in D_i$ i $xy \in E(H)$. Graf S spełnia założenia Lematu 3.14 z $A = D_1$ i $B = D_2$. Zatem $e_{D_1}+e_{D_2}-e_{D_1D_2} \leq \binom{d_1}{2}$. Wobec tego (3.9) jest nie większe od

$$\Delta(d_1+d_2)-\binom{d_1}{2}-2\binom{d_2}{2}. \tag{3.10}$$

W kolejnym kroku, do (3.10) dodamy krawędzie z H, które są incydentne z co najmniej jednym wierzchołkiem z D_3; jest ich co najmniej Δd_3. Otrzymujemy

$$\Delta(d_1 + d_2 + d_3) - \binom{d_1}{2} - 2\binom{d_2}{2}. \tag{3.11}$$

Krawędzie o jednym końcu w $D_1 \cup D_2$, a drugim końcu w D_3 oraz krawędzie o obu końcach w D_3, zostały w (3.11) policzone podwójnie, należy więc je odjąć. Policzymy je przy pomocy Lematu 3.15. Niech S będzie podgrafem G indukowanym przez $V(S) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Zauważmy, że dla każdej trójki wierzchołków $x, y \in D_3$ i $z \in D_1 \cup D_2$ jeżeli $xy \notin E(S)$, wówczas $xz \in E(S)$ lub $yz \in E(S)$ (inaczej powstałby indukowany szpon). Co więcej, wiemy, że D_3 nie zawiera zbioru niezależnego o rozmiarze 3. Zatem graf S spełnia założenia Lematu 3.15 z $A = D_3$ i $B = D_1 \cup D_2$. Wobec tego suma liczby krawędzi o jednym końcu w $D_1 \cup D_2$, a drugim końcu w D_3 oraz liczby krawędzi o obu końcach w D_3 wynosi co najmniej $\binom{d_3}{2} - I_{d_3 > d_1 + d_2} \frac{(d_3 - d_1 - d_2)^2}{4}$. Po odjęciu tej liczby od (3.11) otrzymujemy

$$\Delta(d_1 + d_2 + d_3) - \binom{d_1}{2} - 2\binom{d_2}{2} - \binom{d_3}{2} + I_{d_3 > d_1 + d_2} \frac{(d_3 - d_1 - d_2)^2}{4}. \tag{3.12}$$

Nie policzyliśmy jeszcze krawędzi e. Po dodaniu 1 do (3.12), otrzymujemy (3.6).

W dalszej części dowodu użyjemy poniższego stwierdzenia. Jego dowód umieszczony jest po niniejszym dowodzie.

Stwierdzenie 3.18. *Wartość wyrażenia (3.6), przy ograniczeniach (2.1)-(2.4), wynosi co najwyżej* $\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$.

Ze Stwierdzenia 3.18, dowód twierdzenia jest kompletny. □

Dowód Stwierdzenia 3.18. Pochodna cząstkowa z (3.6) po d_1 wynosi

$$\Delta - d_1 + \frac{1}{2} + I_{d_3 > d_1 + d_2} \frac{d_1 + d_2 - d_3}{2}. \tag{3.13}$$

Gdy $d_3 \leq d_1 + d_2$, wyrażenie (3.13) ma wartość większą od 0 z (2.2). W przeciwnym przypadku (3.13) jest równe $\Delta + \frac{1}{2} + d_2 + d_3$, co jest większe od 0 na podstawie (2.4). Zatem (3.6) jest rosnące względem d_1. Z (2.3) wynika, że wyrażenie (3.6) jest maksymalizowane

dla $d_1 = \Delta - d_3 - 1$, zatem jego wartość wynosi co najwyżej

$$\Delta(\Delta-1+d_2)-\binom{\Delta-d_3-1}{2}-2\binom{d_2}{2}-\binom{d_3}{2}+1+I_{d_3>\Delta-d_3-1+d_2}\frac{(d_3-\Delta+d_3+1-d_2)^2}{4}=$$

$$\Delta(\Delta-1+d_2)-\frac{1}{2}(\Delta-d_3-1)^2+\frac{1}{2}(\Delta-d_3-1)-d_2^2+d_2-\frac{1}{2}d_3^2+\frac{1}{2}d_3+I_{d_3>\frac{\Delta+d_2-1}{2}}\frac{(2d_3-d_2-\Delta+1)^2}{4}=$$

$$-d_2^2+d_2+\Delta d_2-d_3^2-d_3+\Delta d_3+\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta+I_{d_3>\frac{\Delta+d_2-1}{2}}\frac{(2d_3-d_2-\Delta+1)^2}{4}. \quad (3.14)$$

Rozważmy następujące przypadki.

Przypadek 1: $d_3 > \frac{\Delta+d_2-1}{2}$, czyli

$$d_2 < 2d_3 - \Delta + 1. \quad (3.15)$$

Pochodna cząstkowa z (3.14) po d_2 wynosi

$$-2d_2+1+\Delta+\frac{1}{2}d_2-d_3+\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}d_2-d_3+\frac{3}{2}\Delta+\frac{1}{2}, \quad (3.16)$$

co jest większe od 0 na podstawie (2.4). Wyrażenie (3.16) osiąga zatem wartość maksymalną dla maksymalnego d_2. Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1.1: $2d_3 - \Delta + 1 \leq \Delta - d_3 - 1$, co jest równoważne

$$d_3 \leq \frac{2\Delta-2}{3}. \quad (3.17)$$

W tym przypadku używamy górnego ograniczenia na d_2 z założenia Przypadku 1, tzn. podstawiamy $d_2 = 2d_3 - \Delta + 1$. Oznacza to, że wyrażenie (3.14) jest nie większe od

$$-(2d_3-\Delta+1)^2+2d_3-\Delta+1+\Delta(2d_3-\Delta+1)-d_3^2-d_3+\Delta d_3+\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta=$$

$$-5d_3^2-3d_3+7\Delta d_3-\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{5}{2}\Delta. \quad (3.18)$$

Pochodna z (3.18) po d_3 wynosi

$$-10d_3-3+7\Delta, \quad (3.19)$$

co jest większe od 0 z (3.17). Wyrażenie (3.18) osiąga zatem maksymalną wartość dla $d_3 = \frac{2\Delta-2}{3}$, która wynosi

$$-5(\frac{2\Delta-2}{3})^2-3(\frac{2\Delta-2}{3})+7\Delta(\frac{2\Delta-2}{3})-\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{5}{2}\Delta=$$

$$-\frac{20}{9}\Delta^2+\frac{40}{9}\Delta-\frac{20}{9}-\frac{25}{6}\Delta+2+\frac{19}{6}\Delta^2=$$
$$\frac{17}{18}\Delta^2+\frac{5}{18}\Delta-\frac{2}{9}. \tag{3.20}$$

Przypadek 1.2: $d_3 > \frac{2\Delta-2}{3}$. W tym przypadku używamy ograniczenia 2.4, tzn. podstawiamy $d_2 = \Delta - d_3 - 1$. Oznacza to, że wyrażenie (3.14) jest nie większe od

$$-(\Delta-d_3-1)^2+\Delta-d_3-1+\Delta(\Delta-d_3-1)-d_3^2-d_3+\Delta d_3+\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta+\frac{(3d_3-2\Delta+2)^2}{4}=$$
$$\frac{1}{4}d_3^2-d_3-\Delta d_3+\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta-1. \tag{3.21}$$

Pochodna z (3.21) po d_3 wynosi

$$\frac{1}{2}d_3-1-\Delta, \tag{3.22}$$

co jest mniejsze od 0 na podstawie (2.2). Wyrażenie (3.21) osiąga zatem maksymalną wartość dla minimalnego $d_3 = \frac{2\Delta-2}{3}$, która wynosi

$$\frac{1}{4}(\frac{2\Delta-2}{3})^2-\frac{2\Delta-2}{3}-\Delta\frac{2\Delta-2}{3}+\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta-1=$$
$$\frac{1}{9}\Delta^2-\frac{2}{9}\Delta+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\Delta+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\Delta^2+\frac{2}{3}\Delta+\frac{3}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta-1=$$
$$\frac{17}{18}\Delta^2+\frac{5}{18}\Delta-\frac{2}{9}. \tag{3.23}$$

Przypadek 2: $d_3 \leq \frac{\Delta+d_2-1}{2}$, czyli

$$d_2 \geq 2d_3-\Delta+1. \tag{3.24}$$

w tym przypadku $I_{d_3>\frac{\Delta+d_2-1}{2}}$ ma wartość 0, zatem (3.14) jest równe

$$-d_2^2+d_2+\Delta d_2-d_3^2-d_3+\Delta d_3+\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta. \tag{3.25}$$

Zauważmy, że (3.25) jest sumą dwóch funkcji

$$f_1(d_2)=-d_2^2+d_2+\Delta d_2 \tag{3.26}$$

i

$$f_2(d_3)=-d_3^2-d_3+\Delta d_3+\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta. \tag{3.27}$$

Pochodna z f_1 po d_2 wynosi $-2d_2 + 1 + \Delta$, zatem f_1 osiąga swoje jedyne globalne maksimum dla $d_2 = \frac{\Delta+1}{2}$. Wynosi ono

$$-\frac{1}{4}\Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}. \tag{3.28}$$

Pochodna z f_2 po d_3 wynosi $-2d_3 - 1 + \Delta$, zatem f_2 osiąga swoje jedyne globalne maksimum dla $d_3 = \frac{\Delta-1}{2}$. Wynosi ono

$$-\frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta = \frac{3}{4}\Delta^2 + \frac{1}{4}. \tag{3.29}$$

Maksimum z (3.25) wynosi zatem co najwyżej

$$\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}. \tag{3.30}$$

Zauważmy, że $d_2 = \frac{\Delta+1}{2}$ i $d_3 = \frac{\Delta-1}{2}$ nie spełniają (2.4). Wiemy, że jedyne globalne maksimum (3.25) wynosi (3.30), zatem maksymalna wartość (3.25) dla d_2, d_3 ograniczonych przez (2.4) jest ostro mniejsza od (3.30). Co więcej, interesują nas tylko całkowite wartości Δ. Maksymalna wartość wyrażenia (3.25), przy ograniczeniu (2.4), wynosi więc co najwyżej

$$\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta. \tag{3.31}$$

Ponieważ wyrażenia (3.20), (3.23) i (3.31) są wszystkie nie większe od $\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$, wartość (3.6) wynosi także co najwyżej $\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$, co kończy dowód stwierdzenia. □

3.3 Kierunek dalszych badań

Najlepsze znane górne ograniczenie na rozmiar silnej kliki w grafie o maksymalnym stopniu Δ zostało udowodnione przez Farona i Postle'a i wynosi $\frac{4}{3}\Delta^2$ (patrz Twierdzenie 3.6). Dolne ograniczenie wynosi $\frac{5}{4}\Delta^2$. Głęboko wierzymy, że hipoteza, którą postawili Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza (Hipoteza 3.2) jest prawdziwa, tzn. że $\frac{5}{4}\Delta^2$ jest także górnym ograniczeniem na rozmiar silnych klik w grafach. Każda poprawa ograniczenia $\frac{4}{3}\Delta^2$ będzie ciekawa i pouczająca.

