



Uniwersytet Warszawski  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Katarzyna Zając

Algorytmy kombinatoryczne i graficzne  
w spektralnej klasyfikacji skończonych bigrafów oraz  
sieciowych systemów pierwiastków

*rozprawa doktorska*

Promotor rozprawy  
prof. dr hab. Daniel Simson

Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Kwiecień 2018

Oświadczenie autora rozprawy:  
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

30 kwietnia 2018 r.

*data*

.....

*Katarzyna Zając*

Oświadczenie promotora rozprawy:  
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

30 kwietnia 2018 r.

*data*

.....

*prof. dr hab. Daniel Simson*

## Streszczenie

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest klasyfikacja względem kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  lub  $\approx_{\mathbb{Z}}$  oraz spektralna klasyfikacja Coxetera nieujemnych oznakowanych grafów krawędziowo-dwudzielnych (*bigrafów*)  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli o skończonym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  oraz skończonym zbiorze krawędzi  $\Delta_1$  oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru  $\{-1, +1\}$ , a także budowa narzędzi algorytmicznych umożliwiających przeprowadzenie tej klasyfikacji.

Graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  z ustaloną numeracją wierzchołków jest jednoznacznie zdefiniowany przez niesymetryczną macierz Grama  $\check{G}_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  rozważaną jako odpowiednio zmodyfikowana macierz sąsiedztwa grafu oznakowanego. Mówimy, że  $\Delta$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach, jest nieujemny korangi  $0 \leq r \leq m - 1$ , jeśli symetryczna macierz Grama  $G_{\Delta} := \frac{1}{2}[\check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - r$ .

Nieujemne grafy krawędziowo-dwudzielne  $\Delta$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach bez pętli bada się względem spektrum Coxetera  $\text{spec}_{\Delta} \subseteq \mathbb{C}$  składającego się ze wszystkich zespolonych  $m$  wartości własnych macierzy Coxetera  $\text{Cox}_{\Delta} := -\check{G}_{\Delta} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , oraz z dokładnością do dwóch  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama: słabej  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz silnej  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , gdzie

$$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det B = \pm 1,$$

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det B = \pm 1.$$

Główne wyniki spektralnej klasyfikacji Coxetera przedstawione w niniejszej dysertacji dotyczą grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi dwa. Są to:

(a) pełna klasyfikacja z dokładnością do  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  wszystkich spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi dwa,

(b) zdefiniowanie rodziny rozszerzonych bigrafów Euklidesa, które z dokładnością do  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  są wszystkimi spójnymi nieujemnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi bez pętli korangi dwa,

(c) konstrukcja algorytmu inflacyjnego, który m.in. wyznacza  $\mathbb{Z}$ -odwracalną macierz definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi dwa,

(d) konstrukcja pierwiastkowa  $(\Delta', u, v) \mapsto \Delta'[[u, v]]$ , która umożliwia skonstruowanie w prosty sposób dowolnego spójnego grafu krawędziowo-dwudzielnego bez pętli korangi dwa z bigrafu korangi zero (dodatniego) oraz pary jego pierwiastków  $u, v$ ,

(e) sprowadzenie klasyfikacji spójnych bigrafów bez pętli korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$ , do klasyfikacji sieciowych geometrii pierwiastków względem izomorfizmu pewnych grafów skierowanych,

(f) konstrukcja algorytmów kombinatoryczno-graficznych umożliwiających obliczenie  $\mathbb{Z}$ -odwracalnej macierzy definiującej silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$  dla spójnych nieujemnych bigrafów bez pętli korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach.

Większość z przedstawionych wyników została opublikowana w artykułach [38–42, 96–98].

**Słowa kluczowe:** grafy oznakowane, grafy krawędziowo-dwudzielne, algorytmy kombinatoryczne, algorytmy kombinatoryczno-graficzne, bigrafy nieujemne korangi dwa bez pętli, nieujemne funkcjonały kwadratowe, diagramy Dynkina, diagramy Euklidesa, rozszerzone bigrafy Euklidesa, spektralna klasyfikacja Coxetera, macierz Grama, macierz Coxetera, spektrum Coxetera, kołczany sieciowe pierwiastków, słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama, silna  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama, izomorfizm kołczanów sieciowych, algorytm inflacyjny

**Klasyfikacja AMS MSC2000:**

05C22, 05C50, 05C85, 68W30, 68W40, 68R05, 68R10, 15A21, 15A63

**Klasyfikacja ACM 2012:**

Mathematics of computing: Graph theory: Spectra of graphs

Mathematics of computing: Discrete mathematics: Graph theory, Combinatorial algorithms

Mathematical analysis: Numerical analysis: Computations on matrices

## Abstract

The aim of this dissertation is the classification up to the Gram congruences  $\sim_{\mathbb{Z}}$  and  $\approx_{\mathbb{Z}}$  and Coxeter spectral classification of non-negative loop-free edge-bipartite graphs (*bigraphs*)  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  with finite set of vertices  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  and a finite set of edges  $\Delta_1$  (labelled with symbols from the two-element set  $\{-1, +1\}$ ), as well as the construction of algorithmic tools to perform this classification.

Any edge-bipartite graph  $\Delta$  with a fixed numbering of vertices is uniquely defined by the non-symmetric Gram matrix  $\check{G}_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  viewed as a modified adjacency matrix of a signed graph. We call  $\Delta$  with  $m \geq 1$  vertices, non-negative of corank  $0 \leq r \leq m - 1$ , if the symmetric Gram matrix  $G_{\Delta} := \frac{1}{2}[\check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$  is positive semi-definite of rank  $m - r$ .

