Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Małgorzata Jastrzębska

Kraty anihilatorów w pewnych klasach algebr

Rozprawa doktorska

Promotor rozprawy

prof. dr hab. Jan Krempa

Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Wrzesień 2015

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

Wrzesień 30, 2015 ....

data *Małgorzata Jastrzębska*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

Wrzesień 30, 2015 ....

data *prof. dr hab. Jan Krempa*

Streszczenie

W literaturze pojawiło się wiele prac o kratach anihilatorów w algebrach łącznych, oraz o związkach własności tych krat z własnościami krat ideałów jednostronnych i z innymi znanymi, ważnymi własnościami algebr. Celem rozprawy jest kontynuowanie tych badań. Szczególny nacisk jest położony na badanie algebr zredukowanych, oraz algebr półprymarnych, w tym algebr skończenie wymiarowych. Podamy teraz przykłady uzyskanych rezultatów.

W rozdziale drugim pokazujemy, że kraty anihilatorów dowolnej algebry zredukowanej są równe i ta krata jest algebrą Boole'a. Jeśli A jest algebrą półprymarną, to krata anihilatorów tej algebry jest algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy A jest skończoną sumą prostą algebr z dzieleniem.

W rozdziale trzecim, dla dowolnego ciała K i dla dowolnej kraty L konstruujemy lokalną algebrę K[L], taką że jej krata anihilatorów zawiera L jako podkratę. Można przy tym żądać, aby algebra K[L] była przemienna. To pozwala nam udowodnić, że nie istnieje żadna nietrywialna tożsamość spełniona w kratach anihilatorów wszystkich algebr lokalnych. Przypomnijmy, że kraty ideałów jednostronnych we wszystkich algebrach są modularne, a więc spełniają wiele wspólnych, nietrywialnych tożsamości.

Jeśli L jest kratą skończoną, to nasza algebra K[L] jest skończenie wymiarowa. Tak więc otrzymujemy przykłady zanurzeń krat skończonych w kraty anihilatorów algebr skończenie wymiarowych, nawet dla tych krat, dla których wcześniej znane były zanurzenia jedynie w kraty anihilatorów algebr nieskończenie wymiarowych.

Korzystając ze wspomnianej wyżej konstrukcji opisujemy w rozdziale czwartym kraty skończone, które mogą być reprezentowane jako kraty wszystkich anihilatorów algebr skończenie wymiarowych nad ciałami nieskończonymi.

Słowa kluczowe

Algebra łączna, algebra półprymarna, algebra skończenie wymiarowa, ściągnięta algebra półgrupowa, krata, zbiór (częściowo) uporządkowany.

Klasyfikacja AMS (MSC 2010)

16P60, 16L30, 20M25, 06B15.

Abstract

In several papers connections of properties of lattices of annihilators with properties of lattices of one-sided ideals and with other important properties of associative algebras are considered. The aim of this dissertation is to continue these considerations. Special attention will be paid to reduced algebras and semiprimary algebras, in particular to finite dimensional algebras. We provide now some of obtained results.

In chapter two we show that for every reduced algebra the lattices of its annihilators are equal and this lattice is a Boolean algebra. If A is a semiprimary algebra, then the lattices of annihilators of A are Boolean algebras if and only if A is a finite direct sum of division algebras.

In the third chapter, for any field K and for arbitrary lattice L we construct a local algebra K[L] and a lattice embedding of L into the lattice of left annihilators of K[L]. In addition we can assume, that K[L] is a commutative algebra. As a consequence, we are able to prove that there is no nontrivial identity satisfied in all lattices of annihilators in local algebras. Let us remind, that lattices of one-sided ideals in all algebras are modular. Thus they satisfy many nontrivial identities.

If L is a finite lattice, then our algebra K[L] is finite dimensional. Hence we obtain an embedding of any finite lattice into a lattice of annihilators in a finite dimensional algebra. Earlier examples from the literature showed mainly embeddings into lattices of annihilators of infinite dimensional algebras.

Using our construction we also describe, in chapter four, finite lattices being representable as lattices of all annihilators in finite dimensional algebras over infinite fields.

Key words

Associative algebra, semiprimary algebra, finite dimensional algebra, contracted semigroup algebra, lattice, (partially) ordered set.

AMS Subject Classification (MSC 2010)

16P60, 16L30, 20M25, 06B15.

Serdeczne podziękowania
dla promotora, Pana Profesora Jana Krempy,
za poświęcony czas, nieocenioną pomoc i wsparcie,
za przekazaną wiedzę, doświadczenie i inspiracje.

Wyrazy wdzięczności kieruję również do
wszystkich Pracowników:
Instytutu Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego
oraz
Instytutu Matematyki i Fizyki
Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach,
którzy przyczynili się do powstania niniejszej rozprawy.

Spis treści

Wprowadzenie

W całej rozprawie $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Wszystkie algebry będą algebrami nad $\mathbb{K}$, z łącznym mnożeniem, ale niekoniecznie z jedynką. Przez wymiar algebry będziemy rozumieli jej wymiar jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$.

W literaturze stosowane są różne metody badania algebr i ich reprezentacji liniowych, czyli modułów nad algebrami. Początkowo badane były głównie algebry skończenie wymiarowe, w tym algebry grupowe grup skończonych. W trakcie tych badań, już w latach trzydziestych XX wieku, wyodrębniono algebry znane obecnie jako algebry Frobeniusa. Dość szybko pojawiło się pewne uogólnienie algebr Frobeniusa, czyli algebry quasi Frobeniusa, nazywane też krótko QF-algebrami (zob. [Bou80, SY11]). QF-algebry zostały scharakteryzowane za pomocą reprezentacji liniowych, oraz niezależnie, za pomocą anihilatorów ([CR62, DK94]). W trakcie badań okazało się, że skończony wymiar algebr można często zastąpić warunkiem minimalności dla krat ideałów jednostronnych, a kraty te są zawsze kratami modularnymi. Inne związki pomiędzy własnościami algebr i ich reprezentacji, a własnościami krat anihilatorów i krat ideałów jednostronnych w algebrach zostały odnotowane np. w [vN36, Bl53].

Po pracach Goldiego o strukturze pierścieni półpierwszych (zob. [He68, La99]) pojawiło się jeszcze więcej publikacji o różnych warunkach skończoności dla zbiorów anihilatorów, a faktycznie dla krat anihilatorów w algebrach. Jednym z badanych warunków było, motywowane przez QF-algebry założenie, że każdy ideał jednostronny algebry jest anihilatorem ([JK72, HN85, Fi83]). W tym przypadku oczywiście kraty anihilatorów są modularne. Modularność krat anihilatorów lub ich dużych podzbiorów jest nadal badana (zob. np. [MM15, BGT15]). Już dawno pokazano, np. w [Ke83, Ni78], że kraty zarówno lewostronnych jak i prawostronnych anihilatorów nie muszą być modularne.

Wiele klas algebr, spełniających pewne warunki anihilatorowe jest dziś powszechnie znanych. Poza algebrami Frobeniusa i QF-algebrami są to między innymi algebry (a faktycznie pierścienie): Kascha, Baera, Rickarta, Armendariza (zob. [La99, Fa99]).

Początkowo celem rozprawy było badanie krat anihilatorów w algebrach skończenie wymiarowych. Między innymi konstruowane były w tej klasie przykłady algebr o zadanych warunkach na kraty anihilatorów. Były to odpowiedniki znanych algebr nieskończenie wymiarowych (np. z [Ke83, Ni78]). W trakcie tych badań okazało się jednak, że sporo ciekawych wyników, uzyskanych dla algebr skończenie wymiarowych, można rozszerzyć na większe klasy algebr i otrzymać nowe rezultaty o kratach anihilatorów algebr z tych klas. Ostatecznie, jednym z głównych celów rozprawy stało się kontynuowanie badań nad związkami własności krat anihilatorów z własnościami krat ideałów jednostronnych. Podjęte zostały też badania nad związkami pomiędzy własnościami krat anihilatorów, a różnymi ważnymi własnościami algebr dowolnego wymiaru. Szczególny nacisk położony został na badanie algebr zredukowanych, oraz algebr półprymarnych, w tym algebr skończenie wymiarowych. Przez algebrę półprymarną rozumiemy algebrę, która nie jest nilpotentna, ale ma nilpotentny radykał Jacobsona i jej iloraz przez ten radykał spełnia warunek minimalności dla ideałów jednostronnych. Między innymi wszystkie algebry skończenie wymiarowe, które nie są nilpotentne, są algebrami półprymarnymi.

Rozdział 1 rozprawy zaczynamy od przypomnienia podstawowych faktów o zbiorach uporządkowanych i kratach. Tematyką tą zajmujemy się w paragrafach 1.1 i 1.2. Szczególną uwagę zwracamy na sformułowanie wybranych własności krat modularnych, rozdzielnych i krat Boole'a, przydatnych w dalszej części rozprawy. Uwzględniamy też znane warunki skończoności takie jak: artinowskość, skończona szerokość i skończona długość kraty. Przypominane rezultaty są czasem cytowane w nieco zmodyfikowanej formie, w stosunku do wyników sformułowanych w monografiach [Bi67, Ro08].

W paragrafach 1.3 i 1.4 przypominamy wybrane fakty o algebrach, potrzebne w dalszej części pracy. Czasami przytaczane rezultaty są zmodyfikowane, albo nawet wzmocnione w stosunku do wersji pierścieniowych, znanych z literatury (por. [He68, DK94, La91]). Przykładami są tu: Twierdzenie 1.4.1, Twierdzenie 1.4.6 i Wniosek 1.4.4. Takie wzmocnienia są możliwe, ponieważ dotyczą przypadku algebr nad ciałami, a nie dowolnych pierścieni.

Rozdział 2 poświęcony jest własnościom anihilatorów w algebrach. W paragrafie 2.1 przypominamy elementarne własności anihilatorów. Odnotowujemy, że zbiory zarówno lewostronnych, jak i prawostronnych anihilatorów w algebrach tworzą kraty ze względu na porządek wyznaczony przez zawieranie. Nie są to jednak na ogół podkraty w kratach ideałów jednostronnych, ponieważ kraty anihilatorów mogą być niemodularne. Wiele przykładów algebr z niemodularnymi kratami anihilatorów można otrzymać np. z rezultatów paragrafu 3.4.

W paragrafie 2.1 pojawiają się algebry z jedynką, w których każdy lewostronny ideał jest lewostronnym anihilatorem i każdy prawostronny ideał jest prawostronnym anihilatorem. Takie algebry znane są jako *„dual”* algebry (zob. [HN85]), a w rozprawie nazywamy je krótko *D-algebrami.* Są to oczywiście uogólnienia QF-algebr, jednak klasy te są różne (zob. Przykład 2.2.11).

W Twierdzeniu 2.1.4 odnotowujemy dobrze znany fakt, że w dowolnej algebrze istnieje odpowiedniość Galois krat anihilatorów prawostronnych i anihilatorów lewostronnych. Co więcej, jest ona zadana konkretnymi wzorami wymienionymi w tym twierdzeniu. To często pozwala ograniczać rozważania do kraty anihilatorów lewostronnych danej algebry, a uzyskane wyniki zinterpretować w kracie anihilatorów prawostronnych tej algebry. Wiadomo, że kraty ideałów jednostronnych algebr są modularne, ale nie ma w nich naturalnej odpowiedniości typu Galois.

W paragrafie 2.2 opisujemy pewne zależności krat anihilatorów w algebrach „pokrewnych”. Dowodzimy, między innymi, Twierdzenie 2.2.2 mówiące, że jeśli $A \subseteq B$ są algebrami, to istnieje naturalne zanurzenie (rozumiane jako zanurzenie zbiorów uporządkowanych) kraty lewostronnych anihilatorów algebry A, w kratę lewostronnych anihilatorów algebry B. Przekształcenie to jest jednostronnie odwracalne i zachowuje kresy dolne. Te rozważania prowadzą nas do wniosku, że kraty anihilatorów algebr półpierwszych, spełniających z obu stron znane warunki Goldiego, mają modularne kraty anihilatorów o skończonej długości (zob. Twierdzenie 2.2.4 i Wniosek 2.2.5). W Lemacie 2.2.10 zajmujemy się naturalnym zanurzeniem kraty anihilatorów algebry A/I w kratę anihilatorów algebry A, przy założeniu, że ideał I jest anihilatorem w A. Fakt, że obrazy anihilatorów z algebry A nie muszą być anihilatorami w algebrze A/I, a nawet że obrazem D-algebry nie musi być D-algebra jest zilustrowany w Przykładzie 2.2.11.

W dalszych paragrafach Rozdziału 2 pokazujemy istotny związek idempotentów algebry z własnościami krat jej anihilatorów. Dobrze wiadomo, że w algebrach z jedynką ideały jednostronne generowane przez idempotenty są anihilatorami. W Lemacie 2.3.4 dowodzimy, że ideały lewostronne generowane przez idempotenty są anihilatorami w danej algebrze wtedy i tylko wtedy, gdy lewostronny anihilator tej algebry jest zerowy. Z tego lematu i jego prawostronnej wersji wynika, że w różnych faktach, istnieje możliwość zastępowania założenia o istnieniu jedynki, przez założenie zerowości lewostronnego i prawostronnego anihilatora całej algebry. Mając powyższe na uwadze, w paragrafie 2.3 dowodzimy, że zerowe anihilatory algebry i pewne warunki nałożone na kratę anihilatorów lub na moc ciała bazowego implikują centralność idempotentów w algebrze (Twierdzenie 2.3.8 i Twierdzenie 2.3.9). Ponadto, w Twierdzeniu 2.4.5 przedstawiamy pewne anihilatorowe kryteria na istnienie jedynki w algebrach półprymarnych. Jako prosty skutek dostajemy, że każda algebra wymiaru co najwyżej 3, z zerowym lewostronnym i prawostronnym anihilatorem całej algebry ma jedynkę. Przykład 2.4.8 pokazuje, że dla wyższych wymiarów zerowe anihilatory algebry nie świadczą o istnieniu jedynki w tej algebrze.

Jeśli mamy daną kratę L, to zadanie znalezienia algebry, której krata lewostronnych, bądź prawostronnych anihilatorów zawiera L jako podkratę, wpisuje się w teorię reprezentacji krat poprzez różne podstruktury struktur algebraicznych ([Bl53, PT80, PP80, Pi14, JM69, Za99]). W Rozdziałach 3 i 4 badamy reprezentacje krat jako podkrat w kratach anihilatorów algebr.

Na początku Rozdziału 3 badamy zanurzalność skończonych algebr Boole'a w kraty anihilatorów. Między innymi, w Twierdzeniu 3.1.4 charakteryzujemy algebry półprymarne, w których kraty anihilatorów są algebrami Boole'a. W przypadku algebr zredukowanych otrzymujemy między innymi, że krata anihilatorów takiej algebry zawsze jest kratą Boole'a (Twierdzenia 3.2.2).

W Przykładzie 3.4.1 dla dowolnego ciała $\mathbb{K}$ i dla dowolnego zbioru uporządkowanego P konstruujemy lokalną algebrę $\mathbb{K}(P)$. W Twierdzeniu 3.4.2 wskazujemy zanurzenie P w kratę lewostronnych anihilatorów algebry $\mathbb{K}(P)$ zachowujące porządek, a nawet wszystkie istniejące w P kresy górne i dolne. Z tej konstrukcji i Twierdzenia 3.4.2 wynika Wniosek 3.4.3 mówiący o tym, że każda krata może być zanurzona w kratę lewostronnych anihilatorów pewnej algebry lokalnej. Jako jeden ze skutków tego wniosku otrzymujemy Twierdzenie 3.4.5, w którym dowodzimy, że kraty anihilatorów algebr lokalnych nie spełniają żadnej wspólnej tożsamości. Kolejnym ważnym rezultatem paragrafu 3.4 jest Twierdzenie 3.4.8 o reprezentacji krat zupełnych w kratach anihilatorów algebr nilpotentnych. Wyniku tego szczegółowo nie dowodzimy, wskazujemy tylko jak go otrzymać z faktów wykazanych w tym paragrafie i z Twierdzenia 2.2.7.

W paragrafie 3.5 badamy kraty anihilatorów algebr przemiennych. W tym celu istotnie modyfikujemy Przykład 3.4.1 i Twierdzenie 3.4.2. Jako jeden ze skutków otrzymujemy, że każda krata może być zanurzona w kratę anihilatorów pewnej przemiennej algebry lokalnej (zob. Wniosek 3.5.4).

W Rozdziale 4 badamy kraty anihilatorów algebr skończenie wymiarowych. Odnotowujemy, że konstrukcje z Przykładów 3.4.1 i 3.5.2 przeprowadzone dla skończonych zbiorów uporządkowanych dają algebry skończenie wymiarowe. Z tej obserwacji i z wiadomości z poprzedniego rozdziału otrzymujemy wniosek, że każda krata skończona jest podkratą w kracie lewostronnych anihilatorów pewnej algebry skończenie wymiarowej. Możemy przy tym wymagać, aby algebra ta była przemienna (zob. Wniosek 4.2.3). To pozwala wzmocnić Twierdzenie 3.4.5. W Twierdzeniu 4.2.4 otrzymujemy, że nawet kraty anihilatorów przemiennych, lokalnych algebr skończenie wymiarowych nie spełniają żadnej wspólnej, nietrywialnej tożsamości kratowej.

W paragrafie 4.2 zwracamy też uwagę na fakt, że kraty anihilatorów algebr skończenie wymiarowych nie muszą być skończone i podajemy przykłady algebr uzasadniające to stwierdzenie. W ostatnim paragrafie pokazujemy, że dla pewnych krat skończonych łatwo można wskazać algebry, których kraty anihilatorów zawierają żądane podkraty, i których wymiar jest mniejszy, niż wymiar algebr konstruowanych w Rozdziale 3. Czasami jednak znalezienie algebry minimalnego wymiaru, której krata anihilatorów zawiera żądaną podkratę może być trudne. Taka sytuacja ma miejsce dla niemodularnej kraty o 5 elementach. W paragrafie 4.3 konstrułujemy algebrę wymiaru 7, której krata anihilatorów nie jest modularna. Być może istnieją algebry mniejszego wymiaru, których krata anihilatorów nie jest modularna.

W Twierdzeniu 4.3.5 opisujemy kraty skończone, które mogą być reprezentowane jako kraty anihilatorów algebr skończenie wymiarowych nad ciałem nieskończonym. Podobny opis otrzymujemy dla algebr nad dowolnym ciałem przy założeniu, że badana krata jest rozdzielna (Twierdzenie 4.3.6).

W literaturze pojawiają się prace dotyczące badania krat anihilatorów półgrup (zob. [No06]), a także prace dotyczące zanurzania krat w kraty anihilatorów (skończonych) półgrup z zerem (zob. np. [Za99]). W rozprawie odnotowujemy Twierdzenie 4.2.5, które wzmacnia pewne wyniki z literatury na ten temat. Twierdzenie to jest konsekwencją rezultatów Rozdziałów 3 i 4.

W wielu pracach autorzy zajmują się badaniem grafów dzielników zera w algebrach, ale koncentrują się głównie na własnościach teoriografowych. Jednak pojawiają się też prace (zob. np. [We11]), w których poszukiwane są związki grafów dzielników zera z kratami anihilatorów. Ta tematyka nie będzie w rozprawie dyskutowana.

Cała praca zawiera sporo przykładów o różnym stopniu trudności, które ilustrują formułowane wyniki. Niektóre rezultaty, na ogół bez dowodu, są przytoczone dla pełności wiedzy o omawianym temacie.

Szereg wyników rozprawy pochodzi z prac [JK15a, JK15b]. Były one prezentowane na kilku międzynarodowych konferencjach algebraicznych i na seminarium algebraicznym w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego.

ROZDZIAŁ 1

Wiadomości wstępne

1.1 Zbiory uporządkowane

W całej pracy symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$ będą oznaczać odpowiednio zbiór liczb naturalnych ($0 \in \mathbb{N}$), pierścień liczb całkowitych i ciało liczb rzeczywistych. Moc dowolnego zbioru X oznaczać będziemy symbolem $|X|$. Będziemy też stosować typowe oznaczenia elementarnej teorii zbiorów. Złożenie przekształceń f, g na elemencie x będziemy rozumieć jako $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Niepusty zbiór P z określonym na nim (częściowym) porządkiem $\leqslant$ nazywać będziemy *zbiorem uporządkowanym.* Będziemy używać standardowej notacji i terminologii związanej ze zbiorami uporządkowanymi. Przypomnimy tylko pewne, częściej używane pojęcia.

Dla elementów a, b zbioru uporządkowanego P używać będziemy zapisu $a < b$ w sytuacji, gdy $a \leqslant b$ i jednocześnie $a \neq b$. Niech zatem $a, b \in P$ będą takie, że $a < b$. Jeśli nie istnieje element $c \in P$ taki, że $a < c < b$, to powiemy, że *a jest poprzednikiem b*, lub równoważnie, że *b jest następnikiem a.*

Liniowo uporządkowane zbiory nazywać będziemy *łańcuchami.* Skończony łańcuch o $n+1$ elementach oznaczymy symbolem C_n i nazwiemy *łańcuchem długości n.* Jeśli w P istnieje łańcuch najdłuższy i ma on długość $n < \infty$, to powiemy, że zbiór *P jest długości n,* albo ogólniej, że *P ma skończoną długość.* Jeśli natomiast każde dwa elementy podzbioru $Q \subseteq P$ są nieporównywalne, to Q nazywamy *antyłańcuchem.* Jeśli $Q \subseteq P$ jest skończonym antyłańcuchem o m elementach, to powiemy, że Q ma *szerokość m.* Jeśli w P istnieje antyłańcuch o największej liczbie elementów i ma on szerokość $m < \infty$, to powiemy, że *P ma szerokość m,* albo ogólniej, że *P ma* *skończoną szerokość.* Jeśli P nie ma skończonej długości (szerokości) to powiemy, że *P ma nieskończoną długość (szerokość).* Bezpośrednio z tych określeń otrzymujemy

Stwierdzenie 1.1.1. *Łańcuchy to dokładnie zbiory uporządkowane szerokości 1, a antyłańcuchy to dokładnie zbiory uporządkowane długości* 0.

Jeśli $\leqslant$ jest relacją porządkującą zbiór P, to relacja $\preceq$ zdefiniowana następująco: $a \preceq b \Leftrightarrow b \leqslant a$ również porządkuje ten zbiór. Zbiór P uporządkowany przez relację $\preceq$ oznaczać będziemy przez P^{op} i nazywać będziemy *zbiorem dualnym do P.*

Kolejne pojęcia związane ze zbiorami uporządkowanymi, to warunek minimalności i warunek maksymalności. Niech P będzie zbiorem uporządkowanym. Wówczas P spełnia *warunek minimalności* jeśli każdy jego niepusty podzbiór ma element minimalny, analogicznie P spełnia *warunek maksymalności* jeśli każdy jego niepusty podzbiór ma element maksymalny. Znany jest następujący rezultat:

Twierdzenie 1.1.2. *Niech P będzie zbiorem uporządkowanym.*
(1) *P spełnia warunek minimalności (maksymalności) wtedy i tylko wtedy, gdy P^{op} spełnia warunek maksymalności (minimalności).*
(2) *P spełnia warunek minimalności wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ściśle malejący ciąg jego elementów jest skończony.*
(3) *P spełnia warunek maksymalności wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ściśle rosnący ciąg jego elementów jest skończony.*
(4) *P spełnia warunek maksymalności i minimalności wtedy i tylko wtedy, gdy każdy łańcuch w P jest skończony.*

Dowód. Punkt (1) wynika wprost z definicji zbioru P^{op}. Punkty (2) i (3) są wykazane w Twierdzeniu 1.13 w [Ro08]. Punkt (4) jest bezpośrednią konsekwencją (2) i (3). □

W rozprawie wykorzystane będą poniższe konstrukcje zbiorów uporządkowanych:

Przykład 1.1.3. Niech I będzie niepustym zbiorem i niech $\{P_i : i \in I\}$ będzie rodziną zbiorów uporządkowanych.

(a) Zbiór $\prod_{i \in I} P_i$ uporządkowany „po współrzędnych”, czyli przez relację: $(a_i) \leqslant (b_i)$, jeśli $a_i \leqslant b_i$ dla dowolnego $i \in I$, jest zbiorem uporządkowanym. Nazywać go będziemy *iloczynem prostym* zbiorów P_i.
(b) Zbiór $\uplus_{i \in I} P_i = \cup_{i \in I} P_i$, w którym zbiory P_i są rozłączne, każdy ze swoim porządkiem, a między elementami różnych składników nie ma żadnej relacji, jest zbiorem uporządkowanym. Będziemy go nazywać *sumą rozłączną* zbiorów P_i.

Każdy antyłańcuch jest postaci $\uplus_{i \in I} P_i$, gdzie P_i są zbiorami jednoelementowymi.

Przykład 1.1.4. Niech dany będzie ciąg zbiorów uporządkowanych P_n dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Niech $0 \leqslant s < \infty$. Jeśli dla każdego $n \leqslant s$ zbiór P_n spełnia warunek minimalności (maksymalności), to również zbiory $\prod_{n=0}^{s} P_n$ i $\uplus_{n=0}^{s} P_n$ spełniają ten warunek.

(b) Jeśli każdy zbiór P_n spełnia warunek minimalności (maksymalności), to suma rozłączna $\uplus_{n=0}^{\infty} P_n$ też spełnia ten warunek.

(c) Inaczej jest dla iloczynu prostego $\prod_{n=0}^{\infty} P_n$: Jeśli P_n nie jest antyłańcuchem dla żadnego $n \in \mathbb{N}$, to $\prod_{n=0}^{\infty} P_n$ nie spełnia ani warunku maksymalności, ani warunku minimalności. Dla przykładu, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ weźmy jako P_n kopię łańcucha $C_1 = \{0, 1\}$. Wówczas w nieskończonym iloczynie prostym zbiorów P_n dostajemy nieskończony, ściśle rosnący łańcuch elementów: $(0, 0, 0, 0, \ldots) < (1, 0, 0, 0, \ldots) < (1, 1, 0, 0, \ldots) < (1, 1, 1, 0 \ldots) < \ldots$ Podobnie można pokazać, że zbiór $\prod_{n=0}^{\infty} P_n$, gdzie dla każdego n mamy $P_n = C_1$, zawiera nieskończony, ściśle malejący łańcuch elementów. Powyższy iloczyn prosty nie spełnia więc ani warunku minimalności, ani maksymalności.

Niech P_1, P_2 będą zbiorami uporządkowanymi i niech ϕ będzie odwzorowaniem z P_1 do P_2. Powiemy, że ϕ *zachowuje porządek*, jeśli dla dowolnych $a, b \in P_1$ nierówność $a \leqslant b$ pociąga za sobą nierówność $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. Jeżeli przekształcenie ϕ zachowuje porządek i jest różnowartościowe, to powiemy, że ϕ jest *zanurzeniem zachowującym porządek.*

Gdy ϕ spełnia warunek: $a \leqslant b \Leftrightarrow \phi(a) \leqslant \phi(b)$, to ϕ nazwiemy *przekształceniem ściśle zachowującym porządek.* Łatwo pokazać, że przekształcenie ściśle zachowujące porządek jest różnowartościowe.

Zbiory uporządkowane P_1 i P_2 nazwiemy *izomorficznymi,* gdy istnieje suriekcja $\varphi : P_1 \longrightarrow P_2$ ściśle zachowująca porządek.

Izomorfizm zbiorów uporządkowanych P_1 i P_2^{op} nazywać będziemy *antyizomorfizmem* zbiorów P_1 i P_2, a izomorfizm zbiorów uporządkowanych P i P^{op} nazywać będziemy *antyautomorfizmem* zbioru P.

W pracy tej będziemy zajmować się często zbiorami skończonymi. W związku z tym odnotujmy następujący rezultat:

Twierdzenie 1.1.5. *Niech P będzie zbiorem uporządkowanym. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *P jest skończony.*

(2) *Każdy łańcuch i każdy antyłańcuch w P jest skończony.*

(3) *P ma skończoną długość i skończoną szerokość.*

Dowód. Oczywiste są implikacje (1) $\Rightarrow$ (3) i (3) $\Rightarrow$ (2). Zależność (2) $\Rightarrow$ (1) można wykazać metodami użytymi w dowodzie Twierdzenia 1.14. w [Ro08]. □

1.2 Kraty

Ważnym rodzajem zbiorów uporządkowanych są kraty, które można opisać również jako struktury algebraiczne.

Definicja 1.2.1. *Krata w sensie porządków* to uporządkowany zbiór $(L, \leqslant)$, w którym każdy dwuelementowy podzbiór ma oba kresy: górny i dolny.
Krata w sensie algebraicznym to struktura algebraiczna (L,$\wedge$,$\vee$), w której dwuargumentowe działania $\vee$ i $\wedge$ są łączne, przemienne, idempotentne, oraz dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniają następujące równości:

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad \text{i} \quad a \vee (a \wedge b) = a.$$

Pojęcia krat w sensie algebraicznym i porządkowym są równoważne. Rzeczywiście, jeśli mamy kratę, daną jako strukturę algebraiczną z wymienionymi wyżej aksjomatami, to zadając porządek poprzez warunek: $x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y$ otrzymamy kratę w sensie porządku. Odwrotnie, jeśli w kracie w sensie porządku, zdefiniujemy: $x \vee y = \sup(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ oraz $x \wedge y = \inf(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, to dostaniemy kratę w sensie algebraicznym. To pozwala stosować do krat wszystkie fakty dotyczące zbiorów uporządkowanych, oraz pojęcia i rezultaty specyficzne dla struktur algebraicznych.

Niech L_1, L_2 będą kratami, oraz ϕ będzie odwzorowaniem z L_1 w L_2. Jeśli ϕ zachowuje wszystkie kresy dolne, tj. $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ dla dowolnych $a, b \in L_1$, to ϕ nazywać będziemy *$\wedge$-homomorfizmem.* Analogicznie możemy zdefiniować $\vee$-homomorfizm. Przekształcenie $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$, które jest jednocześnie $\wedge$-homomorfizmem i $\vee$-homomorfizmem nazwiemy krótko *homomorfizmem krat.* Pojęcia te można rozpatrywać na poziomie odwzorowań zbiorów uporządkowanych $\phi : P_1 \longrightarrow P_2$, jeśli przyjmiemy, że odpowiednie równości są spełnione dla wszystkich par elementów z P_1, dla których istnieją odpowiednie kresy. Oczywiście $\wedge$-homomorfizm i $\vee$-homomorfizm zbiorów uporządkowanych są przekształceniami zachowującymi porządek.

Przykładem algebraicznego podejścia do krat jest np. rozważanie tożsamości w kratach. Z tego obszaru potrzebny nam będzie następujący rezultat (zob. [CD73, 16.7])

Twierdzenie 1.2.2. *Jeśli jakaś tożsamość jest spełniona we wszystkich kratach skończonych, to jest spełniona we wszystkich kratach, czyli jest trywialna z punktu widzenia teorii krat.*

Będziemy też stosować inne pojęcia i rezultaty z teorii krat. Można je znaleźć na przykład w [Ro08, CD73]. Przypomnimy tylko niektóre, ważniejsze z punktu widzenia tej rozprawy.

Jeśli $(L, \leqslant)$ jest kratą oraz $a, b \in L$, to $a \wedge b = \inf(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ nazywamy *iloczynem* elementów a i b, a $a \vee b = \sup(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ nazywamy *sumą* elementów a i b. Jeśli każdy podzbiór kraty L ma kres górny i kres dolny, to L nazwiemy *kratą zupełną.* W szczególności każda krata skończona jest zupełna.