Przypomnijmy, że najlepsze znane ograniczenie na silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ zostało udowodnione przez Bonamy, Perretta i Postle'a

i wynosi $1,835\Delta^2$ (patrz Twierdzenie 2.7). Gdyby Hipoteza Reed'a (Hipoteza 1.2) była prawdziwa, z ograniczenia na rozmiar silnych klik w grafach wynikałoby, że silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $\lceil \frac{5}{3}\Delta^2 \rceil$, co znacznie poprawiałoby obecne wyniki. Jako że udowodniona jest ułamkowa wersja tej hipotezy (Twierdzenie 1.3), z twierdzenia Farona i Postle'a (Twierdzenie 3.6) wynika, że ułamkowy silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $\frac{5}{3}\Delta^2$.

Definicja 3.19. *Niech G będzie grafem, a $M(G)$ zbiorem indukowanych skojarzeń z G.* ***Ułamkowym silnym kolorowaniem krawędzi*** *grafu G nazywamy odwzorowanie $c_f : M(G) \to [0,1]$, dla którego dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ zachodzi*

$$\sum_{m \in M(G): e \in m} c_f(m) = 1.$$

Wagę α ułamkowego kolorowania definiujemy jako

$$\alpha = \sum_{m \in M(G)} c_f(m),$$

w tym przypadku mówimy, że G ma ***ułamkowe silne $\alpha-$kolorowanie krawędzi.***

Ułamkowy silny indeks chromatyczny *grafu G, oznaczany przez $\chi'_{fs}(G)$, to infimum po wszystkich dodatnich α, dla których G ma ułamkowe silne $\alpha-$kolorowanie krawędzi.*

Obserwacja 3.20. *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Wówczas ułamkowy silny indeks chromatyczny G wynosi co najwyżej $\frac{5}{3}\Delta^2$.*

Dowód Obserwacji 3.20. Niech L będzie kwadratem grafu krawędziowego grafu G. Ułamkowy silny indeks chromatyczny grafu G jest równy ułamkowej liczbie chromatycznej grafu L.

Maksymalny stopień grafu L wynosi co najwyżej $2\Delta^2 - 2\Delta$. Z Twierdzenia 3.6 wiemy, że $\omega(L) \leq \frac{4}{3}\Delta^2$. Z Twierdzenia Molloya i Reeda (Twierdzenie 1.3) wynika, że

$$\chi'_{fs}(G) \leq \frac{\frac{4}{3}\Delta^2 + 2\Delta^2 - 2\Delta + 1}{2} = \frac{5}{3}\Delta^2 - \Delta + 0.5 \leq 1.75\Delta^2,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Dla grafów bez szponów o maksymalnym stopniu Δ udowodniliśmy, że silne kliki mają co najwyżej $\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$ krawędzi. Jednocześnie największa silna klika w grafach bez szponów, jaką udało nam się skonstruować, ma ok. $\frac{9}{16}\Delta^2$ krawędzi (jej konstrukcję opisaliśmy w sekcji 2.3.4). Chcielibyśmy skonstruować graf o większej silnej klice albo poprawić nasze górne ograniczenie.

Ciekawym kierunkiem badań jest także szukanie ograniczenia na maksymalny rozmiar silnych klik w grafach bez $K_{1,r}$ o maksymalnym stopniu Δ dla $r > 3$. Jedynym znanym ograniczeniem jest $\left(2 - \frac{1}{r-2}\right)\Delta^2 - \frac{r-4}{r-2}\Delta - \frac{1}{r-2}$, które wynika z ograniczenia na silny indeks chromatyczny grafów bez $K_{1,r}$ (patrz Twierdzenie 2.28). Czy można powiedzieć coś więcej o silnych klikach w tej klasie grafów? Szczególnie interesujący byłby wynik dla grafów przecięć dysków jednostkowych (które są grafami bez $K_{1,6}$), dla których wiemy, że silny indeks chromatyczny jest nie większy od $1,625\Delta^2$ (patrz Twierdzenie 2.29). Ponownie, interesuje nas zarówno konstrukcja dużej silnej kliki, jak i poprawienie górnego ograniczenia.

Rozdział 4

$t-$silne kliki w grafach

4.1 Wprowadzenie

4.1.1 Uogólnienie silnego kolorowania krawędzi grafów

Przypomnijmy, że w silnym kolorowaniu krawędzi grafu G wymagamy, aby każde dwie krawędzie z G, które są w odległości co najwyżej 2, dostały różne kolory. Kolorowanie to odpowiada poprawnemu kolorowaniu wierzchołków grafu $L^2(G)$. Erdős i Nešetřil w 1985 r. postawili hipotezę, która mówi, że dla każdego grafu o maksymalnym stopniu Δ wystarczy $\frac{5}{4}\Delta^2$ kolorów, aby móc silnie pokolorować jego krawędzie (Hipoteza 2.2). Bonamy, Perrett i Postle w 2018 r. udowodnili najlepsze znane górne ograniczenie na silny indeks chromatyczny, równe $1,835\Delta^2$ (Twierdzenie 2.7). Zastanówmy się co się stanie, gdy będziemy wymagać, aby wszystkie krawędzie, które są w odległości nie większej od t dostały różne kolory? Ilu kolorów będziemy wówczas potrzebować?

Definicja 4.1. *Niech G będzie grafem, a $t \geq 2$ będzie liczbą całkowitą.*

*Kolorowanie krawędzi grafu G nazywamy $t-$**silnym**, jeżeli żadne dwie krawędzie w odległości co najwyżej t nie mają tego samego koloru.*

***Silnym indeksem chromatycznym** grafu G nazywamy najmniejszą możliwą liczbę kolorów w $t-$silnym kolorowaniu krawędzi G.*

Silny indeks chromatyczny grafu G jest równy liczbie chromatycznej grafu $L^t(G)$.

Celem naszych badań jest określenie jak duży może być $t-$silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ. Zdefiniujmy, dla każdego całkowitego $t \geq 2$, b_t jako najmniejszą stałą, taką że dla każdego grafu G o wystarczająco dużym maksymalnym stopniu Δ, $t-$silny indeks chromatyczny G jest nie większy od $b_t\Delta^t$.

W Rozdziale 2 opisaliśmy znane ograniczenia na $2-$silny indeks chromatyczny (nazywany silnym indeksem chromatycznym). O wiele mniej wiadomo o $t-$silnym indeksie chromatycznym dla $t > 2$.

Z prostego algorytmu zachłannego wynika górne ograniczenie na $t-$silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ równe $2\sum_{i=1}^{t}(\Delta - i)^i + 1$ (b_t jest więc równe co najwyżej 2). W 2014 r. Kaiser i Kang udowodnili, że $b_t \leq 2 - \epsilon$ dla $\epsilon = 0,00008$. Jest to najlepsze znane górne ograniczenie.

Twierdzenie 4.2 (T. Kaiser, R. J. Kang, 2014 [34]). *Niech $\epsilon = 0,00008$, a $t \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Dla wystarczająco dużego Δ_0, $t-$silny indeks chromatyczny każdego grafu o maksymalnym stopniu $\Delta \geq \Delta_0$ jest nie większy od $(2-\epsilon)\Delta^t$.*

Niewiele wiadomo także o dolnym ograniczeniu na $t-$ silny indeks chromatyczny grafów. Istnieją konstrukcje grafów dwudzielnych, świadczące o tym, że $b_3, b_4, b_6 \geq 1$ (co ciekawe nie jest znana taka konstrukcja dla $t = 5$), jednak w ogólnym przypadku dolne ograniczenie na b_t dąży do 0 wraz z t dążącym do nieskończoności (patrz [34] i [35]). W 2012 r. Kang i Manggala pokazali konstrukcję grafów regularnych o dowolnie dużym maksymalnym stopniu Δ, które wymagają $\frac{1}{2(t-1)^{t-1}}\Delta^t$ kolorów w $t-$silnym kolorowaniu krawędzi (patrz [35]).

4.1.2 Uogólnienie silnych klik

Przypomnijmy, że silną kliką w grafie G, nazywamy podzbiór krawędzi G, w którym każde dwie krawędzie są od siebie w odległości nie większej od 2 w G. Silne kliki w grafie G odpowiadają klikom w grafie $L^2(G)$. W poprzedniej sekcji przedstawiliśmy problem $t-$silnego kolorowania krawędzi grafów. Zdefiniujmy $t-$silną klikę w grafie jako zbiór tych krawędzi z G, dla których odpowiadające im wierzchołki z $L^t(G)$ parami sąsiadują

ze sobą; krawędzie te muszą więc otrzymać różne kolory w $t-$silnym kolorowaniu krawędzi grafu G.

Definicja 4.3. *Niech G będzie grafem, a $t \geq 2$ będzie liczbą całkowitą.*

*$t-$**silną kliką** w grafie G nazywamy podzbiór krawędzi G, w którym każde dwie krawędzie są od siebie w odległości nie większej od t w G.*

$t-$silne kliki w grafie G odpowiadają klikom w grafie $L^t(G)$.

Chcemy znaleźć odpowiedź na pytanie: ile maksymalnie krawędzi może zawierać $t-$silna klika w grafie o maksymalnym stopniu Δ? Zdefiniujmy, dla każdego całkowitego $t \geq 2$, c_t jako najmniejszą stałą, taką że dla każdego grafu G o wystarczająco dużym maksymalnym stopniu Δ, $t-$silne kliki w G mają co najwyżej $c_t\Delta^t$ krawędzi.

W sposób oczywisty c_t nie może być większe od b_t. Możliwe jest, że dla danego grafu G, maksymalny rozmiar $t-$silnej kliki w G jest mniejszy od $t-$silnego indeksu chromatycznego tego grafu. Przypuszczamy jednak, że górne ograniczenia na rozmiar $t-$silnych klik i na $t-$silny indeks chromatyczny są sobie równe. Wszystkie krawędzie grafów regularnych o dowolnie dużym maksymalnym stopniu Δ z konstrukcji Kanga i Manggali (patrz [35]) tworzą $t-$silne kliki; najlepszym znanym dolnym ograniczeniem na b_t jest więc, tak samo jak na c_t, $\frac{1}{2(t-1)^{t-1}}$.

W Rozdziale 3 opisaliśmy znane ograniczenia na rozmiar $2-$silnych klik (nazywanych silnymi klikami). Najlepsze znane górne ograniczeń zostało udowodnione w 2019 r. przez Farona i Postle'a i wynosi $\frac{4}{3}\Delta^2$ (Twierdzenie 3.6). Dla $t > 2$ pierwszym znanym górnym ograniczeniem na c_t jest udowodnione przez nas $1,75$.

Twierdzenie 4.4 (M. Dębski, M. Ś-N., 2019 [22])**.** *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Dla każdego $t \geq 2$ rozmiar $t-$silnej kliki w G wynosi co najwyżej $1,75\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$.*

Dowód Twierdzenia 4.4 przedstawimy w sekcji 4.2.2.

Dla grafów dwudzielnych udowodniliśmy ograniczenie na rozmiar $t-$silnych klik rzędu Δ^t. Grafy dwudzielne, świadczące o tym, że $b_3, b_4, b_6 \geq 1$, są $t-$silnymi klikami, zatem $c_3, c_4, c_6 \geq 1$. Nasze ograniczenie jest więc asymptotycznie optymalne dla $t = 3, 4, 6$.