The non-negative edge-bipartite graphs  $\Delta$  with  $m \geq 1$  vertices are studied by means of the Coxeter spectrum  $\text{spec}_{\Delta} \subseteq \mathbb{C}$  which is the set of all  $m$  complex eigenvalues of the Coxeter matrix  $\text{Cox}_{\Delta} := -\check{G}_{\Delta} \cdot \check{G}_{\Delta}^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , and up to two Gram  $\mathbb{Z}$ -congruences: weak  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  and strong  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , where

$$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B, \text{ for some matrix } B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det B = \pm 1,$$

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' \Leftrightarrow \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B, \text{ for some matrix } B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det B = \pm 1.$$

The main results of the Coxeter spectral classification presented in the dissertation are in the case of connected loop-free non-negative edge-bipartite graphs of corank two. These are:

- (a) a complete classification up to the Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence  $\sim_{\mathbb{Z}}$  of all connected loop-free non-negative edge-bipartite graphs of corank two,
- (b) definition of the family of extended Euclidean bigraphs, which up to the Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence  $\sim_{\mathbb{Z}}$ , are the only connected loop-free non-negative edge-bipartite graphs of corank two,
- (c) construction of inflation algorithm that among others computes a  $\mathbb{Z}$ -invertible matrix that defines a weak Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence  $\sim_{\mathbb{Z}}$  for all connected loop-free non-negative edge-bipartite graphs of corank two,
- (d) a construction  $(\Delta', u, v) \mapsto \Delta'[[u, v]]$  of all connected loop-free corank-two non-negative edge-bipartite graphs from a corank one (positive) bigraph  $\Delta'$  and a pair of its roots  $u, v$ , in a simple way,
- (e) reducing the classification of connected loop-free corank-two non-negative edge-bipartite graphs with at most 6 vertices up to the Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence  $\approx_{\mathbb{Z}}$ , to the classification of the mesh translation quivers up to the isomorphism of certain directed graphs,
- (f) a construction of combinatorial and graphical algorithms that compute  $\mathbb{Z}$ -invertible matrices which define the strong Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence  $\approx_{\mathbb{Z}}$  for connected loop-free corank-two non-negative edge-bipartite graphs with at most 6 vertices.

Most of the presented results have been published in the articles [38–42, 96–98].

**Keywords:** signed graphs, edge-bipartite graphs, combinatorial algorithms, combinatorial and graphical algorithms, non-negative corank-two loop-free edge-bipartite graphs, non-negative quadratic forms, Dynkin diagrams, Euclidean diagrams, extended Euclidian diagrams, Coxeter spectral classification, Gram matrix, Coxeter matrix, Coxeter spectrum, mesh translation quivers, weak Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence, strong Gram  $\mathbb{Z}$ -congruence, mesh translation quiver isomorphism, inflation algorithm

**AMS Mathematical Subject Classification 2000:**

05C22, 05C50, 05C85, 68W30, 68W40, 68R05, 68R10, 15A21, 15A63

**ACM Computing Classification System 2012:**

Mathematics of computing: Graph theory: Spectra of graphs

Mathematics of computing: Discrete mathematics: Graph theory, Combinatorial algorithms

Mathematical analysis: Numerical analysis: Computations on matrices

# Spis treści

|   |            |
|---|------------|
| <b>1. Wstęp</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1. Wybrane problemy badawcze spektralnej analizy Coxetera . . . . .   | 2          |
| 1.2. Główne wyniki i ich zastosowania . . . . .   | 4          |
| 1.3. Struktura dysertacji . . . . .   | 7          |
| <b>2. Geneza spektralnej analizy Coxetera bigrafów</b>  | <b>9</b>   |
| 2.1. Spektralna analiza grafów i oznakowanych grafów prostych . . . . .   | 9          |
| 2.2. Zmodyfikowane macierze sąsiedztwa. Laplasjany . . . . .  | 11         |
| 2.3. Spektralna analiza Coxetera . . . . .  | 12         |
| 2.4. Spektralna klasyfikacja Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych . .   | 13         |
| <b>3. Grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli</b>  | <b>15</b>  |
| 3.1. Podstawowe definicje . . . . .   | 15         |
| 3.2. Pierwiastki bigrafów nieujemnych . . . . .   | 18         |
| 3.3. Klasyfikacja grafów nieujemnych . . . . .  | 21         |
| 3.4. Elementy spektralnej analizy Coxetera bigrafów . . . . .   | 22         |
| 3.5. Równoważności Grama w spektralnej klasyfikacji bigrafów . . . . .  | 27         |
| 3.6. Operatory inflacji . . . . .   | 29         |
| <b>4. Rozszerzone bigrafy Euklidesa w klasyfikacji nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli</b>                                       | <b>35</b>  |
| 4.1. Rozszerzone bigrafy Euklidesa . . . . .  | 36         |
| 4.2. Specjalna baza jądra funkcjonału Grama bigrafu korangi dwa . . . . .   | 45         |
| 4.3. Obliczanie specjalnej $\mathbb{Z}$ -bazy jądra bigrafów korangi dwa . . . . .  | 50         |
| 4.4. Typ Dynkina i typ Coxetera-Dynkina bigrafu korangi dwa . . . . .   | 52         |
| <b>5. Klasyfikacja Grama nieujemnych bigrafów korangi dwa. Konstrukcja pierwiastkowa</b>  | <b>55</b>  |
| 5.1. Twierdzenie klasyfikujące . . . . .  | 55         |
| 5.2. Konstrukcja pierwiastkowa i jej własności . . . . .  | 59         |
| 5.3. Opis struktury krawędziowo-dwudzielnych grafów korangi dwa . . . . .   | 62         |
| 5.4. Algorytm realizujący konstrukcję pierwiastkową . . . . .   | 64         |
| 5.5. Operatory inflacji w klasyfikacji bigrafów korangi dwa . . . . .   | 68         |
| 5.6. Algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa . . . . .   | 75         |
| <b>6. Geometrie <math>\Phi_\Delta</math>-sieniowe pierwiastków w spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych bigrafów korangi dwa</b> | <b>83</b>  |
| 6.1. Twierdzenie klasyfikujące dla bigrafów o małej liczbie wierzchołków . . .  | 83         |
| 6.2. O geometriach $\Phi_\Delta$ -sieniowych pierwiastków bigrafów dodatnich . . . . .  | 89         |
| 6.3. O geometriach $\Phi_\Delta$ -sieniowych pierwiastków bigrafów korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach . . . . .                  | 95         |
| 6.4. Algorytmy kombinatoryczno-graficzne . . . . .  | 104        |
| 6.5. Weryfikacja poprawności algorytmów kombinatoryczno-graficznych . . .   | 120        |
| <b>A. Dodatek: Wybrane algorytmy kombinatoryczne i ich złożoność obliczeniowa</b>   | <b>123</b> |
| A.1. Spójność i nieujemność bigrafów . . . . .  | 124        |
| A.2. Obliczanie pierwiastków bigrafów dodatnich . . . . .   | 128        |

|  |            |
|--|------------|
| A.3. Obliczanie reduktu nieujemnego bigrafu korangi dwa . . . . .        | 132        |
| A.4. Obliczanie liczby Coxetera i zredukowanej liczby Coxetera . . . . . | 135        |
| A.5. Algorytm inflacyjny dla bigrafów dodatnich oraz głównych . . . . .  | 143        |
| <b>Spis symboli</b>  | <b>153</b> |
| <b>Spis cytowanej literatury</b>   | <b>157</b> |

# Rozdział 1

## Wstęp

W niniejszym rozdziale przedstawiamy informacje o najważniejszych wynikach rozprawy, a także omawiamy strukturę dysertacji.