Podkratą kraty L nazywać będziemy niepusty podzbiór $M \subseteq L$, który jest kratą ze względu na te same operacje sumy i iloczynu co krata L. Dalej w pracy pojawią się też podzbiory krat będące ze względu na porządek pochodzący z L kratami, ale nie będące podkratami w L. Kratę nazwiemy *nierozkładalną*, jeśli nie jest ona iloczynem prostym dwóch swoich podkrat.

Oczywiście wszystkie łańcuchy są kratami, ale żaden antyłańcuch szerokości co najmniej 2 nie jest kratą. Zbiór uporządkowany P, w którym istnieją elementy: najmniejszy i największy, oraz wszystkie pozostałe elementy tworzą antyłańcuch szerokości n oznaczać będziemy przez M_n. Jest to krata wysokości 2 i szerokości n.

Zauważmy, że jeśli L jest kratą, to zbiór L^{op} jest także kratą. Kratę L^{op} będziemy nazywać *kratą dualną do kraty L.*

W kratach wyróżniamy pewne, przydatne elementy. Element największy kraty L nazwiemy *jednością kraty* L i oznaczymy przez Ω. Dualnie, najmniejszy element w kracie oznaczymy symbolem ω i nazwiemy *zerem kraty* L. Oczywiście takie elementy w kracie nie zawsze istnieją. Kratę z zerem i jednością nazywamy *kratą ograniczoną.* Przykładami krat ograniczonych są wszystkie kraty zupełne. W dowolnej kracie L następniki ω będziemy nazywać *atomami*, a poprzedniki Ω nazwiemy *koatomami.* Jeśli $a \leqslant b \in L$, to przyjmiemy

$$[a, b] = \{c \in L : a \leqslant c \leqslant b\}.$$

Zbiór ten, z porządkiem indukowanym z L, nazywamy *przedziałem o końcach a, b.* Oczywiście $[a, b]$ jest podkratą kraty L.

Element a ograniczonej kraty L nazwiemy *dopełnieniem elementu* $b \in L$, jeśli $a \wedge b = \omega$ oraz $a \vee b = \Omega$. Mówimy, że L jest *kratą z dopełnieniami*, gdy każdy jej element ma dopełnienie.

W literaturze szczególne miejsce zajmują kraty Boole'a, kraty modularne i kraty rozdzielne. Kratę L nazywamy *modularną,* gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ takich, że $c \leqslant a$, spełniony jest warunek: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$. Kratę L nazywamy *rozdzielną*, gdy dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ spełniona jest równość $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Każda krata rozdzielna jest modularna. Ograniczoną kratę rozdzielną z dopełnieniami nazywamy *kratą* (*algebrą*) *Boole'a.* Zauważmy, że jeśli krata L jest modularna (rozdzielna, Boole'a), to krata dualna L^{op} również jest modularna (odpowiednio rozdzielna, Boole'a). Podobnie, jeśli $\{L_i : i \in I\}$ jest rodziną krat modularnych (rozdzielnych, Boole'a), to iloczyn prosty tych krat $\prod_{i \in I} L_i$ jest również kratą modularną (rozdzielną, Boolea). Każda podkrata kraty modularnej (rozdzielnej) jest modularna (rozdzielna), ale podkrata kraty Boole'a nie musi być kratą Boole'a.

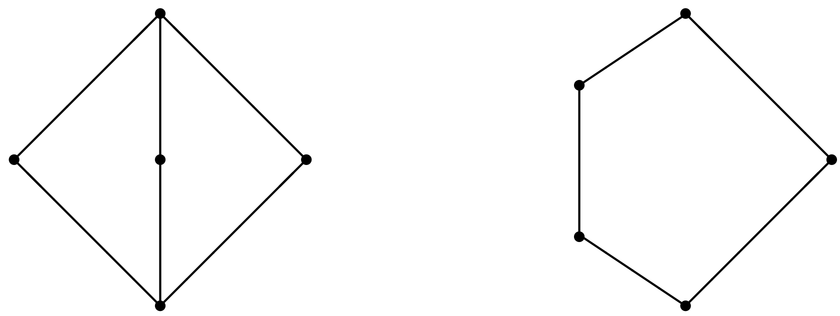
Przykładami krat rozdzielnych nie będących kratami Boole'a są łańcuchy o co najmniej 3 elementach. Każda krata M_n, gdzie $n \geqslant 3$ jest kratą modularną, kratą z dopełnieniami, ale nie jest kratą rozdzielną.

Skończone zbiory uporządkowane, a zwłaszcza kraty, wygodnie jest ilustrować za pomocą diagramów Hassego. Tu i dalej będziemy się do nich odwoływać.

Kratą modularną, ale nie rozdzielną o najmniejszej liczbie elementów jest krata M_3 zwana *diamentem* (Rysunek 1.1). Wiadomo ([Ro08], Twierdzenie 4.7]), że krata modularna L jest rozdzielna wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma podkraty izomorficznej z M_3. Z kolei kratą niemodularną o najmniejszej liczbie elementów jest krata oznaczona symbolem N_5 (Rysunek 1.1), zwana *pięciobokiem.* Wiadomo ([Ro08], Twierdzenie 4.7), że krata L jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma podkraty izomorficznej z kratą N_5.

Podamy teraz kilka przykładów krat przydatnych w dalszej części rozprawy.

Przykład 1.2.3. Jeśli X jest dowolnym zbiorem, to zbiór $P(X)$ wszystkich jego podzbiorów, uporządkowany przez inkluzję, jest kratą. Jest to krata zupełna i krata Boole'a. Można pokazać, że każda skończona krata Boole'a jest izomorficzna z kratą $P(X)$ dla pewnego skończonego zbioru X. Dlatego też liczba elementów każdej skończonej kraty Boole'a jest potęgą dwójki. Kratę Boole'a mającą 2^n elementów



M_3 N_5

Rysunek 1.1: Kraty M_3 i N_5

oznaczać będziemy symbolem B_{2^n}.

Niech V będzie niezerową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas kratę stanowi rodzina $\mathrm{Sub}(V)$ wszystkich podprzestrzeni liniowych przestrzeni V uporządkowana przez inkluzję. Działaniami w tej kracie są: suma algebraiczna podprzestrzeni i część wspólna podprzestrzeni. Jest to krata modularna i zupełna, z dopełnieniami. Jeśli V jest jednowymiarowa, to $\mathrm{Sub}(V) = C_1 = B_2$. Jeśli wymiar V jest co najmniej 2, to $\mathrm{Sub}(V)$ nie jest rozdzielna, a więc nie jest podkratą w $P(V)$. Jednak inkluzja $\mathrm{Sub}(V) \subset \mathrm{P}(V)$ jest $\wedge$-homomorfizmem.

Przykład 1.2.4. Niech $P_1 = \uplus_{n\in\mathbb{N}} C_n$ będzie sumą rozłączną łańcuchów C_n. Do zbioru P_1 dołączamy element najmniejszy ω i największy Ω, otrzymując zbiór uporządkowany L_1. Wówczas P_1 nie jest kratą, ale L_1 jest kratą z dopełnieniami, która jednak nie jest modularna. W P_1 i w L_1 każdy łańcuch ma skończoną długość, ale ani P_1, ani L_1 nie ma skończonej długości.

Przykład 1.2.5. Weźmy zbiór $L_2 = \{M_n : n \in N\}$. Porządek w L_2 zadajemy następująco:
1) Dla każdego n porządek w M_n pozostawiamy bez zmian;
2) Dla dowolnego n, każdy element z M_n jest w relacji $\leqslant$ z każdym elementem w M_{n+k} dla dowolnego $k \geqslant 1$.
Wówczas L_2 jest kratą modularną, ale nie rozdzielną. Nie jest to też krata z dopełnieniami. Każdy antyłańcuch w L_2 ma skończoną szerokość, ale L_2 nie jest kratą skończonej szerokości.

Przykłady 1.2.4 i 1.2.5 pokazują, że Twierdzenie 1.1.5 nie może być wzmocnione w przypadku zbiorów uporządkowanych, a nawet w przypadku wszystkich krat. Jednak w kratach spełniających pewne szczególne założenia można to osiągnąć.

Twierdzenie 1.2.6. *Niech L będzie kratą modularną, w której istnieje skończony łańcuch maksymalny. Wówczas wszystkie łańcuchy w L są skończone i wszystkie łańcuchy maksymalne mają tę samą długość.*

Sformułujemy teraz pewne znane własności krat rozdzielnych.

Stwierdzenie 1.2.7. *Niech L będzie kratą rozdzielną i ograniczoną.*

(1) *Jeśli L jest skończonej długości, to L jest skończona.*

(2) *Każdy element kraty L ma co najwyżej jedno dopełnienie.*

(3) *Jeśli $a, b, b' \in L$, gdzie b' jest dopełnieniem b w L, to*

$$a \wedge b = \omega \Leftrightarrow a \wedge b' = a.$$

(4) *Jeśli L jest kratą Boole'a, to dla dowolnych $a < b \in L$ krata $[a, b] \subseteq L$ jest również kratą Boole'a. Przy tym, jeśli $x \in [a, b]$ oraz x' jest dopełnieniem x w L, to dopełnieniem x w kracie $[a, b]$ jest element $(x' \wedge b) \vee a$.*

Dowód. Dla przykładu wykażemy punkt (3). Jeśli $a \wedge b = \omega$, to $a = a \wedge \Omega = a \wedge (b \vee b') = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \wedge b'$. Odwrotnie, jeśli $a \wedge b' = a$, to $a \wedge b = a \wedge b' \wedge b = a \wedge \omega = \omega$. □

Mając na uwadze punkt (1) powyższego twierdzenia zauważmy, że nieskończone łańcuchy są przykładami krat rozdzielnych, w których skończona szerokość nie implikuje skończonej długości. W przypadku dowolnej kraty Boole'a zależność pomiędzy długością, a szerokością tej kraty jest prosta.

Twierdzenie 1.2.8. *Niech B będzie skończoną kratą Boole'a. Wówczas istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że:*

(1) *B ma 2^n elementów;*

(2) *B jest długości n;*

(3) *B ma szerokość $S(n)$, gdzie $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest dobrze znaną funkcją wyznaczoną przez Spernera* ([*Bi67*], *str.* 99).

Korzystając ze Stwierdzenia 1.2.7 (3) łatwo wykazać, że w dowolnej kracie Boole'a nierówność $a \leqslant b$ pociąga za sobą $b' \leqslant a'$. Z tego faktu i jednoznaczności dopełnień wynika, że w dowolnej kracie Boole'a warunek minimalności jest równoważny z warunkiem maksymalności. W oparciu o tę informację oraz Twierdzenia 1.1.2 i 1.2.8 łatwo udowodnić poniższy fakt.

Stwierdzenie 1.2.9. *Niech B będzie kratą Boole'a. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Krata B spełnia warunek minimalności;*
(2) *Krata B spełnia warunek maksymalności;*
(3) *B jest kratą skończoną.*

Potrzebne nam będzie dalej następujące kryterium na bycie przez kratę kratą Boole'a:

Twierdzenie 1.2.10 ([Bi67], Twierdzenie II.17)**.** *Jeśli każdy element a ograniczonej kraty L ma dokładnie jedno dopełnienie a' i jeśli przyporządkowanie $a \longrightarrow a'$ jest antyautomorfizmem kraty L, to L jest algebrą Boole'a.*

Dowód.(Różny od dowodu zamieszczonego w [Bi67])

Niech L będzie jak w założeniach twierdzenia.

Krok 1. Pokażemy, że w L spełniony jest warunek:

$$\text{Jeśli } a \leqslant b, \text{ to } (a' \wedge b) \vee a = b. \tag{1.2.1}$$

Niech więc $a \leqslant b$ i niech $c = a' \wedge b$. Wówczas $c \wedge a = \omega$. Skoro $a' \wedge b = (a \vee b')'$, to $\omega = (a \vee b') \wedge (a' \wedge b) = ((a \vee b') \wedge a') \wedge b$. Zauważmy, że $(a \vee b') \wedge a' = (a' \wedge b)' \wedge a' = [(a' \wedge b) \vee a]' = (c \vee a)'$. Podstawiając otrzymany wynik do równania poprzedniego mamy $\omega = (c \vee a)' \wedge b$. Z faktu $a \leqslant b$ wynika, że $c \vee a = (a' \wedge b) \vee a \leqslant b \vee a = b$. Stąd $(c \vee a)' \vee b \geqslant b' \vee b = \Omega$. Zatem $(c \vee a)'$ jest dopełnieniem b, czyli $(c \vee a)' = b'$. Ostatecznie $b = (b')' = ((c \vee a)')' = c \vee a = (a' \wedge b) \vee a$.

Z automorfizmu kraty L i warunku (1.2.1) mamy następujący fakt:

$$\text{Jeśli } a \leqslant b, \text{ to } (a \vee b') \wedge b = a. \tag{1.2.2}$$

Krok 2. Pokażemy teraz, że dla dowolnych $x, y, z \in L$ spełniony jest warunek:

$$\text{Jeśli } x \wedge y = x \wedge z \text{ oraz } x \vee y = x \vee z, \text{ to } y = z. \tag{1.2.3}$$

Przypuśćmy, że $x \wedge y = a$ i $x \vee y = b$. Stąd $y = a \vee y = b \wedge y$. Niech $g = b' \vee (a' \wedge x)$. Kolejno z warunków (1.2.1) i (1.2.2) mamy
$g \vee y = b' \vee (a' \wedge x) \vee (a \vee y) = b' \vee x \vee y = b' \vee b = \Omega$,
$g \wedge y = (b' \vee (a' \wedge x)) \wedge b \wedge y = a' \wedge x \wedge y = a' \wedge a = \omega$.
Zatem $y = g'$. Ponieważ g zależy jedynie od wyboru x, to dla każdego $z \in L$ takiego, że $x \wedge z = a$ i $x \vee z = b$ mamy $g' = z$. Z jednoznaczności dopełnień mamy $y = z$.

Krok 3. Żadna z krat M_3 i N_5 (zob. Rysunek 1.1) nie spełnia warunku (1.2.3), zatem nie występują one jako podkraty w kracie L. Stąd wynika, że L jest kratą rozdzielną. Jest więc kratą Boole'a, ponieważ ma dopełnienia. □

1.3 Algebry

W całej rozprawie $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Wymiar przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(V)$ lub $\mathrm{Dim}(V)$, a przestrzeń liniową rozpiętą nad $\mathbb{K}$ przez zbiór S oznaczymy przez $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(S)$ lub $\mathrm{Lin}(S)$. Jeśli $S = \{a_1 \ldots, a_n\}$ to zapiszemy $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_n)$.

W paragrafie tym przypomnimy ważniejsze definicje i twierdzenia teorii algebr. Podamy również przykłady algebr, które będą miały zastosowanie w dalszej części rozprawy. Zawarte tu informacje będą dostosowane do potrzeb algebr nad ciałami. Część stwierdzeń pojawi się więc wraz z dowodami, które są adaptacjami dowodów stwierdzeń pochodzących z teorii pierścieni ([He68, La91, La99]).

Algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$*-algebrą,* lub krótko *algebrą* nazywamy pierścień łączny $(A, +, \cdot)$ mający jednocześnie strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$ z tym samym dodawaniem, przy czym dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{K}$ oraz dla dowolnych $x, y \in A$ spełniony jest warunek:

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y). \tag{1.3.1}$$

W sytuacji, gdy nie prowadzi to do żadnych nieporozumień, będziemy przyjmować, że algebra ma daną własność, jeśli ma tę własność jako pierścień. Będziemy wtedy używać pojęć i oznaczeń z teorii pierścieni. W tym sensie rozumiemy np. algebry z jedynką. Jeżeli algebra A posiada jedynkę, to zapiszemy ją symbolem 1_A, lub w skrócie 1, jeśli będzie wiadomo, o jaką algebrę chodzi.

Przez A^{op} będziemy oznaczać algebrę z tą samą co A liniową strukturą nad $\mathbb{K}$, lecz z odwrotnym mnożeniem, powiedzmy $*$. Zatem w A^{op} mamy $a * b = ba$ dla $a, b \in A$. Przez *wymiar algebry* A będziemy rozumieć jej wymiar jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$, czyli $\mathrm{Dim}(A)$.

Prostymi przykładami algebr są przestrzenie liniowe z zerowym mnożeniem. Inną powszechnie znaną algebrą jest zbiór $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ wszystkich macierzy kwadratowych ustalonego stopnia $n \in \mathbb{N}$ o wyrazach z $\mathbb{K}$ ze standardowymi operacjami. Przy użyciu tych samych działań macierzowych, dla dowolnej algebry A i dowolnego $n \geqslant 1$ możemy otrzymać algebrę macierzy stopnia n o współczynnikach z A, oznaczaną przez $\mathrm{M}_n(A)$.

Homomorfizmy algebr są to homomorfizmy pierścieni, które są jednocześnie przekształceniami liniowymi. Jeśli A jest algebrą, to naturalne jest definiowanie w A ideałów jednostronnych, dwustronnych, podalgebr itp. Wymagamy, aby wszystkie te struktury spełniały odpowiednie warunki pierścieniowe i były podprzestrzeniami liniowymi. Na przykład *ideałem lewostronnym algebry* A jest ideał lewostronny pierścienia A, który jest również podprzestrzenią w A. Może się zdarzyć, że dla danej algebry A istnieją ideały (a więc i ideały jednostronne) A jako pierścienia, które nie są ideałami A jako algebry.

Przykład 1.3.1. Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem nieskończonym i A niezerową $\mathbb{K}$-algebrą z zerowym mnożeniem. Niech $0 \neq v$ będzie dowolnym elementem w A.

Jeśli charakterystyka $\mathbb{K}$ jest równa zero, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, niech $I_n = \{m2^n v : m \in \mathbb{Z}\}$. Jeśli $\mathbb{K}$ ma charakterystykę $p > 0$ to, ponieważ $\mathbb{K}$ jest ciałem nieskończonym, w $\mathbb{K}$ istnieje nieskończony ciąg elementów $x_1, x_2, \ldots$ liniowo niezależnych nad prostym podciałem $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$. W tym przypadku, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ niech $I_n = \mathrm{Lin}_{\mathbb{F}}(x_n, x_{n+1}, \ldots)v$.

W obu przypadkach zbiory I_n to ideały pierścienia A nie będące nawet jednostronnymi ideałami algebry A. Ideałami jednostronnymi algebry A są bowiem tylko $\mathbb{K}$-podprzestrzenie w A. Jeśli więc $A = \mathbb{K}$, to ideałami jednostronnymi w algebrze A są tylko 0 i A.

Dla dowolnej algebry A i jej ideału I, pierścień ilorazowy A/I ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej, czyli jest algebrą, którą nazywać będziemy *algebrą ilorazową*.

Jeśli I jest ideałem lewostronnym (prawostronnym, dwustronnym) algebry A, to napiszemy $I <_l \mathrm{A}$ ($I <_r A$, $I \lhd A$). Zbiór wszystkich ideałów lewostronnych (prawostronnych, dwustronnych) algebry A oznaczać będziemy przez $\mathfrak{I}_l(A)$ ($\mathfrak{I}_r(A)$, $\mathfrak{I}(A)$). Wiadomo, że

Stwierdzenie 1.3.2. *Zbiory* $\mathfrak{I}_l(A)$, $\mathfrak{I}_r(A)$ *oraz* $\mathfrak{I}(A)$, *uporządkowane przez relację zawierania są kratami modularnymi i zupełnymi. Są to bowiem podkraty w kracie podprzestrzeni* $\mathrm{Sub}(A)$. *Kraty te są kratami ograniczonymi. Dla każdej z nich* $\omega = 0$ *i* $\Omega = A$. *Ponadto,* $\mathfrak{I}_l(A^{op}) = \mathfrak{I}_r(A)$ *i* $\mathfrak{I}_r(A^{op}) = \mathfrak{I}_l(A)$.

Z ostatniego zdania powyższego stwierdzenia wynika, że często wystarczy rozważać tylko ideały lewostronne, a wyniki stosować również do ideałów prawostronnych.

Standardowo, jeśli V_1 i V_2 są podprzestrzeniami w przestrzeni liniowej V oraz $V_1 \cap V_2 = 0$, to sumę tych podprzestrzeni nazywamy sumą prostą i oznaczymy ją przez $V_1 \oplus V_2$. Niech teraz A i B będą algebrami. Weźmy przestrzeń liniową $A \times B$. W naturalny sposób jest ona sumą prostą podprzestrzeni liniowych $A = A \times 0$ oraz

$B = 0 \times B$, czyli $A \times B = A \oplus B$. Rozszerzmy mnożenia w A i w B do mnożenia w $A \oplus B$ przyjmując $ab = ba = 0$ dla dowolnych $a \in A,\ b \in B$. Wówczas dostajemy algebrę zwaną *sumą prostą algebr* A i B, którą oznaczamy nadal przez $A \oplus B$. W tej sytuacji A i B są ideałami w algebrze $A \oplus B$.

Jeśli algebrę A da się zapisać jako sumę prostą jej ideałów I i J, to dostaniemy rozkład A na sumę prostą algebr $A = I \oplus J$ w sensie poprzedniego określenia.

Niech B, C będą niepustymi podzbiorami algebry A i co najmniej jeden z nich nie jest jednoelementowy. Wówczas przez BC oznaczymy podprzestrzeń w A generowaną przez wszystkie iloczyny bc gdzie $b \in B,\ c \in C$. Jeśli co najmniej jeden z tych zbiorów jest podprzestrzenią w A, to widać, że podprzestrzeń BC dana jest wzorem

$$BC = \{\sum_{i=1}^{n} b_i c_i : n \in \mathbb{N},\ b_i \in B,\ c_i \in C\}.$$

Jeśli B i C są podalgebrami w A, to BC nie musi być podalgebrą. Jeśli natomiast B jest ideałem lewostronnym (C jest ideałem prawostronnym) algebry A, to ich iloczyn BC jest też ideałem lewostronnym (prawostronnym) w A. Jeśli więc B i C są ideałami w A, to oczywiście BC też jest ideałem w A, oraz $BC \subseteq B \cap C$.

Ponieważ mnożenie w A jest łączne, to zdefiniowane wyżej mnożenie podzbiorów A jest również łączne. Wobec tego, iloczyn ten można rozszerzyć na dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}$ czynników, bez ustalania rozstawienia nawiasów. Przyjmujemy, że $B^1 = B$. Iloczyn $n > 0$ czynników, z których każdy jest równy B, będziemy zapisywać jako B^n.

Podzbiór B algebry A nazywamy *nilpotentnym*, jeśli $B^n = 0$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Jeśli ponadto $n \geqslant 2$ i $B^{n-1} \neq 0$, to powiemy, że B ma *stopień nilpotentności* n. Wiadomo, że jeśli $I \subseteq A$ jest jednostronnym ideałem nilpotentnym, to ideał generowany przez I w A jest również nilpotentny, tego samego stopnia nilpotentności. Algebry bez niezerowych ideałów nilpotentnych nazywamy *półpierwszymi.* Algebrę A nazwiemy *pierwszą,* jeśli dla dowolnych jej niezerowych ideałów I, J mamy $IJ \neq 0$.

Będziemy teraz chcieli wyróżnić pewne elementy algebr posiadające ważne własności. Przez *centrum algebry* A będziemy rozumieli zbiór

$$Z(A) = \{a \in A : \forall\ b \in A,\ ab = ba\}.$$

Element $a \in Z(A)$ nazywać będziemy *elementem centralnym.* Jeśli wszystkie elementy w A są centralne, to A jest algebrą przemienną. Jest widoczne, że pierścień z jedynką jest $\mathbb{K}$-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy zadany jest homomorfizm ciała $\mathbb{K}$ w $Z(A)$ przeprowadzający $1_{\mathbb{K}}$ na 1_A.

Ważnym rodzajem elementów w algebrach są idempotenty. Element $e \in A$ nazwiemy *elementem idempotentnym* (lub krócej *idempotentem*), jeśli spełnia warunek $e = e^2$. Oczywiście 0 i 1 są idempotentami w A. Wszystkie idempotenty różne od 0 nazywać będziemy *idempotentami nietrywialnymi.* Element a algebry A nazywamy *nilpotentnym* (*stopnia* 1) jeśli $a = 0$. Natomiast element $a \in A$ nazywamy *nilpotentnym* (*stopnia* $n > 1$) jeśli $a^n = 0$ oraz $a^{n-1} \neq 0$. Elementami nilpotentnymi są elementy ideałów nilpotentnych, ale nie tylko one. Element $a \in A$, dla którego istnieje niezerowe $b \in A$ takie, że $ab = 0$ ($ba = 0$) nazwiemy lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) *dzielnikiem zera.* Jeśli $a \in A$ jest lewostronnym lub prawostronnym dzielnikiem zera, to powiemy krótko, że a jest dzielnikiem zera. Algebrę bez niezerowych dzielników zera nazwiemy *dziedziną.*

Jeśli A jest algebrą z jedynką, to element $a \in A$, dla którego istnieje $b \in A$ takie, że $ab = 1$ ($ba = 1$) nazwiemy elementem *prawostronnie odwracalnym* (odpowiednio *lewostronnie odwracalnym*). Element jednocześnie lewostronnie i prawostronnie odwracalny nazwiemy elementem *odwracalnym.* Zbiór wszystkich elementów jednocześnie lewostronnie i prawostronnie odwracalnych oznaczać będziemy przez $U(A)$. Jeśli $A = U(A) \cup \{0\}$, to algebrę A nazwiemy *algebrą z dzieleniem.*

Ideał lewostronny I algebry A nazwiemy *maksymalnym* (*minimalnym*), jeśli jest koatomem (odpowiednio atomem) w kracie $\mathfrak{I}_l(A)$. Analogicznie ideał prawostronny J algebry A nazwiemy *ideałem maksymalnym* (*minimalnym*), jeśli jest koatomem (odpowiednio atomem) w kracie $\mathfrak{I}_r(A)$. Prawostronny ideał $J <_r A$ nazwiemy *regularnym,* jeśli istnieje element $a \in A$ taki, że $x - ax \in J$ dla wszystkich $x \in A$. Jednym z najważniejszych ideałów w algebrze A jest ideał będący przecięciem wszystkich ideałów prawostronnych maksymalnych, będących jednocześnie ideałami regularnymi. Ideał ten jest znany jako *radykał Jacobsona* lub krótko *radykał* algebry A i oznaczany jest zwykle symbolem $J(A)$. Różne charakteryzacje radykału Czytelnik może znaleźć np. w [He68]. Dla nas ważne będą następujące informacje: dla dowolnej algebry A, jej radykał jest ideałem A jako algebry, zawiera wszystkie jednostronne ideały nilpotentne, oraz $J(I) = I \cap J(A)$ dla dowolnego ideału $I \lhd A$. Ponadto, jeśli A jest algebrą z jedynką, to dla dowolnego ideału $I \lhd A$ mamy $1 + I \subseteq \mathrm{U}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I \subseteq \mathrm{J}(A)$.

Szczególne miejsce w tej pracy zajmują algebry zwane algebrami lokalnymi. Jeżeli algebra A ma jedynkę, oraz $A/J(A)$ jest algebrą z dzieleniem, to A nazywamy *algebrą lokalną.* Wiadomo ([La91]), że algebra A z jedynką jest lokalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \backslash U(A) = J(A)$, albo inaczej, wtedy i tylko wtedy, gdy A ma dokładnie jeden ideał lewostronny (prawostronny) maksymalny.

W niniejszej rozprawie ważne miejsce zajmują algebry wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{K}$, a czasem z dowolnej algebry A. Niech S będzie dowolnym zbiorem, a $X = \{x_s : s \in S\}$ rodziną zmiennych indeksowaną elementami zbioru S. Algebrę wielomianów nieprzemiennych zmiennych x_s, dla $s \in S$, o współczynnikach z A oznaczymy przez $A\{X\}$ lub $A\{x_s : s \in S\}$; a jeśli zmienne będą przemienne, to zapiszemy $A[X]$ lub $A[x_s : s \in S]$.

Ważnym uogólnieniem algebr wielomianów nad ciałem $\mathbb{K}$ są *algebry półgrupowe.* Niech S będzie ustaloną półgrupą. Przez $\mathbb{K}[S]$ oznaczymy zbiór wszystkich elementów postaci $\sum_{i=1}^{n} k_i s_i$ dla $k_i \in \mathbb{K}, s_i \in S$ i $n \geqslant 1$. Zbiór $\mathbb{K}[S]$ jest w naturalny sposób przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ i $S \subset \mathbb{K}[S]$. Mnożenie w $\mathbb{K}[S]$ definiujemy rozszerzając mnożenie w S przy pomocy dwuliniowości. Wówczas zbiór $\mathbb{K}[S]$ staje się $\mathbb{K}$-algebrą. Jeśli półgrupa S posiada element zerowy 0_S, to $\mathbb{K}0_S$ jest ideałem w algebrze $\mathbb{K}[S]$. Wtedy przez $\mathbb{K}_0[S]$ oznaczamy *ściągniętą algebrę półgrupową*, tj. algebrę $\mathbb{K}_0[S] = \mathbb{K}[S]/\mathbb{K}0_S$, w której całą podprzestrzeń $\mathbb{K}0_S$ „ściągamy" do zera algebry $\mathbb{K}_0[S]$. W przypadku, gdy S jest monoidem, algebrę $\mathbb{K}[S]$ nazywamy *algebrą monoidową,* a $\mathbb{K}_0[S]$ *ściągniętą algebrą monoidową.*

Ważnym przykładem półgrup z zerem, które będą istotnie wykorzystane w rozprawie są ilorazy Reesa. Przypomnijmy ich definicję.

Definicja 1.3.3. Niech S będzie dowolną półgrupą i niech $I \subseteq S$ będzie ideałem w S, czyli takim podzbiorem, że $IS \subseteq I$ oraz $SI \subseteq I$. Weźmy zbiór $S/I = (S \setminus I) \cup \{0\}$ i zadajmy na nim mnożenie w następujący sposób:

$$s \circ t = \begin{cases} st, & \text{jeśli } st \notin I \\ 0, & \text{jeśli } st \in I \\ 0, & \text{jeśli } s = 0 \text{ lub } t = 0 \end{cases}$$

dla $s, t \in S/I$. Wówczas zbiór S/I z powyższym mnożeniem jest półgrupą nazywaną *ilorazem Reesa.*

Jeśli S jest grupą, to algebrę $\mathbb{K}[S]$ nazywamy *algebrą grupową.* Pozostałe fakty wykorzystywane w niniejszej pracy, a dotyczące półgrup i algebr półgrupowych można znaleźć w [Ok91].

1.4 Warunki skończoności

W literaturze pierścienie, w których zbiór lewostronnych ideałów z porządkiem wyznaczonym przez inkluzję, spełnia warunek minimalności znane są pod nazwą *pier-*

ścieni lewostronnie artinowskich. Analogicznie definiuje się pierścienie prawostronnie artinowskie. Podobnie, przy użyciu krat $\mathfrak{I}_l(A)$ oraz $\mathfrak{I}_r(A)$, określa się algebry lewostronnie i algebry prawostronnie artinowskie. Ważnymi przykładami algebr artinowskich są algebry skończenie wymiarowe.

Oczywiście każda algebra lewostronnie (prawostronnie) artinowska jako pierścień jest lewostronnie (prawostronnie) artinowska jako algebra. Z Przykładu 1.3.1 wynika, że implikacja odwrotna nie musi być prawdziwa, nawet gdy algebra ma wymiar 1 i tylko dwa ideały. Sytuacja jest prosta, jeśli algebra A ma jedynkę, bo wtedy $\mathbb{K} \subseteq A$ w naturalny sposób jako podalgebra. Wówczas wszystkie jednostronne ideały pierścieniowe w A są jednostronnymi ideałami A jako algebry, oczywiście z tej samej strony. Podamy teraz twierdzenie, znane w nieco słabszej wersji dla pierścieni, które pozwala wykorzystywać zalety algebr z jedynką.