Twierdzenie 4.5 (M. Dębski, M. Ś-N., 2019 [22]). *Niech G będzie grafem dwudzielnym o maksymalnym stopniu Δ. Dla każdego $t \geq 2$ rozmiar $t-$silnej kliki w G wynosi co najwyżej $\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$.*

Dowód Twierdzenia 4.5 przedstawimy w sekcji 4.2.1.

Twierdzenia 4.4 i 4.5 przedstawiają ograniczenia na rozmiar $t-$silnych klik w postaci iloczynu pewnej stałej i Δ^t. Możliwe jest jednak, że prawdziwe ograniczenie jest dużo niższe, tzn. że c_t dąży do 0 wraz z t dążącym do nieskończoności. Takie ograniczenia udowodniliśmy dla grafów bez szponów i ogólniej dla grafów bez $K_{1,r}$ (sekcja 4.2.3).

4.1.3 Powiązanie z problemem stopnia-średnicy

Szukanie maksymalnego rozmiaru $t-$silnych klik w grafach jest powiązane ze znanym problemem **stopnia–średnicy** (ang. degree-diameter problem). W problemie stopnia–średnicy szukamy maksymalnej możliwej liczby wierzchołków w grafie o maksymalnym stopniu Δ i średnicy D (przypomnijmy, że średnica grafu to największa możliwa odległość pomiędzy dwoma wierzchołkami w grafie); liczbę tę oznaczamy przez $n_{\Delta,D}$. Powiązanie pomiędzy problemem szukania maksymalnego rozmiaru $t-$silnych klik w grafach i problemem stopnia–średnicy przedstawia poniższa obserwacja (patrz [22]).

Obserwacja 4.6. *Dla dowolnych $t \geq 2$ i Δ istnieje graf o maksymalnym stopniu Δ i $t-$silnej klice zawierającej co najmniej $\frac{1}{2}\Delta n_{\Delta,t-1} - O(\Delta^2)$ krawędzi.*

Dowód Obserwacji 4.6. Weźmy graf G o maksymalnym stopniu Δ, średnicy $t-1$ i największej możliwej liczbie wierzchołków, czyli $n_{\Delta,t-1}$. Następnie dodajmy do niego największą możliwą liczbę krawędzi, tak aby prawie każdy wierzchołek miał stopień Δ. Zauważmy, że co najwyżej Δ wierzchołków ma stopień mniejszy od Δ (gdyby było ich więcej moglibyśmy dodać kolejną krawędź). Graf G ma więc teraz co najmniej $\frac{1}{2}\Delta n_{\Delta,t-1} - O(\Delta^2)$ krawędzi. Ponieważ średnica G wynosi $t-1$, to każde dwie krawędzie są w odległości co najwyżej t; zatem wszystkie krawędzie grafu G tworzą $t-$silną klikę, co kończy dowód. □

W ogólnym przypadku niewiele wiadomo o wartości $n_{\Delta,D}$. Oczywiście $n_{\Delta,D} \leq (1 + o(1))\Delta^D$, ale wydaje się, że poprawienie tego ograniczenia jest niezwykle trudne (patrz

[38]). Najlepsze znane dolne ograniczenie na $n_{\Delta,D}$ to wynik Canale'a i Gómeza; udowodnili oni, że dla wystarczająco dużej średnicy D i nieskończenie wielu wartości Δ zachodzi $n_{\Delta,D} \geq \left(\frac{\Delta}{(1,59)}\right)^D$.

Twierdzenie 4.7 (E. A. Canale, J. Gómez, 2005 [35]). *Istnieją stałe D_0 i $\alpha < 1,59$, takie że dla każdego $D \geq D_0$ i nieskończenie wielu wartości Δ istnieje graf o maksymalnym stopniu Δ, średnicy D i $\left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)^D$ wierzchołkach.*

Powiązanie problemu szukania maksymalnego rozmiaru $t-$silnych klik w grafach i problemu stopnia–średnicy pozwoliło nam na podanie lepszego dolnego ograniczenia na c_t i b_t. Kang i Manggala udowodnili, że b_t jest równe co najmniej $\frac{1}{2(t-1)^{t-1}}$ (patrz [35]). Poprawiliśmy ten wynik do $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,59}\right)^{t-1}$. Pokazuje to poniższa obserwacja (patrz [22]).

Obserwacja 4.8. *Dla wystarczająco dużego t wartość c_t wynosi co najmniej $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,59}\right)^{t-1}$.*

Dowód Obserwacji 4.8. Z Obserwacji 4.6 wynika, że $c_t \geq \frac{1}{2}\limsup_{\Delta\to\infty}\frac{n_{\Delta,t-1}}{\Delta^{t-1}}$. Z Twierdzenia 4.7 wiemy, że dla wystarczająco dużego D i nieskończenie wielu wartości Δ zachodzi $n_{\Delta,D} \geq \left(\frac{\Delta}{1,59}\right)^D$. Łącząc te oba ograniczenia, dostajemy, że dla wystarczająco dużego t wartość c_t wynosi co najmniej $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,59}\right)^{t-1}$ □

4.2 Rozmiar $t-$silnych klik w grafach o maksymalnym stopniu Δ

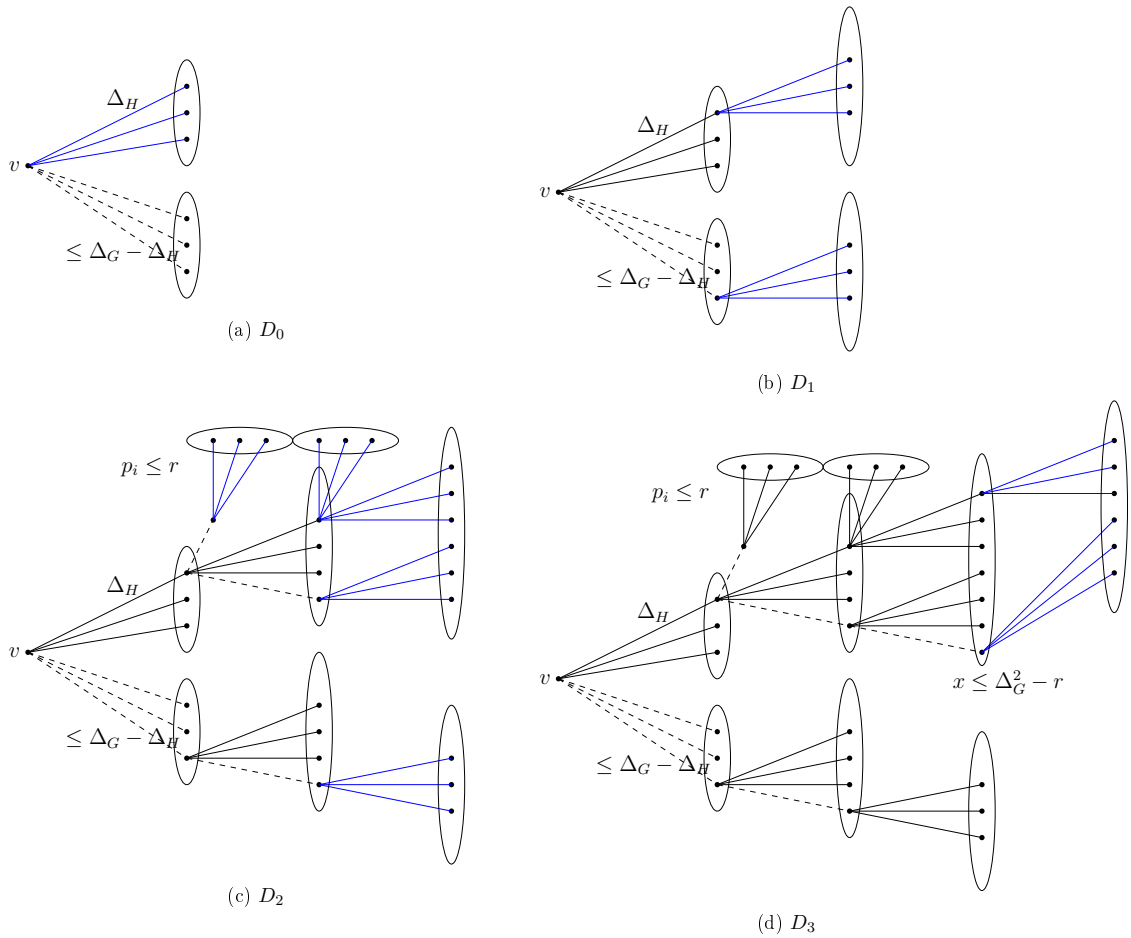
W bieżącej sekcji przedstawimy dowody naszych twierdzeń ograniczających rozmiar silnych klik w grafach o maksymalnym stopniu Δ.

4.2.1 Grafy dwudzielne – dowód Twierdzenia 4.5

Twierdzenie 4.5 (M. Dębski, M. Ś-N., 2019 [22]). *Niech G będzie grafem dwudzielnym o maksymalnym stopniu Δ. Dla każdego $t \geq 2$, rozmiar $t-$silnej kliki w G wynosi co najwyżej $\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$.*

Dowód Twierdzenia 4.5. Niech H będzie podgrafem grafu G, którego krawędzie tworzą $t-$silną klikę w G, tzn. dla każdej pary krawędzi $e, f \in E(H)$ zachodzi $\mathrm{dist_G}(e, f) \leq t$. Pokażemy, że H ma co najwyżej $\Delta_G^t + O\left(\Delta_G^{t-1}\right)$ krawędzi.

Rozważmy wierzchołek $v \in V(H)$ o stopniu Δ_H, pamiętajmy, że $\Delta_H \leq \Delta_G$. Niech D_i będzie podzbiorem krawędzi grafu H, które w grafie G są w odległości i od wierzchołka v, tzn. D_0 jest zbiorem krawędzi incydentnych z v w grafie H, D_1 jest zbiorem krawędzi z $E(H) \setminus D_0$, które sąsiadują w G z co najmniej jedną krawędzią incydentną z v w G, itd. (patrz Rysunek 4.1). Ponieważ wszystkie krawędzie grafu H są w odległości co najwyżej t od v w G, ich liczba wynosi $\sum_{i=0}^{t} |D_i|$.



Rysunek 4.1: Zbiory D_0, D_1, D_2, D_3 dla $t = 3$ (na niebiesko). Linie przerywane oznaczają krawędzie z G, które nie są w H.

Ograniczymy liczbę krawędzi w każdym D_i.