Rozprawa poświęcona jest wybranym problemom klasyfikacji Grama i Coxetera-Grama nieujemnych oznakowanych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli (zdefiniowanych w [81], zobacz definicja 3.2) o skończonym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  oraz skończonym zbiorze krawędzi  $\Delta_1$  oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru  $\{-1, +1\}$ . Jednym z głównych celów niniejszej dysertacji jest przedstawienie spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  korangi dwa bez pętli.

W rozprawie przedstawiamy m.in. algorytmy kombinatoryczne i kombinatoryczno-graficzne umożliwiające rozwiązywanie problemów spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli wymienionych jako problemy 1.3, 1.4 oraz 1.5 w dalszej części wstępu. Problemy te zostały sformułowane na seminariach doktorskich prowadzonych przez promotora w latach 2010-2015, a także w jego publikacjach [80–83] oraz [54–56] (wspólnych z S. Kasjanem).

Jedną z inspiracji badania niezmienników spektralnych grafów krawędziowo-dwudzielnych (omówioną szeroko w artykułach [79–81]) były problemy spektralnej klasyfikacji Coxetera algebr skończonego wymiaru nad ciałem  $K$  i ich związków z tzw. pochodną równoważnością algebr badaną od wczesnych lat osiemdziesiątych XX wieku, zobacz prace Gabriel-Roiter [29], Zhang [102], Happel [45], Lenzing-Peña [60, 61], Mróz [68], Mróz-Peña [69, 70] oraz Simson [80].

Inną ważną inspiracją były problemy bliskie X Problemowi Hilberta: budowania algorytmów (najlepiej graficznych) opisujących geometrycznie zbiór wszystkich całkowitoliczbowych rozwiązań  $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$  równań diofantycznych  $q(x_1, \dots, x_m) = d$ , gdzie  $d \in \mathbb{Z}$  jest liczbą całkowitą oraz  $q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  jest jednorodną całkowitą formą kwadratową, zobacz [79, 80] oraz monografia [13, Chapter II]. Problemy te są intensywnie badane przez wielu autorów, zobacz monografie [1, 29, 74, 92, 93], oraz artykuły naukowe [3, 6–8, 10, 11, 22, 28, 39, 40, 53, 55–57, 69, 73, 80, 95, 96, 98].

Bardzo ważnym obszarem inspiracji do tych badań są również klasyczne problemy i metody spektralnej teorii grafów i skończonych grafów oznakowanych. Stosuje się je m.in. do opisywania i badania różnych procesów zachodzących w przyrodzie, analizie sieci elektrycznych, a nawet analizy zjawisk badanych w socjologii społecznej, w tym konfliktów grup społecznych, zobacz monografie [17, 18] oraz artykuły [46, 52, 58, 101]. Aspekty te krótko omawiamy w podrozdziale 2.1.

W całej rozprawie symbolami  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  oznaczamy: zbiór liczb naturalnych, pierścień liczb całkowitych, ciało liczb wymiernych, liczb rzeczywistych oraz liczb zespolonych. Dla danej liczby naturalnej  $m \geq 1$  produkt kartezjański  $\mathbb{Z}^m$  traktujemy jako przemienną grupę wolną względem dodawania wektorów, natomiast  $\mathbb{Q}^m, \mathbb{R}^m$  oraz  $\mathbb{C}^m$  rozważamy jako przestrzenie liniowe nad ciałem  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  oraz  $\mathbb{C}$ , odpowiednio. Dla ustalonej

liczby naturalnej  $m \geq 1$  symbolami  $\mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  oznaczamy algebry macierzy kwadratowych  $A = [a_{ij}]_{i,j \leq m}$  wymiaru  $m \times m$ , odpowiednio o współczynnikach w  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{R}$ . Dla danej macierzy  $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  symbolem  $A^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  oznaczamy macierz transponowaną do  $A$ . Ponadto przyjmujemy  $A^{-tr} = (A^{tr})^{-1} = (A^{-1})^{tr}$ , gdy  $\det A \neq 0$ .

Jeśli  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  są skalarami z ciała  $\mathbb{R}$ , to symbolem

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$$

oznaczamy macierz diagonalną  $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ , w której współczynnikami na głównej przekątnej są liczby  $b_{11} = \lambda_1, b_{22} = \lambda_2, \dots, b_{mm} = \lambda_m$ , natomiast pozostałe współczynniki są zerami, tzn.  $b_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$ .

Przypominamy z artykułu [81] (zobacz również definicja 3.2), że **grafem krawędziowo-dwudzielnym** (w skrócie: **bigrafem**) nazywamy czwórkę  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem, natomiast  $\Delta_1^-, \Delta_1^+$  są rozłącznymi podzbiorem zbioru krawędzi  $\Delta_1$  takimi, że  $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$  oraz  $\Delta_1^-(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$  lub  $\Delta_1^-(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$ , dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ . Taki graf krawędziowo-dwudzielny traktujemy jako graf oznakowany (w sensie [101]) następująco:

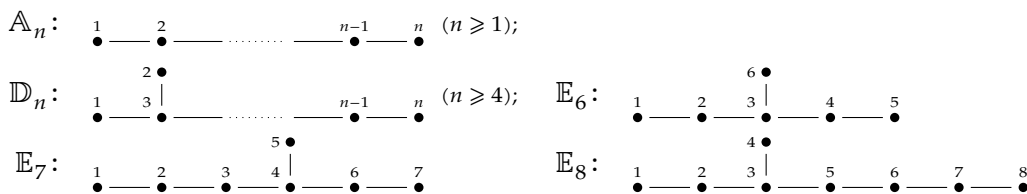
- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^-(a, b)$  oznaczmy symbolem „-1” i realizujemy geometrycznie jako krawędzie ciągłe  $a \text{---} b$ ,
- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^+(a, b)$  oznaczmy symbolem „+1” i realizujemy geometrycznie jako krawędzie przerywane  $a \text{---} \text{---} b$ .

Innymi słowy, grafem krawędziowo-dwudzielnym nazywamy graf oznakowany, w którym wszystkie krawędzie pomiędzy dowolnymi dwoma jego wierzchołkami są oznakowane tym samym znakiem. Oczywiście dowolny oznakowany graf prosty jest krawędziowo-dwudzielny. Ponadto dowolny graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  traktujemy jako oznakowany graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ , w którym  $\Delta_1^-(a, b) = \Delta_1(a, b)$  oraz  $\Delta_1^+(a, b)$  jest zbiorem pustym, dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ , tzn. każda krawędź w  $\Delta$  jest ciągła.