Twierdzenie 1.4.1. *Niech A będzie $\mathbb{K}$-algebrą. Na sumie prostej przestrzeni liniowych $A^1 = A \oplus \mathbb{K}$ zadajmy mnożenie określone wzorem:*

$$(a_1, k_1)(a_2, k_2) = (a_1a_2 + a_1k_2 + k_1a_2, k_1k_2),$$

gdzie $a_1, a_2 \in A$ oraz $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Wówczas A^1 jest algebrą z jedynką $1_{A^1} = (0, 1)$. Przy naturalnym utożsamieniu A i $\mathbb{K}$ z odpowiednimi podprzestrzeniami w A^1, spełnione są następujące warunki:

(1) *A jest ideałem w A^1, $A^1/A = \mathbb{K}$, $J(A^1) = J(A)$ oraz $(A^1)^{op} = (A^{op})^1$;*

(2) *Każdy lewostronny (prawostronny) ideał algebry A jest ideałem lewostronnym (prawostronnym) A^1 jako pierścienia;*

(3) *Jeśli I jest ideałem jednostronnym w A^1, oraz $I \nsubseteq A$ to istnieje element $a \in A$ taki, że $I = (I \cap A) \oplus \mathbb{K}(1 + a)$;*

(4) *Jeśli $I \subseteq J$ są ideałami lewostronnymi (prawostronnymi) w A^1 takimi, że $I \nsubseteq A$ oraz $I \cap A = J \cap A$, to $I = J$;*

(5) *A jest algebrą lewostronnie (prawostronnie) artinowską wtedy i tylko wtedy, gdy A^1 jest pierścieniem lewostronnie (prawostronnie) artinowskim.*

Dowód. Można łatwo sprawdzić, że zadane w sformułowaniu dowodzonego twierdzenia mnożenie przekształca A^1 w $\mathbb{K}$-algebrę z jedynką równą $(0, 1)$.

Dowody punktów (1) i (2) wynikają z bezpośrednich wyliczeń.

(3) Niech $x \in I \setminus A$. Ponieważ I jest podprzestrzenią w A^1, to możemy przyjąć $x = 1 + a$ dla pewnego $a \in A$. Pokażemy, że $I = (I \cap A) + \mathbb{K}(1 + a)$. Weźmy dowolny $y \in I \setminus A$. Możemy go zapisać w postaci $y = \lambda 1 + b$, dla pewnych $\lambda \in \mathbb{K}$ i $b \in A$. Oczywiście $y = y - \lambda x + \lambda x$ oraz $y - \lambda x \in I \cap A$, co kończy dowód.

(4) Z konstrukcji A^1 wynika, że A jest zarówno lewostronnym jak i prawostronnym ideałem maksymalnym w A^1. Wobec tego, z założenia wynika, że $I + A = J + A = A^1$. Stąd $I = J$, ponieważ kraty jednostronnych ideałów w A^1 są modularne. Można też otrzymać (4) jako prostą konsekwencję (3).

(5) Ponieważ A^1 jest algebrą z jedynką, to A^1 jest artinowska jako pierścień wtedy i tylko wtedy, gdy jest artinowska jako algebra. Teraz teza (5) łatwo wynika z (4). $\square$

O algebrach artinowskich znanych jest dużo nietrywialnych faktów. Wiele dowodów tych faktów jest przeprowadzanych tylko dla pierścieni artinowskich. Ich algebrowe wersje można uzyskać albo przez adaptację pierścieniowych dowodów, albo korzystając z rezultatów o pierścieniach zastosowanych do algebr z jedynką, dołączoną jak w Twierdzeniu 1.4.1. Przytoczymy teraz kilka rezultatów, które można uzyskać na tej drodze.

Twierdzenie 1.4.2 (Wedderburn-Artin). *Dla dowolnej nietrywialnej, półpierwszej algebry A równoważne są warunki:*

(1) *A jest lewostronnie artinowska.*

(2) *A jest prawostronnie artinowska.*

(3) *A ma jedynkę i każdy ideał lewostronny w A jest generowany przez element idempotentny.*

(4) *A ma jedynkę i każdy ideał prawostronny w A jest generowany przez element idempotentny.*

(5) *A jest izomorficzna z algebrą postaci*

$$M_{n_1}(D_1) \oplus M_{n_2}(D_2) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(D_s), \tag{1.4.1}$$

gdzie D_i, $i \in \{1, \ldots, s\}$ są algebrami z dzieleniem, $0 \neq n_i \in \mathbb{N}$.

Dowód. Rozpatrzmy A jako ideał w A^1. Jeśli A jest np. lewostronnie artinowska, to z Twierdzenia 1.4.1(5) wynika, że A^1 jest pierścieniem lewostronnie artinowskim. Ponadto z półpierwszości A wynika, że A^1 jest też algebrą półpierwszą. Pierścieniowa wersja dowodzonego właśnie twierdzenia daje równoważność warunków (1) i (5) dla A^1, a warunek (5) przenosi się na ideały. To pozwala łatwo zakończyć dowód równoważności warunków (1) i (5) dla algebry A.

Równoważność warunków (2) i (5) wynika z pierwszej części dowodu zastosowanej do algebry A^{op}.

Warunki (3), (4) i (5) dotyczą pierścieni z jedynką. Ich równoważność można więc dowodzić jak dla pierścieni. $\square$

Algebry, które spełniają warunki powyższego twierdzenia nazywane są *algebrami półprostymi* i stanowią one ważną klasę algebr.

Z Twierdzenia 1.4.1 i własności radykału Jacobsona wynika kolejny ważny fakt.

Twierdzenie 1.4.3 (Wedderburn-Artin)**.** *Jeśli A jest lewostronnie (prawostronnie) artinowską algebrą, to* $\mathrm{J}(A)$ *jest ideałem nilpotentnym. Jeśli* $A \neq \mathrm{J}(A)$, *to* $A/\mathrm{J}(A)$ *jest algebrą półprostą.*

Dowód. Niech algebra A będzie lewostronnie artinowska. Jeśli A ma jedynkę, to A jest lewostronnie artinowska jako pierścień i teza wynika z odpowiedniego twierdzenia dla pierścieni lewostronnie artinowskich. Jeśli A nie ma jedynki, to z założenia i z Twierdzenia 1.4.1 wynika, że A^1 jest też algebrą lewostronnie artinowską, więc z pierwszej części dowodu mamy, że $J(A^1)$ jest ideałem nilpotentnym. Korzystając ponownie z Twierdzenia 1.4.1 mamy $J(A^1) = J(A)$, stąd $J(A)$ jest nilpotentny. Teraz dokończenie dowodu dla algebr lewostronnie artinowskich wynika z Twierdzenia 1.4.2.

Dowód dla algebr prawostronnie artinowskich można uzyskać wykorzystując algebrę A^{op} i fakt, że $J(A) = J(A^{op})$. $\square$

Jako konsekwencję otrzymujemy dla algebr fakt, który w przypadku pierścieniowym wykazywany jest zwykle przy założeniu istnienia jedynki.

Wniosek 1.4.4 (Hopkins)**.** *Jeśli algebra A jest lewostronnie (prawostronnie) artinowska, to krata* $\mathfrak{I}_l(A)$ $(\mathfrak{I}_r(A))$ *jest skończonej długości. Jeśli ponadto A jest nilpotentna, to A jest skończenie wymiarowa.*

Dowód. Załóżmy, że A jest algebrą lewostronnie artinowską. Niech na razie A ma jedynkę. Wtedy A jest lewostronnie artinowska jako pierścień i teza wynika z twierdzenia Hopkinsa dla pierścieni lewostronnie artinowskich.

Jeśli A nie ma jedynki, to z założenia i z Twierdzenia 1.4.1 wynika, że A^1 jest też algebrą lewostronnie artinowską, więc z pierwszej części dowodu mamy, iż krata $\mathfrak{I}_l(A^1)$ ma skończoną długość. Ponieważ A jest koatomem w $\mathfrak{I}_l(A^1)$ i krata $\mathfrak{I}_l(A)$ jest identyczna z przedziałem $[\omega, A]$ w $\mathfrak{I}_l(A^1)$, to z modularności kraty $\mathfrak{I}_l(A^1)$ oraz Twierdzenia 1.2.6 wynika, że krata $\mathfrak{I}_l(A)$ ma skończoną długość, o 1 mniejszą niż $\mathfrak{I}_l(A^1)$.

Tezę dla nilpotentnych algebr lewostronnie artinowskich można bez trudu uzyskać przez indukcję ze względu na stopień nilpotentności algebry A.

Twierdzenie dla przypadku algebr prawostronnie artinowskich można otrzymać stosując rozumowania jak wyżej do algebry A^{op}. $\square$

Korzystając z bezpośredniego sprawdzenia, albo z rezultatów przytoczonych wyżej otrzymujemy następujący opis algebr wymiaru 1 i 2.

Przykład 1.4.5 (Algebry wymiaru co najwyżej 2)**.** Niech A oznacza algebrę.

(a) Jeśli $\mathrm{Dim}(A) = 1$, to albo $A \simeq \mathbb{K}$, albo $A^2 = 0$.

(b) Jeśli $\mathrm{Dim}(A) = 2$ i A jest przemienna, to albo A jest ciałem; albo $A \simeq \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$; albo $A \simeq \mathbb{K}[x]/(x^2)$; albo $A \simeq x\mathbb{K}[x]/(x^3)$; albo w A istnieje baza $\{e, x\}$, dla której mnożenie jest zadane przez $e^2 = e$ oraz $x^2 = ex = xe = 0$; albo $A^2 = 0$.

(c) Jeśli $\mathrm{Dim}(A) = 2$ i A nie jest algebrą przemienną, to w A istnieje baza $\{e, x\}$, dla której mnożenie w A jest zadane przez $e^2 = e, x^2 = 0$ i albo $ex = x$ oraz $xe = 0$; albo $ex = 0$ oraz $xe = x$.

Rozszerzając pojęcie algebr artinowskich algebrę A nazwiemy *półprymarną,* gdy jej radykał J jest nilpotentny, a algebra ilorazowa A/J jest algebrą półprostą. Zatem algebra półprymarna nie jest nilpotentna. W szczególnym przypadku, gdy A jest półprymarna i lokalna, to algebrę A nazwiemy *całkowicie prymarną*. Wiele przykładów takich algebr pojawi się dalej w tekście.

Można łatwo sprawdzić, że jeśli algebra A jest półprymarna, to A^1 jest też algebrą półprymarną. Okazuje się, że szereg rezultatów uzyskanych początkowo dla algebr skończenie wymiarowych można wykazać dla algebr półprymarnych. Między innymi mamy:

Twierdzenie 1.4.6. *Niech A będzie algebrą półprymarną z radykałem J.*

(1) *Jeśli A jest algebrą z 1, to każdy element $a \in A$ jest albo dzielnikiem zera z obu stron, albo jest elementem odwracalnym.*

(2) *Jeśli $0 \neq a \in A$ nie jest elementem nilpotentnym, ale $(a^2 - a)^n = 0$ dla pewnego $n \geqslant 1$, to istnieje idempotent $e \in \mathrm{Lin}(a, a^2, \ldots)$ taki, że $a^n = a^n e$.*

(3) *Jeśli $a \in A$ i $a^2 - a \in J$, to istnieje idempotent $e \in A$ taki, że $a - e \in J$, czyli idempotent $a + J \in A/J$ może być podniesiony do idempotenta $e \in A$.*

(4) *Jeśli $I \subseteq A$ jest jednostronnym ideałem, to albo jest on nilpotentny, albo zawiera nietrywialny element idempotentny.*

Dowód. Punkt (1) udowodnimy w kilku krokach.

(a) Najpierw udowodnimy, że jeśli $a \in A$ nie jest prawostronnym (lewostronnym) dzielnikiem zera, to a jest elementem lewostronnie (odpowiednio prawostronnie) odwracalnym.

Załóżmy więc, że $a \in A$ nie jest prawostronnym dzielnikiem zera. Rozpatrzmy ciąg ideałów lewostronnych $Aa \supseteq Aa^2 \supseteq Aa^3 \supseteq \ldots$. Z charakteryzacji pierścieni doskonałych, w tym półprymarnych, danej przez H. Bassa ([La91], §23) wiemy, że $Aa^n = Aa^{(n+1)}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Stąd, dla pewnego $b \in A$ mamy $ba^{(n+1)} = a^n$, czyli też $(ba-1)a^n = 0$. Stąd i z założenia o a mamy $ba = 1$. Zatem a jest elementem lewostronnie odwracalnym. Analogicznie jak wyżej, ale rozpatrując prawostronne ideały główne, możemy pokazać, że jeśli nie jest lewostronnym dzielnikiem zera, to a jest elementem prawostronnie odwracalnym.

(b) Pokażemy, że każdy lewostronny (prawostronny) dzielnik zera jest też prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) dzielnikiem zera.

Załóżmy, że $a \in A$ jest lewostronnym dzielnikiem zera, ale nie jest prawostronnym dzielnikiem zera. Wówczas $ax = 0$ dla pewnego $0 \neq x \in A$, ponadto z (a) wiemy, że $ba = 1$ dla pewnego $0 \neq b \in A$. Ale wtedy $x = (ba)x = b(ax) = 0$, co daje sprzeczność. Analogicznie pokazujemy, że każdy prawostronny dzielnik zera musi być lewostronnym dzielnikiem zera.

(c) Łącząc (a) i (b) otrzymujemy, że jeśli a nie jest dzielnikiem zera, to jest elementem odwracalnym.

(2) Niech $a \in A$ nie będzie elementem nilpotentnym, ale $(a^2 - a)^n = 0$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Wtedy możemy przepisać ten warunek w postaci $a^n = a^{n+1} f(a)$ dla pewnego wielomianu $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Stąd przez indukcję, dla dowolnego $k \geqslant 1$ mamy $a^n = a^{n+k} f(a)^k$. W szczególności $a^n = a^{2n} f(a)^n$. Połóżmy $e = a^n f(a)^n$. Wtedy

$$e^2 = a^{2n} f(a)^{2n} = a^{2n} f(a)^n f(a)^n = a^n f(a)^n = e,$$

czyli e jest idempotentem. Ponieważ a nie jest elementem nilpotentnym i $a^n = a^n e$, to $e \neq 0$. Widać również z konstrukcji, że $e \in \mathrm{Lin}(a, a^2, \ldots)$.

(3) Jeśli $a \in J$, to wystarczy przyjąć $e = 0$. Niech więc dalej $a \in A$ będzie takim elementem, że $a \notin J$, ale $a^2 - a \in J$. Wobec tego łatwo zobaczyć, że a nie jest elementem nilpotentnym. Istnieje też $n \geqslant 1$, takie że $(a^2 - a)^n = 0$. Jeśli $n = 1$, to wystarczy przyjąć $e = a$. Niech więc dalej będzie $n > 1$. Skoro a nie jest elementem nilpotentnym, to weźmy $\mathrm{f}(a)$ i e jak w dowodzie punktu (2). Mamy więc $a^n = a^{2n} f(a)^n$ oraz $e = a^n f(a)^n$. Niech $\equiv$ oznacza przystawanie modulo J w A. Ponieważ J jest ideałem, więc z założenia wynika, że $a \equiv a^k$ dla dowolnego $k \geqslant 1$. Wobec tego

$$a \equiv a^n = a^{2n} \mathrm{f}(a)^n \equiv a^n \mathrm{f}(a)^n = e,$$

czyli $a \equiv e$.

(4). Niech $I \subseteq A$ będzie ideałem jednostronnym. Jeśli $I \subseteq J(A)$, to I jest nilpotentny, ponieważ A jest algebrą półprymarną. Jeśli natomiast $I \not\subseteq J(A)$, to w półprostej algebrze $A/J(A)$ mamy niezerowy ideał jednostronny $(I + J(A))/J(A)$. Wobec Twierdzenia 1.4.2 zawiera on niezerowy element idempotentny, obraz pewnego elementu $a \in I$. Teraz widać, że a nie jest elementem nilpotentnym, ale $a^2 - a \in J(A)$ jest elementem nilpotentnym. Teza wynika więc z punktu (2). $\square$

ROZDZIAŁ 2

Anihilatory

2.1 Kraty anihilatorów

Definicja 2.1.1. Niech A będzie algebrą i $S \subseteq A$ niepustym podzbiorem. *Lewostronnym anihilatorem S w A* nazywamy zbiór:

$$\mathrm{l}_A(S) = \mathrm{l}(S) = \{a \in A : aS = 0\}.$$

Analogicznie, *prawostronny anihilator S w A*, to zbiór:

$$\mathrm{r}_A(S) = \mathrm{r}(S) = \{a \in A : Sa = 0\}.$$

Podamy teraz pewne, wynikające wprost z definicji, własności anihilatorów.

Stwierdzenie 2.1.2. *Niech A będzie algebrą i niech S, T będą podzbiorami A. Niech I będzie dowolnym zbiorem i niech S_i, dla dowolnego $i \in I$, będzie podzbiorem algebry A. Wówczas:*
(1) *Jeśli $S \subseteq T$, to $\mathrm{l}(S) \supseteq \mathrm{l}(T)$ i $\mathrm{r}(S) \supseteq \mathrm{r}(T)$;*
(2) $\mathrm{l}(S) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\mathrm{l}(S)))$ *i* $\mathrm{r}(S) = \mathrm{r}(\mathrm{l}(\mathrm{r}(S)))$;
(3) *Jeśli* $\mathrm{l}(\mathrm{r}(S)) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(T))$, *to* $\mathrm{r}(S) = \mathrm{r}(T)$;
(4) *Jeśli* $\mathrm{r}(\mathrm{l}(S)) = \mathrm{r}(\mathrm{l}(T))$, *to* $\mathrm{l}(S) = \mathrm{l}(T)$;
(5) $\mathrm{l}(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{l}(S_i)$ *i* $\mathrm{r}(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{r}(S_i)$;
(6) *Jeśli S_i są podprzestrzeniami A, to* $\mathrm{l}(\Sigma_{i\in I} S_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{l}(S_i)$ *i* $\mathrm{r}(\Sigma_{i\in I} S_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{r}(S_i)$;
(7) *Jeśli $S \lhd A$, to $\mathrm{l}(S) \lhd A$ i $\mathrm{r}(S) \lhd A$.*

W niniejszej rozprawie interesował nas będzie zbiór wszystkich lewostronnych anihilatorów w algebrze A, który oznaczać będziemy symbolem $\mathfrak{A}_l(A)$. Będziemy taż rozpatrywać zbiór $\mathfrak{A}_r(A)$, czyli zbiór wszystkich prawostronnych anihilatorów w algebrze A.

Uwzględniając łączność mnożenia w algebrze A zauważmy, że każdy lewostronny anihilator w A jest lewostronnym ideałem w pierścieniu A i podobnie, każdy prawostronny anihilator w A jest prawostronnym ideałem w pierścieniu A. Wobec wzoru (1.3.1) każdy lewostronny anihilator i każdy prawostronny anihilator w A jest podprzestrzenią nad $\mathbb{K}$, a więc ideałem jednostronnym algebry A. To powoduje, że $\mathfrak{A}_l(A) \subseteq \mathfrak{I}_l(A)$ oraz $\mathfrak{A}_r(A) \subseteq \mathfrak{I}_r(A)$.

Niech $I = \mathrm{l}(S)$ i $J = \mathrm{l}(T)$ będą lewostronnymi anihilatorami w algebrze A. Wówczas ze Stwierdzenia 2.1.2 wynika, że zbiór $I \cap J = \mathrm{l}(S) \cap \mathrm{l}(T) = \mathrm{l}(S \cup T)$ jest lewostronnym ideałem i lewostronnym anihilatorem w A. Natomiast zbiór $I + J$ jest lewostronnym ideałem, ale nie musi być lewostronnym anihilatorem. Jednakże zbiory $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_r(A)$ mają strukturę kratową.

Twierdzenie 2.1.3. *Dla dowolnej algebry A mamy*

$$\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A^{op}) \quad i \quad \mathfrak{A}_r(A) = \mathfrak{A}_l(A^{op}). \tag{2.1.1}$$

Zbiór $\mathfrak{A}_l(A)$ z porządkiem zadanym przez inkluzję jest kratą zupełną z operacjami zadanymi dla dowolnej rodziny anihilatorów lewostronnych $\{I_t : t \in T\}$ przez warunek:

$$\bigwedge_{t\in T} I_t = \bigcap_{t\in T} I_t \quad oraz \quad \bigvee_{t\in T} I_t = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\bigcup_{t\in T} I_t)) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\sum_{t\in T} I_t)). \tag{2.1.2}$$

Zbiór $\mathfrak{A}_r(A)$ z porządkiem zadanym przez inkluzję jest kratą zupełną z operacjami zadanymi dla dowolnej rodziny anihilatorów prawostronnych $\{I_t : t \in T\}$ przez warunek:

$$\bigwedge_{t\in T} I_t = \bigcap_{t\in T} I_t \quad oraz \quad \bigvee_{t\in T} I_t = \mathrm{r}(\mathrm{l}(\bigcup_{t\in T} I_t)) = \mathrm{r}(\mathrm{l}(\sum_{t\in T} I_t)). \tag{2.1.3}$$

Dowód. Równości (2.1.1) wynikają bezpośrednio z definicji anihilatorów i z określenia algebry A^{op}.

Wprost ze Stwierdzenia 2.1.2 (5) wynikają wzory na kres dolny w zbiorach lewostronnych i prawostronnych anihilatorów. Z punktów (1) i (2) Stwierdzenia 2.1.2 wynika, że dla każdego podzbioru S algebry A zbiór $\mathrm{l}(\mathrm{r}(S))$ (analogicznie $\mathrm{r}(\mathrm{l}(S))$) jest najmniejszym lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) anihilatorem zawierającym S. Oczywiście $\mathrm{l}(\mathrm{r}(\bigcup_{t\in T} I_t)) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\sum_{t\in T} I_t))$. W ten sposób wykazaliśmy słuszność wzorów (2.1.2) i (2.1.3). $\square$

Z faktu, że $I+J$ nie musi być lewostronnym anihilatorem, dla $I, J \in \mathfrak{A}_l(A)$, wynika że krata lewostronnych anihilatorów algebry A nie musi być podkratą kraty lewostronnych ideałów algebry A. Podobnie, krata prawostronnych anihilatorów algebry A nie musi być podkratą kraty prawostronnych ideałów w A. Wiele przykładów algebr o takich własnościach pojawi się w dalszej części rozprawy. Jednak naturalne zawierania krat anihilatorów w kratach ideałów jednostronnych są $\wedge$-homomorfizmami krat.

O lewostronnym (lub prawostronnym) anihilatorze I powiemy, że jest *właściwy* jeśli $I \neq 0$ i $I \neq A$. Jeśli A jest algebrą z jedynką, to w kratach $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_r(A)$, (podobnie jak w kratach jednostronnych ideałów) mamy $\omega = 0$ i $\Omega = A$. Gdy A nie posiada jedynki, to $0 \subseteq \mathrm{l}(A)$ i $0 \subseteq \mathrm{r}(A)$, ale 0 nie musi być anihilatorem w A. Sytuacja taka ma miejsce np. w dowolnej niezerowej algebrze z zerowym mnożeniem.

Zwróćmy uwagę na pewną własność krat anihilatorów, która wynika bezpośrednio ze Stwierdzenia 2.1.2. Mianowicie, dla dowolnej algebry A, jeśli każdy element kraty $\mathfrak{A}_l(A)$ ($\mathfrak{A}_r(A)$) jest ideałem dwustronnym, to również każdy element kraty $\mathfrak{A}_r(A)$ (odpowiednio $\mathfrak{A}_l(A)$) jest ideałem dwustronnym. Wiadomo, że w przypadku krat ideałów jednostronnych analogiczna sytuacja nie musi mieć miejsca.W Przykładzie 3.3.4 przedstawiona jest algebra lokalna i artinowska, w której każdy lewostronny ideał jest ideałem dwustronnym, ale nie każdy prawostronny ideał jest dwustronny.

Przedstawimy teraz ważną własność krat anihilatorów (odnotowaną jako Zadanie 25, §6, w [La99]), różniącą je od krat ideałów jednostronnych.

Twierdzenie 2.1.4. *Dla dowolnej algebry A odwzorowanie $\mathfrak{A}_l(A) \longrightarrow \mathfrak{A}_r(A)$ dane przez $I \longrightarrow \mathrm{r}(I)$ jest antyizomorfizmem krat zupełnych. Odwzorowanie odwrotne dane jest przez $J \longrightarrow \mathrm{l}(J)$ dla dowolnego prawostronnego anihilatora $J \in \mathfrak{A}_r(A)$. Jest to więc odpowiedniość typu Galois.*

Dowód. Niech ϕ będzie odwzorowaniem z $\mathfrak{A}_l(A)$ w $\mathfrak{A}_r(A)$ danym przez $\phi(I) = \mathrm{r}(I)$ dla $I \in \mathfrak{A}_l(A)$. Niech też ψ będzie odwzorowaniem z $\mathfrak{A}_r(A)$ w $\mathfrak{A}_l(A)$ danym przez $\psi(J) = \mathrm{l}(J)$. Wówczas, wobec Stwierdzenia 2.1.2 i Twierdzenia 2.1.3 łatwo zauważyć, że przekształcenia ϕ i ψ są antyizomorfizmami krat zupełnych. Ponadto, przekształcenie $\psi \circ \phi$ jest identycznością na zbiorze $\mathfrak{A}_l(A)$, a przekształcenie $\phi \circ \psi$ jest identycznością na zbiorze $\mathfrak{A}_r(A)$. Teza twierdzenia została uzasadniona. $\square$

Jeśli A jest algebrą całkowicie prymarną, to oczywiście jej radykał jest lewostronnym i prawostronnym anihilatorem w A. Bezpośrednio z powyższego twierdzenia dostajemy następną obserwację.

Wniosek 2.1.5. *Niech A będzie algebrą całkowicie prymarną i niech J będzie jej radykałem. Wówczas krata $\mathfrak{A}_l(A)$ ma dokładnie jeden atom $\mathrm{l}(J)$ i dokładnie jeden koatom J. Ponadto zbiór $\mathfrak{A}_l(A) \setminus \{A, 0\}$ jest kratą postaci $[\mathrm{l}(J), J] \subseteq \mathfrak{A}_l(A)$. Analogicznie krata $\mathfrak{A}_r(A)$ ma dokładnie jeden atom $\mathrm{r}(J)$ i dokładnie jeden koatom J. Zbiór $\mathfrak{A}_r(A) \setminus \{A, 0\}$ jest kratą postaci $[\mathrm{r}(J), J] \subseteq \mathfrak{A}_r(A)$.*

W literaturze rozpatrywane są algebry z jedynką, w których każdy lewostronny ideał jest lewostronnym anihilatorem i każdy prawostronny ideał jest prawostronnym anihilatorem. Takie algebry znane są jako *„dual"* algebry (zob. [HN85] i referencje tam). Algebry te nazywać będziemy krótko *D-algebrami.* Wiadomo (zob. Przykład 3.3.4), że w definicji D-algebr warunek jednostronny nie wystarcza. Wiadomo też, że jeśli A jest D-algebrą, to algebra $A/(\mathrm{J}(A))$ jest półprosta i idempotenty algebry $A/(\mathrm{J}(A))$ można podnieść do idempotentów w A ([HN85]). D-algebry są więc podobne do algebr półprymarnych. Jednak klasy te są różne (zob. Przykład 2.2.11).

Wprost z definicji D-algebr wynika, że we wszystkich D-algebrach kraty anihilatorów są modularne. Istnieje też wiele algebr nie będących D-algebrami, których kraty anihilatorów są również modularne (np. wszystkie algebry bez dzielników zera, nie będące algebrami z dzieleniem). Od dawna ([Ke83, Ni78]) znane są również algebry, w których kraty anihilatorów nie są modularne. Wiele przykładów takich algebr można otrzymać z konstrukcji podanych w Rozdziale 3 rozprawy.

W przypadku algebr z jedynką i artinowskich z obu stron, D-algebry są znane jako *QF-algebry,* czyli *algebry quasi Frobeniusa.* Wobec Twierdzenia 2.1.4 i Wniosku 1.4.4 każda D-algebra jednostronnie artinowska jest już QF-algebrą. Oczywiście w dowolnej algebrze A z 1, dla dowolnego idempotenta e mamy $Ae = \mathrm{l}(1-e)$ i $eA = \mathrm{r}(1-e)$. Z tego faktu oraz z Twierdzenia 1.4.2 wynika, że klasa QF-algebr zawiera wszystkie algebry półproste. Innym przykładem QF-algebr są algebry grupowe grup skończonych (por. Zadanie 14, §15 w [La99]). Wspomnijmy jeszcze, że klasa QF-algebr ma wiele równoważnych charakteryzacji (zob. [La99, CR62, DK94]).

Opiszemy teraz dokładniej własności krat anihilatorów w algebrze $A = M_n(D)$, gdzie D jest algebrą z dzieleniem i $n \geqslant 1$. Kratę ideałów prawostronnych tej algebry można opisać używając idempotentów. Z drugiej strony, zgodnie z [vN60] (str. 66-67) krata ideałów prawostronnych w algebrze A jest izomorficzna z kratą D-podmodułów prawostronnego D-modułu D^n. Z tej charakteryzacji oraz faktu, że A jest QF-algebrą łatwo dostajemy opis własności krat anihilatorów tej algebry.

Twierdzenie 2.1.6. *Niech D będzie algebrą z dzieleniem, $n \geqslant 1$ i niech $A = M_n(D)$. Wówczas:*

(1) *Krata* $\mathfrak{A}_l(A)$ $(\mathfrak{A}_r(A))$ *jest modularna, z dopełnieniami i ma długość* n.

(2) *Krata* $\mathfrak{A}_l(A)$ $(\mathfrak{A}_r(A))$ *ma skończoną szerokość wtedy i tylko wtedy, gdy* D *jest ciałem skończonym.*

2.2 Operacje na algebrach i anihilatory

W paragrafie tym przedstawimy wybrane zależności pomiędzy kratami anihilatorów i typowymi operacjami na algebrach.

Jeśli A, B są algebrami z jedynkami, to krata lewostronnych ideałów algebry $A \oplus B$ jest iloczynem prostym krat $\mathfrak{I}_l(A)$ i $\mathfrak{I}_l(B)$. Analogiczny rezultat jest prawdziwy dla krat ideałów prawostronnych. W przypadku krat anihilatorów mamy silniejszy rezultat, ponieważ nie musimy zakładać istnienia jedynek w algebrach.

Stwierdzenie 2.2.1. *Niech* A, B *będą algebrami. Wówczas dla dowolnych podzbiorów* $S \subseteq A$ *oraz* $T \subseteq B$ *mamy* $\mathrm{l}_{A\oplus B}(S \times T) = \mathrm{l}_A(S) \times \mathrm{l}_B(T)$ *oraz* $\mathrm{r}_{A\oplus B}(S \times T) = \mathrm{r}_A(S) \times \mathrm{r}_B(T)$. *Wobec tego*

$$\mathfrak{A}_l(A \oplus B) \simeq \mathfrak{A}_l(A) \times \mathfrak{A}_l(B) \quad i \quad \mathfrak{A}_r(A \oplus B) \simeq \mathfrak{A}_r(A) \times \mathfrak{A}_r(B).$$

Dowód. Niech S, T będą takie jak w założeniach stwierdzenia. Oczywiście $\mathrm{l}_A(S) \times \mathrm{l}_B(T) \subseteq \mathrm{l}_{A\oplus B}(S \times T)$. Niech $(s_1, t_1) \in \mathrm{l}_{A\oplus B}(S \times T)$. Wówczas $(s_1, t_1)(s, t) = (0, 0)$ dla dowolnego elementu $(s, t) \in (S \times T)$, co daje $s_1 \in \mathrm{l}_A(S)$ i $t_1 \in \mathrm{l}_B(T)$. Zatem $\mathrm{l}_{A\oplus B}(S \times T) \subseteq \mathrm{l}_A(S) \times \mathrm{l}_B(T)$. Dowód dla anihilatorów prawostronnych jest analogiczny. □

W przypadku dowolnych podalgebr w algebrach zależność krat anihilatorów jest dużo słabsza.