- Mamy co najwyżej Δ_G^i wierzchołków w odległości i od v w G, każdy z nich jest incydentny z co najwyżej Δ_H krawędziami w H. Możemy zatem ograniczyć liczność zbiorów D_i dla $i \in \{0, 1, ..., t-2\}$ przez

$$|D_i| \leq \Delta_G^i \Delta_H.$$

- Zbiór D_{t-1} dzielimy na 3 podzbiory. Niech $P \subseteq D_{t-1}$ będzie zbiorem krawędzi, które są w odległości $t-2$ w G od co najmniej jednej krawędzi incydentnej z v w H i nie są sąsiednie z krawędziami z D_t. Niech p_i, dla $i \in \{1, 2, ..., \Delta_H\}$, będzie liczbą krawędzi z P, które są w odległości $t-2$ od krawędzi vv_i, dla wszystkich $v_i \in N_H(v)$. Niech r będzie wartością maksymalną ze wszystkich p_i, osiąganą dla krawędzi vw. Mamy zatem ograniczenie $|P| \leq r\Delta_H$. Niech $S \subseteq D_{t-1}$ będzie zbiorem krawędzi, które są w odległości $t-2$ od co najmniej jednej krawędzi incydentnej z v w H i są sąsiednie z co najmniej jedną krawędzią z D_t, niech $s := |S|$. Niech $U \subseteq D_{t-1}$ będzie zbiorem pozostałych krawędzi z D_{t-1}, tzn. krawędzi w odległości $t-1$ od v, które są w odległości $t-1$ od wszystkich krawędzi incydentnych z v w H. W G jest co najwyżej $(\Delta_G - \Delta_H)\Delta_G^{t-2}$ wierzchołków w odległości $t-1$ od v, które są w odległości $t-1$ od wszystkich krawędzi incydentnych z v w H. Każdy taki wierzchołek jest incydentny z co najwyżej Δ_H krawędziami z H. Zatem $|U| \leq (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_G^{t-2}\Delta_H$. Stąd

$$|D_{t-1}| \leq r\Delta_H + s + (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_G^{t-2}\Delta_H.$$

- Z definicji wynika, że w zbiorze D_t mamy jedynie krawędzie, które są w odległości $t-1$ od co najmniej jednej krawędzi incydentnej z v w H. Do ograniczenia liczby krawędzi z D_t użyjemy naszej wiedzy o zbiorach S i P. Niech X będzie zbiorem wierzchołków, które są w odległości t od v i są incydentne z co najmniej jedną krawędzią z D_t, niech $x := |X|$. Zauważmy, że każda krawędź z S ma dokładnie jeden koniec w X i także każda krawędź z D_t ma dokładnie jeden koniec w X (ponieważ G jest dwudzielny). Wierzchołki z X są incydentne w sumie z co najwyżej $x\Delta_H$ krawędziami z H, zatem w D_t jest co najwyżej $x\Delta_H - s$ krawędzi. Popatrzmy teraz na wierzchołki z X. Każdy wierzchołek z X jest połączony ścieżką zawierającą

$t-1$ krawędzi z każdym wierzchołkiem z $N_H(v)$, w szczególności z w. Ścieżek zawierających $t-1$ krawędzi i łączących X z w może być co najwyżej Δ_G^{t-1}. Wiemy jednak, że r krawędzi połączonych z w ścieżkami zawierającymi $t-1$ krawędzi policzyliśmy już w P. Zatem ścieżek o $t-1$ krawędziach, które łączą w z pewnym wierzchołkiem z X jest co najwyżej $\Delta_G^{t-1} - r$, stąd $x \leq \Delta_G^{t-1} - r$. Tym samym

$$|D_t| \leq \Delta_G^{t-1}\Delta_H - r\Delta_H - s.$$

Na podstawie powyższych oszacowań otrzymujemy ograniczenie na liczbę krawędzi grafu H:

$$|E(H)| \leq \sum_{i=0}^{t-2} \Delta_G^i \Delta_H + r\Delta_H + s + (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_G^{t-2}\Delta_H + \Delta_G^{t-1}\Delta_H - r\Delta_H - s =$$
$$\sum_{i=0}^{t-2} \Delta_G^i \Delta_H + (\Delta_G - \Delta_H)\Delta_G^{t-2}\Delta_H + \Delta_G^{t-1}\Delta_H \leq \Delta_G^t + O\left(\Delta_G^{t-1}\right),$$

co kończy dowód. □

4.2.2 Przypadek ogólny – dowód Twierdzenia 4.4

Twierdzenie 4.4 (M. Dębski, M. Ś-N., 2019 [22]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ. Dla każdego $t \geq 2$, rozmiar $t-$silnej kliki w G wynosi co najwyżej $1,75\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$.*

Dowód Twierdzenia 4.4. Niech H będzie podgrafem grafu G, takim że dla każdych $e, f \in E(H)$ zachodzi $\mathrm{dist_G}(e, f) \leq t$. Pokażemy, że H ma co najwyżej $1,75\Delta_G^t + O\left(\Delta_G^{t-1}\right)$ krawędzi.

Jeżeli $\Delta_H \leq 0,25\Delta_G$ proste szacowanie dowodzi twierdzenie (w H jest co najwyżej $2(\Delta_G - 1)^{t-1}\Delta_H + 1 < 1,75\Delta_G^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$ krawędzi). Od teraz zakładamy, że $\Delta_H \geq 0,25\Delta_G$.

Rozważmy wierzchołek $v \in V(H)$ o stopniu Δ_H; pamiętajmy, że $\Delta_H \leq \Delta_G$. Dzielimy krawędzie grafu H na $t+1$ zbiorów: D_0, D_1, ... , D_t. D_i jest zbiorem krawędzi grafu H, które w grafie G są w odległości i od wierzchołka v. Wszystkie krawędzie grafu H są w odległości co najwyżej t od v w G, zatem H ma $\sum_{i=0}^{t} |D_i|$ krawędzi.

Ponownie używamy ograniczenia:

$$|D_i| \leq \Delta_G^i \Delta_H, \tag{4.1}$$

dla $i \in \{0, 1, ..., t-2\}$.

Przyjrzyjmy się bliżej zbiorom D_{t-1} i D_t.

W grafie G jest co najwyżej Δ_G^{t-1} wierzchołków, które są w odległości $t-1$ od v i są sąsiednie z co najmniej jednym wierzchołkiem w odległości t od v. Każdy z nich może być incydentny z co najwyżej Δ_G krawędziami, zatem

$$|D_{t-1}| \leq \Delta_G^t. \tag{4.2}$$

Niech X będzie zbiorem wierzchołków, które są w grafie G w odległości t od v i są incydentne z co najmniej jedną krawędzią z D_t, niech $x := |X|$. Zauważmy, że w zbiorze D_t mogą występować krawędzie o obu końcach w X, co jest znaczącą różnicą w porównaniu do poprzedniego dowodu dla grafów dwudzielnych. Niech $Z \subseteq X$ będzie zbiorem wierzchołków incydentnych z co najmniej jedną krawędzią z D_t o dokładnie jednym końcu w X, niech $z := |Z|$. Niech R będzie zbiorem krawędzi z D_t, które nie są incydentne z żadnym wierzchołkiem z Z, niech $r := |R|$ (patrz Rysunek 4.2). Niech n_z będzie liczbą krawędzi grafu G, które są w odległości $t-1$ od v i są incydentne z wierzchołkiem z Z. Policzmy ile krawędzi należy do D_t. Z wierzchołkami z Z może być incydentnych co najwyżej $z\Delta_G$ krawędzi, ale wiemy, że n_z z nich jest w odległości $t-1$ od v. Zatem w D_t mamy co najwyżej $z\Delta_G - n_z$ krawędzi o dokładnie jednym końcu w Z i r krawędzi o obu końcach w Z:

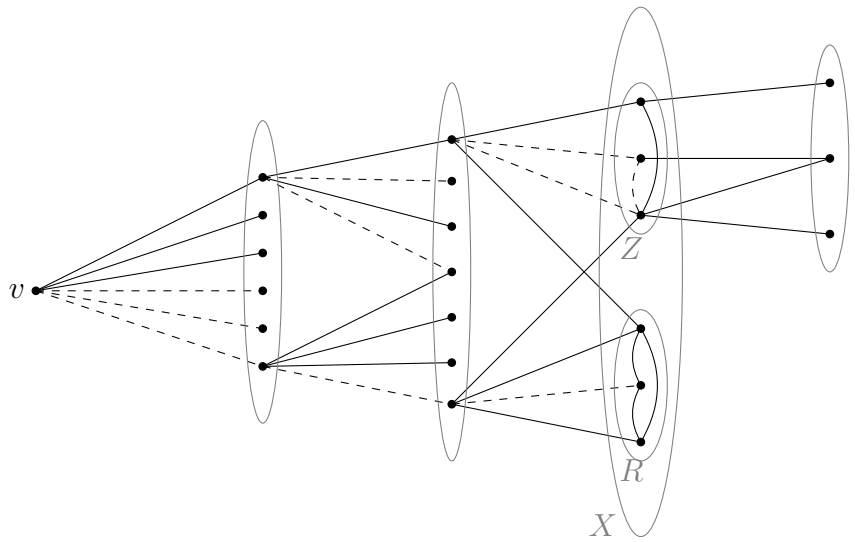
$$|D_t| \leq r + z\Delta_G - n_z. \tag{4.3}$$

Z (4.1) i (4.3) otrzymujemy:

$$|E(H)| \leq \sum_{i=0}^{t-2} |D_i| + |D_{t-1}| + |D_t| \leq \sum_{i=0}^{t-2} \Delta_G^i \Delta_H + |D_{t-1}| + r + z\Delta_G - n_z,$$

jako, że $\sum_{i=0}^{t-2} \Delta_G^i \Delta_H \leq O(\Delta_G^{t-1})$, zachodzi

$$|E(H)| \leq |D_{t-1}| + r + z\Delta_G - n_z + O(\Delta_G^{t-1}). \tag{4.4}$$



Rysunek 4.2: Zbiory X, Z i R dla $t = 3$.

Z definicji zbioru Z wiemy, że każdy wierzchołek z Z jest incydentny z co najmniej jedną krawędzią grafu H o odległości t od v, której drugi koniec nie jest w Z. Zatem każdy wierzchołek z Z jest połączony z każdym wierzchołkiem z $N_H(v)$ ścieżką zawierającą $t-1$ krawędzi. $Z-$**ścieżką** będziemy nazywać ścieżkę łączącą wierzchołek z $N_H(v)$ z wierzchołkiem z Z, która zawiera dokładnie $t-1$ krawędzi. Ustalmy dowolną kolejność wierzchołków z $N_H(v)$. Powiemy, że $Z-$ścieżka $u_1u_2\ldots u_{t-1}u_t$, która zaczyna się w $i-$tym wierzchołku z $N_H(v)$ jest **zmarnowana**, jeżeli, dla pewnego $j < i$, istnieje $Z-$ścieżka $w_1w_2\ldots w_{t-1}w_t$ zaczynającą w $j-$tym wierzchołku z $N_H(v)$, taka że istnieje wierzchołek spoza Z, od którego obie ścieżki są takie same, tj. $\exists_{k\in\{1,2,\ldots,t-1\}}\forall_{l\geq k} u_l = w_l$. Gdyby w G nie było żadnych zmarnowanych $Z-$ścieżek, wówczas każdy wierzchołek z Z byłby incydentny z co najmniej Δ_H krawędziami o odległości $t-1$ od v; każda z tych krawędzi pochodziłaby od $Z-$ścieżki zaczynającej się w innym sąsiedzie v z H. Mielibyśmy wtedy co najmniej $z\Delta_H$ krawędzi, które są w odległości $t-1$ od v i są incydentne z przynajmniej jednym wierzchołkiem z Z. Wiemy jednak, że liczba takich krawędzi wynosi n_z. Zatem liczba zmarnowanych $Z-$ścieżek wynosi co najmniej $z\Delta_H - n_z$. Użyjemy tej informacji do poprawienia ograniczenia na $|D_{t-1}|$. Zauważmy, że ograniczenie (4.2) wynika z policzenia wszystkich możliwych ścieżek o $t-1$ krawędziach od sąsiadów v do wierzchołków w odległości t od v. D_{t-1} to zbiór ostatnich krawędzi tych ścieżek. W (4.2) policzyliśmy ostatnie

krawędzie zarówno $Z-$ścieżek, które nie są zmarnowane jak i $Z-$ścieżek zmarnowanych. Wystarczy, jak policzymy ostatnie krawędzie $Z-$ścieżek, które nie są zmarnowane. Jest ich co najwyżej

$$|D_{t-1}| \leq \Delta_G^t - (z\Delta_H - n_z). \tag{4.5}$$

Z (4.4) i (4.5) otrzymujemy:

$$\begin{gathered} |E(H)| \leq \Delta_G^t - (z\Delta_H - n_z) + r + z\Delta_G - n_z + O(\Delta_G^{t-1}) = \\ \Delta_G^t + z(\Delta_G - \Delta_H) + r + O(\Delta_G^{t-1}). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Rozważymy teraz dwa przypadki, zależne od rozmiaru R.