## 1.1. Wybrane problemy badawcze spektralnej analizy Coxetera

W omawianej tu spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych ważną rolę odgrywają powszechnie znane klasy grafów: jednorodne diagramy Dynkina oraz jednorodne diagramy Euklidesa (nazywane również jednorodnymi rozszerzonymi diagramami Dynkina) przedstawione w tabelach 1.1–1.2. <sup>1</sup> Zostały one wprowadzone po raz pierwszy w 1946 roku przez E. B. Dynkina w artykule *Классификация простых групп Ли* <sup>2</sup> do klasyfikacji prostych grup Liego.

TABELA 1.1. JEDNORODNE DIAGRAMY DYNKINA

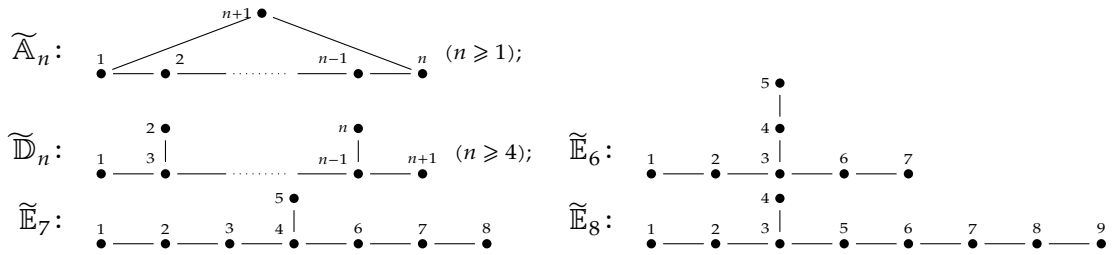


<sup>1</sup>Grafy przedstawione w tabelach 1.1–1.2 są również znane w literaturze pod nazwą zredukowanych grafów Smitha oraz grafów Smitha, odpowiednio, ponieważ zostały zastosowane przez J. H. Smitha w 1969 roku do klasyfikacji grafów o promieniu spektralnym  $\leq 2$ , zobacz: J. H. Smith, *Some properties of the spectrum of a graph*, Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta., 1969), Gordon and Breach, New York, 1970, 403-406.

<sup>2</sup>Artykuł E. B. Dynkina *Классификация простых групп Ли*, opublikowany w Математический сборник 18(1946), 347–352, przez Российская академия наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, dostępny jest na stronie: <http://eudml.org/doc/65313>, zobacz [23].



TABELA 1.2. JEDNORODNE DIAGRAMY EUKLIDESZA



Graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  z ustaloną numeracją wierzchołków  $a_1, \dots, a_m$ ,  $m \geq 1$ , jest jednoznacznie wyznaczony przez **niesymetryczną macierz Grama**  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  (zobacz definicja 3.5). Z taką macierzą  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  w artykułach [55, 81–83] stowarzysza się następujące charakterystyki Coxetera (por. definicja 3.37):

- (a) **macierz Coxetera**  $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ ,
- (b) **wielomian Coxetera**, tj. wielomian charakterystyczny  $\text{cox}_\Delta(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$  macierzy  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ ,
- (c) **spektrum Coxetera**  $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  składające się ze wszystkich  $m$  zespolonych wartości własnych macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta$ ; równoważnie zbiór wszystkich  $m$  zespolonych pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$  bigrafu  $\Delta$ .

W spektralnej analizie Coxetera wyróżnia się nieujemne grafy krawędziowo-dwudzielne **korangi**  $0 \leq r \leq m - 1$  w sensie artykułów [81, 87], tj. takie  $\Delta$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach, że ich **symetryczna macierz Grama**  $G_\Delta := \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - r$  nad ciałem liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$ .

Jeśli  $\Delta$  jest spójnym nieujemnym korangi  $0 \leq r \leq m - 1$  grafem krawędziowo-dwudzielnym o  $m \geq 1$  wierzchołkach bez pętli, to w [86, Definition 2.5] stowarzysza się z nim jednoznacznie **typ Dynkina**  $\text{Dyn}_\Delta \in \{\mathbb{A}_{m-r}, m - r \geq 1, \mathbb{D}_{m-r}, m - r \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ , tj. jednorodny diagram Dynkina o  $m - r \geq 1$  wierzchołkach przedstawiony w tabeli 1.1.

Jednym z problemów rozważanych w dysertacji jest klasyfikacja grafów krawędziowo-dwudzielnych o  $m \geq 1$  wierzchołkach z dokładnością do dwóch  **$\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama**: słabej  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz silnej  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , zdefiniowanych w artykule [81] następująco:

$$\begin{aligned} \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta' &\Leftrightarrow G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det B = \pm 1, \\ \Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta' &\Leftrightarrow \check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B, \text{ dla pewnej macierzy } B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det B = \pm 1. \end{aligned}$$

W pracach [81, 82] pokazano, że jeśli  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , to  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ,  $\text{cox}_\Delta(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$  oraz  $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\Delta'}$ . Ponadto w [86, 97] udowodniono, że dla nieujemnych bigrafów  $\Delta, \Delta'$  bez pętli:  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{Dyn}_\Delta = \text{Dyn}_{\Delta'}$ . Stąd w spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych rozważa się następujące naturalne problemy sformułowane w pracach [54–56, 81, 82, 87].

**Problem 1.3.** Dla danej klasy  $\mathcal{A}$  spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli znaleźć minimalną podklasę  $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$  taką, że dla dowolnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{A}$  istnieje  $\Delta^* \in \mathcal{A}^*$  słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z  $\Delta$ , tj.  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^*$  (odpowiednio, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z  $\Delta$ , tj.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta^*$ ).

**Problem 1.4.** Znaleźć szeroką klasę spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli, dla których równość typów Coxetera-Dynkina

$$(\text{spec}_{\Delta'}, \text{Dyn}_\Delta) = (\text{spec}_{\Delta'}, \text{Dyn}_{\Delta'})$$

implikuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ .

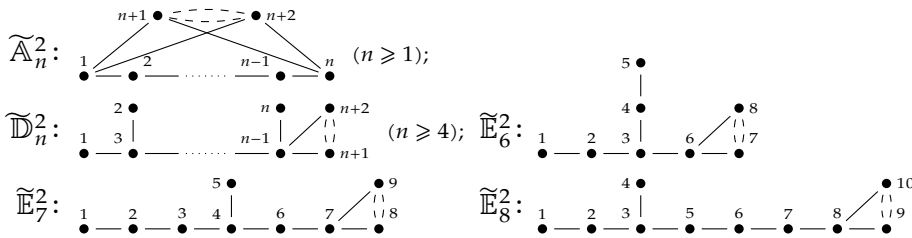
**Problem 1.5.** Zbudować algorytmy pozwalające, dla danej pary bigrafów  $\Delta, \Delta'$  bez pętli spełniających relację  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  (odpowiednio, relację  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ), obliczyć pewną macierz  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  definiującą tę  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  (odpowiednio,  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ), tzn.  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  taką, że  $\det B = \pm 1$  oraz  $G_\Delta = B^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B$  (odpowiednio,  $\check{G}_\Delta = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B$ ).

Częściowe rozwiązania problemów 1.3-1.5 dla nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi zero (inaczej: dodatnich) oraz jeden (inaczej: głównych) przedstawione są w artykułach [6, 7, 28, 33, 34, 39, 53–57, 64, 73, 81, 83, 86, 87] i krótko omówione w rozdziale 3 niniejszej dysertacji.

W niniejszej rozprawie przedstawiamy pełne lub częściowe rozwiązania problemów 1.3-1.5 dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi dwa. Przedstawione rezultaty dysertacji znajdują zastosowanie w klasyfikacji nieujemnych bigrafów dowolnej korangi, zobacz [86, 87, 97].

## 1.2. Główne wyniki i ich zastosowania

Jednym z najważniejszych osiągnięć niniejszej rozprawy jest znalezienie następującej rodziny rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{A}_n^2, n \geq 1, \widetilde{D}_n^2, n \geq 4, \widetilde{E}_6^2, \widetilde{E}_7^2, \widetilde{E}_8^2$  (definicja 4.1):



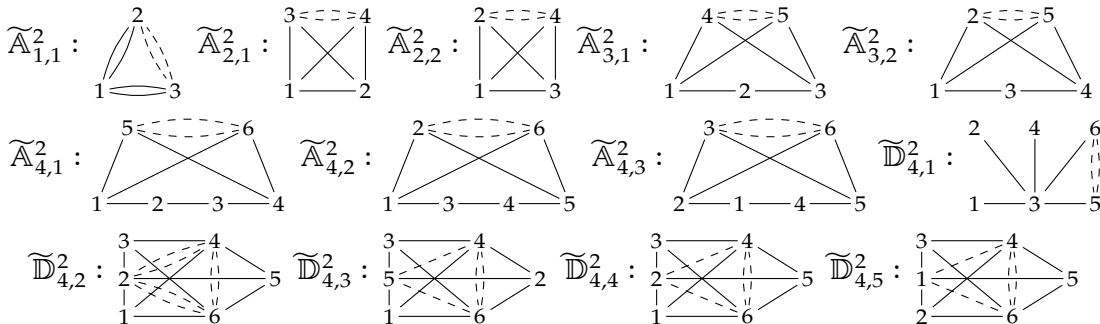
Konstrukcja tych bigrafów wykorzystuje diagramy Dynkina oraz odpowiadające im jedyne maksymalne dodatnie pierwiastki (konstrukcja 5.5, zobacz przykład 5.8).

Głównymi wynikami klasyfikacyjnymi niniejszej rozprawy są następujące twierdzenia klasyfikujące spójne nieujemne bigrafy korangi dwa bez pętli z dokładnością do dwóch równoważności Grama. Stanowią one pełne lub częściowe rozwiązania problemów 1.3–1.5.

- (I) Twierdzenie 5.1, w którym pokazujemy, że z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$ , dowolny spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny korangi dwa jest jednym z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{A}_n^2, n \geq 1, \widetilde{D}_n^2, n \geq 4, \widetilde{E}_6^2, \widetilde{E}_7^2, \widetilde{E}_8^2$ .

Jest to pełne rozwiązanie problemu 1.3 dla klasy  $\mathcal{A}$  wszystkich spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$ , gdzie podrodziną klasyfikującą jest rodzina rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\mathcal{A}^* = \{\widetilde{A}_n^2, n \geq 1, \widetilde{D}_n^2, n \geq 4, \widetilde{E}_6^2, \widetilde{E}_7^2, \widetilde{E}_8^2\}$ .

- (II) Twierdzenie 6.4, w którym pokazujemy, że z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$ , dowolny spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny korangi dwa bez pętli o co najwyżej sześciu wierzchołkach, jest jednym z następujących 13 bigrafów  $\widetilde{A}_{1,1}^2, \widetilde{A}_{2,1}^2, \widetilde{A}_{2,2}^2, \widetilde{A}_{3,1}^2, \widetilde{A}_{3,2}^2, \widetilde{A}_{4,1}^2, \widetilde{A}_{4,2}^2, \widetilde{A}_{4,3}^2, \mathbb{D}_{4,1}^2, \mathbb{D}_{4,2}^2, \mathbb{D}_{4,3}^2, \mathbb{D}_{4,4}^2, \mathbb{D}_{4,5}^2$ :



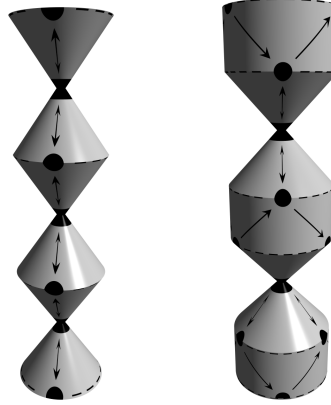
Stanowi to rozwiązanie problemu 1.3 względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$  dla klasy  $\mathcal{A}_6$  wszystkich spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o co najwyżej 6 wierzchołkach. W tym przypadku rodziną

## 1.2. Główne wyniki i ich zastosowania

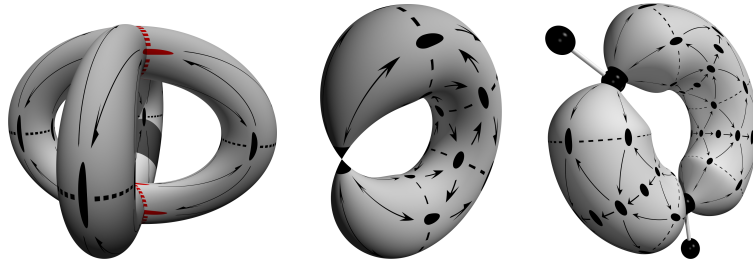
klasyfikującą jest  $\mathcal{A}_6^* = \{\tilde{\mathbb{A}}_{1,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{2,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{2,2}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{3,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{3,2}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,3}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,1}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,2}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,3}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,4}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,5}^2\}$ .