Twierdzenie 2.2.2 ([JK15a])**.** *Niech* $A \subseteq B$ *będą algebrami, i niech* μ *będzie odwzorowaniem* $\mathfrak{A}_l(A)$ *w* $\mathfrak{A}_l(B)$ *określonym dla każdego* $I \in \mathfrak{A}_l(A)$ *przez*

$$\mu(I) = \mathrm{l}_B(\mathrm{r}_A(I)).$$

Wówczas $I \subseteq \mu(I)$ *i* $I = A \cap \mu(I)$ *dla każdego* $I \in \mathfrak{A}_l(A)$. *Ponadto,* μ *jest zanurzeniem zbiorów uporządkowanych.*

Dowód. Niech $I, J \in \mathfrak{A}_l(A)$ i $I \subseteq J$. Oczywiście $\mathrm{r}_A(I) \supseteq \mathrm{r}_A(J)$. Stąd

$$\mu(I) = \mathrm{l}_B(\mathrm{r}_A(I)) \subseteq \mathrm{l}_B(\mathrm{r}_A(J)) = \mu(J).$$

Zatem μ zachowuje porządek. Ponadto,

$$I \subseteq A \cap \mu(I) = \mathrm{l}_A(\mathrm{r}_A(I)) = I.$$

Stąd μ jest zanurzeniem zbiorów uporządkowanych. Dodatkowo, przekształcenie τ z $\mathfrak{A}_l(B)$ w $\mathfrak{I}_l(A)$ określone dla każdego $J \in \mathfrak{A}_l(B)$ przez $\tau(J) = J \cap A$ wyznacza jednostronną odwrotność przekształcenia μ. $\square$

Wniosek 2.2.3. *Niech A będzie dowolną algebrą i X dowolnym zbiorem zmiennych. Wówczas odwzorowania $I \longrightarrow I[X]$ i $I \longrightarrow I\{X\}$ są zanurzeniami krat anihilatorów $\mathfrak{A}_l(A)$ w $\mathfrak{A}_l(A[X])$ i $\mathfrak{A}_r(A)$ w $\mathfrak{A}_r(A[X])$, oraz $\mathfrak{A}_l(A)$ w $\mathfrak{A}_l(A\{X\})$ i $\mathfrak{A}_r(A)$ w $\mathfrak{A}_r(A\{X\})$.*

Dowód. Niech na razie $B = A[X]$. Można łatwo sprawdzić, przy oznaczeniach jak w twierdzeniu wyżej, że $\mu(I) = I[X]$ dla $I \in \mathfrak{A}_l(A)$. Oczywiście $I[X] \cap J[X] = (I \cap J)[X]$, czyli μ zachowuje kresy dolne. Niech $I, J \in \mathfrak{A}_l(A)$ oraz $I \vee J$ oznacza kres górny I i J w kracie $\mathfrak{A}_l(A)$. Trzeba jeszcze pokazać, że $\mathrm{l}_B(\mathrm{r}_B(I[X] \cup J[X])) = (I \vee J)[X]$.

Niech S będzie dowolnym podzbiorem A. Ponieważ $S[X] \supseteq S$, to $\mathrm{r}_B(S[X]) \subseteq \mathrm{r}_B(S) = (\mathrm{r}_A(S))[X]$. Oczywiście $(\mathrm{r}_A(S))[X] \subseteq \mathrm{r}_B(S[X])$, stąd $\mathrm{r}_B(S[X]) = (\mathrm{r}_A(S))[X]$. Podobnie $\mathrm{l}_B(S[X]) = (\mathrm{l}_A(S))[X]$.

Zatem dla $I, J \in \mathfrak{A}_l(A)$ mamy $\mathrm{l}_B(\mathrm{r}_B(I[X] \cup J[X])) = \mathrm{l}_B(\mathrm{r}_B((I + J)[X])) = \mathrm{l}_B((\mathrm{r}_A(I + J))[X]) = (\mathrm{l}_A(\mathrm{r}_A(I + J)))[X] = (I \vee J)[X]$, co dowodzi faktu, że μ zachowuje kresy górne.

Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny. $\square$

Modyfikując wniosek 2.4 z pracy [JK15a] otrzymujemy

Twierdzenie 2.2.4. *Niech A będzie algebrą i $B = AS^{-1} = S^{-1}A$ jej klasycznym pierścieniem ułamków, dla pewnego podzbioru Orego nie dzielników zera $S \subset A$. Wówczas, przy oznaczeniach z Twierdzenia 2.2.2, przekształcenie μ jest izomorfizmem krat $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_l(B)$. Jeśli więc B jest D-algebrą, to $\mathfrak{A}_l(A)$ jest kratą modularną.*

Dowód. Z założeń łatwo wynika, że każdy anihilator w B jest anihilatorem pewnego podzbioru zawartego w A, co pozwala łatwo zakończyć dowód. $\square$

Z twierdzeń Goldiego ([He68, La99]) otrzymujemy rezultat dla algebr półpierwszych.

Wniosek 2.2.5. *Jeśli A jest algebrą półpierwszą oraz lewostronnie i prawostronnie Goldiego, to $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_r(A)$ są modularnymi kratami skończonej długości.*

Stosując teraz twierdzenie Posnera ([He68]) o algebrach pierwszych z tożsamościami otrzymujemy:

Wniosek 2.2.6. *Jeśli A jest algebrą pierwszą spełniającą nietrywialną tożsamość wielomianową, to $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_r(A)$ są kratami modularnymi skończonej długości.*

Zbadamy teraz pewne zależności pomiędzy kratami anihilatorów algebr A i A^1.

Twierdzenie 2.2.7. *Niech A będzie algebrą nilpotentną. Wówczas $\mathfrak{A}_l(A^1)$ ma dokładnie jeden atom $\omega' = \mathrm{l}_{A^1}(A) = \mathrm{l}_A(A)$ i dokładnie jeden koatom $\Omega' = A$, oraz $[\omega', \Omega'] \backsimeq \mathfrak{A}_l(A)$.*

Dowód. Niech $A^n = 0, A^{n-1} \neq 0$ dla pewnego $n \in N$. Wówczas w kracie $\mathfrak{A}_l(A)$ element najmniejszy (czyli $\mathrm{l}_A(A)$) jest niezerowy, ponieważ $\mathrm{l}_A(A) \supseteq A^{n-1}$. Z Twierdzenia 1.4.1 (1) wiemy, że $J(A^1) = J(A) = A$. A więc A^1 jest algebrą całkowicie prymarną i $J(A^1) = A$.

Z Wniosku 2.1.5 wiemy, że $\mathfrak{A}_l(A^1)$ ma dokładnie jeden koatom A i dokładnie jeden atom $\mathrm{l}_{A^1}(A)$.

Z własności radykału mamy, że $a + 1$ jest elementem odwracalnym w A^1, dla każdego $a \in A$. Stąd każdy element w A^1 postaci $a + k$, dla $a \in A, 0 \neq k \in \mathbb{K}$, jest odwracalny w A^1. Stąd dla dowolnego niepustego $X \subseteq A^1$ i $X \nsubseteq A$, mamy $\mathrm{l}_{A^1}(X) = \mathrm{r}_{A^1}(X) = 0$. Natomiast, jeśli $X \subseteq A$ i $X \neq \{0\}$, to $\mathrm{l}_{A^1}(X) = \mathrm{l}_A(X)$ i analogicznie $\mathrm{r}_{A^1}(X) = \mathrm{r}_A(X)$. Z tego łatwo wynika, że $\mathfrak{A}_l(A)$ jest identyczna z odcinkiem $[\mathrm{l}_{A^1}(A), A]$ w karcie $\mathfrak{A}_l(A^1)$. $\square$

Oczywiście stwierdzenie powyższe ma swój odpowiednik dla anihilatorów prawostronnych.

Zatem jeśli algebra A jest nilpotentna, to wszystkie właściwe lewostronne (prawostronne) anihilatory w A^1 są także elementami kraty $\mathfrak{A}_l(A)$ (odpowiednio $\mathfrak{A}_r(A)$). W przypadku, gdy A jest półprymarna taka sytuacja jest niemożliwa.

Stwierdzenie 2.2.8. *Niech A będzie algebrą półprymarną. Wówczas w kracie $\mathfrak{A}_l(A^1)$ istnieje właściwy lewostronny anihilator I taki, że $I \notin \mathfrak{A}_l(A)$. Analogicznie w kracie $\mathfrak{A}_r(A^1)$ istnieje właściwy prawostronny anihilator J taki, że $J \notin \mathfrak{A}_r(A)$.*

Dowód. Skoro A jest półprymarna, to z Twierdzenia 1.4.6 (4) w A istnieje nietrywialny idempotent e. Z punktu (3) Twierdzenia 1.4.1 mamy $\mathrm{r}_{A^1}(e) = \mathrm{r}_A(e) + \mathbb{K}(-e+1) \nsubseteq A$ oraz $\mathrm{l}_{A^1}(e) = \mathrm{l}_A(e) + \mathbb{K}(-e+1) \nsubseteq A$. □

Podamy teraz przykład algebry A oraz lewostronnego anihilatora $I \in \mathfrak{A}_l(A)$, takiego że $I \notin \mathfrak{A}_l(A^1)$.

Przykład 2.2.9. Niech A będzie algebrą wymiaru 2 z bazą $\{e, x\}$. Niech mnożenie w bazie ma postać: $e^2 = e, x^2 = 0, ex = x, xe = 0$ (zob. Przykład 1.4.5). Zatem $x \in \mathrm{l}_A(A)$. Stąd $\mathfrak{A}_l(A)$ jest łańcuchem o dwóch elementach: $\mathbb{K}x, A$. Wówczas $\mathrm{r}_{A^1}(\mathbb{K}x) = A$, bo A jest ideałem maksymalnym w A^1. Oczywiste jest, że $\mathrm{l}_{A^1}(A) = \mathrm{l}_A(A) + \mathbb{K}(-e+1)$, zatem $\mathbb{K}x \notin \mathfrak{A}_l(A^1)$. Zauważmy dodatkowo, że $\mathrm{r}_{A^1}(A) = 0$ i $\mathrm{l}_{A^1}(0) = A^1$. Sprawdziliśmy więc, że żaden anihilator lewostronny w A nie jest anihilatorem lewostronnym w A^1.

Łatwo sprawdzić, że wśród algebr wymiaru co najwyżej 2, wskazana algebra jest jedyną taką, w której istnieje ideał $I \in \mathfrak{A}_l(A)$, ale $I \notin \mathfrak{A}_l(A^1)$.

Rozważymy teraz związki kraty lewostronnych anihilatorów algebry A z kratą lewostronnych anihilatorów algebry B, gdzie B jest obrazem homomorficznym A. Mamy następującą, wzmocnioną wersję znanej dla pierścieni obserwacji ([HS64]):

Lemat 2.2.10. *Niech A będzie algebrą i $I = \mathrm{l}(T) \lhd A$. Niech $\phi : A \longrightarrow A/I$ będzie homomorfizmem naturalnym. Niech też ϕ^* oznacza branie przeciwobrazu traktowane jako odwzorowanie $\mathfrak{I}_l(A/I) \longrightarrow \mathfrak{I}_l(A)$. Wówczas ϕ^* jest faktycznie przekształceniem $\mathfrak{A}_l(A/I)$ w $\mathfrak{A}_l(A)$ będącym $\wedge$-homomorfizmem. Dokładniej, jeśli $J = \mathrm{l}_{A/I}(\phi(S))$ dla pewnego podzbioru $S \subseteq A$, to $\phi^*(J) = \mathrm{l}_A(ST)$.*

Dowód. Niech I i J będą takie, jak w założeniach lematu. Stąd bezpośrednio wynika, że $\phi^*(J)$ jest największym ideałem lewostronnym w A takim, że $\phi^*(J)S \subseteq I$. Zatem $\phi^*(J)ST = 0$, czyli $\phi^*(J) \subseteq \mathrm{l}_A(ST)$. Łatwo pokazać, że $\phi^*(J) \supseteq \mathrm{l}_A(ST)$. Ostatecznie dostajemy $\phi^*(J) = \mathrm{l}_A(ST) \in \mathfrak{A}_l(A)$.

Niech teraz $J_1, J_2 \in \mathfrak{A}_l(A/I)$, stąd $J_1 \cap J_2 \in \mathfrak{A}_l(A/I)$. Oczywiście ϕ^* jako odwzorowanie krat ideałów lewostronnych zachowuje kresy dolne. To pociąga za sobą fakt, że ϕ^* zachowuje kresy dolne lewostronnych anihilatorów, a więc jest $\wedge$-homomorfizmem krat. □

Podamy teraz przykład ilustrujący dwie własności krat anihilatorów. Po pierwsze obrazy homomorficzne anihilatorów nie muszą być anihilatorami, nawet jeśli jądrem homomorfizmu jest anihilator. Po drugie obrazem D-algebry nie musi być D-algebra.

Przykład 2.2.11. Niech $W = [0,1] \subset \mathbb{R}$ i niech $T = \{t_\alpha : \alpha \in W\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej A nad ciałem $\mathbb{K}$. Zdefiniujmy mnożenie na zbiorze T w następujący sposób:

$$t_\alpha t_\beta = \begin{cases} t_{\alpha+\beta} & \text{dla } \alpha + \beta \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

Rozszerzmy to mnożenie, przy użyciu dwuliniowości, do mnożenia w A. Wówczas A jest przemienną algebrą nad $\mathbb{K}$, z jedynką t_0. Łatwo sprawdzić, że dowolny ideał w A jest albo postaci $I_\alpha = At_\alpha$, albo postaci $J_\alpha = \mathrm{Lin}(t_\beta : \alpha < \beta \leqslant 1)$, gdzie $\alpha \in W$. Dla porządku przyjmijmy $J_1 = 0$. Stąd dla dowolnego $\alpha \in W$ mamy $I_\alpha = \mathrm{l}(J_{1-\alpha})$ oraz $J_\alpha = \mathrm{l}(I_{1-\alpha})$. Zatem A jest D-algebrą. Łatwo sprawdzić, że algebra ta jest lokalna, ma dokładnie jeden ideał minimalny I_1, każdy element z $J(A) = J_0$ jest nilpotentny, ale A nie jest półprymarna. Zbadamy teraz obrazy homomorficzne A.

i) Oczywiście $A/J_0 \backsimeq \mathbb{K}t_0 \backsimeq \mathbb{K}$. Niech teraz $0 < \alpha \in W$. Przekształcenie liniowe $\phi : A \to A/J_\alpha$ zadane na bazie T przez warunek $\phi(t_\beta) = t_{\beta\alpha} + J_\alpha$ jest izomorfizmem algebr. Wynika stąd po pierwsze, że algebra A/J_α jest D-algebrą, a po drugie $\mathfrak{I}_l(A/J_\alpha) \backsimeq [J_\alpha, A] \backsimeq \mathfrak{I}_l(A)$, gdzie $[J_\alpha, A] \subseteq \mathfrak{I}_l(A)$. Zatem dla dowolnego $\alpha \in W$ obrazem D-algebry jest D-algebra i $\mathfrak{A}_l(A/J_\alpha) \backsimeq [J_\alpha, A] \subseteq \mathfrak{A}_l(A)$.

ii) Niech $0 < \alpha \in W$. Weźmy teraz przekształcenie liniowe $\psi : A \longrightarrow A/I_\alpha$ zadane na bazie T przez $\psi(t_\beta) = t_{\beta\alpha} + I_\alpha$. Jest to epimorfizm algebr, którego jądrem jest ideał $\mathbb{K}t_1 = I_1$. Stąd dla dowolnego $\alpha > 0$ mamy $A/I_\alpha \backsimeq A/I_1$. Ograniczymy się zatem do badania algebry A/I_1. Niech $\overline{J_\beta}, \overline{I_\beta}$ i $\overline{t_\beta}$ oznaczają odpowiednio obraz ideału J_β, następnie obraz ideału I_β i w końcu obraz elementu t_β w algebrze A/I_1. Zauważmy, że dla dowolnego $\beta \in [0,1)$ w algebrze A/I_1 mamy $\overline{I_\beta} = \mathrm{l}(\overline{t_{1-\beta}})$. Ponadto, przecięcie dowolnej liczby ideałów postaci $\overline{I_\beta}$ też jest ideałem tej postaci. Stąd można wywnioskować, że jedynymi anihilatorami w algebrze A/I_1 są obrazy ideałów I_β. A zatem A/I_1 nie jest D-algebrą (bo $\overline{J_\beta}$ dla $\beta < 1$ nie są anihilatorami w A/I_1). Skoro $I_1 \in \mathfrak{A}_l(A)$, to możemy odnotować, że stwierdzenie odwrotne do Lematu 2.2.10 nie jest prawdziwe.

Niech A będzie algebrą i $I \lhd A$. Dobrze wiadomo, że $\mathfrak{I}_l(A/I)$ jest izomorficzna z podkratą w kracie ideałów lewostronnym algebry A, tj. $\mathfrak{I}_l(A/I) \backsimeq [I, A] \subseteq \mathfrak{I}_l(A)$. Zatem, dla dowolnej algebry A i jej obrazu homomorficznego B, długość (szerokość) kraty $\mathfrak{I}_l(B)$ jest niewiększa niż długość (szerokość) kraty $\mathfrak{I}_l(A)$. Analogiczny rezultat mamy dla krat ideałów prawostronnych. Tymczasem kraty anihilatorów nie mają takich własności. Poniżej znajdziemy przykład przemiennej algebry A i dwóch jej obrazów homomorficznych $A/I, A/J$ takich, że $\mathfrak{A}_l(A/I)$ ma długość większą niż długość $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_l(A/J)$ ma szerokość większą niż szerokość $\mathfrak{A}_l(A)$.

Przykład 2.2.12. Niech $A = \mathbb{K}[x]$. Zatem $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A)$ jest łańcuchem o dwóch elementach. Niech $I = Ax^n \lhd A$, gdzie $n \geqslant 1$. Wówczas łatwo zauważyć, że $\mathfrak{A}_l(A/I) = \mathfrak{A}_r(A/I)$ jest łańcuchem o $n+1$ elementach.

Niech teraz $J = Ax^2(x+1)^2 \lhd A$. Wówczas $\mathfrak{A}_l(A/J) = \mathfrak{A}_r(A/J)$ jest iloczynem prostym łańcuchów $C_2 \times C_2$.

2.3 Idempotenty i anihilatory

Ponieważ dla dowolnej algebry A mamy $A \lhd A^1$ i A^1 jest algebrą z jedynką to dalej, dla dowolnego idempotenta $e \in A$ często zamiast $\{a - ae : a \in A\}$ będziemy krótko pisać $A(1-e)$ i podobnie, zamiast $\{a - ea : a \in A\}$ będziemy pisać $(1-e)A$. Oba te zbiory są oczywiście ideałami jednostronnymi w A.

Związki anihilatorów i idempotentów są interesujące. Mogą one być wykorzystywane w wielu ważnych twierdzeniach o algebrach. Wykażemy pewne tego typu rezultaty, związane z anihilatorami. Punktem wyjścia jest następująca obserwacja:

Lemat 2.3.1. *Niech $e \in A$ będzie idempotentem. Wówczas*

$$\mathrm{l}(e) = \{a - ae : a \in A\} \quad \textit{oraz} \quad \mathrm{r}(e) = \{a - ea : a \in A\},$$

czyli $\mathrm{l}(e) = A(1-e)$ *oraz* $\mathrm{r}(e) = (1-e)A$.

Dowód.

Niech $e^2 = e \in A$. Oczywiście dla każdego $a \in A$ mamy $a - ae \in \mathrm{l}(e)$. Z drugiej strony, jeśli dla pewnego $a \in A$ spełnione jest równanie $ae = 0$, to $a = a - 0 = a - ae \in A(1-e)$. Analogicznie dowodzimy, że $\mathrm{r}(e) = (1-e)A$. □

Z powyższego lematu wynika możliwość zapisania rozkładu algebry wykorzystującego anihilatory.

Twierdzenie 2.3.2 (Rozkład Peirce'a)**.** *Niech A będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech element $e \in A$ będzie idempotentem. Wówczas algebrę A możemy zapisać w postaci sumy prostej podalgebr*

$$A = eA \oplus \mathrm{r}(e) = Ae \oplus \mathrm{l}(e) \tag{2.3.1}$$

oraz

$$A = eAe \oplus e\mathrm{l}(e) \oplus \mathrm{r}(e)e \oplus (\mathrm{l}(e) \cap \mathrm{r}(e)). \tag{2.3.2}$$

Wobec przyjętych wcześniej umów, wzory (2.3.1) *i* (2.3.2) *możemy przepisać w postaci:*

$$A = eA \oplus (1-e)A = Ae \oplus A(1-e) \quad \textit{oraz}$$

$$A = eAe \oplus eA(1-e) \oplus (1-e)Ae \oplus (1-e)A(1-e).$$

Zauważmy, że eAe jest największą podalgebrą w A, dla której e jest jedynką, a mnożenie wewnątrz algebr $e\mathrm{l}(e)$ i $\mathrm{r}(e)e$ jest zerowe. Jeśli dodatkowo założymy, że idempotent e jest centralny, to $e\mathrm{l}(e) = \mathrm{r}(e)e = 0$, oraz A jest sumą prostą dwóch ideałów $A = eAe \oplus (\mathrm{l}(e) \cap \mathrm{r}(e)) = Ae \oplus A(1-e)$.

W przypadku algebr przemiennych mamy więc następującą, użyteczną charakteryzację D-algebr, QF-algebr i algebr półprymarnych:

Twierdzenie 2.3.3. *Niech A będzie algebrą przemienną z jedynką.*

(1) *A jest D-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą prostą skończonej liczby lokalnych D-algebr.*

(2) *A jest algebrą półprymarną wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą prostą skończonej liczby algebr całkowicie prymarnych.*

(3) *A jest QF-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sumą prostą skończonej liczby lokalnych algebr artinowskich, z których każda ma dokładnie jeden ideał minimalny.*

Dowód. Niech A będzie D-algebrą i J jej radykałem. Z [HN85] i z przemienności A wiemy, że $A/J = \mathbb{K}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i dla pewnych ciał $\mathbb{K}_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Jeśli $n = 1$, to A jest lokalną algebrą. Jeśli $n > 1$, to niech $e + J$ będzie jedynką ciała $\mathbb{K}_1$. Korzystając z [HN85] możemy założyć, że e jest idempotentem, czyli $A = Ae \oplus A(1-e)$ jest sumą prostą ideałów. Również $J = Je \oplus J(1-e)$. Stąd Ae jest algebrą lokalną, oraz $A(1-e)/J(1-e) \simeq \mathbb{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}_n$. Dalej, rozumowanie jak wyżej pozwala wykazać przez indukcję, że $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, gdzie A_i są algebrami lokalnymi. Ze Stwierdzenia 2.2.1 wynika, że są to D-algebry. Z tego samego stwierdzenia wynika też, że skończony produkt D-algebr jest D-algebrą. To kończy dowód punktu (1).

Dowód w przypadku algebr półprymarnych jest analogiczny, przy wykorzystaniu Twierdzenia 1.4.6(3).

Z punktów (1) i (2) oraz faktu, że każda całkowicie prymarna QF-algebra ma dokładnie jeden ideał minimalny wynika, że jeśli A jest QF-algebrą, to A jest sumą prostą skończonej liczby lokalnych algebr artinowskich, z których każda ma dokładnie jeden ideał minimalny. Okazuje się, że stwierdzenie odwrotne też jest prawdziwe i zostało odnotowane jako Twierdzenie 15.27 w [La99]. □

Dalej przyjmijmy, że algebra A ma *zerowy lewostronny (prawostronny) anihilator,* jeśli $\mathrm{l}_A(A) = 0$ (odpowiednio $\mathrm{r}_A(A) = 0$). Oczywiście algebry z jedynką mają zerowe oba anihilatory. Z Przykładu 2.2.11, przy przyjętych w nim oznaczeniach wynika, że J_0/I_1 jest algebrą z zerowym lewostronnym i prawostronnym anihilatorem, w której każdy element jest nilpotentny, a więc ta algebra nie ma jedynki. Pokażemy później (Przykład 2.4.8), że nawet algebry skończenie wymiarowe z zerowymi anihilatorami nie muszą mieć jedynki.

Z Lematu 2.3.1 wydaje się wynikać, że dla dowolnego idempotenta $e \in A$ ideały jednostronne Ae i eA są anihilatorami w A. Jednak nie zawsze tak jest.

Lemat 2.3.4. *Dla algebry A równoważne są warunki:*
(1) *A ma zerowy lewostronny anihilator;*
(2) *$Ae = \mathrm{l}(\mathrm{r}(e))$ dla pewnego idempotenta $e \in A$;*
(3) *$Ae = \mathrm{l}(\mathrm{r}(e))$ dla każdego idempotenta $e \in A$.*

Dowód. Oczywiście (3) $\Rightarrow$ (2). Ponieważ 0 jest idempotentem, to również (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Jeśli idempotentem spełniającym (2) jest 0, to podpunkt (1) jest oczywisty. Niech więc $0 \neq e \in A$ będzie takim idempotentem, że $Ae = \mathrm{l}(\mathrm{r}(e))$. Wobec Lematu 2.3.1 $Ae = \mathrm{l}((1-e)A)$. Niech teraz $x \in \mathrm{l}(A)$. Wówczas dla dowolnego $y \in A$ mamy $x((1-e)y) = 0$, czyli $x \in Ae$. Skoro $xe = 0$, to również $x \in A(1-e)$. Z Twierdzenia 2.3.2 otrzymujemy $x = 0$, stąd $\mathrm{l}(A) = 0$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Niech $e \in A$ będzie dowolnym idempotentem. Oczywiście $Ae \subseteq \mathrm{l}((1-e)A)$. Przypuśćmy, że $Ae \neq \mathrm{l}((1-e)A)$. Ponieważ $A = Ae \oplus A(1-e)$, więc istnieje element $0 \neq x \in A(1-e)$ taki, że $x \in \mathrm{l}((1-e)A)$. Zatem dla ustalonego $a \in A$ takiego, że $x = a(1-e)$ i dla dowolnego $y \in A$ mamy $a(1-e)(1-e)y = a(1-e)y = 0$. Wobec dowolności $y \in A$ otrzymujemy $0 \neq x \in \mathrm{l}(A)$, co przeczy założeniu. □

Oczywiście prawostronna wersja powyższego lematu jest również prawdziwa.

Idempotenty mają też szereg innych ciekawych i przydatnych własności. Dla przykładu mamy:

Lemat 2.3.5. *Niech A będzie algebrą i niech $e, f \in A$ będą takimi idempotentami, że $ef = fe$. Wówczas: ef i $e + f - ef$ też są idempotentami; $Ae = Af$ wtedy i tylko* *wtedy, gdy* $e = f$; $Ae + Af = A(e + f - ef)$; $Ae \cap Af = Aef$; $Ae \cap Af = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $ef = 0$.

Dowód. Z założenia, przez sprawdzenie dostajemy, że ef i $e + f - ef$ są idempotentami. Jeśli $Ae = Af$, to $e = af$ dla pewnego $a \in A$. Zatem $ef = af^2 = af = e$. Podobnie, $be = f$ dla pewnego $b \in A$, co daje $fe = f$. Z przemienności idempotentów e, f dostajemy więc, że $e = f$. Również przez bezpośrednie sprawdzenie dostajemy pozostałe tezy lematu. $\square$

Twierdzenie 2.3.6. *Niech* A *będzie algebrą z zerowymi anihilatorami z obu stron i niech* E *będzie zbiorem wszystkich idempotentów centralnych w algebrze* A*. Wówczas zbiór* E *ma naturalną strukturę kraty rozdzielnej i przyporządkowanie* $\phi : e \longrightarrow Ae$ *jest zanurzeniem tej kraty w kraty* $\mathfrak{I}(A)$*,* $\mathfrak{A}_l(A)$ *i* $\mathfrak{A}_r(A)$*. Przy tym, jeśli* A *ma jedynkę, to* E *jest algebrą Boole'a.*

Dowód. Z lematu wyżej wynika, że E jest kratą ze względu na porządek wyznaczony przez relację $e \leqslant f \Leftrightarrow ef = e$, a ϕ jest zanurzeniem tej kraty w kratę $\mathfrak{I}(A)$. Łatwo sprawdzić, że E jest kratą rozdzielną.

Ponieważ $\mathrm{l}(A) = 0$ i $\mathrm{r}(A) = 0$, a elementy z E są centralne, to z Lematu 2.3.4 i jego prawostronnej wersji wynika, że $\phi(E) \subseteq \mathfrak{A}_l(A)$ i $\phi(E) \subseteq \mathfrak{A}_r(A)$. Przy tym $\phi(0) = \omega$.

Jeśli $1 \in A$, to widać, że E jest algebrą Boole'a i $\phi(1) = \Omega$ oraz dopełnieniem $\phi(e)$ jest $\phi(1 - e)$ dla dowolnego $e \in E$. $\square$

Lemat 2.3.7. *Niech* e, a *będą elementami algebry* A*, gdzie* e *jest idempotentem. Weźmy* $f = e + ea(1 - e)$*. Wówczas* f *jest idempotentem takim, że* $ef = f$ *i* $fe = e$*, oraz* $A = Af \oplus A(1 - e)$*. Ponadto, jeśli* $e \neq f$*, to* $Ae \neq Af$*.*

Dowód. Fakt, że f jest idempotentem, oraz $ef = f$ i $fe = e$ otrzymujemy przez sprawdzenie. Łatwo też można zauważyć, że $Ae \subseteq Af + A(1 - e)$, a zatem $A = Ae + A(1 - e) \subseteq Af + A(1 - e)$, czyli $A = Af + A(1 - e)$.

Niech teraz $x \in Af \cap A(1 - e)$. Wówczas $x = b(1 - e) = de + dea(1 - e)$, dla pewnych $b, d \in A$. Mnożąc prawostronnie powyższe równanie przez e otrzymujemy $de = 0$ i stąd $x = 0$.

Jeśli $Ae = Af$, to $f \in Af \cap Ae$, zatem możemy zapisać $f = fe = e$. Stąd dla $e \neq f$ mamy $Ae \neq Af$. $\square$

Jako skutek otrzymujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.8. *Niech A będzie algebrą taką, że oba jej anihilatory są zerowe i krata $\mathfrak{A}_l(A)$ jest rozdzielna. Wówczas:*

(1) *Każdy idempotent w A jest centralny;*

(2) *Ponadto, jeśli A jest półprymarna, to ma jedynkę i jest skończoną sumą prostą algebr całkowicie prymarnych z rozdzielnymi kratami anihilatorów.*

DOWÓD. (1). Przypuśćmy, że $e \in A$ nie jest centralnym idempotentem. Wówczas dla pewnego $a \in A$ mamy albo $ea(1-e) \neq 0$, albo $(1-e)ae \neq 0$.

Niech na razie $ea(1-e) \neq 0$. Kładąc, jak w lemacie wyżej, $f = e + ea(1-e)$ dostajemy z tego lematu, że Ae i Af to różne dopełnienia anihilatora $A(1-e)$, ale w kracie $\mathfrak{I}_l(A)$. Z założonego warunku $\mathrm{l}_A(A) = 0$ i z Lematu 2.3.4 wynika jednak, że Ae i Af są różnymi dopełnieniami $A(1-e)$ w kracie $\mathfrak{A}_l(A)$. Z Twierdzenia 1.2.7 wynika jednak, że to jest niemożliwe w kracie rozdzielnej.