Przypadek 1: $r < 0,75(\Delta_G^t - z\Delta_G)$.

Z (4.6) otrzymujemy:

$$\begin{gathered} |E(H)| \leq \Delta_G^t + z(\Delta_G - \Delta_H) + 0,75(\Delta_G^t - z\Delta_G) + O(\Delta_G^{t-1}) = \\ 1,75\Delta_G^t + z(0,25\Delta_G - \Delta_H) + O(\Delta_G^{t-1}). \end{gathered}$$

Założyliśmy, że $\Delta_H \geq 0,25\Delta_G$, zatem

$$|E(H)| \leq 1,75\Delta_G^t + O\left(\Delta_G^{t-1}\right),$$

co mieliśmy udowodnić.

Przypadek 2: $r \geq 0,75(\Delta_G^t - z\Delta_G)$.

Przyjrzyjmy się zbiorowi R. Każda krawędź z R ma oba końce w X i jest w odległości $t-1$ od każdego wierzchołka z $N_H(v)$. Wobec tego dla każdej krawędzi e z R i każdego wierzchołka v_i z $N_H(v)$, dla $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$, co najmniej jeden koniec krawędzi e jest w odległości $t-1$ od v_i. Zatem, dla każdego v_i, wierzchołki z $G[R]$ w odległości $t-1$ od v_i tworzą pokrycie wierzchołkowe grafu $G[R]$.

Niech C_i, dla $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$, będzie pokryciem wierzchołkowym grafu $G[R]$ odpowiadającym wierzchołkowi v_i, niech $c_i := |C_i|$. Zauważmy, że w odległości $t-1$ od v_i może być co najwyżej Δ_G^{t-1} wierzchołków, zatem dla każdego $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$ zachodzi $c_i + z \leq \Delta_G^{t-1}$. Stąd

$$c_i \leq \Delta_G^{t-1} - z. \tag{4.7}$$

Dla każdego wierzchołka u z $G[R]$ przez $\mathrm{cov}(u)$ oznaczmy liczbę pokryć wierzchołkowych (niekoniecznie różnych) odpowiadających sąsiadom wierzchołka v w grafie H, które zawierają u, tzn. $\mathrm{cov}(u) = |\{i : u \in C_i, i \in \{1, ..., \Delta_H\}\}|$.

Niech a_i, dla $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$, będzie sumą wszystkich $\mathrm{cov}(u)$ po $u \in C_i$, tzn. $a_i = \sum_{u \in C_i} \mathrm{cov}(u)$.

Niech b_i, dla $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$, będzie liczbą krawędzi z G, które są w odległości $t-1$ od v i są incydentne z co najmniej jednym wierzchołkiem z C_i.

Możemy ograniczyć rozmiar zbioru R używając informacji o rozmiarze dowolnego pokrycia wierzchołkowego i b_i:

$$r \leq c_i \Delta_G - b_i,$$

i z (4.7):

$$r \leq \Delta_G^t - z\Delta_G - b_i, \tag{4.8}$$

dla każdego $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$.

Przeprowadźmy teraz podobne rozumowanie, jak w przypadku zbioru Z. $R-$**ścieżką** będziemy nazywać ścieżkę łączącą wierzchołek z $N_H(v)$ z wierzchołkiem z R, która zawiera dokładnie $t-1$ krawędzi. Powiemy, że $R-$ścieżka $u_1u_2 \ldots u_{t-1}u_t$, która zaczyna się w $i-$tym wierzchołku z $N_H(v)$ jest **zmarnowana**, jeżeli, dla pewnego $j < i$, istnieje $R-$ścieżka $w_1w_2 \ldots w_{t-1}w_t$ zaczynającą w $j-$tym wierzchołku z $N_H(v)$, taka że istnieje wierzchołek spoza R, od którego obie ścieżki są takie same, tj. $\exists_{k \in \{1,2,\ldots,t-1\}} \forall_{l \geq k} u_l = w_l$. Rozważmy jedno pokrycie wierzchołkowe grafu $G[R]$ – C_i. Gdyby w G nie było żadnych zmarnowanych $R-$ścieżek, wówczas dokładnie a_i $R-$ścieżek kończyłoby się w wierzchołkach z C_i. Ale wiemy, że liczba krawędzi w odległości $t-1$ od v, które są incydentne z co najmniej jednym wierzchołkiem z C_i wynosi b_i. Zatem liczba zmarnowanych $R-$ścieżek wynosi co najmniej $a_i - b_i$. Użyjemy tej informacji do poprawienia ograniczenia na $|D_{t-1}|$. Podobnie jak poprzednio, w D_{t-1} zawarte są przedostanie krawędzie $R-$ścieżek. W (4.5) policzyliśmy ostatnie krawędzie zarówno $R-$ścieżek, które nie są zmarnowane jak i $R-$ścieżek zmarnowanych. Wystarczy, jak policzymy ostatnie krawędzie $R-$ścieżek, które nie są zmarnowane. Zatem

$$|D_{t-1}| \leq \Delta_G^t - (z\Delta_H - n_z) - (a_i - b_i), \tag{4.9}$$

dla każdego $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$.

Z (4.4), (4.8) i (4.9) otrzymujemy:

$$|E(H)| \leq \Delta_G^t - (z\Delta_H - n_z) - (a_i - b_i) + \Delta_G^t - z\Delta_G - b_i + z\Delta_G - n_z + O(\Delta_G^{t-1}) = 2\Delta_G^t - z\Delta_H - a_i + O(\Delta_G^{t-1}), \tag{4.10}$$

dla każdego $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$.

Ograniczymy a_i używając następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 4.9. *Dla* $r \geq 0,75(\Delta_G^t - z\Delta_G)$ *istnieje* $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$, *takie że* $a_i \geq 0,25(\Delta_G^t - z\Delta_G)$.

Dowód Stwierdzenia 4.9. Niech int_{min} będzie rozmiarem najmniejszego przecięcia jakichkolwiek dwóch pokryć wierzchołkowych C_i i C_j. Rozważmy dwa przypadki zależne od wartości int_{min}.

- $int_{min} \geq 0,25\frac{(\Delta_G^t - z\Delta_G)}{\Delta_H}$

  Zauważmy, że $a_i = \sum_{j \neq i} |C_i \cap C_j| + c_i$. Wiemy, że int_{min} jest rozmiarem najmniejszego przecięcia jakichkolwiek C_i i C_j, więc

  $$a_i \geq int_{min}(\Delta_H - 1) + c_i \geq int_{min}\Delta_H \geq 0,25(\Delta_G^t - z\Delta_G),$$

  dla każdego $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$.

- $int_{min} \leq 0,25\frac{(\Delta_G^t - z\Delta_G)}{\Delta_H}$

  Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że int_{min} jest rozmiarem przecięcia pokryć C_1 i C_2. Policzymy ile wierzchołków z każdego C_j, dla $j \geq 3$, zawartych jest w $C_1 \cup C_2$. Zauważmy, że oba C_1 i C_2 są pokryciami wierzchołkowymi każdej krawędzi z R. Wobec tego w R występują wyłącznie dwa typy krawędzi: krawędzie z co najmniej jednym końcem w $|C_1 \cap C_2|$ bądź krawędzie z jednym końcem w $C_1 \setminus C_2$,

a drugim końcem w $C_2 \setminus C_1$. Krawędzi o jednym końcu w $C_1 \setminus C_2$, a drugim w $C_2 \setminus C_1$ jest co najmniej $r - int_{min}\Delta_H$. Są one oczywiście pokryte przez wszystkie C_j, dla $j \geq 3$. Zatem w C_j, dla $j \geq 3$, zawartych jest co najmniej $\frac{r - int_{min}\Delta_H}{\Delta_H}$ wierzchołków z $C_1 \cup C_2$. Stąd

$$a_1 + a_2 \geq \frac{r - int_{min}\Delta_H}{\Delta_H}(\Delta_H - 2) + c_1 + c_2.$$

Każde c_i, dla $i \in \{1, ..., \Delta_H\}$, jest nie mniejsze od $\frac{r}{\Delta_H}$. Co nam daje

$$a_1 + a_2 \geq r - int_{min}\Delta_H.$$

Z założenia, że $r \geq 0,75(\Delta_G^t - z\Delta_G)$ i $int_{min} \leq 0,25\frac{(\Delta_G^t - z\Delta_G)}{\Delta_H}$ otrzymujemy

$$a_1 + a_2 \geq 0,75(\Delta_G^t - z\Delta_G) - 0,25\frac{(\Delta_G^t - z\Delta_G)}{\Delta_H}\Delta_H \geq 0,5(\Delta_G^t - z\Delta_G).$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że a_1 jest większe od a_2, więc

$$a_1 \geq \frac{0,5(\Delta_G^t - z\Delta_G)}{2} = 0,25(\Delta_G^t - z\Delta_G),$$

co kończy dowód.

□

Używając Stwierdzenia 4.9 do (4.10) otrzymujemy:

$$\begin{gathered}|E(H)| \leq 2\Delta_G^t - z\Delta_H - 0,25(\Delta_G^t - z\Delta_G) + O(\Delta_G^{t-1}) \leq \\ 1,75\Delta_G^t + z(0,25\Delta_G - \Delta_H) + O(\Delta_G^{t-1}) \leq \\ 1,75\Delta_G^t + O\left(\Delta_G^{t-1}\right),\end{gathered}$$

zatem dowód twierdzenia jest kompletny.

□

4.2.3 Grafy bez $K_{1,r}$

Z M. Dębskim udowodniliśmy ograniczenie na rozmiar $t-$silnych klik w grafach bez $K_{1,r}$ o maksymalnym stopniu Δ, w którym współczynnik przy Δ^t dąży do 0 wraz z t dążącym do nieskończoności.