- (III) Twierdzenie 6.30, w którym dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwu-dzielnymi  $\Delta$  korangi dwa bez pętli o co najwyżej  $n + 2 \leq 6$  wierzchołkach konstruujemy nieskończony zbiór  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  składający się z  $\Phi_\Delta$ -orbit wszystkich pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^{n+2}; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 1\}$  bigrafu  $\Delta$  oraz  $\Phi_\Delta$ -orbit pewnych wektorów z jądra  $\text{Ker } q_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^{n+2}; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\}$  wraz ze strukturą  $\Phi_\Delta$ -sieciorowej geometrii. Jest ona nieskończoną sumą:

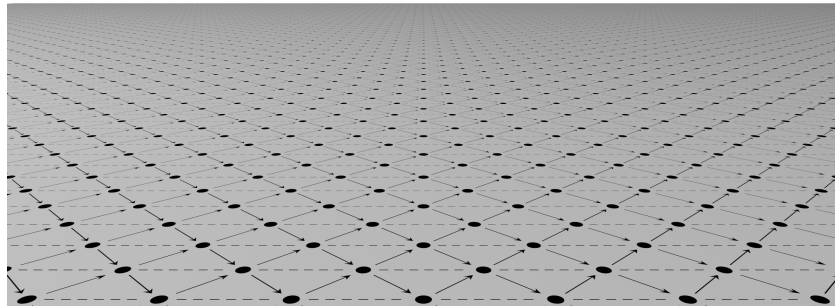
- (i) nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych rangi 2 oraz 3:



- (ii) skończonych torusów rangi 3, 4, 5 oraz 6, w tym następujących sklejonych torusów:



- (iii) płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku następującej postaci:



- (IV) Twierdzenie 5.28, w którym podajemy metodę konstrukcji algorytmu 5.48 (tzw. algorytm inflacyjny). Algorytm ten wyznacza w czasie wielomianowym (twierdzenie 5.50) pewną macierz  $B \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_n^2$  pomiędzy dowolnym spójnym nieujemnym bigrafem  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach bez pętli i typu Dynkina  $D_{n,n}$ , oraz rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ . Macierz ta jest opisana przez złożony operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_k b_k}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$  redukujący  $\Delta$  do bigrafu  $\tilde{D}_n^2$ :

$$\Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_2 b_2}^- (\mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta) \mapsto \dots \mapsto \mathbf{t}_\bullet^- \Delta = \tilde{D}_n^2.$$

W konsekwencji otrzymujemy pełne rozwiązanie problemu 1.5 względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$ .

- (V) Twierdzenie 6.43, na podstawie którego konstruujemy wydajne algorytmy kombinatoryczno-graficzne (m.in. algorytmy: 6.52, 6.68), umożliwiające obliczenie macierzy definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_{n,s}^2$ , gdzie  $\tilde{D}_{n,s}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$  dla dowolnego spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta$  korangi dwa o  $n + 2 \leq 6$  wierzchołkach bez pętli. W konsekwencji otrzymujemy rozwiązanie problemu 1.5 względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$  dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o co najwyżej 6 wierzchołkach.

Innymi ważnymi osiągnięciami rozprawy są:

- (A) konstrukcja pierwiastkowa (konstrukcja 5.5, której własności opisujemy w twierdzeniu 5.11):

$$(\Delta', u, w) \mapsto \Delta'[[u, w]]$$

umożliwiająca konstrukcję spójnego nieujemnego bigrafu korangi dwa bez pętli, z dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta'$  korangi zero (tj. dodatniego) bez pętli oraz pary jego pierwiastków  $u, w \in \mathcal{R}_{\Delta'} := \{v \in \mathbb{Z}^m; v \cdot G_{\Delta'} \cdot v^{tr} = 1\}$ ;

- (B) twierdzenie 5.16 opisujące strukturę dowolnego spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego bez pętli. Wyniki te pozwalają w prosty sposób skonstruować dowolne spójne nieujemne grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli korangi dwa z bigrafów dodatnich. W ten sposób konstruujemy też rozszerzone bigrafy Euklidesa  $\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2$  (zobacz przykład 5.8);
- (C) algorytm 5.22 realizujący konstrukcję pierwiastkową i umożliwiający obliczenie wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli.

Wyniki niniejszej dysertacji mają istotne znaczenie w spektralnej analizie Coxetera spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnymi  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli. W szczególności znajdują następujące zastosowania w rozwiązywaniu problemów opisanych w podrozdziale 2.3:

- (a) klasyfikację pewnych klas całkowitych jednolitych nieujemnych funkcjonałów kwadratowych w powiązaniu z diagramami Dynkina i rozszerzonymi diagramami Euklidesa sprowadzamy do klasyfikacji spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnymi korangi dwa bez pętli (zobacz definicja 3.9(b)), udowodnionej przez nas w rozdziale 5;
- (b) przedstawione przez nas w rozdziale 6 narzędzia oraz algorytmy kombinatoryczno-graficzne
- sprowadzają problem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama spójnych dodatnich (nieujemnych korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach) bigrafów bez pętli do problemu klasyfikacji zredukowanych nieprzywiedlnych  $\Phi$ -sieciovych systemów pierwiastków ( $\Phi$ -sieciovych geometrii pierwiastków), por. [25–27, 54–56, 79–83, 85, 87],
  - pozwalają na opis algorytmiczno-graficzny całkowitoliczbowych rozwiązań pewnych kwadratowych równań diofantycznych  $q(x_1, \dots, x_m) = d$  (w powiązaniu z  $X$  problemem Hilberta, por. [79, 80]);
- (c) prezentowane wyniki spektralnej analizy Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnymi bez pętli mają zastosowanie w spektralnej analizie Coxetera nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych oraz ich reprezentacji macierzowych, zobacz podrozdział 2.4.

Zauważmy, że prezentowane w dysertacji wyniki mogą mieć zastosowania (wykraczające poza ścisły obszar tematyczny prezentowany w niniejszej dysertacji) w klasyfikacji kategorii pochodnych  $\mathcal{D}^b(\text{mod}R)$ . W szczególności, w badaniu zależności struktury tubularnej kołczanów (grafów skierowanych) Auslandera-Reiten w powiązaniu z rozkładem wielomianów Coxetera  $\text{cox}_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$  na iloczyn wielomianów cyklotomicznych. Wyniki tego typu przedstawione są w artykułach [34, 80] oraz [68–70].