Dowód pierwszej części twierdzenia w przypadku $(1-e)ae \neq 0$ można przeprowadzić zastępując A przez A^{op} i korzystając z faktu, że krata $\mathfrak{A}_l(A^{op}) = \mathfrak{A}_r(A)$ jest antyizomorficzna z $\mathfrak{A}_l(A)$, a więc również rozdzielna. Ponadto, z założenia mamy $\mathrm{l}_{A^{op}}(A^{op}) = \mathrm{r}_A(A) = 0$.

(2). Niech teraz A będzie algebrą półprymarną, oba jej anihilatory są zerowe i krata $\mathfrak{A}_l(A)$ jest rozdzielna. Pokażemy najpierw, że A ma jedynkę.

Niech $J(A) = J$. Skoro A/J jest algebrą półprostą, to A/J ma jedynkę $e + J$. Wobec Twierdzenia 1.4.6 możemy założyć, że e jest idempotentem w A. Z (1) wiemy, że każdy idempotent w A jest centralny, stąd $e \in Z(A)$. Z tego faktu i z rozkładu Peirce'a A jest sumą prostą ideałów $A = Ae \oplus A(1-e)$. Korzystając z tego, że $e + J$ jest jedynką w A/J łatwo pokazać, że $A(1-e) \subseteq J$. Zatem $A(1-e) = 0$ lub $0 \neq A(1-e)$ jest lewostronnym ideałem nilpotentnym o stopniu nilpotentności $n > 1$. Gdyby $A(1-e) \neq 0$, to mielibyśmy $A(1-e) \cup Ae \subseteq \mathrm{l}((A(1-e))^{n-1})$, czyli $\mathrm{l}((A(1-e))^{n-1}) = A$. Pamiętając, że $\mathrm{r}(A) = 0$ dostalibyśmy $(A(1-e))^{n-1} = 0$, co jest sprzeczne ze stopniem nilpotentności $A(1-e)$. Zatem $A(1-e) = 0$, i stąd e jest jedynką algebry A.

Teraz pokażemy, że A jest skończoną sumą prostą algebr całkowicie prymarnych. Skoro algebra A/J jest półprosta, to z Twierdzenia 1.4.2 mamy, że A/J jest sumą prostą $m < \infty$ algebr macierzy nad algebrami z dzieleniem. Wiadomo, że takie algebry macierzy są nierozkładalne na nietrywialne sumy proste. Wobec centralności idempotentów w A i możliwości podnoszenia idempotentów modulo J mamy, że $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_m$ jest sumą prostą m algebr nierozkładalnych na sumy proste.

Ponieważ każdy ideał lewostronny algebry $A_i/J(A_i)$ jest generowany przez idempotent, to każdy ideał lewostronny w A_i nie zawarty w $J(A_i)$ zawiera idempotent. Gdyby $e \in A_i$ był różny od 0 i 1, to e dawałby rozkład algebry A_i na 2 składniki, czyli rozkład A na $m+1$ składników, co to jest niemożliwe. Stąd dla każdego i ideał $J(A_i)$ jest jedynym lewostronnym ideałem maksymalnym w A_i i algebra A_i jest algebrą lokalną.

Dokończenie dowodu jest już proste. □

Dalej w rozprawie pojawią się przykłady algebr półprymarnych, a nawet skończenie wymiarowych, których kraty anihilatorów nie są rozdzielne (zob. Przykład 4.2.8).

Twierdzenie 2.3.9. *Niech A będzie algebrą nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$ i taką, że $\mathrm{l}_A(A) = \mathrm{r}_A(A) = 0$. Jeśli krata $\mathfrak{A}_l(A)$ ma skończoną szerokość, to każdy idempotent w A jest centralny.*

Dowód. Przypuśćmy, że mamy niecentralny idempotent $e \in A$. Wówczas istnieje element $a \in A$ taki, że $ea(1-e) \neq 0$ lub $(1-e)ae \neq 0$. Rozważmy najpierw przypadek $ea(1-e) \neq 0$. Dla każdego $\lambda \in \mathbb{K}$ niech

$$e_\lambda = e + \lambda ea(1-e) \quad \text{i} \quad I_\lambda = Ae_\lambda.$$

Łatwo sprawdzić, że e_λ jest idempotentem i, wobec Lematu 2.3.4, $I_\lambda = \mathrm{l}((1-e_\lambda)A)$.

Załóżmy teraz, że $I_\lambda \subseteq I_\mu$ dla pewnego $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$. Ponieważ $e_\lambda \in I_\lambda$ oraz $I_\mu = \mathrm{l}((1-e_\mu)A)$, to

$$0 = e_\lambda(1-e_\mu)A = (\lambda - \mu)ea(1-e)A.$$

Wobec założonej zerowości $\mathrm{l}_A(A)$, mamy $(\lambda-\mu)ea(1-e) = 0$. Ponieważ $ea(1-e) \neq 0$, to $\lambda = \mu$. Pokazaliśmy zatem, że jeśli $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$, to $I_\lambda \nsubseteq I_\mu$. Przez analogię widać, że w tej sytuacji również I_μ nie jest zawarte w I_λ. W ten sposób skonstruowaliśmy nieskończony antyłańcuch $\{I_\lambda : \lambda \in \mathbb{K}\}$ zawarty w $\mathfrak{A}_l(A)$. Wobec założonego $\mathrm{l}_A(A) = 0$ i Lematu 2.3.4 jest to antyłańcuch w kracie $\mathfrak{A}_l(A)$.

Aby udowodnić twierdzenie w przypadku $(1-e)ae \neq 0$ wystarczy zastosować powyższe obliczenia do elementu $e \in A^{op}$.

Zauważmy dodatkowo, że przy przyjętych oznaczeniach mamy jednak $e_\lambda A = e_\mu A$, dla dowolnych $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$. Rzeczywiście: $e_\lambda A = r(A(1-e_\lambda)), e_\mu A = r(A(1-e_\mu))$. Dla dowolnego $b \in A$ mamy zatem $b(1-e_\mu)e_\lambda = b(1-(e+\mu ea(1-e)))(e+\lambda ea(1-e)) = b(e+\lambda ea(1-e) - e - \lambda ea(1-e)) = 0$. Stąd $e_\lambda A \subseteq e_\mu A$. Podobnie $e_\mu A \subseteq e_\lambda A$. Wobec tego $e_\lambda A = e_\mu A$. □

Przykład 2.3.10. Niech A będzie algebrą z Przykładu 2.2.9. Wówczas kraty $\mathfrak{A}_l(A)$ oraz $\mathfrak{A}_r(A)$ mają po 2 elementy, a więc są kratami rozdzielnymi i mają szerokość 1. Jednak A ma niecentralny element idempotentny e. W tej algebrze $\mathrm{r}(A) = 0$, ale $\mathrm{l}(A) \neq 0$. Tak więc założenie zerowości tylko jednego anihilatora algebry nie wystarcza do wykazania Twierdzeń 2.3.8 i 2.3.9.

Twierdzenie 2.3.11. *Niech A będzie algebrą półprymarną, z jedynką, nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$ i niech krata $\mathfrak{A}_l(A)$ będzie skończonej szerokości. Wówczas*

(1) *A jest skończoną sumą prostą algebr lokalnych,*

(2) *Krata $\mathfrak{A}_l(A)$ jest skończonym iloczynem prostym krat, w którym każdy czynnik ma dokładnie jeden atom i dokładnie jeden koatom.*

Dowód. (1). Z Twierdzenia 2.3.9 wiemy, że wszystkie idempotenty w A są centralne. Aby dokończyć dowód wystarczy powtórzyć argumenty użyte w części (2) dowodu Twierdzenia 2.3.8.

(2). Z punktu (1) i ze Stwierdzenia 2.2.1 mamy $\mathfrak{A}_l(A) = \prod_{i=1}^{k} L_i$, gdzie $L_i = \mathfrak{A}_l(A_i)$. Teraz już jest oczywiste, że $J(A_i)$ jest jedynym koatomem w L_i, oraz $\mathrm{l}_{A_i}(J(A_i))$ jest jedynym atomem w L_i. □

Niech A będzie algebrą z jedynką. Algebra A jest nazywana *skończoną w sensie Dedekinda*, jeśli dla dowolnych $a, b \in A$ z faktu $ab = 1$ wynika, że $ba = 1$. Oczywiście jeśli A nie jest skończona w sensie Dedekinda oraz $a, b \in A$ są takie, że $ab = 1$ i $ba \neq 1$, to $0 \neq ba$ jest idempotentem. W tej sytuacji $a(1 - ba) = 0$. Gdyby $ba \in Z(A)$, to mielibyśmy $a = ba^2$. Mnożąc teraz z prawej przez b otrzymalibyśmy $1 = ab = ba^2b = ba$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem każda algebra, która nie jest skończona w sensie Dedekinda ma niecentralny idempotent. Z Twierdzeń 2.3.8 i 2.3.9 wnioskujemy, że jeśli A jest $\mathbb{K}$-algebrą z 1 oraz $\mathfrak{A}_l(A)$ jest rozdzielna lub $\mathfrak{A}_l(A)$ ma skończoną szerokość, a $\mathbb{K}$ jest nieskończone, to A jest skończona w sensie Dedekinda.

Prawdziwy jest ogólniejszy rezultat. Wiadomo ([La91], Przykład 21.26), że algebra, która nie jest skończona w sensie Dedekinda posiada nieskończony ciąg niezerowych, parami ortogonalnych idempotentów (tj. $ef = 0$ dla dowolnych idempotentów e, f należących do tego ciągu). Metodami podobnymi do zawartych w [La91] (Przykład 21.26, Twierdzenie 23.20) można udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.12. *Niech A będzie algebrą z jedynką i krata $\mathfrak{A}_l(A)$ spełnia warunek maksymalności, lub warunek minimalności, lub ma skończoną szerokość. Wówczas A jest skończona w sensie Dedekinda.*

2.4 Istnienie jedynki i anihilatory

Przedyskutujemy teraz pewne warunki wystarczające na to, aby algebra A miała jedynkę. Skorzystamy w tym celu z pojęcia jednostronnych jedynek. Element $e \in A$ jest nazywany *lewostronną (prawostronną) jedynką,* jeśli $ea = a$ $(ae = a)$ dla dowolnego $a \in A$. Oczywiście jedynka jest zawsze lewostronną i prawostronną jedynką. Z drugiej strony, jeśli algebra ma lewostronną i prawostronną jedynkę, to obie są identyczne i są jedynką algebry.

Stwierdzenie 2.4.1. *Niech A będzie algebrą półprymarną. Wówczas jeśli A ma prawostronną jedynkę, to krata $\mathfrak{A}_l(A)$ jest podkratą kraty $\mathfrak{A}_l(A^1)$. Analogicznie jeśli A ma lewostronną jedynkę, to krata $\mathfrak{A}_r(A)$ jest podkratą kraty $\mathfrak{A}_r(A^1)$.*

Dowód. Jeśli $X \subseteq A$ oraz e_r jest jedynką prawostronną algebry A, to z Twierdzenia 1.4.1(3) mamy $\mathrm{r}_{A^1}(X) = \mathrm{r}_A(X) + \mathbb{K}(-e_r + 1)$. Łatwo sprawdzić, że jeśli J_1, J_2 są podprzestrzeniami w A^1 takimi, że $J_1 J_2 = 0$, to przynajmniej jedna z podprzestrzeni J_1, J_2 jest zawarta w A. Zatem $\mathrm{l}_{A^1}(\mathrm{r}_{A^1}(X)) \subseteq A$. Korzystając dodatkowo ze Stwierdzenia 2.1.2 (1) mamy $\mathrm{l}_{A^1}(\mathrm{r}_{A^1}(X)) \subseteq \mathrm{l}_{A^1}(\mathrm{r}_A(X)) \cap A = \mathrm{l}_A(\mathrm{r}_A(X))$. Oczywiście $\mathrm{l}_A(\mathrm{r}_A(X)) \subseteq \mathrm{l}_{A^1}(\mathrm{r}_{A^1}(X))$ i stąd $\mathfrak{A}_l(A) \subseteq \mathfrak{A}_l(A^1)$.

Niech teraz $I_1, I_2 \in \mathfrak{A}_l(A)$. Oczywiście $I_1 \cap I_2$ jest kresem dolnym I_1, I_2 w kracie $\mathfrak{A}_l(A^1)$. Podstawiając $I_1 + I_2$ do powyższych rozważań otrzymujemy $\mathrm{l}_{A^1}(\mathrm{r}_{A^1}(I_1 + I_2)) = \mathrm{l}_A(\mathrm{r}_A(I_1 + I_2))$. Stąd już wynika, że krata $\mathfrak{A}_l(A)$ jest podkratą kraty $\mathfrak{A}_l(A^1)$.

Dowód stwierdzenia dla anihilatorów prawostronnych przebiega analogicznie. □

Oczywiste jest, że jeśli algebra A ma jedynkę, to spełnione są warunki:
i) A ma niezerowy idempotent;
ii) $A^2 = A$;
iii) $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$, czyli A ma zerowe anihilatory z obu stron.
Przedyskutujemy teraz, które z powyższych warunków, ewentualnie przy jakichś dodatkowych założeniach, powodują, że A ma jedynkę.

Bezpośrednio z definicji jednostronnych jedynek wynika poniższy fakt.

Stwierdzenie 2.4.2. *Jeśli A ma prawostronną jedynkę, to $\mathrm{l}_A(A) = 0$. Analogicznie, jeśli A ma lewostronną jedynkę, to $\mathrm{r}_A(A) = 0$.*

Wśród algebr wymienionych w Przykładzie 1.4.5, algebry z punktu (c) nie mają jedynki, ale mają jednostronną jedynkę. Ponadto dla każdej z nich mamy $A^2 = A$. Zatem warunki i) oraz ii) nie implikują istnienia w algebrze jedynki. Sprawdzimy teraz jak warunek $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$ wpływa na istnienie jedynki w A.

Dla algebr półprymarnych mamy poniższy rezultat (por. [He68, Twierdzenie 1.4.3.]).

Twierdzenie 2.4.3. *Niech A będzie algebrą półprymarną i J jej radykałem. Równoważne są warunki:*
(1) *Algebra A ma lewostronną jedynkę;*
(2) *Każdy obraz homomorficzny algebry A ma zerowy prawostronny anihilator;*
(3) *Dla dowolnego $k \geqslant 1$ algebra A/J^k ma zerowy prawostronny anihilator.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Niech e będzie lewostronną jedynką w A, oraz niech $I \lhd A$ będzie dowolnym ideałem. Wówczas oczywiście $e + I$ jest lewostronną jedynką w A/I. Zatem, ze Stwierdzenia 2.4.2 $\mathrm{r}_{A/I}((A/I)) = 0$.

Oczywiście (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Niech $J^n = 0$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Z założenia wynika, że $J \neq A$ i algebra A/J ma jedynkę. Niech $e \in A$ będzie takim elementem, że $e + J$ jest jedynką w $A/J = A/J^1$. Wobec Twierdzenia 1.4.6 (3) możemy przyjąć, że e jest idempotentem. Załóżmy, że dla $k \geqslant 1$ wiemy już, że $e + J^k$ jest lewostronną jedynką w A/J^k. Tak więc $(1-e)A \subseteq J^k$. Ponadto, z wyboru e wiemy, że $A(1-e) \subseteq J$. Tak więc

$$A(1-e)(1-e)A \subseteq J^{k+1}.$$

Założenie o zerowości prawostronnego anihilatora A/J^{k+1} daje więc, że $(1-e)(1-e)A \subseteq J^{k+1}$. Zatem dla $e_{k+1} = e + e - e^2 = e$ mamy $(1 - e_{k+1})A \subseteq J^{k+1}$, czyli $e + J^{k+1}$ jest lewostronną jedynką dla A/J^{k+1}. Podstawiając teraz $k = n$ dostajemy, że $e_n = e$ jest lewostronną jedynką modulo $J^n = 0$, czyli e jest lewostronną jedynką w A. □

Wniosek 2.4.4. *Niech $\mathbb{K}$ będzie nieskończonym ciałem. Jeśli nietrywialna $\mathbb{K}$-algebra A jest lewostronnie artinowska jako pierścień, to A posiada lewostronną jedynkę.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathrm{r}(A) \neq 0$. Wówczas każda podprzestrzeń, a nawet podgrupa grupy addytywnej w $\mathrm{r}(A)$ jest lewostronnym ideałem w A. Z Przykładu 1.3.1 i lewostronnej artinowskości A wynika, że to jest niemożliwe. Zatem musi być, że $\mathrm{r}(A) = 0$. Podobna obserwacja dotyczy również dowolnego obrazu homomorficznego algebry A. Zatem z twierdzenia wyżej wynika, że A ma lewostronną jedynkę. □

Twierdzenie 2.4.5. *Niech A będzie algebrą półprymarną i J jej radykałem. Równoważne są warunki:*
(1) *Algebra A ma jedynkę;*
(2) *Każdy obraz homomorficzny algebry A ma zerowe anihilatory;*
(3) *Dla dowolnego $k \geqslant 1$ algebra A/J^k ma zerowe anihilatory.*

Dowód. Jeśli A ma lewostronną jedynkę e i prawostronną jedynkę f, to wówczas $e = ef = f$ i jest to jedynka algebry A. Teraz dowodzony rezultat jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 2.4.3 i jego analogicznej wersji dla algebr z prawostronną jedynką. $\square$

Wniosek 2.4.6. *Niech A będzie algebrą półprymarną i J jej radykałem. Jeśli* $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$ *i* $J^2 = 0$, *to A ma jedynkę.*

Dowód. Zauważmy, że A/J jako algebra półprosta ma jedynkę, a więc oba jej anihilatory są zerowe. Skoro $A/J^2 \backsimeq A$, to teza wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.4.5. $\square$

Stwierdzenie 2.4.7. *Niech A będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$ taką, że* $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(A) \leqslant 3$ *oraz* $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$. *Wówczas A ma jedynkę.*

Dowód. Niech A będzie algebrą taką, że $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$ i $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(A) \leqslant 2$. Wówczas A jest pewną algebrą z Przykładu 1.4.5 i jak łatwo zauważyć A ma jedynkę.

Niech dalej $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(A) = 3$. Zauważmy, że A nie może być nilpotentna, bo wtedy mielibyśmy $\mathrm{l}(A) \neq 0$ i $\mathrm{r}(A) \neq 0$. Wiemy, że wszystkie algebry półproste mają jedynki, zatem jeśli A jest półprosta, to twierdzenie jest prawdziwe. Niech więc dalej $A \neq J$ i $0 \neq J \subset A$, gdzie J oznacza radykał algebry A. Jeśli $J^2 = 0$, to teza wynika z Wniosku 2.4.6. Pozostał więc do rozpatrzenia przypadek, gdy $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(J) = 2$ i $J^2 \neq 0$. Dowód stwierdzenia dla takiej algebry A przeprowadzimy w kilku punktach.

a) Niech więc $e = e^2$ będzie przeciwobrazem jedynki z A/J. Ponieważ $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(J) = 2$ i $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(J^2) = 1$, to istnieją $x, y \in J$ takie, że $xy \neq 0$. Stąd $x, y \notin J^2$. Ponadto, y możemy zapisać w postaci $y = kx + a$, dla pewnego $a \in J^2, 0 \neq k \in \mathbb{K}$. Mamy więc $0 \neq xy = kx^2$, czyli $0 \neq x^2 \in J^2$ i bazę A stanowią e, x, x^2.

b) Zauważmy, że $ex^2 \neq 0$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $Ax^2 = 0$, co jest sprzeczne z $\mathrm{r}(A) = 0$. Zatem $ex^2 = kx^2$ dla pewnego $0 \neq k \in \mathbb{K}$. Stąd $kx^2 = ex^2 = e(ex^2) = e(kx^2) = k(ex^2) = k^2x^2$, co daje $k = 1$ i dalej $ex^2 = x^2$. Podobnie można pokazać, że $x^2e = x^2$.

c) Skoro $ex \in J$, to możemy zapisać $ex = k_1x + k_2x^2$, dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Pomnóżmy ostatnią równość przez x z prawej strony otrzymując $ex^2 = k_1x^2$. Skoro $ex^2 = x^2$, to mamy $k_1 = 1$. Zatem $ex = x + k_2x^2$, czyli $ex = e(x + k_2x^2) = ex + k_2ex^2 = ex + k_2x^2$. Wobec tego $k_2 = 0$ i ostatecznie $ex = x$. Analogicznie można pokazać, że $xe = x$.

d) Podsumowując wyniki z b) i c) możemy odnotować, że e jest jedynką w algebrze A. $\square$

Okazuje się, że już w algebrach wymiaru 4, warunek $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$ nie gwarantuje istnienia w A nawet jednostronnej jedynki.

Przykład 2.4.8. Niech A będzie algebrą wymiaru 4 nad ciałem $\mathbb{K}$, której bazę stanowią elementy x, y, z, t. Niech ponadto tabelka mnożenia elementów bazy ma następującą postać:

·	x	y	z	t
x	0	0	0	x
y	z	0	0	0
z	0	0	0	z
t	0	y	z	t

Łatwo sprawdzić, że mnożenie w A jest łączne. Bezpośrednio z tabelki działania możemy zauważyć, że radykał $J = \mathrm{Lin}(x, y, z)$ ma stopień nilpotentności 3, a t jest idempotentem w A. Ponadto $A = A^2$. Oczywiście $\mathrm{l}(A) \subseteq \mathrm{l}(t) = \mathbb{K}y$, ale $yx \neq 0$, więc $\mathrm{l}(A) = 0$. Podobnie można pokazać, że $\mathrm{r}(A) = 0$. Wobec tego A ma zerowe anihilatory z obu stron.

Skoro w dowolnej algebrze jedynka lewostronna (prawostronna) jest idempotentem, to zbadajmy idempotenty w A. Łatwo sprawdzić, że $\{k_1x + k_2y - k_1k_2z + t : k_1, k_2 \in \mathbb{K}\}$ jest zbiorem wszystkich niezerowych idempotentów w A. Jednakże $(k_1x + k_2y - k_1k_2z + t)x = k_2z \neq x$ i $y(k_1x + k_2y - k_1k_2z + t) = k_1z \neq y$, czyli w A nie ma ani lewostronnej, ani prawostronnej jedynki.

Uwaga 2.4.9. Przykład wyżej jest inspirowany pracą [RRB09]. Praca ta zawiera listę algebr nad ciałem liczb zespolonych o wymiarze co najwyżej 4. Ponadto dla każdej wymienionej tam algebry A wskazany jest wymiar $\mathrm{l}(A)$ i $\mathrm{r}(A)$. Między innymi, opisana jest algebra A wymiaru 3 oznaczona symbolem As_3^{11}, dla której autorzy błędnie podali, że $\mathrm{l}(A) = \mathrm{r}(A) = 0$. Można sprawdzić, że przy przyjętej tam notacji element $e_1 - e_2 \in \mathrm{l}(A)$ i $e_1 - e_2 \in \mathrm{r}(A)$.

Z rozkładu Peirce'a łatwo wynika inne, znane kryterium na istnienie jedynki w algebrze.

Lemat 2.4.10. *Niech I będzie ideałem algebry A. Jeśli I jako algebra ma jedynkę, to jest ona centralnym idempotentem w A. Poza tym, istnieje dokładnie jeden ideał J w A taki, że $A = I \oplus J$. Ponadto, A ma jedynkę (prawostronną jedynkę, lewostronną jedynkę) wtedy i tylko wtedy, gdy $J \simeq A/I$ ma tego samego typu jedynkę.*

Z powyższego lematu i Stwierdzenia 2.2.1 łatwo dostajemy kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.11. *Niech I będzie ideałem algebry A. Jeśli I jako algebra ma jedynkę, to $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_l(I) \times \mathfrak{A}_l(A/I)$ oraz $\mathfrak{A}_r(A) = \mathfrak{A}_r(I) \times \mathfrak{A}_r(A/I)$.*

Z powyższego twierdzenia dostajemy rezultat silniejszy niż Stwierdzenie 2.4.1.

Wniosek 2.4.12. *Niech A będzie algebrą z jedynką. Wówczas $\mathfrak{A}_l(A^1) = \mathfrak{A}_l(A) \times C_1$ oraz $\mathfrak{A}_r(A^1) = \mathfrak{A}_r(A) \times C_1$.*

Jeśli S jest dowolnym monoidem, to jego jedynka jest oczywiście jedynką algebry monoidowej $\mathbb{K}[S]$. Istnieją jednak algebry półgrupowe z jedynką dla półgrup nie będących monoidami.

Przykład 2.4.13. Niech $n \geqslant 1$ i $E_n = \{e_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ będzie zbiorem jedynek macierzowych z dołączonym zerem, które tu oznaczymy przez θ. Zbiór E_n z naturalnym mnożeniem macierzowym jest półgrupą bez jedynki.

Weźmy algebrę półgrupową $A = \mathbb{K}[E_n]$. Przestrzeń $\mathbb{K}\theta$ jest ideałem w A i algebrą z jedynką θ, oraz $A/(\mathbb{K}\theta) = \mathbb{K}_0[E_n] \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ jest algebrą z jedynką. Z Lematu 2.4.10 wynika więc, że A jest algebrą z jedynką.

ROZDZIAŁ 3

Reprezentacje anihilatorowe krat

Dalej w rozprawie będziemy zakładać, że algebry mają jedynkę, podalgebry zawierają tę jedynkę i homomorfizmy algebr przeprowadzają jedynkę na jedynkę. Jeśli czasem będzie konieczność zmiany tych warunków, to ten fakt będzie wyraźnie odnotowany.

3.1 Kraty Boole'a

Można podać wiele przykładów algebr, których kraty anihilatorów mają dopełnienia, a często są nawet kratami Boole'a. W przypadku kraty B_2 mamy:

Przykład 3.1.1. a) Dla dowolnej algebry A krata B_2 zanurza się w $\mathfrak{A}_l(A)$ i w $\mathfrak{A}_r(A)$ np. jako $\{0, A\}$.
b) Krata $B_2 \backsimeq \mathfrak{A}_l(A) \backsimeq \mathfrak{A}_r(A)$ dla algebry A, wtedy i tylko wtedy, gdy A jest dziedziną.

Przykład 3.1.2. Niech $n \geqslant 1$ i niech A będzie sumą prostą n dziedzin. Ze Stwierdzenia 2.2.1 i z poprzedniego przykładu wynika, że $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) \simeq B_{2^n}$. Ponadto, A jest D-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy jej składniki proste są algebrami z dzieleniem.

Można rozszerzyć ten przykład do przypadku nieskończonych algebr Boole'a. Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym i niech $A = \mathbb{K}^X$ będzie zbiorem wszystkich funkcji przekształcających X w $\mathbb{K}$, ze standardowymi działaniami dodawania i mnożenia funkcji. Wówczas A jest algebrą przemienną i można sprawdzić, że $\mathfrak{A}_l(A) \simeq P(X)$, ponieważ każdy anihilator w A składa się z funkcji zerujących się na pewnym podzbiorze zbioru X. Jednak, ponieważ X jest zbiorem nieskończonym, to A nie jest D-algebrą. Ideałem, ale nie anihilatorem w A, jest bowiem zbiór funkcji, z których każda jest równa zeru dla prawie wszystkich $x \in X$.

Ponieważ rozpatrujemy tylko algebry z jedynką, to można łatwo sprawdzić, że w dowolnej algebrze A, lewostronny ideał $I <_l A$ jest dopełnieniem w kracie $\mathfrak{I}_l(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I = Ae$ dla pewnego idempotenta $e \in A$ (zob. Zadanie 7, §1 w [La91]). Wobec Lematu 2.3.4 i Twierdzenia 2.3.2 taki ideał lewostronny I jest również dopełnieniem w kracie $\mathfrak{A}_l(A)$. Jednak nie tylko takie anihilatory są dopełnieniami w $\mathfrak{A}_l(A)$.

Przykład 3.1.3. Niech $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(x_i x_j : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$, dla pewnego $n > 1$. Wówczas A nie ma idempotentów różnych od 0 i 1, ale krata $\mathfrak{A}_l(A) \simeq B_{2^n}$, ponieważ jest izomorficzna z algebrą Boole'a podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tak więc każdy element w $\mathfrak{A}_l(A)$ jest dopełnieniem w tej kracie, choć żaden właściwy anihilator nie jest generowany przez element idempotentny, a więc nie jest dopełnieniem w kracie $\mathfrak{I}_l(A)$.

Niech teraz $S \subset A$ będzie zbiorem wielomianów o niezerowych wyrazach wolnych. Wówczas możemy rozpatrzeć lokalizację $B = AS^{-1}$. Wiadomo ([AM69], strona 38), że B jest algebrą lokalną. Algebra ta nie ma idempotentów różnych od 0 i 1. Z Twierdzenia 2.2.4 i z pierwszej części przykładu wynika jednak, że $\mathfrak{A}_l(B) \simeq \mathfrak{A}_l(A) \simeq B_{2^n}$.

Z postaci dopełnień w kracie $\mathfrak{I}_l(A)$ i Twierdzenia 1.4.2 wynika, że A jest algebrą półprostą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{I}_l(A)$ jest modularną kratą z dopełnieniami. Wobec Twierdzenia 2.3.8 jest to dodatkowo krata rozdzielna, czyli algebra Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy A jest skończoną sumą prostą algebr z dzieleniem.

W przypadku reprezentacji krat Boole'a przez kraty anihilatorów algebr półprymarnych mamy następujący fakt:

Twierdzenie 3.1.4. *Niech A będzie algebrą półprymarną. Wówczas równoważne są warunki:*

(1) *Krata $\mathfrak{A}_l(A)$ ($\mathfrak{A}_r(A)$) jest skończoną algebrą Boole'a;*
(2) *Krata $\mathfrak{A}_l(A)$ ($\mathfrak{A}_r(A)$) jest algebrą Boole'a;*
(3) *A jest skończoną sumą prostą algebr z dzieleniem.*

Dowód. Wobec Twierdzenia 2.1.4 dowód wystarczy przeprowadzić tylko dla anihilatorów lewostronnych.

Oczywiście (1) $\Rightarrow$ (2), a implikacja (3) $\Rightarrow$ (1) wynika z Przykładu 3.1.2.

(2) $\Rightarrow$ (3). Niech $\mathfrak{A}_l(A)$ będzie algebrą Boole'a. Wówczas z Twierdzenia 2.3.8 wynika, że A jest skończoną sumą prostą algebr całkowicie prymarnych. Jeśli jednym z tych składników jest algebra, którą oznaczymy przez B, to $\mathfrak{A}_l(B)$ jest również algebrą Boole'a. Z Wniosku 2.1.5 wynika teraz, że $\mathrm{J}(B) = 0$. Zatem B jest algebrą z dzieleniem, a więc A jest skończoną sumą prostą algebr z dzieleniem. $\square$

W powyższym twierdzeniu mamy mocne ograniczenie algebr tylko do algebr półprymarnych. W Przykładzie 3.1.3 mamy algebrę A, która nie jest półprymarna, ale jej krata anihilatorów jest skończoną algebrą Boole'a.

3.2 Algebry zredukowane

Przypomnijmy, że algebrę nazywamy *zredukowaną* jeśli nie ma niezerowych elementów nilpotentnych. W opisie wielu warunków anihilatorowych dla algebr, w tym dla algebr wielomianów, szczególnie ważną rolę spełniają algebry zredukowane (zob. np. [Ar74, RCh97, Hi02, KN77]). W tym paragrafie pokażemy, że nie jest przypadkiem, iż w przykładach wyżej i w Twierdzeniu 3.1.4 algebry z kratami Boole'a anihilatorów są algebrami zredukowanymi.