Twierdzenie 4.10 (M. Dębski, M. Ś-N., 2019 [22]). *Niech G będzie grafem bez $K_{1,r}$ o maksymalnym stopniu Δ. Dla każdego $t \geq 2$, rozmiar $t-$silnej kliki w G wynosi co najwyżej $2\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{t-2}\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$.*

W dowodzie Twierdzenia 4.10 korzystamy z następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 4.11 (P. Dankelmann, T. Vetrík, 2014 [17]). *Niech $r \geq 3$, G będzie grafem bez $K_{1,r}$ o maksymalnym stopniu Δ, niech $v \in V(G)$. Wówczas , dla $i \geq 1$, liczba wierzchołków w odległości dokładnie i od v wynosi co najwyżej $\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{i-1}\Delta^i$.* [1]

Dowód Twierdzenia 4.10. Niech uv będzie krawędzią grafu G. Policzymy ile krawędzi z G jest w odległości co najwyżej t od uv – zauważmy, że ta liczba jest górnym ograniczeniem na rozmiar jakiejkolwiek $t-$silnej kliki w G, która zawiera krawędź uv.

Niech $V_i(u)$ i $V_i(v)$ oznaczają podzbiory wierzchołków grafu G, które są w odległości i odpowiednio od u i v, tzn. $V_0(v) = \{v\}$, $V_1(v)$ jest zbiorem wierzchołków sąsiednich z v, $V_{i+1}(v) = N\left(V_i(v)\right) \setminus V_{i-1}(v)$.

Liczba krawędzi w odległości dokładnie $i \in \{1, ..., t\}$ od uv wynosi co najwyżej $(|V_{i-1}(u)| + |V_{i-1}(v)|)\Delta$. Zatem wszystkich krawędzi w odległości co najwyżej t od uv jest nie więcej niż

$$1 + (|V_0(u)| + |(V_0(v)|)\Delta + (|V_1(u)| + |(V_1(v)|)\Delta + \ldots + (|V_{t-1}(u)| + |(V_{t-1}(v)|)\Delta \leq \\ O(\Delta^{t-1}) + (|V_{t-1}(u)| + |(V_{t-1}(v)|)\Delta. \tag{4.11}$$

Korzystając ze Stwierdzenia 4.11 otrzymujemy, że liczba krawędzi w $t-$silnej klice wynosi co najwyżej

$$O(\Delta^{t-1}) + 2\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{t-2}\Delta^t,$$

[1] Stwierdzenie zostało sformułowane w [17] w dowodzie Twierdzenia 1. W cytowanej pracy parametr p jest równy naszemu r, Δ oznacza to samo, a V_i oznacza liczbę wierzchołków w odległości dokładnie i od ustalonego wierzchołka v.

co kończy dowód.

□

4.2.4 Grafy o dużej talii

Dla grafów o dużej talii (co najmniej $2t + 2x + 1$, dla $t \geq 2$ i $0 \leq x \leq \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1$) i maksymalnym stopniu Δ udowodniliśmy ograniczenie na rozmiar $t-$silnych klik rzędu Δ^{t-x-1}.

Twierdzenie 4.12 (M. Dębski, M. Ś-N., 2019 [22]). *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ i talii co najmniej $2t + 2x + 1$, dla $t \geq 2$ i $0 \leq x \leq \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1$. Rozmiar $t-$silnej kliki w G wynosi co najwyżej $2^{t+2}\Delta^{t-x-1}$.*

Dowód Twierdzenia 4.12. Niech $F \subseteq E(G)$ będzie zbiorem krawędzi $t-$silnej kliki w G. Weźmy dowolny wierzchołek v z $G[F]$, niech $F' \subseteq F$ będzie zbiorem krawędzi z F w odległości co najwyżej $t-1$ od v. Zauważmy, że dla dowolnej krawędzi $e \in F$ liczba krawędzi w odległości co najwyżej t od e jest ograniczona przez sumę liczb krawędzi w odległości co najwyżej $t-1$ od obu końców e, zatem liczba krawędzi w F jest co najwyżej 2 razy większa od $\max_{v \in V(G[F])} |F'|$. Pokażemy, że liczba krawędzi w F' nie przekracza $2^{t+1}\Delta^{t-x-1}$.

Niech f będzie krawędzią z F' o największej odległości od v. Zauważmy, że rozmiar F' jest ograniczony przez liczbę spacerów $v_1v_2 \ldots v_{t+2}$ zaczynających się w f i kończących w F' (tzn. $\{v_1, v_2\} = f$ i $\{v_{t+1}, v_{t+2} \in F'$). Powiemy, że $2-$wierzchołkowy podspacer uw jest **krokiem zstępującym** od u do w, jeżeli $\mathrm{dist}(v, u) \leq t + x$ i $\mathrm{dist}(v, w) < \mathrm{dist}(v, u)$. Przeanalizujemy kroki zstępujące, w celu ograniczenia liczby wszystkich możliwych spacerów. Wykorzystamy dwa poniższe stwierdzenia.

Stwierdzenie 4.13. *Dla każdego wierzchołka u, istnieje co najwyżej jeden krok zstępujący zaczynający się od u.*

Dowód Stwierdzenia 4.13. Zauważmy, że gdyby istniały dwa kroki zstępujące uw_1 i uw_2, wówczas zamykałyby one cykl razem ze ścieżkami z w_1 i w_2 do v. Z definicji kroku zstępującego wiemy, że $\mathrm{dist}(v, u) \leq t + x$, zatem cykl miałby długość co najwyżej $2t + 2x$, co jest sprzeczne z założeniem o wielkości talii grafu G. □

Stwierdzenie 4.14. *Każdy spacer $v_1v_2\dots v_{t+2}$, taki że $\{v_1, v_2\} = f$ i $\{v_{t+1}, v_{t+2}\} \in F'$, zawiera co najmniej $x+1$ kroków zstępujących różnych od v_1v_2 (kroki zstępujące $v_{i-1}v_i$ i $v_{j-1}v_j$, dla $i \neq j$, liczymy osobno, nawet jeżeli używają tych samych wierzchołków).*

Dowód Stwierdzenia 4.14. Rozważmy przypadek, w którym istnieje spacer zawierający wierzchołek w odległości dokładnie $t+x$ od v. Któryś z wierzchołków v_{t+1} lub v_{t+2} jest w odległości $t-1$ od v. Zatem istnieje co najmniej $x+1$ kroków zstępujących od wierzchołka, który jest w odległości $t+x$ od v, do wierzchołka v_{t+1} lub v_{t+2} – stwierdzenie jest prawdziwe.

W pozostałych przypadkach dla wszystkich i zachodzi $\mathrm{dist}(v, v_i) < t+x$, a zatem $\mathrm{dist}(v, v_i) \neq \mathrm{dist}(v, v_{i+1})$ (inaczej w G występowałby cykl o długości mniejszej od $2t+2x+1$ i warunek o wielkości talii G nie byłby spełniony). Niech d będzie liczbą kroków zstępujących ze spaceru $v_1v_2\dots v_{t+2}$ różnych od v_1v_2, niech a będzie liczbą kroków z tego spaceru, które nie są zstępujące, różnych od v_1v_2. Zauważmy, że odległość od v do v_{t+2} równa jest odległości od v do v_2 powiększonej o liczbę kroków, które nie są zstępujące (kroki do wierzchołków, które są dalej od v niż ich poprzednik ze spaceru) i pomniejszonej o liczbę kroków zstępujących (kroki do wierzchołków, które są bliżej od v niż ich poprzednik ze spaceru), tzn. $\mathrm{dist}(v, v_{t+2}) = \mathrm{dist}(v, v_2) + a - d$. Przypomnijmy, że f jest krawędzią z F' o największej odległości od v, zatem $\mathrm{dist}(v, v_{t+2}) \leq \mathrm{dist}(v, v_2) + 1$. Jako, że $a + d = t$, otrzymujemy

$$\mathrm{dist}(v, v_2) + t - d - d \leq \mathrm{dist}(v, v_2) + 1,$$

tak więc

$$d \geq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor,$$

co, z założenia na x, wynosi co najmniej $x+1$. Dowód stwierdzenia jest więc kompletny.

□

Możemy już policzyć liczbę wszystkich możliwych spacerów $v_1v_2\dots v_{t+2}$. Ze Stwierdzenia 4.14 wiemy, że każdy spacer zawiera co najmniej $x+1$ kroków zstępujących różnych od v_1v_2. Jest $\binom{t}{x+1}$ możliwości wyboru indeksów występowania ostatnich $x+1$ takich kroków. Jako, że $\{v_1, v_2\} = f$, mamy 2 możliwości dla v_1v_2. Dla $i > 2$, po ustaleniu

$v_1v_2, \dots v_{i-1}$, możemy mieć dwie sytuacje. Jeżeli i jest jednym z wybranych indeksów kroków zstępujących, ze Stwierdzenia 4.13 wiemy, że mamy tylko jedną możliwość wyboru v_i. Jeżeli i nie jest jednym z wybranych indeksów kroków zstępujących, mamy co najwyżej Δ możliwości dla v_i. Pierwsza sytuacja pojawi się $x+1$ razy, a druga $t-x-1$ razy. Mamy zatem co najwyżej $2\binom{t}{x+1}\Delta^{t-x-1}$ możliwości utworzenia spaceru $v_1v_2\dots v_{t+2}$. Jeżeli ograniczymy współczynnik dwumianowy przez 2^t, otrzymamy $|F'| \leq 2^{t+1}\Delta^{t-x-1}$. Tak, jak wspominaliśmy, rozmiar F jest co najwyżej 2 razy większy od maksymalnego rozmiaru F', co kończy dowód twierdzenia. $\square$

4.3 Kierunek dalszych badań

W Twierdzeniu 4.4 udowodniliśmy, że dla każdego $t \geq 2$ rozmiar $t-$silnej kliki w grafach o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $1,75\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$. Ograniczenie to prawdopodobnie nie jest osiągalne. Jedyne znane dolne ograniczenie na c_t zbiega do 0 przy t dążącym do nieskończoności. Przypomnijmy jednak, że $c_t \geq \frac{1}{2}\limsup_{\Delta\to\infty}\frac{n_{\Delta,t-1}}{\Delta^{t-1}}$, co oznacza, iż dowód, że dla dużych t wartość c_t jest ostro mniejsza od $\frac{1}{2}$, dałby ogromny przełom w problemie stopnia-średnicy.

Podobna uwaga dotyczy grafów bez $K_{1,r}$. Ograniczenie $2\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{t-2}\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$ z Obserwacji 4.10 zapewne nie jest osiągalne, ale poprawienie go dla grafów bez szponów ponad 16−krotnie również dałoby przełom w problemie stopnia-średnicy. Dowodzi tego poniższa obserwacja.

Obserwacja 4.15. *Niech c będzie taką stałą, że dla wszystkich wystarczająco dużych Δ i t, każda $t-$silna klika w grafie bez $K_{1,3}$ o maksymalnym stopniu Δ ma mniej niż $c\frac{1}{2^t}\Delta^t$ krawędzi. Wtedy, dla wszystkich wystarczająco dużych Δ i t, $n_{\Delta,t} < 2c\Delta^t + 3c\Delta^{t-1} + \Delta$.*

Dowód Obserwacji 4.15. Wystarczy pokazać, że jeżeli istnieje graf G o maksymalnym stopniu Δ, średnicy t i co najmniej $2c\Delta^t + 3c\Delta^{t-1} + \Delta$ wierzchołkach, to istnieje wówczas graf bez $K_{1,3}$ H o maksymalnym stopniu Δ', który zawiera $t-$silną klikę o rozmiarze $c\frac{1}{2^{t'}}\Delta'^{t'}$, dla $\Delta' = 2\Delta$ i $t' = t+2$. Niech G będzie takim grafem. Niech G' będzie maksymalnym nadgrafem G o maksymalnym stopniu Δ i zbiorze wierzchołków $V(G)$.