Jednym z wyników niniejszej dysertacji jest również przygotowanie implementacji algorytmów omówionych w dysertacji w postaci autorskiego pakietu (umieszczonego na płycie dołączonej do rozprawy oraz na stronie internetowej [99]) do kombinatoryczno-obliczeniowej analizy bigrafów przy użyciu narzędzi komputerowych.

Tak przygotowane implementacje mogą zostać zastosowane do dalszych eksperymentalnych badań, weryfikowania trudnych hipotez, dla których nie są znane dowody teoretyczne, oraz przeprowadzania dowodów wspomaganych komputerowo. W konsekwencji poszerzamy o kolejne algorytmy dostępne narzędzia obliczeniowe do badania problemów spektralnej analizy bigrafów.

Główne wyniki przedstawione w niniejszej dysertacji zostały opublikowane w następujących czasopismach naukowych:

- *Linear Algebra and its Applications* [40, 41, 97],
- *European Journal of Combinatorics* [39],
- *Fundamenta Informaticae* [42, 98],
- *Algebra and Discrete Mathematics* [38],
- *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* [96].

Wyniki rozprawy zostały również zreferowane na następujących międzynarodowych konferencjach naukowych i opublikowane w recenzowanych materiałach konferencyjnych:

- *Combinatorics 2012, Perugia* [95],
- *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, Timișoara, SYNASC 2012* [35], *SYNASC 2013* [64] oraz *SYNASC 2014* [37].

### 1.3. Struktura dysertacji

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów, w tym wstęp, oraz jednego dodatku. W rozdziale 2 omawiamy wybrane problemy spektralnej analizy grafów i grafów oznakowanych oraz stosowane tam narzędzia. Przedstawiamy również genezę spektralnej analizy Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych i jej zastosowania w spektralnej klasyfikacji Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych (zobacz twierdzenie 2.16).

W rozdziale 3 przedstawiamy definicje, problemy i narzędzia do analizy spektralnej Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli. Przybliżamy znane wyniki klasyfikacji spektralnej Coxetera-Grama grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi zero (dodatnich) oraz jeden (głównych), zobacz [57], [81, Section 3], [54, Section 6] oraz twierdzenie 3.64. Omawiamy narzędzia używane w tej klasyfikacji i umożliwiające rozwiązanie problemów 1.3–1.5.

W rozdziale 4 definiujemy rodzinę rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1$ ,  $\mathbb{D}_n^2, n \geq 4$ ,  $\mathbb{E}_6^2, \mathbb{E}_7^2, \mathbb{E}_8^2$ , która klasyfikuje wszystkie spójne nieujemne grafy krawędziowo-dwudzielne korangi dwa bez pętli, z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama. Ponadto omawiamy te ich własności, które są istotne w klasyfikacji spektralnej Coxetera.

W rozdziale 5 podajemy pełne rozwiązanie problemu klasyfikacyjnego (problem 1.3) dla klasy wszystkich spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach. Dowodzimy, że rodziną klasyfikującą takie bigrafy (z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama) jest pięcioelementowa rodzina rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1$ ,  $\mathbb{D}_n^2, n \geq 4$ ,  $\mathbb{E}_6^2, \mathbb{E}_7^2, \mathbb{E}_8^2$ .



W podrozdziale 5.2 przedstawiamy konstrukcję pierwiastkową (konstrukcja 5.5), umożliwiającą konstrukcję spójnego nieujemnego bigrafu korangi dwa bez pętli, ze spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta'$  bez pętli oraz pary jego pierwiastków. W podrozdziale 5.4 przedstawiamy algorytm 5.22 używający tej konstrukcji do zbudowania wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli o ustalonej liczbie wierzchołków.

W podrozdziale 5.5 podajemy ideę konstrukcji algorytmu inflacyjnego dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli, który wyznacza typ Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  (definicja 4.20) oraz  $\mathbb{Z}$ -odwracalną macierz  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_n^2$ , gdzie  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$  jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa. W podrozdziale 5.6 przedstawiamy realizację tego algorytmu (algorytm 5.48).

W rozdziale 6 sprowadzamy klasyfikację spójnych bigrafów korangi dwa bez pętli (z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama) do klasyfikacji  $\Phi_\Delta$ -sieciovych geometrii pierwiastków (z dokładnością do izomorfizmu grafów skierowanych „z dodatkową strukturą”, zobacz definicja 6.20). Pokazujemy, że dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta$  korangi dwa bez pętli o co najwyżej  $n+2 \leq 6$  wierzchołkach, zbiór  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  składający się ze wszystkich pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^{n+2}; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 1\}$  bigrafu  $\Delta$  oraz pewnych wektorów z jądra  $\text{Ker } q_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^{n+2}; v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 0\}$ , ma strukturę  $\Phi_\Delta$ -sieciovą geometrii będącej nieskończoną sumą:

- (i) nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych rangi 2 oraz 3,
- (ii) torusów rangi 3, 4, 5 oraz 6,
- (iii) płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku.

Wykorzystując ideę redukcji do geometrii sieciowych, konstruujemy wydajne algorytmy kombinatoryczno-graficzne (algorytmy: 6.52, 6.68), umożliwiające wyznaczenie macierzy definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama, co stanowi rozwiązanie problemu 1.5 dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o co najwyżej  $n+2 \leq 6$  wierzchołkach.

W podrozdziale 6.1 dowodzimy, że z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama, dowolny spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  korangi dwa bez pętli o co najwyżej  $n+2 \leq 6$  wierzchołkach, jest jednym z 13 bigrafów  $\tilde{\mathbb{A}}_{1,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{2,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{2,2}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{3,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{3,2}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,3}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,1}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,2}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,3}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,4}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,5}^2$  przedstawionych w tabeli 6.5. Stanowi to rozwiązanie problemu 1.3 względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o co najwyżej  $n+2 \leq 6$  wierzchołkach.