Lemat 3.2.1. *Niech A będzie algebrą zredukowaną. Dla każdego niepustego podzbioru $X \subseteq A$ mamy $\mathrm{l}(X) = \mathrm{r}(X)$.*

Dowód. Niech A będzie algebrą zredukowaną, niech x będzie dowolnym elementem algebry A i niech $y \in \mathrm{l}(x)$. Stąd $(xy)^2 = xyxy = 0$, a skoro A jest zredukowana, to $xy = 0$. Zatem $y \in \mathrm{r}(x)$ i wobec dowolności y mamy $\mathrm{l}(x) \subseteq \mathrm{r}(x)$. Analogicznie można pokazać, że $\mathrm{r}(x) \subseteq \mathrm{l}(x)$. Dla każdego elementu $x \in A$ mamy więc $\mathrm{l}(x) = \mathrm{r}(x)$. Ze Stwierdzenia 2.1.2 otrzymujemy tezę dla dowolnego podzbioru $X \subseteq A$. $\square$

Niech A będzie algebrą zredukowaną. W związku z powyższym lematem, jeśli $X \subseteq A$, to zbiór $\mathrm{l}(X) = \mathrm{r}(X)$ oznaczymy dalej przez X^*. Przy tym oznaczeniu, jeśli I jest anihilatorem w A, to ze Stwierdzenia 2.1.2 mamy $(I^*)^* = I$. Ponadto, kres górny anihilatorów I, J można zapisać następująco $I \vee J = ((I \cup J)^*)^* = (I^* \cap J^*)^*$. Z powyższego lematu wynika również, że w algebrze zredukowanej każdy anihilator jest ideałem dwustronnym. Skoro $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A)$, to kratę anihilatorów oznaczymy przez $\mathfrak{A}(A)$.

Twierdzenie 3.2.2. *Niech A będzie algebrą zredukowaną. Wówczas krata $\mathfrak{A}(A)$ jest algebrą Boole'a.*

Dowód. Niech A będzie algebrą zredukowaną. Zaczniemy od pokazania, że każdy element I kraty $\mathfrak{A}(A)$ ma dokładnie jedno dopełnienie, którym jest I^*.

Niech $x \in I \wedge I^* = I \cap I^*$. Wówczas $x^2 = 0$, co w algebrze zredukowanej daje $x = 0$. Ponadto $I \vee I^* = (I^* \cap (I^*)^*)^* = 0^* = A$. Stąd I^* jest dopełnieniem I w $\mathfrak{A}(A)$. Niech również J będzie dopełnieniem I w $\mathfrak{A}(A)$. Wtedy oczywiście $I \cap J = 0$. Wobec tego $IJ \subseteq I \cap J = 0$, czyli $J \subseteq I^*$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że $I^*J^*(I+J) = 0$. Jednak $(I+J)^* = 0$, czyli $I^*J^* = 0$. Stąd $I^* \subseteq (J^*)^* = J$ i ostatecznie $J = I^*$.

Teza dowodzonego twierdzenia wynika teraz z równości $\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A)$, odpowiedniości Galois i Twierdzenia 1.2.10. $\square$

Algebr zredukowanych jest dużo. Podalgebry i sumy proste algebr zredukowanych są zredukowane, ale nie każdy obraz homomorficzny algebry zredukowanej jest zredukowany. Mamy jednak:

Twierdzenie 3.2.3. *Niech A będzie algebrą zredukowaną. Jeśli I jest anihilatorem w A, to algebra A/I jest zredukowana oraz $\mathfrak{A}(A/I) \backsimeq [I, A] \subseteq \mathfrak{A}(A)$.*

Dowód. Niech $I = S^*$, dla pewnego $S \subseteq A$, i niech $x^2 \in I$. Dla dowolnego $s \in S$ mamy $x^2 s = 0$, a stąd $x^2 s^2 = 0$.

Wiadomo (zob. [Kr96], Lemat 1.2), że dla dowolnych elementów $a_1, \dots a_n$ w algebrze zredukowanej i dowolnej permutacji σ, jeśli $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$, to $a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n)} = 0$. Zatem możemy zapisać $0 = x^2 s^2 = (xs)^2$, co daje $xs = 0$. Wobec dowolności $s \in S$, mamy $x \in S^* = I$. Pokazaliśmy, że A/I jest algebrą zredukowaną.

Z Lematu 2.2.10 wiemy, że przeciwobraz każdego anihilatora w algebrze A/I jest anihilatorem w algebrze A zawierającym I. Wystarczy więc tylko wykazać, że obraz każdego anihilatora w A zawierającego I jest anihilatorem w A/I.

Niech $I \subseteq J$ i $J \in \mathfrak{A}(A)$. Niech również $X \lhd A$ będzie takim ideałem, że $(J/I)^* = X/I$ w algebrze A/I. Ze wspomnianego Lematu 2.2.10 mamy $X \in \mathfrak{A}(A)$. Zatem rozważania wystarczy przeprowadzić w kracie $\mathfrak{A}(A)$.

Wobec Twierdzenia 3.2.2 krata $\mathfrak{A}(A)$ jest algebrą Boole'a i z punktu (4) Stwierdzenia 1.2.7 ideał J jest dopełnieniem $J^* \vee I$ w kracie Boole'a $[I, A] \subseteq \mathfrak{A}(A)$. Zatem $J(J^* \vee I) \subseteq J \cap (J^* \vee I) = I$. Stąd $J^* \vee I \subseteq X$. Jeśli $X \nsubseteq J^* \vee I$, to ze Stwierdzenia 1.2.7 (3) dostajemy $X \cap J \neq I$. Stąd istnieje $x \in X \cap J$ i $x \notin I$. Skoro $JX \subseteq I$, to $x^2 \in I$. Zatem w algebrze A/I mamy $x^2 + I = I$. Ponieważ algebra A/I jest zredukowana, to $x \in I$ i mamy sprzeczność. W A mamy więc równość $X = (J^* \vee I)$, a w algebrze A/I mamy $(J/I)^* = (J^* \vee I)/I$.

W analogiczny sposób można wykazać, że w algebrze A/I anihilator zbioru $(J^* \vee I)/I$ jest równy J/I. Stąd $J/I \in \mathfrak{A}(A/I)$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Wiadomo (zob. [Ar74, Hi02]), że dla dowolnej zredukowanej algebry A przekształcenie μ z $\mathfrak{A}_l(A)$ w $\mathfrak{A}_l(A[x])$, rozważane w Twierdzeniu 2.2.2 i we Wniosku 2.2.3, jest bijekcją. Zatem jeśli A jest algebrą zredukowaną, to $\mathfrak{A}(A) \backsimeq \mathfrak{A}(A[x])$. To ostatnie stwierdzenie można uogólnić na wielomiany dowolnej ilości przemiennych i nieprzemiennych zmiennych.

Takie rozszerzenie jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego rezultatu. Żeby go sformułować przypomnijmy kilka pojęć i faktów.

Monoid M nazywamy *u.p.-monoidem* ([Ok91]) jeśli dla dowolnych dwóch niepustych, skończonych podzbiorów $P, Q \subseteq M$ istnieje element $g \in M$, z jednoznacznym zapisem w postaci $g = pq$, gdzie $p \in P$ i $q \in Q$. Można pokazać, że jeśli A jest algebrą i X jest niepustym zbiorem zmiennych, to algebra wielomianów $A\{X\}$ $(A[X])$ jest algebrą monoidową $A[M]$, gdzie M jest monoidem (ze względu na mnożenie) generowanym przez podzbiór X w $A\{X\}$ $(A[X])$. W obu przypadkach M jest u.p.-monoidem. Żeby to uzasadnić, można skorzystać z faktu, że w obu przypadkach monoid M daje się liniowo uporządkować w ten sposób, że mnożenie w nim zachowuje nierówności. Takie liniowo uporządkowane monoidy są u.p.-monoidami (zob. §10 w [Ok91]).

Rozszerzając Stwierdzenie 1.1 w [Li05] możemy napisać:

Twierdzenie 3.2.4. *Niech A będzie algebrą zredukowaną i M dowolnym u.p.-monoidem. Wówczas algebra monoidowa $A[M]$ jest zredukowana i ma kratę anihilatorów naturalnie izomorficzną z kratą anihilatorów algebry A.*

DOWÓD. Zgodnie z [Li05] możemy udowodnić, że dla dowolnych elementów $\alpha = a_1g_1 + \ldots + a_ng_n, \beta = b_1h_1 + \ldots b_mh_m \in A[M]$, z faktu $\alpha\beta = 0$ wynika $a_ib_j = 0$, dla wszystkich i, j. Teraz łatwo zauważyć, że $A[M]$ jest algebrą zredukowaną i każdy anihilator w $A[M]$ jest postaci $I[M]$, gdzie I jest anihilatorem w A. Teraz dowód można dokończyć używając argumentów takich, jak w dowodzie Wniosku 2.2.3. $\square$

Kratowy opis anihilatorów w algebrach zredukowanych pozwala na rozszerzenie wyniku z [CS74], a także na podanie jego uproszczonego dowodu.

Twierdzenie 3.2.5. *Niech A będzie algebrą zredukowaną. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Krata $\mathfrak{A}(A)$ spełnia warunek maksymalności;*

(2) *Krata* $\mathfrak{A}(A)$ *spełnia warunek minimalności;*

(3) *Krata* $\mathfrak{A}(A)$ *jest skończona;*

(4) A *jest podalgebrą w skończonej sumie prostej dziedzin.*

Dowód. Z Twierdzenia 3.2.2 wiemy, że $\mathfrak{A}(A)$ jest algebrą Boole'a. Wobec Stwierdzenia 1.2.9 warunki (1), (2) i (3) dowodzonego twierdzenia są więc równoważne.

(3) $\Rightarrow$ (4). Niech krata $\mathfrak{A}(A)$ będzie skończona. Niech też $I \in \mathfrak{A}(A)$ będzie koatomem tej kraty i niech $a, b \in A$ będą takie, że $ab \in I$. Oznaczmy przez J ideał $(I \cup \{b\})^*$. Wówczas $I^*a \subseteq J$. Jeśli $b \notin I$, to $J = 0$ i stąd $I^*a = 0$, czyli $a \in I$. Pokazaliśmy, że algebra A/I jest dziedziną.

Niech $I_1, \ldots, I_n$ będą wszystkimi koatomami w kracie $\mathfrak{A}(A)$. Ponieważ krata anihilatorów jest skończoną algebrą Boole'a, to $\bigcap_{k=1}^{n} I_k = 0$. Zatem istnieje zanurzenie A w $A/I_1 \oplus \ldots \oplus A/I_n$. Z wyboru ideałów I_k wynika, że ilorazy te są dziedzinami.

(4) $\Rightarrow$ (3). Niech A będzie podalgebrą w $B = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, gdzie A_k są dziedzinami. Z Przykładu 3.1.2 wynika, że krata $\mathfrak{A}(B)$ jest skończona. Z Twierdzenia 2.2.2 otrzymujemy więc, że krata $\mathfrak{A}(A)$ jest też skończona. $\square$

Łatwo wskazać przykład algebry zredukowanej, z 1, której krata anihilatorów jest nieskończoną algebrą Boole'a. Taką algebrą jest chociażby algebra $A = \mathbb{K}[x_i : i \in \mathbb{N}]/(x_i x_j : i \neq j)$ (por. [La99], Zadanie 19, §11). Mamy bowiem $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) \simeq 2^{\mathbb{N}}$. Można sprawdzić, że algebra A jest zredukowana i nie ma właściwych idempotentów, podobnie jak ta z Przykładu 3.1.3.

3.3 Dalsze przykłady krat

W tym paragrafie wskażemy kolejne przykłady algebr, w których kraty anihilatorów mają szczególną postać. Istotne miejsce zajmą tu algebry, w których kraty anihilatorów są łańcuchami.

W przypadku kraty C_1 mamy $C_1 \simeq B_2$ i można korzystać z wyników poprzednich paragrafów. W przypadku kraty C_2 mamy, że C_2 jest podkratą w $\mathfrak{A}_l(A)$ i w $\mathfrak{A}_r(A)$ dla dowolnej algebry A, która nie jest dziedziną. Jeśli bowiem w algebrze A mamy elementy $a, b \neq 0$ takie, że $ab = 0$, to $C_2 \simeq \{0, \mathrm{l}(b), A\} \subseteq \mathfrak{A}_l(A)$ i $C_2 \simeq \{0, \mathrm{r}(a), A\} \subseteq \mathfrak{A}_r(A)$.

Dla łańcuchów dowolnej skończonej długości mamy:

Przykład 3.3.1. (a) Niech B będzie dowolną algebrą z dzieleniem, $n \geqslant 1$ i niech $A = B[x]/(x^n)$. Wówczas A jest algebrą całkowicie prymarną i $\mathfrak{I}_l(A) = \mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) = \mathfrak{I}_r(A) \simeq C_n$. Wobec tego A jest QF-algebrą.

(b) Ustalmy $r, n \geqslant 2$ i, jak wyżej, niech B będzie algebrą z dzieleniem. Niech $A = B\{x_1, \ldots, x_r\}/I^n$, gdzie I jest ideałem w A generowanym przez $x_1, \ldots x_r$. Wówczas łatwo sprawdzić, że A jest algebrą całkowicie prymarną i $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) = \{A, I, I^2, \ldots, I^n = 0\} \simeq C_n$. Algebra A nie jest jednak D-algebrą, a więc i QF-algebrą, bo np. Ax_1 nie jest lewostronnym anihilatorem w A.

Bezpośrednio z definicji algebr całkowicie prymarnych wynika poniższy fakt:

Stwierdzenie 3.3.2. *Jeśli A jest algebrą całkowicie prymarną z radykałem $J(A) \neq 0$, takim, że $J(A)^2 = 0$, to $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) = \{A, J(A), 0\} = C_2$.*

Okazuje się, że krata C_2 może być kratą anihilatorów nawet dla algebr, które nie są półprymarne.

Przykład 3.3.3. Niech $n \geqslant 2$ oraz $A = \mathbb{K}\{x_1, \ldots, x_n\}/(x_1^2)$.

Łatwo zauważyć, że $\mathrm{l}(x_1) = Ax_1$ i $\mathrm{r}(x_1) = x_1A$. Stąd $\mathrm{l}(x_1A) = Ax_1$ i $\mathrm{r}(Ax_1) = x_1A$.

Pokażemy teraz, że każdy właściwy lewostronny anihilator w algebrze A zawiera się w ideale I generowanym przez zmienne $x_1, \ldots, x_n$. Niech zatem $0 \neq y \in \mathrm{l}(z)$ i $z \neq 0$. Element y możemy zapisać w postaci $y = k + y_1$, gdzie $k \in \mathbb{K}$ i $y_1 \neq 0$, jest sumą jednomianów o dodatnich stopniach. Jeśli $k = 0$, to $y \in I$. Załóżmy zatem, że $k \neq 0$. W tej sytuacji $z \in I$. Niech s oznacza najmniejszy ze stopni jednomianów występujących w wielomianie z. Zapiszmy z w postaci $z = z_1 + z_2$, gdzie z_1 oznacza sumę jednomianów stopnia s, a z_2 sumę jednomianów stopni wyższych niż s. Zatem mamy $0 = (k+y_1)(z_1+z_2) = kz_1+t$, gdzie t jest sumą jednomianów stopni wyższych niż s. Stąd $k = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. A to oznacza, że każdy właściwy lewostronny anihilator w algebrze A zawiera się w I.

Niech teraz S będzie niepustym podzbiorem A i $\{0\} \neq S \nsubseteq x_1A$. Wówczas istnieje wielomian $0 \neq v \in S$ taki, że $v \notin x_1A$. Pokażemy, że $\mathrm{l}(v) = \mathrm{l}(S) = 0$.

Niech $w \in A$ będzie wielomianem postaci $w = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i x_i$, dla pewnych $\alpha_i \in \mathbb{K}$, i niech $wv = 0$. Zatem $0 = (\Sigma_{i=1}^n \alpha_i x_i)v = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i x_i v$. Z konstrukcji algebry A mamy, że dla każdego $i > 1$ element x_i nie jest dzielnikiem zera. Stąd dla każdego $i > 1$ mamy $x_i v \neq 0$. Ponadto, skoro $v \notin x_1A$, to $x_1 v \neq 0$. Stąd dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ współczynniki $\alpha_i = 0$, co implikuje $w = 0$. Pokazaliśmy, że nie istnieje wielomian stopnia 1 należący do $\mathrm{l}(v)$.

Załóżmy teraz, że istnieje wielomian w stopnia $s > 1$ taki, że $wv = 0$. Skoro $w \in I$, to w zapiszemy w postaci $w = \Sigma_{i=1}^{n} x_i w_i$, gdzie w_i są albo zerami, albo wielomianami stopnia mniejszego niż s. Zatem $0 = (\Sigma_{i=1}^{n} x_i w_i)v = \Sigma_{i=1}^{n} x_i w_i v$. Stąd dla każdego i mamy $x_i w_i v = 0$. Łatwo zauważyć, że dla każdego i mamy $w_i v = 0$, gdzie stopień wielomianu $w_i < s$. Z zasady indukcji względem stopnia wielomianu w dostajemy, że istnieje wielomian stopnia pierwszego należący do $\mathrm{l}(v)$, co daje sprzeczność. Stąd $\mathrm{l}(v) = \mathrm{l}(S) = 0$.

Podsumowując dostajemy, że $C_2 = \mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A)$. Zauważmy, że algebra A ma nieskończony wymiar nad $\mathbb{K}$. Ciągi $A \supset Ax_2 \supset Ax_2^2 \supset \ldots$, oraz $A \supset x_2 A \supset x_2^2 A \supset \ldots$ są nieskończonymi, zstępującymi ciągami ideałów jednostronnych w A. Stąd A nie jest D-algebrą, nie jest ani lewostronnie, ani prawostronnie artinowska, czyli nie jest półprymarna.

Już wiele razy zwracaliśmy uwagę na to, że własności krat ideałów znacznie różnią się od własności krat anihilatorów. Teraz podamy kolejną różnicę. Z odpowiedniości Galois krat anihilatorów wynika, że dla dowolnej algebry A kraty $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{A}_r(A)$ mają tę samą liczbę elementów. Jednakże kraty $\mathfrak{I}_l(A)$ i $\mathfrak{I}_r(A)$ mogą być różnej mocy. Poniżej znajdziemy przykład takiej algebry. Co więcej, jest to też przykład algebry, w której każdy lewostronny ideał jest lewostronnym anihilatorem, ale nie każdy prawostronny ideał jest prawostronnym anihilatorem.

Przykład 3.3.4 (zob. [HK14] i Przykład 3.17 z [BBT90])**.** Niech $\mathbb{L} = \mathbb{K}(x)$ będzie ciałem funkcji wymiernych zmiennej x o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$, niech $n \geqslant 2$ i niech σ oznacza $\mathbb{K}$-endomorfizm na $\mathbb{L}$ taki, że $\sigma(x) = x^n$. Wówczas $\sigma(\mathbb{L}) \neq \mathbb{L}$. Niech $\mathbb{L}[y, \sigma]$ będzie pierścieniem skośnych wielomianów zmiennej y o współczynnikach w $\mathbb{L}$ z endomorfizmem σ. Weźmy $A = \mathbb{L}[y, \sigma]/(y^2)$. Wówczas można sprawdzić, jak w [HK14], że algebra A jest lokalna, lewostronnie artinowska, oraz

$$\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{I}_l(A) = \mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) = \{A, J(A), 0\} \simeq C_2.$$

Jednakże krata $\mathfrak{I}_r(A)$ jest nieskończona, ponieważ zawiera zbiór wszystkich podprzestrzeni nad nieskończonym ciałem $\sigma(\mathbb{L})$ zawartych w $\mathbb{L}\overline{y}$, gdzie $\overline{y} = y + (y^2)$. Zatem $\mathfrak{I}_r(A) \neq \mathfrak{A}_r(A)$. Jednak $\mathfrak{I}_r(A)$ jest kratą długości $n+1$, a więc A jest algebrą prawostronnie artinowską.

3.4 Konstrukcja nieprzemienna

W przypadku dowolnej kraty L wskazanie algebry A, dla której $L = \mathfrak{A}_l(A)$, lub przynajmniej L jest podkratą $\mathfrak{A}_l(A)$ często sprawiało duże trudności. Pokażemy jednak, zgodnie z [JK15a, §3], że każdy zbiór uporządkowany może być zanurzony z zachowaniem porządku w kratę anihilatorów pewnej algebry całkowicie prymarnej. W przypadku krat zanurzenie to okaże się zanurzeniem kratowym, a w przypadku krat zupełnych prawie izomorfizmem. Wszystkie rozważania w tym paragrafie przeprowadzone będą dla krat anihilatorów lewostronnych, jednakże z uwagi na wzór (2.1.1), otrzymane tu rezultaty mają swoje odpowiedniki w kratach anihilatorów prawostronnych.

Zaczniemy od przykładu, który jest nieznaczną modyfikacją Przykładu 3.1 z [JK15a].

Przykład 3.4.1. Niech P będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym i $\mathrm{M}(P)$ będzie wolnym monoidem ze zbiorem wolnych generatorów P. W monoidzie $\mathrm{M}(P)$ weźmy ideał I generowany przez wszystkie iloczyny xyz, gdzie $x, y, z \in P$, oraz przez wszystkie iloczyny xy, gdzie $x, y \in P$ i $x \leqslant y$. Niech $\overline{P} = \mathrm{M}(P)/I$ będzie ilorazowym monoidem Reesa (zob. Definicja 1.3.3). Oczywiście $P \subset \overline{P}$ w naturalny sposób i $P^2 = \{0\} \cup \{xy : x, y \in P,\ x \not\leqslant y\}$. Ponadto, $\overline{P} = \{1\} \cup P \cup P^2$. Dla nas następująca jednoznaczność zapisu elementów w $\overline{P}$ będzie bardzo istotna: jeśli $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \overline{P} \setminus \{1\}$ są takie, że $x_1x_2 = y_1y_2 \neq 0$, to $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$.

Niech teraz $\mathbb{K}(P) = \mathbb{K}_0[\overline{P}]$ będzie ściągniętą algebrą monoidową. Tak więc $P \subset \mathbb{K}(P)$ i $\mathbb{K}(P)$ ma naturalną gradację daną przez:

$$\mathbb{K}(P) = \mathbb{K} \oplus V \oplus V^2, \tag{3.4.1}$$

gdzie naturalna baza V może być utożsamiona z P oraz naturalna baza V^2 może być utożsamiona z $P^2 \setminus \{0\}$.

Łatwo sprawdzić, że $J = V \oplus V^2$ jest radykałem algebry $\mathbb{K}(P)$. Zauważmy, że $J^3 = 0$. Ciałem reszt tej algebry jest $A/J = \mathbb{K}$ i algebra $\mathbb{K}(P)$ jest całkowicie prymarna. Zgodnie z Wnioskiem 2.1.5 krata $\mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(P))$ ma dokładnie jeden koatom J i dokładnie jeden atom $\mathrm{l}(J)$.

Twierdzenie 3.4.2. *Niech P będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym i niech $\mathbb{K}(P)$ będzie algebrą skonstruowaną w Przykładzie* 3.4.1. *Wówczas odwzorowanie $\phi : P \longrightarrow \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(P))$ dane wzorem $\phi(x) = \mathrm{l}_{\mathbb{K}(P)}(x)$ dla $x \in P$ jest przekształceniem ściśle zachowującym porządek. Przekształcenie ϕ zachowuje też wszystkie istniejące w P kresy górne i dolne.*

Dowód. Oznaczmy algebrę $\mathbb{K}(P)$ przez A. Zauważmy, że dla każdego $x \in P \subset V \subset$

A mamy

$$V^2 \subseteq \phi(x) = \mathrm{l}_A(x) = V_x \oplus V^2, \tag{3.4.2}$$

gdzie $V_x \subseteq V$ jest podprzestrzenią rozpiętą przez wszystkie elementy $y \in P$ takie, że $y \leqslant x$. W szczególności $x \in \phi(x)$. Stąd łatwo już zauważyć, że ϕ jest zanurzeniem zbiorów uporządkowanych. Ponadto, jeśli $\mathrm{l}_A(x) \leqslant \mathrm{l}_A(y)$ w karacie $\mathfrak{A}_l(A)$, to $xy = 0$, i stąd $x \leqslant y$. To kończy dowód faktu, że ϕ jest przekształceniem ściśle zachowującym porządek.

Analogicznie jak dla lewostronnych anihilatorów możemy zapisać:

$$V^2 \subseteq \mathrm{r}_A(x) =_x V \oplus V^2,$$

gdzie ${}_xV \subseteq V$ jest podprzestrzenią rozpiętą przez wszystkie elementy $y \in P$ takie, że $x \leqslant y$.

Jeśli $Z, W \subseteq P$ są skończonymi podzbiorami takimi, że $\sum_{i\,j} \alpha_{ij} z_i w_j = 0$ gdzie $z_i \in Z, w_j \in W, \alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, to z jednoznaczności zapisu elementów w $\overline{P}$ mamy $\alpha_{ij} z_i w_j = 0$ dla każdej pary i, j. Stąd, jeśli $a = \sum_j \alpha_j w_j \in V$, gdzie $\alpha_j \neq 0$ dla każdego j, to $\mathrm{l}(a) = \bigcap_j \mathrm{l}(w_j)$. Analogiczne, jeśli $b = \sum_i \alpha_i z_i \in V$, gdzie $\alpha_i \neq 0$ dla każdego i, to $\mathrm{r}(b) = \bigcap_i \mathrm{r}(z_i)$. Z powyższego wynika, że dla dowolnego zbioru $J^2 \subset X \subset J$ anihilatory $\mathrm{l}(X), \mathrm{r}(X)$ są częścią wspólną anihilatorów pewnych elementów z P. Dokładniej możemy zapisać, że $\mathrm{l}(X) = B_1 \oplus V^2$ i $\mathrm{r}(X) = B_2 \oplus V^2$ gdzie B_1 i B_2 są podprzestrzeniami w V rozpiętymi przez pewne elementy z P.

Załóżmy teraz, że dla pewnego podzbioru $S \subseteq P$ istnieje kres górny $t = \bigvee S \in P$. Pokażemy, że $\phi(t) = \bigvee_{s\in S} \phi(s)$, czyli $\mathrm{l}(t) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s)))$.

Niech $z \in P$ i $z \in \mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s))$. Wówczas, w szczególności $sz = 0$ dla każdego $s \in S$ i stąd $s \leqslant z$ dla wszystkich $s \in S$. To daje $t = \bigvee S \leqslant z$. Stąd $tz = 0$ i $\mathrm{r}(t) \supseteq \mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s))$. Oczywiście $\mathrm{r}(t) =_t V \oplus V^2 \subseteq \mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s))$ i stąd $\mathrm{r}(t) = \mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s))$. Zatem $\mathrm{l}(\mathrm{r}(t)) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s)))$, a biorąc pod uwagę prostą obserwację, że $\mathrm{l}(\mathrm{r}(t)) = \mathrm{l}(t)$, otrzymujemy $\mathrm{l}(t) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(\sum_{s\in S} \mathrm{l}(s)))$. Wykazaliśmy, że ϕ zachowuje istniejące kresy górne.

Pozostało pokazać, że ϕ zachowuje istniejące kresy dolne. Niech zatem dla pewnego podzbioru $S \subseteq P$ istnieje element $q = \bigwedge S \in P$. Pokażemy, że $\phi(q) = \bigwedge_{s\in S} \phi(s)$. Zauważmy, że $\bigwedge_{s\in S} \phi(s) = \bigwedge_{s\in S} \mathrm{l}(s) = \bigcap_{s\in S} \mathrm{l}(s) = \bigcap_{s\in S}(V_s \oplus V^2) = V_{\bigwedge S} \oplus V^2 = \mathrm{l}(\bigwedge S) = \phi(q)$, co kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że jeśli L jest kratą, to w powyższym twierdzeniu odwzorowanie ϕ jest kratowym zanurzeniem. Mamy zatem

Wniosek 3.4.3. *Każda krata L zanurza się w kratę lewostronnych anihilatorów algebry $\mathbb{K}(L)$.*

Pamiętając, że krata $\mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(P))$ ma dokładnie jeden atom $\mathrm{l}(J)$ i dokładnie jeden koatom J możemy powiedzieć więcej:

Stwierdzenie 3.4.4. *Niech L będzie kratą zupełną. Wówczas L jest izomorficzna z przedziałem $[\mathrm{l}(J), J] \subseteq \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(L))$.*

Dowód. Niech L będzie kratą zupełną, z elementem najmniejszym ω i elementem największym Ω. Niech ϕ będzie przekształceniem $L \longrightarrow \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(L))$ zadanym w Twierdzeniu 3.4.2 przez $\phi(x) = \mathrm{l}_{\mathbb{K}(L)}(x)$ dla $x \in L$. Zgodnie ze wzorem (3.4.2) możemy zapisać $\phi(\omega) = V_\omega + V^2$, oraz $\phi(\Omega) = V_\Omega + V^2 = V + V^2$. Zauważmy, że $\mathrm{l}(J) = V_\omega + V^2$. Skoro ϕ jest zanurzeniem zachowującym wszystkie kresy, to aby udowodnić stwierdzenie wystarczy pokazać, że ϕ jest suriekcją.

Niech więc $I \in \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(L))$ oraz $V_\omega + V^2 \subset I \subset V + V^2$. Z dowodu Twierdzenia 3.4.2 wiemy, że $I = \bigwedge_{s\in S} \mathrm{l}(p_s)$, dla pewnej rodziny elementów $p_s \in P$. Skoro dla każdego $s \in S$ mamy $\mathrm{l}(p_s) = \phi(p_s)$, to $I = \bigwedge_{s\in S} \phi(p_s)$. Z zupełności kraty L wiemy, że w L istnieje $\bigwedge_{s\in S} p_s$, a zatem $\phi(\bigwedge_{s\in S} p_s) = \bigwedge_{s\in S} \phi(p_s) = I$. Stąd każdy lewostronny anihilator w $[\mathrm{l}(J), J] \subseteq \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(L))$ jest obrazem pewnego elementu z kraty L. Stwierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Kraty ideałów jednostronnych dowolnej algebry są modularne, więc spełniają dobrze znaną tożsamość: $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Z drugiej strony, jako skutek Wniosku 3.4.3 otrzymujemy:

Twierdzenie 3.4.5 ([JK15a])**.** *Nie istnieje nietrywialna, kratowa tożsamość spełniona we wszystkich kratach anihilatorów algebr lokalnych.*

Dowód. Niech $f \equiv g$ będzie nietrywialną tożsamością spełnioną przez wszystkie kraty anihilatorów algebr lokalnych. Niech L będzie kratą wolną o przeliczalnym zbiorze wolnych generatorów. Z Przykładu 3.4.1 wiemy, że algebra $\mathbb{K}(L)$ jest lokalna.