Pokażemy, że G' ma co najmniej $2c\Delta^t + 3c\Delta^{t-1}$ wierzchołków o stopniu Δ. Zauważmy, że każde dwa wierzchołki z G' o stopniu mniejszym od Δ są sąsiednie w G'. Gdyby tak nie było, mielibyśmy dwa wierzchołki u_1, $u_2 \in V(G')$ o stopniach co najwyżej $\Delta - 1$, które nie byłyby połączone w G' krawędzią. Wówczas graf $G' \cup u_1u_2$ byłby nadgrafem grafu G o maksymalnym stopniu Δ i zbiorze wierzchołków $V(G)$ – sprzeczność z maksymalnością G'. W G' jest zatem co najwyżej Δ wierzchołków o stopniu mniejszym od Δ (każdy z nich ma stopień co najwyżej $\Delta - 1$, a musi być połączony krawędzią ze wszystkimi pozostałymi). Reszta wierzchołków z G' ma stopień Δ, jest ich co najmniej $2c\Delta^t + 3c\Delta^{t-1}$.

Niech H będzie grafem krawędziowym grafu G'. Grafy krawędziowe są grafami bez $K_{1,3}$. Maksymalny stopień grafu H wynosi co najwyżej $\Delta' = 2\Delta$, a jego średnica co najwyżej $t+1$ (jeżeli dwa wierzchołki z G' są w odległości t, to incydentne z nimi krawędzie są w odległości co najwyżej $t+1$). Oznacza to, że wszystkie krawędzie z H tworzą $(t+2)-$silną klikę. Zauważmy, że każdy wierzchołek o stopniu Δ z G' odpowiada $\binom{\Delta}{2}$ krawędziom z H. Zatem liczba krawędzi w H wynosi co najmniej

$$\left(2c\Delta^t + 3c\Delta^{t-1}\right)\binom{\Delta}{2} = c\Delta^{t+2} + \frac{1}{2}c\Delta^{t+1} - \frac{3}{2}c\Delta^t.$$

Zatem dla $\Delta > 2$ w H jest co najmniej $c\Delta^{t+2} = c\frac{1}{2^{t'}}\Delta'^{t'}$ krawędzi, co kończy dowód obserwacji. $\square$

Kolejny kierunek badań to poprawa ograniczenia na rozmiar $t-$silnych klik w grafach o dużej talii. Chcielibyśmy wiedzieć, jak bliskie optymalnej wartości jest nasze ograniczenie $2^{t+2}\Delta^{t-x-1}$ z Twierdzenia 4.12. Stała 2^{t+2} jest zapewne zawyżona. Oczekujemy jednak, że rząd wielkości Δ^{t-x-1} jest prawidłowy – przykład regularnego drzewa o średnicy $t+1$, z jednym lub dwoma wierzchołkami centralnymi (w zależności od parzystości t), pokazuje poprawność rzędu wielkości dla $x = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1$. Nie wiemy jak wygląda sytuacja dla mniejszych wartości x, na daną chwilę nie jesteśmy w stanie skonstruować grafów z dużą talią i dużą $t-$silną kliką. Myślimy, że konstrukcja rodziny grafów o talii co najmniej $2t + 2x + 1$ i $t-$silnej klice o rozmiarze rzędu Δ^{t-x-1} byłaby bardzo pouczająca, nawet dla $x = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 2$.

Szeroko otwarty pozostaje problem poprawienia ograniczenia na $t-$silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ. Gdyby Hipoteza Reed'a (Hipoteza 1.2) była

prawdziwa, z Twierdzenia 4.4 wynikałoby, że $t-$silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $1,875\Delta^t$. Jako że udowodniona jest ułamkowa wersja tej hipotezy (Twierdzenie 1.3), z naszego twierdzenia wynika, że ułamkowy $t-$silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $1,875\Delta^t$ (ułamkowy $t-$silny indeks chromatyczny grafu G jest równy liczbie chromatycznej grafu $L^t(G)$). Udowodnienie Hipotezy Reed'a wydaje się niezmiernie trudne, dlatego myślimy, że bardziej obiecującą drogą do znalezienia ograniczenia na $t-$silny indeks chromatyczny będzie ograniczenie liczby krawędzi w sąsiedztwie wierzchołków z $L(G)^t$ – analogiczna strategia zadziałała dla $t = 2$.

Przedstawimy jeszcze jeden kierunek badań związany z tym problemem. W naszych twierdzeniach zawsze zakładaliśmy, że maksymalny stopień Δ jest wystarczająco duży. Pomijaliśmy przypadki małych Δ. Jednakże problem ograniczenia $2-$silnego indeksu chromatycznego jest szeroko badany także dla mniejszych Δ. Myślimy, że również znalezienie ograniczenia na $t-$silny indeks chromatyczny grafów o małym maksymalnym stopniu będzie interesujące i wartościowe.

Rozdział 5

Podsumowanie

W niniejszej rozprawie zajmowaliśmy się silnym kolorowaniem krawędzi grafów. Nasze twierdzenia skupiają się wokół trzech tematów: szukania ograniczenia na silny indeks chromatyczny grafów, oszacowania maksymalnego rozmiaru silnych klik w grafach oraz rozważań dotyczących uogólnionego problemu $t-$silnych klik.

Erdős i Nešetřil w 1985 r. postawili hipotezę, według której silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest nie większy od $\frac{5}{4}\Delta^2$ (Hipoteza 2.2). Wiemy, że to ograniczenie, jeżeli tylko jest prawdziwe, jest optymalne – istnieją grafy, które potrzebują $\frac{5}{4}\Delta^2$ kolorów w silnym kolorowaniu krawędzi. W ogólnym przypadku hipoteza Erdősa i Nešetřila pozostaje cały czas otwarta; najlepsze znane ograniczenie na silny indeks chromatyczny o maksymalnym stopniu Δ udowodnili Bonamy, Perrett i Postle w 2018 r., wynosi ono $1,835\Delta^2$ (Twierdzenie 2.7).

Udowodniliśmy prawdziwość hipotezy Erdősa i Nešetřila dla grafów bez szponów o maksymalnym stopniu większym bądź równym 12 (w Twierdzeniu 2.26 pokazujemy, że $\chi'_s(G) \leq 1,125\Delta^2 + \Delta$). Dla ogólnego przypadku grafów bez $K_{1,r}$, gdzie $r \geq 4$, pokazaliśmy ograniczenie ze współczynnikiem przy Δ^2 równym $\left(2 - \frac{1}{r-2}\right)$ (Twierdzenie 2.28); dla $r \leq 8$ nasze ograniczenie jest lepsze niż ogólny wynik Bonamy, Perretta i Postle'a (Twierdzenie 2.7). Grafy przecięć dysków jednostkowych są grafami bez $K_{1,6}$, z Twierdzenia 2.28 wynika zatem, że ich silny indeks chromatyczny jest nie większy od $1,75\Delta^2$. Poprawiliśmy to ograniczenie na $1,625\Delta^2$ (Twierdzenie 2.29). Nasze dowody są konstrukcyjne;

przedstawiamy algorytmy silnie kolorujące krawędzie grafów z opisanych klas. Na daną chwilę nie potrafimy ocenić, czy ograniczenia z naszych twierdzeń są osiągalne. Krawędzie grafów o największym silnym indeksie chromatycznym, które udało nam się skonstruować, można silnie pokolorować na $\frac{9}{16}(\Delta+1)^2$ kolorów w przypadku grafów bez szponów i grafów przecięć dysków jednostkowych; w przypadku grafów bez $K_{1,4}$ na $\frac{3}{4}(\Delta+1)^2$ kolorów. Chcielibyśmy poprawić ograniczenia na silny indeks chromatyczny dla tych klas grafów albo skonstruować grafy, które potrzebują większej liczby kolorów w silnym kolorowaniu krawędzi.

Hipoteza Erdősa i Nešetřila jest prawdziwa dla grafów bezcięciwowych; ograniczenie na silny indeks chromatyczny dla tej klasy grafów jest liniowe ze względu na Δ. Poprawiliśmy to ograniczenie z $7\Delta - 9$ (z [4]) na $4\Delta - 3$ (Twierdzenie 2.20); dowód także jest konstrukcyjny. Przeprowadziliśmy rozważania na temat grafów z liniowym ograniczeniem na silny indeks chromatyczny, pokazaliśmy, że istnieje rodzina grafów o nieograniczonym średnim stopniu wierzchołków, dla których zachodzi $\chi'_s(G) \leq 2\deg(G)$.

Głównym tematem niniejszej rozprawy są silne kliki w grafach. Rozmiar maksymalnej silnej kliki w danym grafie jest w sposób oczywisty nie większy od indeksu chromatycznego tego grafu; opisane powyżej wyniki są zatem również ograniczeniami na $\omega_s(G)$ dla odpowiednich klas grafów. Faudree, Gyárfás, Schelp, i Tuza opublikowali słabszą wersję hipotezy Erdősa i Nešetřila mówiącą o tym, że dla każdego grafu G o maksymalnym stopniu Δ zachodzi $\omega_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ (Hipoteza 3.2). Problem ograniczenia rozmiaru silnych klik wydaje się łatwiejszy od ograniczenia silnego indeksu chromatycznego. Mamy nadzieję, że prace nad szukaniem maksymalnego rozmiaru silnych klik w grafach przełożą się na lepszą intuicję odnośnie silnego indeksu chromatycznego i pozwolą na przybliżenie się do rozwiązania hipotezy Erdősa i Nešetřila. Gdyby hipoteza Reeda (Hipoteza 1.2) była prawdziwa, ograniczenia na $\omega_s(G)$ mogłyby dać poprawę ograniczenia na $\chi'_s(G)$.

Naszym głównym wynikiem jest ograniczenie $\omega_s(G) \leq 1,5\Delta^2$ dla grafów o maksymalnym stopniu Δ (Twierdzenie 3.5). Poprzednim znanym ograniczeniem było $1,74\Delta^2$ (Twierdzenie 3.4). Nasz wynik został poprawiony przez Farona i Postle'a, najlepsze obecnie znane ograniczenie wynosi $\frac{4}{3}\Delta^2$ (Twierdzenie 3.6). Z prawdziwości wspomnianej wcześniej hipotezy Reeda (Hipoteza 1.2) wynikałoby, że $\chi'_s(G) \leq \lceil \frac{5}{3}\Delta^2 \rceil$.

Problem wyznaczania maksymalnego rozmiaru silnych klik rozpatrujemy także dla szczególnych klas grafów. Udowodniliśmy, że silne kliki w grafach bez szponów mają nie więcej niż $\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta$ krawędzi (Twierdzenie 3.13). Tym samym poprawiliśmy ograniczenie $1,125\Delta^2 + \Delta$ wynikające z twierdzenia o silnym indeksie chromatycznym dla tej klasy grafów (Twierdzenie 2.26).

Zajmowaliśmy się również uogólnieniem powyższych problemów, czyli $t-$silnym kolorowaniem krawędzi grafów i $t-$silnymi klikami. Problemy te są jeszcze mało zbadane. Jedynym górnym ograniczeniem na $t-$silny indeks chromatyczny grafów o maksymalnym stopniu Δ jest $(2-\epsilon)\Delta^t$ (Twierdzenie 4.2). Udowodniliśmy, że maksymalny rozmiar $t-$silnych klik w grafach o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najwyżej $1,75\Delta^t + O(\Delta^{t-1})$ (Twierdzenie 4.4). Dla grafów dwudzielnych pokazaliśmy ograniczenie $\Delta^t + O\left(\Delta^{t-1}\right)$ (Twierdzenie 4.5). W obu naszych twierdzeniach ograniczenie na rozmiar $t-$silnych klik jest iloczynem pewnej stałej i Δ^t. Przypuszczamy jednak, że w optymalnym ograniczeniu współczynnik przy Δ^t powinien dążyć do 0 wraz z t dążącym do nieskończności. Ograniczenie takiej postaci udowodniliśmy dla grafów bez $K_{1,r}$ (Twierdzenie 4.10). Dla grafów o talii co najmniej $2t + 2x + 1$, gdzie $0 \leq x \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor - 1$, udowodniliśmy ograniczenie na rozmiar $t-$silnych klik równe $2^{t+2}\Delta^{t-x-1}$ (Twierdzenie 4.12).

Dzięki powiązaniu problemu $t-$silnych klik z problemem stopnia–średnicy pokazaliśmy, że dla dużych t współczynnik przy Δ^t w ograniczeniach na $t-$silny indeks chromatyczny i na maksymalny rozmiar $t-$silnych klik nie może być mniejszy od $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,59}\right)^{t-1}$ (Obserwacja 4.8). Poprawiliśmy tym samym poprzedni wynik $\frac{1}{2(t-1)^{t-1}}$. Problem stopnia–średnicy wydaje się bardzo trudny do rozwiązania. Pokazaliśmy, że ograniczenie na rozmiar $t-$silnych klik, w którym współczynnik przy Δ^t byłby ostro mniejszy od $\frac{1}{2}$, dałby ogromny przełom w tym problemie. Tak samo ograniczenie dla grafów bez szponów, w którym współczynnik przy Δ^t byłby mniejszy od $c\frac{1}{2^t}$, dla pewnej stałej c (Obserwacja 4.15).

Bibliografia

[1] N. Alon, A. Moitra, B. Sudakov, Nearly complete graphs decomposable into large induced matchings and their applications, in Proc. STOC (2012), 1079-1090. 2.12

[2] L. D. Andersen, The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10, Discrete Math. 108 no. 1-3 (1992), 231–252. 2.1.4

[3] J. Bang-Jensen, B. Reed, M. Schacht, R. Šámal, B. Toft, U. Wagner, On Six Problems Posed by Jarik Nešetřil, in: M. Klazar, J. Kratochvíl, J. Matoušek, R. Thomas, P. Valtr (Eds.), Topics in Discrete Mathematics, Springer (2006), 615—617. 2.1.3

[4] C. L. Barrett, V. S. A. Kumar, M. V. Marathe, S. Thite, G. Istrate, S. Thulasidasan, Strong Edge Coloring for Channel Assignment in Wireless Radio Networks, Pervasive Computing and Communications Workshops, IEEE International Conference on, PERCOMW'06 (2006), 106–110. 2.1.2, 2.18, 5

[5] M. Basavaraju, M. Francis, Strong chromatic index of chordless graphs, J. Graph Theory 80 (1) (2015), 58–68. 2.1.4

[6] M. Bonamy, T. Perrett, L. Postle, Colouring Graphs with Sparse Neighbourhoods: Bounds and Applications, arXiv e-prints (2018), arXiv:1810.06704. 2.7

[7] H. Breu, D.G. Kirkpatrick, Unit disc graph recognition is NP-hard, Comput. Geom. 9 (1998), 3–24. 2.3.4

[8] R. A. Brualdi, J. J. Quinn Massey, Incidence and strong adge colorings of graphs, Discrete Math. 122 (1993), 51-58. 2.11, 2.1.4

[9] H. Bruhn, F. Joos, A stronger bound for the strong chromatic index (Extended Abstract), Electronic Notes in Discrete Math. 49 (2015), 277–284. 2.6, 2.3.4, 3.4

[10] H. Bruhn, F. Joos, A stronger bound for the strong chromatic index, Combinatorics, Probability and Computing 27(1) (2018), 21–43. 1, 1

[11] W. Cames van Batenburg, R. J. Kang, F. Pirot, Strong cliques and forbidden cycles, Indagationes Mathematicae 31(1) (2020), 64–82. 3.8

[12] E. A. Canale, J. Gómez, Asymptotically large (Δ, D)-graphs, Discrete Appl. Math. 152(1-3) (2005), 89–108.

[13] G. J. Chang, N. Narayanan, Strong chromatic index of $2-$degenerate graphs, J. Graph Theory, 73 (2012), 119–126. 2.2.2, 2.16, 2.17, 2.2.3, 2.19

[14] E-K. Cho, I. Choi, R. Kim, B. Park, The strong clique number of graphs with forbidden cycles, arXiv e-prints (2020), arXiv:2003.10139 3.9

[15] F. R. K. Chung, A. Gyárfás, W. T. Trotter, Z. Tuza, The maximum number of edges in $2K_2-$free graphs of bounded degree, Discrete Math. 81 (1990), 129–135. 2.8

[16] D. W. Cranston, Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors, Discrete Math. Vol. 306 no. 21 (2006), 2772–2778. 2.1.4

[17] P. Dankelmann, T. Vetrík, The Degree-Diameter Problem for Claw-Free Graphs and Hypergraphs, J. Graph Theory 75(2) (2014), 105–123. 4.11, 1

[18] M. Dębski, Strong chromatic index of unit distance graphs, J. Graph Theory 90 (4) (2019), 523–534. 2.14

[19] M. Dębski, J. Grytczuk, M. Śleszyńska-Nowak, The strong chromatic index of sparse graphs, Inf. Process. Lett. 115(2) (2015), 326–330. 2.2.2, 2.20, 2.21, 2.23, 2.25

[20] M. Dębski, K. Junosza-Szaniawski, M. Śleszyńska-Nowak, Strong chromatic index of $K_{1,t}-$free graphs, Discrete Applied Math. (2020), https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.03.024 2.26, 2.28, 2.29

[21] M. Dębski, M. Śleszyńska-Nowak, Strong cliques in claw-free graphs, w recenzji (2020+) 3.13, 3.14, 3.15

[22] M. Dębski, M. Śleszyńska-Nowak, $t-$Strong Cliques and the Degree-Diameter Problem (Extended Abstract), Acta Math. Univ. Comenianae 88(3) (2019), 1057–1061. 4.4, 4.5, 4.1.3, 4.1.3, 4.2.1, 4.2.2, 4.10, 4.12

[23] P. Erdős, J. Nešetřil, Problem In: Irregularities of Partitions (G. Halász, V.T. Sós, eds), Springer (1989), 162–163. 2.1.3, 2.2

[24] M. Faron, L. Postle, On the clique number of the square of a line graph and its relation to maximum degree of the line graph, J. Graph Theory 92(3) (2019), 261–274. 3.6

[25] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, Induced matchings in bipartite graphs, Discrete Math. 78 (1989), 83–87. 2.10

[26] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, Zs. Tuza, The strong chromatic index of graphs, Ars Combinatoria 29B (1990), 205–211. 2.15, 3.2, 3.3, 3.7, 3.2.1

[27] J. L. Fouquet, J. L. Jolivet, Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons., Ars Combinatoria 16A (1983), 141—150. 2.1.3

[28] J. L. Fouquet, J. L. Jolivet, Strong edge-coloring of cubic planar graphs, Progress in Graph Theory 111 (1984), 247—264. 2.1.3

[29] A. Frieze, M. Krivelevich, B. Sudakov, The strong chromatic index of random graphs, SIAM J. Discrete Math. 19 (3) (2005), 719—727. 2.1.4

[30] P. Horák, The strong chromatic index of graphs with maximum degree four, Contemporary methods in graph theory (1990), 399–403. 2.1.4

[31] P. Horák, H.Qing, W. T. Trotter, Induced matchings in cubic graphs, J. Graph Theory 17 no. 2 (1993), 151–160. 2.1.4

[32] M. Huang, M. Santana, G. Yu, Strong Chromatic Index of Graphs With Maximum Degree Four, The Electronic J. of Combin. 25(3)(2018), 3–31. 2.1.4

[33] D. Hudák, B. Lužar, R. Soták, R. Š.krekovski, Strong edge-coloring of planar graphs, Discrete Math. 324 (2014), 41—49. 2.1.4

[34] T. Kaiser, R. J. Kang, The distance-t chromatic index of graphs, Combin. Probab. Comput. 23(1) (2014), 90–101. 4.2, 4.1.1

[35] R. J. Kang, P. Manggala, Distance edge-colourings and matchings, Discrete Appl. Math. 160(16-17) (2012), 2435–2439. 4.1.1, 4.1.2, 4.7, 4.1.3

[36] A. V. Kostochka, X. Li, W. Ruksasakchai, M. Santana, T. Wang, G. Yu, Strong chromatic index of subcubic planar multigraphs, European J. Combin. 51 (2016), 380–397. 2.1.4

[37] M. Mahdian, The strong chromatic index of $C4-$free graphs, Random Structures Algorithms 17 (2000), 357-–375. 2.2.1, 2.13

[38] M. Miller, J. Širáň, Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem, Electron. J. Combin. 20(2) (2013), Dynamic survey: DS14. 4.1.3

[39] M. Molloy, B. Reed, A bound on the strong chromatic index of a graph, J. Combin. Theory Ser. B 69 (1997), 103–109. 2.5, 2.3.4

[40] M. Molloy, B. Reed, *Graph Colouring and the Probabilistic Method*, Springer, Berlin, (2002). 1.3

[41] J. J. Quinn, A. T. Benjamin, Strong chromatic index of subset graphs, J. Graph Theory 24 no. 3(1997), 267–273. 2.1.4

[42] J. J. Quinn, E. L. Sundberg, Strong chromatic index in subset graphs, Ars Combin. 49 (1998), 155–159. 2.1.4

[43] S. Ramanathan, A unified framework and algorithm for (T/F/C) DMA channel assignment in wireless networks, in Proc. IEEE INFOCOM'97 (1997), 900–907. 2.1.2

[44] B. Reed, ω, Δ *and* χ, J. Graph Theory **27** (1998), 177–212. 1.2

[45] A. Steger, M.-L. Yu, On induced matchings, Discrete Math. 120 no. 1-3 (1993), 291–295. 2.1.4

[46] M. Śleszyńska-Nowak, Clique number of the square of a line graph, Discrete Math. 339(5),(2016), 1551–1556. 3.5, 3.10, 3.2.2

[47] P. Turán, On an extremal problem in graph theory, Mat. Fiz. Lapok 48 (1941), 436–452. 1.1