Z założenia mamy więc, że tożsamość $f \equiv g$ jest spełniona w kracie $\mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(L))$. Zatem tożsamość ta jest również spełniona w każdej podkracie kraty anihilatorów algebry $\mathbb{K}(L)$, czyli z Wniosku 3.4.3 również w kracie L, co jest niemożliwe. $\square$

Niech P będzie zbiorem uporządkowanym i $|P| > 1$. Wtedy skonstruowana w Przykładzie 3.4.1 algebra $\mathbb{K}(P)$ jest nieprzemienna. Jednak spełnia ona tożsamość $(xy - yx)^2 \equiv 0$. Mamy również następujący fakt:

Twierdzenie 3.4.6 ([JK15b]). *Jeśli P jest zbiorem uporządkowanym, to każdy lewostronny i każdy prawostronny anihilator w algebrze $\mathbb{K}(P)$ jest ideałem w $\mathbb{K}(P)$.*

Dowód. Oznaczmy algebrę $\mathbb{K}(P)$ przez A. Ze wzoru (3.4.2) wynika, że dla każdego niepustego podzbioru $X \neq \{0\}$ i $X \subseteq V \oplus V^2$ mamy $V^2 \subseteq \mathrm{l}(X)$. Zauważmy, że $\mathrm{l}(X)A \subseteq \mathrm{l}(X) + V^2$, a zatem $\mathrm{l}(X)A \subseteq \mathrm{l}(X)$. Jeśli $X \nsubseteq V \oplus V^2$, to X zawiera element odwracalny i $\mathrm{l}(X) = 0$. Stąd każdy lewostronny anihilator w A jest prawostronnym ideałem, a więc ideałem. Z tego faktu i ze Stwierdzenia 2.1.2 wynika, że każdy prawostronny anihilator w A jest także ideałem w A. $\square$

Wniosek 3.4.7 ([JK15b]). *Niech L będzie kratą. Wówczas odwzorowanie $\phi : L \longrightarrow \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(L))$ dane przez $\phi(x) = l(x)$ jest $\wedge$-zanurzeniem kraty L w $\mathfrak{I}(\mathbb{K}(L))$.*

Dowód. Dla dowolnej algebry A kresy dolne w kratach $\mathfrak{A}_l(A)$ i $\mathfrak{I}(A)$ są zadane tym samym wzorem. Teza wynika więc z powyższego twierdzenia i Wniosku 3.4.3. $\square$

Zanurzenie kraty anihilatorów lewostronnych dowolnej algebry w jej kratę lewostronnych ideałów nie jest na ogół homomorfizmem krat, ponieważ kraty ideałów jednostronnych są modularne, a kraty anihilatorów nie muszą być modularne. Nawet jeśli krata lewostronnych anihilatorów algebry A jest modularna, to naturalne zanurzenie kraty $\mathfrak{A}_l(A)$ w kratę $\mathfrak{I}_l(A)$ (jako zbiorów uporządkowanych) nie musi być homomorfizmem krat. W Przykładzie 3.1.3 wskazaliśmy przemienną, lokalną i zredukowaną algebrę B, w której krata $\mathfrak{A}_l(B)$ jest algebrą Boole'a, a więc kratą modularną. Łatwo zauważyć, że naturalne odwzorowanie z $\mathfrak{A}_l(B)$ w $\mathfrak{I}_l(B)$ nie zachowuje kresów górnych, czyli nie jest homomorfizmem krat.

Na koniec tego paragrafu przejdziemy jeszcze do algebr bez jedynki.

W Przykładzie 3.4.1 dla danego zbioru uporządkowanego P konstruowana algebra miała jedynkę. Jeśli we wspomnianym przykładzie zastąpimy monoid wolny $M(P)$ przez półgrupę wolną ze zbiorem wolnych generatorów P, to dalsza część podanej tam konstrukcji doprowadzi do powstania ściągniętej algebry półgrupowej, która będzie algebrą nilpotentną, a więc algebrą bez jedynki. Oznaczmy tę algebrę przez $\mathbb{K}_S(P)$. Nietrudno sprawdzić, że jeśli do algebry $\mathbb{K}_S(P)$ dołączymy jedynkę tak, jak w Twierdzeniu 1.4.1, to otrzymamy algebrę izomorficzną z algebrą $\mathbb{K}(P)$. Ze Stwierdzenia 3.4.4 oraz z Twierdzenia 2.2.7 otrzymujemy, że jeśli L jest kratą zupełną, to L jest izomorficzna z kratą lewostronnych anihilatorów nilpotentnej algebry $\mathbb{K}_S(L)$. Możemy więc odnotować

Twierdzenie 3.4.8. *Każda krata zupełna jest izomorficzna z kratą lewostronnych anihilatorów pewnej algebry nilpotentnej stopnia nilpotentności* 3.

W powyższym twierdzeniu stopień nilpotentności algebry nie może być obniżony, ponieważ krata anihilatorów dowolnej, niezerowej algebry nilpotentnej stopnia nilpotentności 2 jest łańcuchem C_1.

3.5 Algebry przemienne

W tym paragrafie pokażemy, że dowolny zbiór uporządkowany można zanurzyć w kratę anihilatorów pewnej algebry przemiennej. Ponieważ do algebr przemiennych nie da się bezpośrednio przenieść konstrukcji przedstawionej w Przykładzie 3.4.1, to niezbędne jest podanie nowej. W rzeczywistości owa „nowa" konstrukcja będzie istotną modyfikacją poprzedniej.

Wprawdzie większość rezultatów tutaj przedstawionych pochodzi z [JK15b], ale zostały one zaprezentowane w inny, bardziej czytelny sposób.

W tym paragrafie wszystkie algebry będą przemienne. Z umowy tej wynika, że jeśli A jest algebrą, to $\mathrm{l}(X) = \mathrm{r}(X)$ dla każdego podzbioru $X \subseteq A$, a więc $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A)$. Ponieważ te same własności anihilatorów występowały w algebrach zredukowanych, to przyjmiemy tamte oznaczenia, a mianowicie: $\mathrm{l}(X) = \mathrm{r}(X) = X^*$ i $\mathfrak{A}_l(A) = \mathfrak{A}_r(A) = \mathfrak{A}(A)$. W przypadku, gdy $X = \{x\}$ zamiast $\{x\}^*$ zapiszemy $(x)^*$.

Zauważmy, że z Twierdzenia 2.1.4 wynika, że odwzorowanie

$$\delta : X \longrightarrow X^* \tag{3.5.1}$$

jest antyautomorfizmem kraty $\mathfrak{A}(A)$. Zatem tylko kraty, dla których istnieje antyautomorfizm mogą być kratami anihilatorów w algebrach przemiennych.

Ponadto, z Twierdzenia 2.3.3 i Stwierdzenia 2.2.1 wynika poniższy rezultat.

Stwierdzenie 3.5.1. *Niech A będzie algebrą półprymarną. Krata $\mathfrak{A}(A)$ jest nierozkładalna wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebrą lokalną.*

Poniższy przykład będzie odgrywał kluczową rolę dla tego paragrafu. Przedstawiona tu konstrukcja jest modyfikacją Przykładu 2.1 z [JK15b].

Przykład 3.5.2. Niech P będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym, $X = \{x_p : p \in P\}$, $Y = \{y_p : p \in P\}$ będą zbiorami rozłącznymi i niech $T = X \cup Y$. Niech $M_c(T)$ będzie wolnym, przemiennym monoidem ze zbiorem wolnych generatorów T.

Rozważmy w $M_c(T)$ ideał I generowany przez wszystkie iloczyny długości trzy, tj. $\{abc : a, b, c \in T\}$ i przez wszystkie elementy zbioru $\{x_p y_q : p, q \in P \text{ oraz } p \geqslant q\}$. Niech teraz $\overline{T} = M_c(T)/I$ będzie monoidem Reesa. Oczywiście $T \subset \overline{T}$ w sposób naturalny. Mamy również $T^2 = \{0\} \cup \{x_p x_q : p, q \in P\} \cup \{y_p y_q : p, q \in P\} \cup \{x_p y_q : p, q \in P \text{ oraz } p \ngeqslant q\}$. Ponadto, $\overline{T} = \{1\} \cup T \cup T^2$.

Zauważmy, że z konstrukcji $\overline{T}$ wynika pewna forma jednoznaczności zapisu elementów w $\overline{T}$. Dla dowolnych $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$ mamy:

$$\text{Jeśli } t_1 t_2 = t_3 t_4 \neq 0, \text{ to } t_1 = t_3 \text{ i } t_2 = t_4 \text{ lub } t_1 = t_4 \text{ i } t_2 = t_3. \tag{3.5.2}$$

Niech teraz $\mathbb{K}(\!(P)\!) = \mathbb{K}_0[\overline{T}]$ będzie ściągniętą algebrą monoidową. Biorąc pod uwagę przekształcenie $P \longrightarrow X$, dane przez $p \longrightarrow x_p$, możemy utożsamić zbiór P ze zbiorem X i zapisać $P \subset \mathbb{K}(\!(P)\!)$. Zauważmy, że algebra $\mathbb{K}(\!(P)\!)$ ma naturalna gradację daną przez:

$$\mathbb{K}(\!(P)\!) = \mathbb{K} \oplus W \oplus W^2, \tag{3.5.3}$$

gdzie naturalną bazę W stanowi zbiór T oraz bazę W^2 stanowi zbiór $T^2 \setminus \{0\}$.

Nietrudno sprawdzić, że $J = W \oplus W^2$ jest radykałem algebry $\mathbb{K}(\!(P)\!)$. Oczywiście $J^3 = 0$. Ciałem reszt tej algebry jest $A/J = \mathbb{K}$ i algebra $\mathbb{K}(\!(P)\!)$ jest całkowicie prymarna. Zgodnie z Wnioskiem 2.1.5 krata $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(P)\!))$ ma dokładnie jeden koatom J i dokładnie jeden atom, którym jak łatwo sprawdzić, jest $J^* = J^2 = W^2$.

Przy powyższych oznaczeniach mamy:

Twierdzenie 3.5.3. *Niech P będzie zbiorem uporządkowanym i niech $\psi : P \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(P)\!))$ będzie dane przez $\psi(p) = (x_p)^*$ dla $p \in P$. Wówczas ψ jest przekształceniem ściśle zachowującym porządek. Ponadto, ψ zachowuje wszystkie istniejące w P kresy górne i dolne.*

Dowód.

Zauważmy, że dla każdego elementu $p \in P$ mamy

$$W^2 \subseteq \psi(p) = (x_p)^* = W_p \oplus W^2,$$

gdzie $W_p \subseteq W$ jest podprzestrzenią rozpięta przez elementy $\{y_q \in Y : q \in P \text{ oraz } q \leqslant p\}$. Łatwo zauważyć, że $p \leqslant q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_p)^* = W_p \oplus W^2 \subseteq W_q \oplus W^2 = (x_q)^*$. W szczególności $y_p \in \psi(p)$. Zatem ψ jest przekształceniem ściśle zachowującym porządek.

Niech teraz, dla dowolnego $p \in P$, zbiór ${}_pW \subseteq W$ będzie podprzestrzenią rozpiętą przez wszystkie elementy $\{x_q : q \in P \text{ oraz } p \leqslant q\}$. Zauważmy, że

$$(y_p)^* =_p W \oplus W^2.$$

Aby udowodnić, że ψ zachowuje istniejące kresy potrzebujemy kilku obserwacji.

Pokażemy najpierw, że w $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(P)\!))$ największe znaczenie mają anihilatory elementów z T. Niech $Z, U \subseteq T$ będą skończonymi podzbiorami takimi, że $\sum_{i\,j} \alpha_{ij} z_i u_j = 0$ gdzie $z_i \in Z, u_j \in U, 0 \neq \alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Wówczas z liniowej niezależności odpowiednich elementów otrzymujemy, że $Z \cap U = \emptyset$, i następnie $\alpha_{ij} z_i u_j = 0$ dla każdej pary i, j.

Stąd mamy:

$$\text{Jeśli } r = \sum_i \alpha_i z_i \in W \text{ oraz } \alpha_i \neq 0 \text{ dla każdego } i, \text{ to } (r)^* = \bigcap_i (z_i)^*. \tag{3.5.4}$$

Zatem dla każdego $J^2 \subset R \subset J$ mamy $R^* = B \oplus W^2$, gdzie B jest podprzestrzenią rozpiętą przez pewne elementy z T. Możemy powiedzieć więcej:

$$\text{Jeśli } R \subseteq \mathrm{Lin}(X) + W^2, \text{ to } R^* \subseteq \mathrm{Lin}(Y) + W^2. \tag{3.5.5}$$

I odwrotnie

$$\text{Jeśli } R \subseteq \mathrm{Lin}(Y) + W^2, \text{ to } R^* \subseteq \mathrm{Lin}(X) + W^2. \tag{3.5.6}$$

Załóżmy teraz, że dla pewnego $S \subseteq P$ istnieje $\bigvee S \in P$. Chcemy pokazać, że $\psi(\bigvee S) = \bigvee_{s\in S} \psi(s) = ((\sum_{s\in S} \psi(s))^*)^*$.

Ponieważ $\sum_{s\in S} \psi(s) \subseteq \mathrm{Lin}(Y) + W^2$, to $(\sum_{s\in S} \psi(s))^* \subseteq \mathrm{Lin}(X) + W^2$. Niech zatem $x_i \in (\sum_{s\in S} \psi(s))^*$ dla pewnego $i \in P$. W szczególności $x_i y_s = 0$ dla każdego $s \in S$, a zatem $i \geqslant s$ dla wszystkich $s \in S$. Stąd $i \geqslant \bigvee S$. Zatem

$$(\sum_{s\in S} \psi(s))^* \subseteq_{\bigvee S} W \oplus W^2.$$

Oczywiście $(\sum_{s\in S} \psi(s))^* \supseteq_{\bigvee S} W \oplus W^2$ i mamy równość $(\sum_{s\in S} \psi(s))^* =_{\bigvee S} W \oplus W^2$. Łatwo zauważyć, że $({}_{\bigvee S} W \oplus W^2)^* = (x_{\bigvee S})^*$. W konsekwencji ψ zachowuje wszystkie istniejące w P kresy górne.

Pokażemy teraz, że ϕ zachowuje istniejące iloczyny. Niech więc zbiór $S \subseteq P$, będzie taki, że istnieje $\bigwedge S \in P$. Pokażemy, że $\psi(\bigwedge S) = \bigwedge_{s\in S} \psi(s)$. Zauważmy, że $\bigwedge_{s\in S} \psi(s) = \bigwedge_{s\in S} (x_s)^* = \bigcap_{s\in S} (x_s)^* = \bigcap_{s\in S} (W_s \oplus W^2) = W_{\bigwedge S} \oplus W^2 = (x_{\bigwedge S})^* = \psi(\bigwedge S)$, co kończy dowód. $\square$

Z powyższego twierdzenia, podobnie jak w sytuacji nieprzemiennej, mamy:

Wniosek 3.5.4. *Jeśli L jest kratą, to przekształcenie ψ z powyższego twierdzenia jest kratowym zanurzeniem L w kratę anihilatorów algebry $\mathbb{K}(\!(L)\!)$. Zatem każda krata zanurza się w kratę anihilatorów pewnej przemiennej, całkowicie prymarnej $\mathbb{K}$-algebry.*

Z konstrukcji algebry $\mathbb{K}(\!(P)\!)$ wynika też inne zanurzenie.

Twierdzenie 3.5.5. *Niech P będzie zbiorem uporządkowanym i niech $\overline{\psi} : P \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(P)\!))$ będzie dane przez $\overline{\psi}(p) = (y_p)^*$ dla wszystkich $p \in P$. Wówczas $\overline{\psi}$ jest zanurzeniem odwracającym porządek i zamienia role kresów dolnych z górnymi.*

Dowód. Niech przekształcenie ψ będzie takie jak w Twierdzeniu 3.5.3, czyli $\psi(p) = (x_p)^*$. Ponadto, niech przekształcenie δ będzie określone wzorem (3.5.1). Wówczas złożenie przekształceń $\delta \circ \psi = \overline{\psi}$ jest zanurzeniem odwracającym porządek i zamieniającym rolami wszystkie istniejące w P kresy górne i dolne. □

W przypadku, gdy L jest kratą zupełną kratę anihilatorów algebry $\mathbb{K}(\!(L)\!)$ daje się łatwo opisać.

Twierdzenie 3.5.6. *Niech L będzie kratą zupełną. Wówczas*

(1) *Krata $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))$ jest kratą z dokładnie jednym atomem J^2, z dokładnie jednym koatomem J oraz $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!)) \setminus \{\mathbb{K}(\!(L)\!), 0, J, J^2\}$ jest sumą rozłączną krat L i L^{op}.*

(2) *Dla każdego elementu I kraty $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))$ istnieje element $a \in \mathbb{K}(\!(L)\!)$ taki, że $I = (a)^*$.*

Dowód.

(1) Trzeba tylko sprawdzić, że $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!)) \setminus \{\mathbb{K}(\!(L)\!), 0, J, J^2\}$ jest sumą rozłączną krat L i L^{op}. Niech $J^2 \subset Z \subset J$ oraz $Z \not\subseteq \mathrm{Lin}(X) + W^2$ i jednocześnie $Z \not\subseteq \mathrm{Lin}(Y) + W^2$. Mając na uwadze wzór (3.5.4) łatwo sprawdzić, że wówczas $Z^* = W^2$. Niech dalej Z będzie zbiorem takim, że $W^2 \subset Z \subset W$ oraz $Z \subseteq \mathrm{Lin}(X) + W^2$ lub $Z \subseteq \mathrm{Lin}(Y) + W^2$. Ze wzorów (3.5.5) i (3.5.6) wynika, że musimy rozpatrzeć jedynie anihilatory należące do $\mathrm{Lin}(X) + W^2$ lub $\mathrm{Lin}(Y) + W^2$.

Niech więc $I \in \mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))$ oraz $J^2 \subset I \subseteq \mathrm{Lin}(Y) + W^2$. We wzoru (3.5.4) wiemy, że I jest przecięciem anihilatorów elementów z T. Stąd istnieje zbiór $\bigcup_{s \in S} x_s$ dla pewnego $S \subseteq P$ taki, że $I = \bigcap_{s \in S} (x_s)^*$. Z faktu, że L jest zupełna i z Twierdzenia 3.5.3 mamy, że $I = \bigwedge_{s \in S} \psi(s) = \psi(\bigwedge S)$. Stąd I jest obrazem pewnego elementu z P przy przekształceniu ψ.

Podobnie, korzystając z Twierdzenia 3.5.5 można pokazać, że anihilator $I \in \mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))$ taki, że $J^2 \subset I \subseteq \mathrm{Lin}(X) + W^2$ jest obrazem pewnego elementu z P przy przekształceniu $\overline{\psi}$. Teraz łatwo dokończyć dowód punktu (1).

(2) Niech $p \in L$. Dowód wynika z (1) oraz z faktu, że $A = (0)^*, 0 = (1)^*, J = (x_p x_p)^*, J^2 = (x_p + y_p)^*$. □

W ciągu ostatnich lat ukazało się wiele prac poświęconych badaniu wzajemnego wpływu pomiędzy algebraicznymi własnościami przemiennego pierścienia R i własnościami pewnych grafów związanych z pierścieniem R (zob. [We11, AL99, Ba14, Mu02]). Między innymi badaniom został poddany graf (a także jego związki z kratą anihilatorów) zwany *ściśniętym grafem dzielników zera* (compressed zero-divisor graph).

Definicja 3.5.7 ([Mu02])**.** Niech dany będzie pierścień R i zbiór jego niezerowych dzielników zera $\Delta(R)$. Elementy $r, s \in \Delta(R)$ są równoważne jeśli $(r)^* = (s)^*$. Klasę równoważności elementu r oznaczymy przez $[r]$. Ściśniętym grafem dzielników zera nazywamy graf $\Gamma(R)$, którego zbiór wierzchołków składa się z klas równoważności $\{[r] : r \in \Delta(R)\}$ i różne klasy $[r]$ i $[s]$ są połączone w $\Gamma(R)$, o ile $rs = 0$ w R.

Z Twierdzenia 3.5.6 wynika, że dla skończonej kraty L, ściśnięty graf dzielników zera $\Gamma(\mathbb{K}(\!(L)\!))$ jest bardzo mocno związany z kratą $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))$. W szczególności łatwo zauważyć, że $|\Gamma(\mathbb{K}(\!(L)\!))| = |\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))| - 2$. Wiele innych własności wspomnianego grafu wynika bezpośrednio z własności kraty $\mathfrak{A}(\mathbb{K}(\!(L)\!))$.

ROZDZIAŁ 4

Algebry skończenie wymiarowe

W tym rozdziale wszystkie algebry będą skończenie wymiarowe, z jedynką. Będziemy taż zwracać większą uwagę na przypadek, gdy $\mathbb{K}$ jest ciałem nieskończonym.

4.1 Pewne skutki przyjętych ograniczeń

Przyjęte wyżej ograniczenia i fakt, że anihilatory są podprzestrzeniami dają w szczególności następujący wynik:

Stwierdzenie 4.1.1. *Niech* $\mathrm{Dim}(A) = n < \infty$. *Wówczas kraty* $\mathfrak{I}_l(A)$ *oraz* $\mathfrak{I}_r(A)$ *mają długość ograniczoną przez* n. *A jest więc algebrą lewostronnie i prawostronnie artinowską. Kraty anihilatorów w A również mają długość ograniczoną prze* n, *jako podzbiory uporządkowane krat ideałów jednostronnych.*

Będziemy więc mogli stosować do rozważanych w tym rozdziale algebr wszystkie rezultaty o algebrach artinowskich z wcześniejszych rozdziałów. Między innymi, algebry lokalne będą więc całkowicie prymarne. Celem tego paragrafu jest zwrócenie uwagi na wyniki, które przy przyjętych ograniczeniach można wzmocnić. Jako szczególny przypadek twierdzenia Artina-Wedderburna, a faktycznie jako jego wcześniejszą wersję mamy:

Twierdzenie 4.1.2 (Wedderburn)**.** *Niech A będzie algebrą półpierwszą. Wówczas*

$$A \backsimeq M_{n_1}(D_1) \oplus M_{n_2}(D_2) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(D_s), \tag{4.1.1}$$

gdzie $D_1, \ldots, D_s$ *są (oczywiście skończenie wymiarowymi) algebrami z dzieleniem.*

Jeśli więc $\mathbb{K}$ *jest ciałem algebraicznie domkniętym, to:*

$$A \backsimeq M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{K}) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(\mathbb{K}). \tag{4.1.2}$$

Okazuje się, że w przypadku algebr skończenie wymiarowych kraty jednostronnych ideałów i anihilatorów mają pewne, specyficzne własności. Między innymi znane są poniższe fakty.

Stwierdzenie 4.1.3. *Niech A będzie algebrą. Wówczas:*

(1) *Jeśli każdy element kraty $\mathfrak{I}_l(A)$ ($\mathfrak{I}_r(A)$) jest ideałem dwustronnym, to również każdy element kraty $\mathfrak{I}_r(A)$ (odpowiednio $\mathfrak{I}_l(A)$) jest ideałem dwustronnym* (zob. [Co82]).

(2) *Kraty $\mathfrak{I}_l(A)$ i $\mathfrak{I}_r(A)$ są antyizomorficzne, wtedy i tylko wtedy, gdy A jest QF-algebrą* (zob. [DK94], Twierdzenie 9.3.8).

Ze Stwierdzeń 4.1.1 i 1.2.7 wiemy, że dla skończenie wymiarowej algebry A, jeśli krata $\mathfrak{I}_l(A)$ ($\mathfrak{A}_l(A)$) jest rozdzielna, to jest skończona. Analogiczny rezultat mamy dla krat $\mathfrak{I}_r(A)$ i $\mathfrak{A}_r(A)$. Zgodnie z [Pi82, Zadanie 4, §2.2] można pokazać, że jeśli A jest algebrą nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$, to krata ideałów lewostronnych (prawostronnych) w A jest rozdzielna, wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończona. Z tej obserwacji oraz w oparciu o wiadomości z [Be72, §9.2] łatwo można udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.4. *Niech A będzie algebrą nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$ i niech $L = \mathfrak{I}_l(A)$ lub $L = \mathfrak{I}_r(A)$. Jeśli krata L jest skończona, to:*

(1) $\mathfrak{I}_l(A) = \mathfrak{I}_r(A)$;

(2) *Krata L jest iloczynem prostym łańcuchów;*

(3) *A jest QF-algebrą.*

Z powyższego twierdzenia wynika między innymi, że w klasie algebr skończenie wymiarowych nie istnieje odpowiednik Przykładu 3.3.4, tj. nie istnieje algebra w której krata lewostronnych ideałów jest skończona, a krata prawostronnych ideałów jest nieskończona. Co więcej, jeśli krata lewostronnych ideałów ma n elementów, to krata prawostronnych ideałów ma też n elementów.

Oczywiście w klasie algebr skończenie wymiarowych wszystkie D-algebry to QF-algebry. Szczególnym rodzajem QF-algebr rozważanych w literaturze są algebry Frobeniusa. Przypomnimy ich określenie, ponieważ spełniają one pewien bardzo mocny warunek anihilatorowy. Algebrę A nazywamy *algebrą Frobeniusa*, jeśli A jest

QF-algebrą oraz $\mathrm{Dim}(\mathrm{r}(I)) + \mathrm{Dim}(I) = \mathrm{Dim}(A)$, czyli też $\mathrm{Dim}(\mathrm{l}(J)) + \mathrm{Dim}(J) = \mathrm{Dim}(A)$ dla wszystkich $I \in \mathfrak{I}_l(A), J \in \mathfrak{I}_r(A)$.

Wiadomo, że algebry grupowe grup skończonych i algebry półproste są algebrami Frobeniusa, ale nie każda QF-algebra jest algebrą Frobeniusa (zob. [La99, CR62]).

4.2 Różnorodność krat anihilatorów

Pomimo wielu różnych własności charakterystycznych tylko dla algebr skończenie wymiarowych, odróżniających je od algebr półprymarnych i artinowskich, kraty anihilatorów tych algebr mogą być dość dowolne.

Przyjrzyjmy się najpierw konstrukcji algebr podanej w Przykładzie 3.4.1 w przypadku, gdy zbiór P jest skończony.

Twierdzenie 4.2.1. *Niech P będzie zbiorem uporządkowanym i $|P| = m < \infty$. Niech $\mathbb{K}(P)$ będzie algebrą skonstruowaną w Przykładzie* 3.4.1. *Wówczas $\mathbb{K}(P)$ jest skończenie wymiarowa i oszacowanie jej wymiaru ma postać:*

$$1 + \frac{m(m+1)}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(\mathbb{K}(P)) \leqslant 1 + m^2. \tag{4.2.1}$$

Dowód. Niech $|P| = m < \infty$. Przy oznaczeniach ze wzoru (3.4.1), mamy

$$\mathrm{Dim}(V) = m \quad \text{oraz} \quad \frac{m(m-1)}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(V^2) \leqslant m(m-1). \tag{4.2.2}$$

Stąd $\mathbb{K}(P)$ jest skończenie wymiarowa i

$$1 + \frac{m(m+1)}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(\mathbb{K}(P)) \leqslant 1 + m^2.$$

Pierwsza nierówność może być udowodniona indukcyjnie ze względu na m. Druga nierówność jest konsekwencją wzorów (4.2.2) i (3.4.1) . $\square$

Również przemienna algebra $\mathbb{K}(\!(P)\!)$ z Przykładu 3.5.2 konstruowana dla skończonego zbioru P jest skończenie wymiarowa.

Twierdzenie 4.2.2. *Niech P będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym, gdzie $|P| = m < \infty$ i niech $\mathbb{K}(\!(P)\!)$ będzie algebrą z Przykładu* 3.5.2. *Wówczas*

$$\frac{2 + 5m + 3m^2}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(\mathbb{K}(\!(P)\!)) \leqslant 1 + 2m + 2m^2.$$

Dowód. Zgodnie ze wzorem (3.5.3), mamy

$$\mathrm{Dim}(W) = 2m \quad \text{i} \quad \frac{3m^2+m}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(W^2) \leqslant 2m^2. \tag{4.2.3}$$

Stąd

$$1 + 2m + \frac{3m^2+m}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(\mathbb{K}(\!(P)\!)) \leqslant 1 + 2m + 2m^2. \tag{4.2.4}$$

Pierwszą nierówność można sprawdzić poprzez indukcję ze względu na m. Druga nierówność wynika ze wzorów (4.2.3) i (3.5.3). □

Podsumowując powyższe rozważania i rezultaty otrzymane w Rozdziale 3 rozprawy możemy napisać poniższy wniosek. W pierwszej części wniosku izomorfizm oznacza izomorfizm zbiorów uporządkowanych, w drugiej części mamy izomorfizm kratowy.

Wniosek 4.2.3.

(1) *Niech P będzie skończonym zbiorem uporządkowanym i niech $|P| \geqslant 2$. Wówczas zbiór P jest izomorficzny z podzbiorem kraty lewostronnych anihilatorów skończenie wymiarowej, nieprzemiennej algebry $\mathbb{K}(P)$ i P jest izomorficzny z podzbiorem kraty anihilatorów skończenie wymiarowej, przemiennej algebry $\mathbb{K}(\!(P)\!)$.*

(2) *Niech L będzie skończoną kratą i $|L| \geqslant 2$. Wówczas krata L jest izomorficzna z podkratą kraty lewostronnych anihilatorów skończenie wymiarowej, nieprzemiennej algebry lokalnej $\mathbb{K}(L)$ i krata L jest izomorficzna z podkratą kraty anihilatorów skończenie wymiarowej, przemiennej algebry lokalnej $\mathbb{K}(\!(L)\!)$.*

Z powyższych rozważań wynika, że można udowodnić fakt silniejszy niż Twierdzenie 3.4.5.

Twierdzenie 4.2.4 ([JK15b])**.** *Nie istnieje nietrywialna, kratowa tożsamość spełniona we wszystkich kratach anihilatorów przemiennych, skończenie wymiarowych algebr lokalnych.*

Dowód. Oczywiście, jeśli jakaś tożsamość jest spełniona w kracie L, to jest ona również spełniona w każdej podkracie kraty L. Załóżmy więc, że jakaś nietrywialna tożsamość kratowa jest spełniona w kratach anihilatorów wszystkich przemiennych, skończenie wymiarowych algebr lokalnych. Zatem tożsamość ta jest spełniona w każdej podkracie kraty anihilatorów dowolnej skończenie wymiarowej, przemiennej algebry lokalnej. Z Wniosku 4.2.3 wiemy więc, że wszystkie kraty skończone spełniają tę tożsamość. Zatem z Twierdzenia 1.2.2 wynika, że wszystkie kraty muszą spełniać tę tożsamość, co jest niemożliwe, ponieważ krata wolna o przeliczalnie wielu wolnych generatorach nie spełnia żadnej nietrywialnej tożsamości. $\square$

Zwróćmy uwagę, na jeszcze jedną konsekwencję przeprowadzonych obserwacji. W literaturze pojawiają się prace dotyczące badania krat anihilatorów półgrup (zob. [No06]), a także prace dotyczące zanurzania krat w kraty anihilatorów (skończonych) półgrup z zerem (zob. np. [Za99]). Z rezultatów wykazanych w tym paragrafie i w Rozdziale 3 wynika wzmocnienie wyników dotyczących półgrup. Mianowicie, jeśli P jest zbiorem uporządkowanym, to w oparciu o konstrukcję z Przykładu 3.4.1 można pokazać, że P jest zanurzalny, z zachowaniem porządku i istniejących kresów, w kratę lewostronnych anihilatorów monoidu $\overline{P}$. Tak więc skończoność P daje zanurzenie P w kratę anihilatorów lewostronnych monoidu skończonego. Przy tym, jeśli L jest kratą, to dostajemy zanurzenie kratowe. Można zatem udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.5. *Dla dowolnego skończonego zbioru uporządkowanego P istnieje monoid $\overline{P}$ z zerem taki, że P zanurza się w kratę lewostronnych anihilatorów tego monoidu.*

Jeśli ciało $\mathbb{K}$ jest skończone, to oczywiście każda skończenie wymiarowa algebra musi mieć skończone kraty lewostronnych i prawostronnych anihilatorów. Okazuje się, że dla nieskończonego ciała $\mathbb{K}$ istnieją $\mathbb{K}$-algebry skończenie wymiarowe, których kraty anihilatorów są nieskończone. Taka sytuacja ma miejsce nawet w przypadku algebr bardzo małego wymiaru. Mając na uwadze Stwierdzenie 2.2.1 dalej rozpatrzymy tylko algebry, których kraty anihilatorów są nierozkładalne.

Przykład 4.2.6. (a) Z Przykładu 1.4.5 wynika, że istnieją tylko 3 $\mathbb{K}$-algebry z jedynką wymiaru co najwyżej 2, których nie da się zapisać w postaci sumy prostej innych algebr. Są to: ciało $\mathbb{K}$, ciało $\mathbb{F}$ (takie, że $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F}) = 2$) oraz algebra $\mathbb{K}[x]/(x^2)$. Każda z tych algebr jest przemienna, więc kraty lewostronnych i prawostronnych anihilatorów są równe. Łatwo zauważyć, że kraty anihilatorów ciał $\mathbb{K}$ i $\mathbb{F}$ mają postać łańcucha C_1, a krata anihilatorów algebry $\mathbb{K}[x]/(x^2)$ jest łańcuchem C_2.

(b) Można sprawdzić, że każda przemienna algebra wymiaru 3, której nie da się zapisać w postaci sumy prostej innych algebr, jest izomorficzna albo z algebrą $\mathbb{K}[x]/(x^3)$, albo z algebrą $\mathbb{K}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$. Łatwo sprawdzić, że kraty anihilatorów tych algebr, to odpowiednio C_3 i C_2.

Krata anihilatorów nieprzemiennej algebry wymiaru 3 może być nieskończona.

Przykład 4.2.7. Niech A będzie algebrą macierzy górnotrójkątnych stopnia 2 nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$. Ponieważ algebra A ma niecentralny idempotent, to zgodnie z Twierdzeniem 2.3.9 jej krata lewostronnych (więc i prawostronnych) anihilatorów jest nieskończona. Wyznaczymy teraz wszystkie elementy kraty $\mathfrak{A}_l(A)$.

Upraszczając standardową notację, niech $e_{11} = e$ i $e_{12} = a$. Każdy element algebry A można wówczas jednoznacznie zapisać w postaci:

$$\alpha e + \beta(1-e) + \gamma a, \quad \text{gdzie} \quad \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{K}.$$

Oczywiście wszystkie elementy algebry, dla których współczynniki $\alpha \neq 0$ i jednocześnie $\beta \neq 0$, są odwracalne w A. Stąd dowolny niezerowy $I \in \mathfrak{A}_l(A)$ różny od A, spełnia $I \subseteq \mathrm{Lin}(e, a)$ lub $I \subseteq \mathrm{Lin}(1-e, a)$.

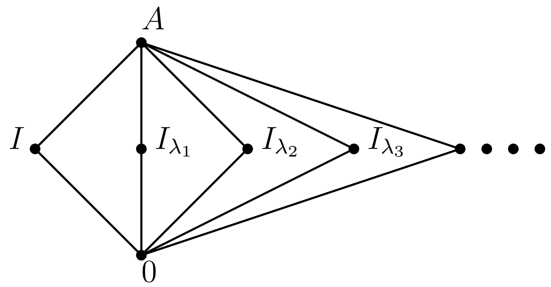
Zauważmy, że dla dowolnego elementu $0 \neq x \in \mathrm{Lin}(1-e, a)$ mamy $\mathrm{l}(\mathrm{r}(x)) = \mathrm{l}(\mathrm{Lin}(e, a)) = \mathrm{Lin}(1-e, a)$. Zatem $\mathrm{Lin}(1-e, a) \in \mathfrak{A}_l(A)$ i jest jednocześnie atomem i koatomem tej kraty.

Przejdźmy teraz do podprzestrzeni $\mathrm{Lin}(e, a)$. Oczywiście $e = e^2$ i $ea(1-e) = a \neq 0$. Tak jak w dowodzie Twierdzenia 2.3.9, dla każdego $\lambda \in \mathbb{K}$ niech $e_\lambda = e + \lambda ea(1-e) = e + \lambda a$ i niech $I_\lambda = Ae_\lambda$. Stąd $I_\lambda = \mathrm{l}(1 - e_\lambda)$ i mamy w A nieskończony antyłańcuch lewostronnych anihilatorów. Łatwo zauważyć, że $I_\lambda = \mathrm{Lin}(e_\lambda)$ i $\mathrm{Lin}(e, a) = Ae + Aa$. Zatem dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ takich, że $\lambda \neq \mu$ mamy

$$I_\lambda \vee I_\mu = \mathrm{l}(\mathrm{r}(I_\lambda + I_\mu)) = \mathrm{l}(\mathrm{r}(Ae + Aa)) = \mathrm{l}(0) = A,$$

$$\text{i oczywiście} \quad I_\lambda \wedge I_\mu = I_\lambda \cap I_\mu = 0.$$

Z powyższego wynika również, że $\mathrm{Lin}(e, a)$ nie jest lewostronnym anihilatorem w A. Przyjmując oznaczenie $I = \mathrm{Lin}(1-e, a)$, możemy podać diagram kraty $\mathfrak{A}_l(A)$.

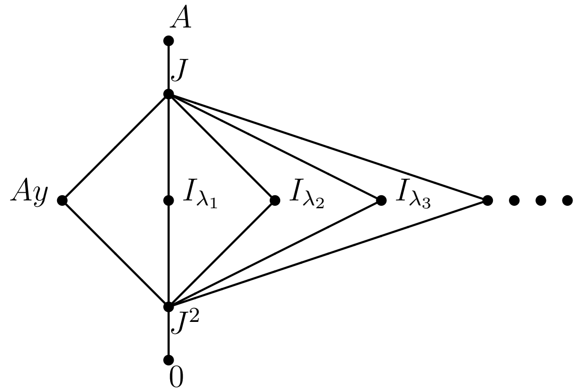


Dodajmy jeszcze, że A nie jest QF-algebrą, bo np. $\mathrm{Lin}(e, a) \lhd A$, ale $\mathrm{Lin}(e, a) \notin \mathfrak{A}_l(A)$.

Chcielibyśmy także wiedzieć, czy istnieją lokalne algebry skończenie wymiarowe, których kraty anihilatorów są nieskończone. Okazuje się, że taką algebrę, nawet z dodatkowym warunkiem przemienności, można znaleźć już wśród algebr wymiaru 4.

Przykład 4.2.8. Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem nieskończonym i niech $A = \mathbb{K}[x, y]/(x^2, y^2)$. Wówczas $\mathrm{Dim}(A) = 4$, algebra A jest przemienną algebrą lokalną, oraz ideał $J = (x, y) \lhd A$ jest jej radykałem. Zgodnie z Wnioskiem 2.1.5 krata $\mathfrak{A}(A)$ ma dokładnie jeden atom $(J)^* = J^2 = Axy = \mathbb{K}xy$ i dokładnie jeden koatom J. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{K}$ mamy $A(x + \lambda y) = (x - \lambda y)^*$. Stąd rodzina ideałów postaci $I_\lambda = A(x + \lambda y)$, dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{K}$, jest nieskończoną rodziną lewostronnych anihilatorów w A.

Nietrudno zauważyć, że oprócz anihilatorów $\{I_\lambda\}$, A i 0 krata $\mathfrak{A}(A)$ zawiera jeszcze jeden element, $Ay = (y)^*$. Zatem diagram kraty $\mathfrak{A}(A)$ ma postać:



Odnotujmy, że A jest QF-algebrą, co wynika z punktu (3) Twierdzenia 2.3.3.

Fakt, że nie zawsze obraz anihilatora musi być anihilatorem, nawet gdy jądrem homomorfizmu jest anihilator, uzasadnialiśmy w Przykładzie 2.2.11 odnosząc się do podanej tam algebry nieskończenie wymiarowej. Okazuje się, że własność tę mają też kraty anihilatorów algebr skończenie wymiarowych. Zauważmy, że jeśli A jest algebrą z Przykładu 4.2.8 oraz za I położymy J^2, to krata $\mathfrak{A}(A/I) = C_2$, a elementami tej kraty są $A/I, J/I, 0$. Stąd obrazy $Ay, I_\lambda \in \mathfrak{A}(A)$ nie są anihilatorami w A/I. Zauważmy ponadto, że A/I nie jest QF-algebrą, zatem również w przypadku algebr skończenie wymiarowych obrazem QF-algebry nie musi być QF-algebra.

4.3 Skończone kraty anihilatorów

W tym paragrafie wszystkie kraty będą skończone. Z Wniosku 4.2.3 wiemy, że każda skończona krata L da się zanurzyć w kraty lewostronnych anihilatorów skończenie wymiarowych algebr typu $\mathbb{K}(L)$ i $\mathbb{K}(\!(L)\!)$. Chociaż konstrukcje powyższych algebr są uniwersalne (tj. mogą być stosowane do każdej kraty), to w wielu przypadkach wymiar konstruowanych algebr jest dość duży. W tym paragrafie podejmiemy próbę minimalizacji wymiaru algebr z zadaną podkratą anihilatorów. Jednocześnie wskażemy pewne warunki jakie musi spełniać krata, aby mogła być izomorficzna z kartą anihilatorów pewnej algebry.

Okazuje się, że w przypadku dowolnej skończonej kraty L konstrukcję z Przykładu 3.4.1 można zmodyfikować, otrzymując algebrę wielomianów o mniejszej liczbie zmiennych, czyli algebrę o mniejszym wymiarze liniowym.

Niech L będzie kratą skończoną. Jeśli $|L| = 2$, to niech $\mathbb{K}\langle L\rangle = \mathbb{K}$. Jeśli $|L| > 2$, to niech $\mathbb{K}\langle L\rangle = \mathbb{K}(P)$, gdzie $P = L \setminus \{\Omega, \omega\}$. Niech przekształcenie $\phi : P \longrightarrow \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle) = \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}(P))$ będzie zadane, jak w Twierdzeniu 3.4.2, przez $\phi(x) = \mathrm{l}_{\mathbb{K}\langle L\rangle}(x)$ dla $x \in P$.

Przy przyjętych oznaczeniach mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.3.1. *Niech L będzie kratą skończoną. Wówczas:*

(1) *Przekształcenie ϕ może być rozszerzone, i to w sposób jednoznaczny, do kratowego zanurzenia $\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$.*

(2) *Przekształcenie Φ jest izomorfizmem kraty L z przedziałem $[\Phi(\omega), \Phi(\Omega)] \subseteq \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$.*

Dowód. Jeśli $|L| = 2$, to $\mathbb{K}\langle L\rangle = \mathbb{K}$ i musimy mieć $\Phi(\omega) = 0,\ \Phi(\Omega) = \mathbb{K}$. W tym przypadku teza jest oczywista. Niech dalej $|L| > 2$ i niech $P = L \setminus \{\Omega, \omega\}$.

(1) Skoro $\mathbb{K}\langle L\rangle = \mathbb{K}(P)$, to z Twierdzenia 3.4.2 wiemy, że ϕ równe Φ ograniczonemu do $P \subset L$ jest zanurzeniem i zachowuje wszystkie istniejące w P kresy. Pozostało rozszerzyć ϕ na ω i Ω.

Jeśli P ma element najmniejszy, powiedzmy x, to przy oznaczeniach dowodu Twierdzenia 3.4.2, mamy $\phi(x) = V_x + V^2$, zatem $V^2 \notin \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$. Jeśli P nie ma elementu najmniejszego, to $V^2 = \mathrm{l}(V)$, lecz $V^2 \notin \phi(P)$.

Jeśli P ma element największy, powiedzmy y, to $\phi(y) = V + V^2$. Jeśli P nie ma elementu największego, to $V + V^2 \notin \phi(P)$, lecz $V + V^2 = \mathrm{l}(V^2)$.

Zatem ϕ można rozszerzyć do kratowego homomorfizmu $L \longrightarrow \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$ jedynie w następujący sposób:

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } P \text{ ma element najmniejszy,} \\ V^2, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

oraz

$$\Phi(\Omega) = \begin{cases} A, & \text{jeżeli } P \text{ ma element największy,} \\ V + V^2, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Łatwo teraz sprawdzić, że Φ zachowuje wszystkie sumy i iloczyny, czyli jest homomorfizmem krat.

(2) Trzeba wykazać, że Φ jest przekształceniem „na" przedział $[\Phi(\omega), \Phi(\Omega)]$. Oczywiście $V + V^2$ należy do obrazu $\Phi(L)$ i jeśli $V^2 \in \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$, to również należy do obrazu $\Phi(L)$. Niech więc $I \in \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$ i $V^2 \subset I \subset V + V^2$. Metodami użytymi w dowodzie Stwierdzenia 3.4.4 można pokazać, że każdy lewostronny anihilator w $[\Phi(\omega), \Phi(\Omega)] \subseteq \mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$ jest obrazem pewnego elementu z kraty L. Stąd Φ jest izomorfizmem L i $[\Phi(\omega), \Phi(\Omega)]$. □

Bezpośrednio z rozważań przeprowadzonych w powyższym dowodzie wynika, że pewne kraty są karatami anihilatorów algebr skończenie wymiarowych.

Wniosek 4.3.2. *Niech L będzie kratą skończoną taką, że zbiór $P = L \setminus \{\Omega, \omega\}$ jest kratą. Wówczas Φ jest izomorfizmem kraty L i $\mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)$.*

Jeśli krata L ma więcej niż jeden atom, to dodajmy do L element $\omega' < \omega$. Jeśli L ma tylko jeden atom, to niech $\omega' = \omega$. Podobnie, jeśli L ma więcej niż jeden koatom, to dodajmy do L element $\Omega' > \Omega$. Jeśli L ma tylko jeden koatom, to niech $\Omega' = \Omega$. Weźmy teraz $\hat{L} = L \cup \{\omega', \Omega'\}$. Możemy zatem napisać:

Wniosek 4.3.3. *Dla każdej kraty L mamy $\mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle) \simeq \hat{L}$. Stąd $|\mathfrak{A}_l(\mathbb{K}\langle L\rangle)| \leqslant |L|+2$.*

Oczywiste jest, że jeśli L jest kratą skończoną, to algebra $\mathbb{K}\langle L\rangle$ jest skończenie wymiarowa i $\mathrm{Dim}(\mathbb{K}(L)) \geqslant \mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle L\rangle.)$ Podamy teraz oszacowania wymiaru algebry $\mathbb{K}\langle L\rangle$.

Twierdzenie 4.3.4. *Niech L będzie kratą i $|L| = n < \infty$. Wówczas*

$$1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \leqslant \mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle L\rangle) \leqslant 1 + (n-2)^2.$$

Dowód. Jeśli L jest kratą i $|L| = n$, to z definicji i standardowych oznaczeń mamy $\mathbb{K}\langle L\rangle = \mathbb{K}(P)$. Wzór (4.2.1) dla $m = n - 2$ jednoznacznie wyznacza oszacowania wymiaru algebry $\mathbb{K}\langle L\rangle$. □

Łatwo policzyć, że:

$$\mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle C_{n-1}\rangle) = 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ i } \mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle M_{n-2}\rangle) = 1 + (n-2)^2,$$

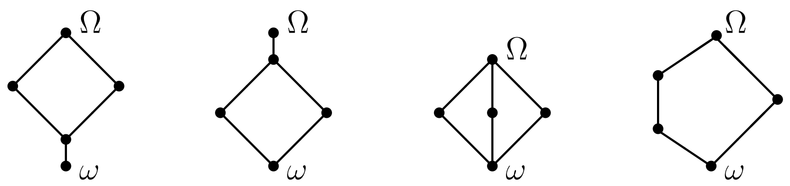
stąd oszacowania z twierdzenia wyżej, a więc i z Twierdzenia 4.2.1, nie mogą być wzmocnione.

Okazuje się, że większość krat skończonych daje się łatwo zanurzyć w kraty anihilatorów algebr wymiaru mniejszego niż algebry z Twierdzenia 4.3.1, czy przemienne algebry z Twierdzenia 3.5.3. Pokażemy to na przykładzie krat o możliwie najmniejszej liczbie elementów.

Zauważmy, że $\mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle C_1\rangle) = 1$ i jak łatwo policzyć $\mathrm{Dim}(\mathbb{K}(\!(C_1)\!)) = 12$. Podobnie $\mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle C_2\rangle) = 2$, a $\mathrm{Dim}(\mathbb{K}(\!(C_2)\!)) = 22$. Widzimy zatem, że nawet dla bardzo małych krat wymiary algebr $\mathbb{K}(\!(L)\!)$ są bardzo duże. Okazuje się, że w przypadku gdy $L = C_1$ lub $L = C_2$ algebra $\mathbb{K}\langle L\rangle$ jest przemienna. Zgodnie ze Stwierdzeniem 4.1.1 nie istnieje algebra wymiaru mniejszego, której krata anihilatorów zawierałaby L jako podkratę.

Przejdźmy teraz do kraty C_3. Mamy $\mathrm{Dim}(\mathbb{K}\langle C_3\rangle) = 4$, a zgodnie z Przykładem 3.3.1 algebra $A = \mathbb{K}[x]/(x^3)$ ma kratę anihilatorów izomorficzną z C_3 i $\mathrm{Dim}(A) = 3$. Co więcej, łatwo się przekonać, że również dla dowolnego łańcucha C_n, gdzie $n > 3$ wymiar algebry $\mathbb{K}\langle C_n\rangle$ jest większy niż wymiar algebry $\mathbb{K}[x]/(x^n)$.

Przejdźmy do krat, które nie są łańcuchami. Istnieją cztery kraty nierozkładalne o pięciu elementach (rysunek poniżej).



L_a L_b L_c N_5

Każda z powyższych krat może być zanurzona w kratę anihilatorów algebry lokalnej $\mathbb{K}\langle L\rangle$, której wymiar jest większy niż 5. Z drugiej strony, kraty L_a, L_b i L_c mogą być zanurzone w $\mathfrak{A}_l(A)$, gdzie A jest algebrą lokalną wymiaru 4, opisaną w Przykładzie 4.2.8. Kraty L_a, L_b możemy zanurzyć w iloczyn prosty krat $C_2 \times C_1$, zatem są one zanurzalne w $\mathfrak{A}_l(A)$, gdzie $\mathrm{Dim}(A) = 3$, ale algebra A nie jest lokalna. Ponadto, kraty L_a, L_b mogą być zanurzone w kratę Boole'a B_8, stąd również w $\mathfrak{A}_l(A)$ gdzie $A = \mathbb{K}^3$. Zgodnie z Przykładem 4.2.7 krata L_c może być zanurzona w $\mathfrak{A}_l(A)$, gdzie A jest algebrą macierzy górnotrójkątnych wymiaru 2×2 nad $\mathbb{K}$.

Oczywiście najbardziej interesującą kratą z powyższego rysunku jest niemodularna krata N_5. Zgodnie z Wnioskiem 2.1.5 i Stwierdzeniem 4.1.1 jeśli krata N_5 jest podkratą w kracie $\mathfrak{A}_l(A)$, dla pewnej algebry lokalnej A, to $\mathrm{Dim}(A) \geqslant 5$. Z Twierdzenia 4.3.1 mamy $\mathbb{K}\langle N_5\rangle = \mathbb{K}\{x, y, z\}/(x^2, xy, y^2, z^2, D)$, gdzie $D = \{abc : a, b, c \in$

$\{x, y, z\}\}$. Algebra ta ma wymiar 9. Trudno jest podać minimalny wymiar algebry, której krata anihilatorów nie byłaby modularna. Jednakże można trochę zmodyfikować algebrę $\mathbb{K}\langle N_5\rangle$ uzyskując algebrę wymiaru 7, której krata anihilatorów zawiera podkratę N_5. Taką algebrą jest algebra $B = \mathbb{K}\{x, y, z\}/(x^2, xy, y^2, z^2, xz - zx, yz - zy, D)$, gdzie D jest zdefiniowane jak powyżej. Nietrudno sprawdzić, że $J(B)^2, J(B), \mathrm{l}(x), \mathrm{l}(y), \mathrm{l}(z)$ tworzą niemodularną podkratę w $\mathfrak{A}_l(B)$.

Mając daną kratę L czasem chcielibyśmy wiedzieć, nie tylko w jaką kratę anihilatorów krata L jest zanurzalna, ale także, czy L jest kratą anihilatorów jakiejś algebry skończenie wymiarowej. Musimy pamiętać, że jeśli L ma długość n, to ze Stwierdzenia 4.1.1 wynika, że wymiar szukanej algebry jest równy co najmniej n. Zauważmy, że jeśli L jest kratą Boole'a długości n, to z Przykładu 3.1.2 wiemy, że L jest kratą anihilatorów pewnej n wymiarowej algebry, tj. algebry będącej sumą prostą n kopi ciała $\mathbb{K}$. Również dla łańcucha o długości n łatwo wskazać algebrę wymiaru n, której krata anihilatorów jest izomorficzna z C_n. Zgodnie z Przykładem 3.3.1 może to być algebra $\mathbb{K}[x]/(x^n)$. Zwróćmy jeszcze uwagę, że punkt (b) Przykładu 3.3.1 wskazuje algebrę A o dowolnie dużym wymiarze ($\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(A) = \frac{r^n-1}{r-1} > r$) i kracie anihilatorów izomorficznej z C_n.

W przypadku dowolnej kraty pomocne będzie poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.5. *Niech L będzie kratą skończoną. Krata $L \backsimeq \mathfrak{A}_l(A)$ dla pewnej algebry A nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy L jest skończonym iloczynem prostym krat nierozkładalnych, z których każda ma dokładnie jeden atom i dokładnie jeden koatom.*

Dowód. Niech $L \backsimeq \mathfrak{A}_l(A)$ dla pewnej algebry A nad nieskończonym ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas z Twierdzenia 2.3.11 wynika, że $A = \bigoplus_{i=1}^r A_i$, gdzie każda algebra A_i jest lokalna. Zatem ze Stwierdzenia 2.2.1 mamy $L = \prod_{i=1}^r L_i$, gdzie $L_i = \mathfrak{A}_l(A_i)$. Teraz wystarczy zastosować Wniosek 2.1.5 by otrzymać, że L jest iloczynem prostym krat nierozkładalnych, z których każda ma dokładnie jeden atom i dokładnie jeden koatom.

Odwrotnie, niech teraz $L = \prod_{i=1}^r L_i$, gdzie każda krata L_i ma dokładnie jeden atom i dokładnie jeden koatom. Jeśli przyjmiemy $A_i = \mathbb{K}\langle L_i\rangle$, to z Wniosku 4.3.2 mamy $L_i = \mathfrak{A}_l(A_i)$. Zatem ze Stwierdzenia 2.2.1 $L = \mathfrak{A}_l(\bigoplus_{i=1}^r A_i)$. □

W powyższym twierdzeniu nie da się pominąć założenia o nieskończoności ciała $\mathbb{K}$. Dla przykładu niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem o dwóch elementach. Wówczas zgodnie z wiadomościami ze strony 38 krata lewostronnych anihilatorów algebry $M_2(\mathbb{K})$ jest izomorficzna z kratą M_3, a jak łatwo zauważyć krata M_3 nie jest ani kratą rozkładalną, ani nie ma dokładnie jednego atomu.

Dla krat rozdzielnych możemy podać dodatkowe kryterium na bycie kratą lewostronnych anihilatorów pewnej algebry.

Twierdzenie 4.3.6. *Niech L będzie skończoną kratą rozdzielną. Krata $L \backsimeq \mathfrak{A}_l(A)$ dla pewnej algebry A wtedy i tylko wtedy, gdy L jest skończonym iloczynem prostym krat rozdzielnych, z których każda ma dokładnie jeden atom i dokładnie jeden koatom.*

Dowód. Przy wykorzystaniu Twierdzenia 2.3.8, dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.3.5. $\square$

Dobrze wiadomo, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ krata Boole'a B_{2^n} jest izomorficzna z kratą $(B_2)^n$. Z powyższego twierdzenia, lub z Twierdzenia 3.1.4 wynika, że krata Boole'a B_{2^n} jest kratą anihilatorów skończenie wymiarowej algebry A wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sumą prostą n algebr z dzieleniem, skończenie wymiarowych nad $\mathbb{K}$.

Oznaczenia i skróty

$\lvert X \rvert$	moc zbioru X,
$P(X)$	zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X,
$X \uplus Y$	suma rozłączna zbiorów X i Y,
$f \circ g$	złożenie przekształceń f i g, czyli $(f \circ g)(x) = f(g(x))$,
ω	element najmniejszy (zero) kraty,
Ω	element największy (jedynka) kraty,
L^{op}	krata dualna do kraty L,
B_{2^n}	krata Boole'a o 2^n elementach,
C_n	łańcuch o $n+1$ elementach,
M_n	krata długości 2 o $n+2$ elementach,
$\backsimeq$	izomorfizm,
$\mathbb{K}$	ciało bazowe,
A^{op}	algebra dualna do algebry A,
Z(A)	centrum algebry A,
U(A)	zbiór elementów odwracalnych w A,
$A \oplus B$	suma prosta przestrzeni (algebr) A i B,
$I \lhd A$	I jest ideałem dwustronnym algebry A,
$I \lhd_l A$	I jest ideałem lewostronnym algebry A,
$I \lhd_r A$	I jest ideałem prawostronnym algebry A,
$\mathrm{l}(S)$	lewostronny anihilator zbioru S,
$\mathrm{r}(S)$	prawostronny anihilator zbioru S,
$\mathrm{l}_A(S)$	lewostronny anihilator zbioru S w algebrze A,
$\mathrm{r}_A(S)$	prawostronny anihilator zbioru S w algebrze A,
$\mathfrak{I}_l(A)$	krata lewostronnych ideałów algebry A,
$\mathfrak{I}_r(A)$	krata prawostronnych ideałów algebry A,
$\mathfrak{I}(A)$	krata ideałów algebry A,
$\mathfrak{A}_l(A)$	krata lewostronnych anihilatorów algebry A,
$\mathfrak{A}_r(A)$	krata prawostronnych anihilatorów algebry A,
$\mathrm{Dim}(V)$	wymiar nad $\mathbb{K}$ przestrzeni V,
$\mathrm{Lin}(S)$	przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$ rozpięta przez elementy zbioru S,
tj.	to jest,
por.	porównaj,
zob.	zobacz.

Bibliografia

[AL99] D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring,* J. Algebra 217 (2) (1999), 434–447.

[Ar74] E. P. Armendariz, *A note on extensions of Baer and P.P.-rings*, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470–473.

[AM69] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra,* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, 1969.

[Ba14] A. Badawi, *On the annihilator graph of a commutative ring*, Comm. Algebra 42 (1) (2014), 108–121.

[Be72] E. A. Behrens, *Ring theory,* Academic Press, New York, 1972.

[BBT90] Ch. Bessenrodt, H. H. Brungs, G. Törner, *Right chain rings, Part 1*, Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität Duisburg, 1990.

[BGT15] G. F. Birkenmeier, M. Ghirati, A. Taherifar, *When is a sum of annihilator ideals an annihilator ideal?,* Comm. Algebra 43 (7) (2015), 2690–2702.

[Bi67] G. Birkhoff, *Lattice Theory,* 3rd edition, American Mathematical Society, 1967.

[Bl53] R. L. Blair, *Ideal lattices and the structure of rings,* Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 136–153.

[Bou80] N. Bourbaki, *Elementy Historii Matematyki,* PWN, Warszawa, 1980.

[CS74] W. H. Cornish, P. N. Stewart, *Rings with no nilpotent elements and with the maximum condition on annihilators,* Canad. Math. Bull. 17 (1974), 35–38.

[Co82] R. C. Courter, *Finite dimensional right duo algebras are duo*, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (2) (1982), 157–161.

[CD73] P. Crawley, R. P. Dilworth, *Algebraic theory of lattices,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[CR62] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley & Sons, New York, 1962.

[DK94] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Fa99] C. Faith, *Rings and things and a fine array of twentieth century associative algebra,* Surveys of the American Math. Soc., 65, Providence, 1999.

[Fi83] M. Ya. Finkel'shtein, *Rings in which annihilators form a sublattice of the lattice of ideals,* Siberian Math. J. 24 (6) (1983), 955–960.

[HN85] C. R. Hajarnavis, N. C. Norton, *On dual rings and their modules,* J. Algebra 93 (2) (1985), 253–266.

[He68] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Mathematical Association of America, 1968.

[HS64] I. N. Herstein, L. Small, *Nil rings satisfying certain chain conditions,* Canad. J. Math. 16 (1964), 771–776.

[Hi02] Y. Hirano, *On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring*, J. Pure Appl. Algebra 168 (2002), 45—52.

[HK14] M. Hryniewicka, J. Krempa, *On rings with finite number of orbits,* Publ. Mat. 58 (1) (2014), 233–249.

[JK72] M. Jaegermann, J. Krempa, *Rings in which ideals are annihilators*, Fund. Math. 76 (2) (1972), 95–107.

[JK15a] M. Jastrzębska, J. Krempa, *On lattices of annihilators*, Contemp. Math. 634 (2015), 189–196.

[JK15b] —, —, *Lattices of annihilators in commutative algebras over fields,* Demonstr. Math. 48 (4) (2015), 545–552.

[JM69] B. Jonsson, G. Monk, *Representation of primary Arguesian lattices*, Pacific J. Math. 30 (1969), 95–139.

[Ke83] J. W. Kerr, *Very long chains of annihilator ideals,* Israel J. Math. 46 (3) (1983), 197–204.

[Kr96] J. Krempa, *Some examples of reduced rings,* Algebra Colloq. 3 (4) (1996), 289–300.

[KN77] J. Krempa, D. Niewieczerzał, *Rings in which Annihilators are ideals and their application to semi-group rings,* Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 25 (9) (1977), 851–856.

[La91] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings,* Springer-Verlag, New York, 1991.

[La99] —, *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Li05] Z. K. Liu, *Armendariz rings relative to a monoid,* Comm. Algebra 33 (3) (2005), 649–661.

[MM15] G. Marks, R. Mazurek, *Rings with linearly ordered right annihilators,* London Math. Soc., (to appear).

[Mu02] S. B. Mulay, *Cycles and symmetries of zero-divisors,* Comm Algebra 30 (7) (2002), 3533-–3558.

[Ni78] D. Niewieczerzał, *Some examples of rings with annihilators conditions,* Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 26 (1) (1978), 1–5.

[No06] B. N. Novikov, *On quasi-Frobenius semigroup algebras*, in *Groups, Rings and Group Rings*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006, 287–291.

[Ok91] J. Okniński, *Semigroup algebras,* Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[PP80] P. P. Pálfy, P. Pudlák, *Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups,* Algebra Universalis 11 (1980), 22—27.

[Pi82] R. S. Pierce, *Associative algebras*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Pi14] K. Pióro, *The subalgebra lattice of a finite algebra,* Cent. Eur. J. Math. 12 (7) (2014), 1052–1108.

[PT80] P. Pudlák, J. Tuma, *Every finite lattice can be embedded in the lattice of all equivalences over a finite set,* Algebra Universalis 10 (1980), 74—95.

[RRB09] I. S. Rakhimov, I. M. Rikhsiboev, W. Basri, *Complete lists of low dimensional complex associative algebras,* `arXiv:0910.0932v2[math.RA]`, 2009.

[RCh97] M. B. Rege, S. Chhawchharia, *Armendariz rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73 (1) (1997), 14–17.

[Ro08] S. Roman, *Lattices and ordered sets,* Springer, New York, 2008.

[SY11] A. Skowroński, K. Yamagata, *Frobenius Algebras. I. Basic Representation Theory,* European Mathematical Society, Zürich, 2011.

[vN36] J. von Neumann, *On regular rings,* Proc. Nat. Acad. Sei. U. S. A. 22 (1936) 707–713.

[vN60] J. von Neumann, *Continuous Geometry,* Princeton University Press, 1960.

[We11] D. Weber, *Zero-divisor graphs and lattices of finite commutative rings,* Rose-Hulman Undergrad. Math J. 12 (1) (2011), 57–70.

[Za99] R. R. Zapatrin, *Representation of finite lattices by annihilators of completely 0-simple semigroups,* Semigroup Forum 59 (1) (1999), 121–125.