Dodatek zawiera analizę następujących algorytmów stosowanych w spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli:

- algorytm A.3 testujący spójność danego bigrafu,
- algorytm A.7 sprawdzający nieujemność danego bigrafu i obliczający jego korangę,
- algorytm A.21 (tzw. algorytm ograniczonego zliczania) obliczający zbiór pierwiastków dodatniego spójnego bigrafu,
- algorytm A.30 wyznaczający redukt  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathcal{R}_\Delta$  (definicja A.25),
- algorytm A.39 do obliczania liczby Coxetera dodatniego spójnego bigrafu bez pętli,
- algorytm A.55 obliczający zredukowaną liczbę Coxetera oraz liczbę Coxetera spójnego nieujemnego bigrafu bez pętli,
- algorytm inflacyjny dla spójnych dodatnich bigrafów bez pętli (algorytm A.59) oraz dla głównych bigrafów bez pętli (algorytm A.66),

wraz z analizą ich pesymistycznej złożoności obliczeniowej względem liczby wykonanych operacji arytmetycznych.

## Rozdział 2

# Geneza spektralnej analizy Coxetera bigrafów

Rozprawa poświęcona jest spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach (zobacz definicja 3.2), których symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$  (zobacz definicja 3.4(b)) jest nieujemnie określona. Badania te zalicza się w literaturze naukowej do spektralnej teorii grafów: rozważana klasa grafów krawędziowo-dwudzielnych jest podklasą multigrafów oznakowanych, znanych w literaturze anglojęzycznej jako *signed graphs*, zobacz [18, 46, 101].

W niniejszym rozdziale przypominamy podstawowe definicje i fakty związane ze spektralną analizą grafów i jej zastosowaniami, zobacz [15, 17–19, 30, 65, 75]. Przedstawiamy również krótko genezę spektralnej analizy Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych oraz jej wykorzystanie w klasyfikacji spektralnej zbiorów częściowo uporządkowanych, zobacz [8–11, 22, 33–35, 37, 39, 40, 55, 56, 72, 73, 76–78].

### 2.1. Spektralna analiza grafów i oznakowanych grafów prostych

Przypominamy teraz podstawowe definicje i problemy klasycznej spektralnej teorii grafów, stosując terminologię wprowadzoną w monografiach [18, Chapter 1] oraz [19, Chapter 1.1].

Jednym z celów klasycznej spektralnej teorii grafów jest badanie własności wybranych klas grafów przy wykorzystaniu własności spektrum macierzy sąsiedztwa lub zmodyfikowanej macierzy sąsiedztwa, zobacz monografie [18, 19] oraz podrozdział 2.2.

**Definicja 2.1.** (a) *Grafem* nazywamy parę  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ , w której  $\Delta_0$  jest niepustym skończonym zbiorem wierzchołków oraz  $\Delta_1$  jest skończonym zbiorem krawędzi. Symbolem  $\Delta_1(a, a') \subset \Delta_1$  oznaczamy zbiór krawędzi incydentnych z wierzchołkami  $a, a' \in \Delta_0$ .

(b) *Grafem prostym* nazywamy graf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  który nie posiada pętli ani wielokrotnych krawędzi, tzn.  $\Delta_1(a, a) = \emptyset$  oraz  $|\Delta_1(a, a')| \leq 1$ , dla dowolnych wierzchołków  $a, a' \in \Delta_0$ .

**Definicja 2.2.** Załóżmy, że  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest grafem prostym, w którym wierzchołki  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  ponumerowane są liczbami  $1, \dots, m$ , dla  $m \geq 1$ .

(a) *Macierzą sąsiedztwa grafu*  $\Delta$  nazywamy macierz symetryczną

$$A_\Delta := [a_{ij}^\Delta]_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } a_{ij}^\Delta := \begin{cases} 1, & \text{jeśli istnieje krawędź } a_i \text{---} a_j, \\ 0, & \text{jeśli nie istnieje krawędź } a_i \text{---} a_j. \end{cases} \quad (2.3)$$

(b) *Spektrum grafu*  $\Delta$  nazywamy skończony zbiór  $\text{spec}_\Delta \subset \mathbb{R}$ , wszystkich (rzeczywistych)  $m \geq 1$  pierwiastków wielomianu charakterystycznego  $P_\Delta(t) = \det(t \cdot E - A_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$  symetrycznej macierzy sąsiedztwa  $A_\Delta$  grafu  $\Delta$ .

**Uwaga 2.4.** Postać macierzy sąsiedztwa  $A_\Delta$  grafu  $\Delta$  zależy od numeracji wierzchołków  $a_1, \dots, a_m$ , natomiast wielomian  $P_\Delta(t)$  oraz spektrum  $\text{spec}_\Delta$  grafu  $\Delta$  zależą jedynie od  $\Delta$  (zobacz monografia [18, Chapter 1]).

Z uwagi 2.4 wynika, że jeśli grafy  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  oraz  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$  są izomorficzne,<sup>1</sup> to  $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\Delta'}$ . Ponieważ implikacja przeciwna nie zawsze jest prawdziwa (zobacz [18, Chapter 4.2] oraz przykład 2.10), w spektralnej teorii grafów rozważa się następujący problem kospektralności grafów.

**Problem 2.5.** (a) *Dla jakich par grafów  $\Delta$  oraz  $\Delta'$  równość spektrów  $\text{spec}_\Delta = \text{spec}_{\Delta'}$  implikuje istnienie izomorfizmu grafów  $\Delta \cong \Delta'$ .*

(b) *Znaleźć klasy grafów  $\Delta$ , które są jednoznacznie wyznaczone przez spektrum  $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ , z dokładnością do izomorfizmu.*

Problem ten jest szczegółowo omówiony w monografii [18]. Następujące twierdzenie udowodnione w [18] orzeka, że jedną z takich klas grafów są grafy 2-regularne, tzn. grafy proste, w których każdy wierzchołek posiada dokładnie dwie krawędzie z nim incydentne.

**Twierdzenie 2.6.** *Dowolny graf 2-regularny  $\Delta$  jest wyznaczony przez swoje spektrum  $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$  jednoznacznie, z dokładnością do izomorfizmu.*

Innym ważnym problemem spektralnej teorii grafów jest wskazanie takich własności grafów  $\Delta$ , które są jednoznacznie scharakteryzowane przez własności spektrum  $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$ . Przykładem takiej klasy są grafy (wierzchołkowo) dwudzielne, tzn. grafy  $\Delta$  posiadające taki nietrywialny podział  $\Delta_0 = \Delta'_0 \cup \Delta''_0$  zbioru wierzchołków, że dowolna krawędź łączy pewien wierzchołek zbioru  $\Delta'_0$  z pewnym wierzchołkiem zbioru  $\Delta''_0$ . Dla takich grafów prawdziwe jest następujące twierdzenie (zobacz [18, Theorem 3.2.3, Theorem 3.2.4]).

**Twierdzenie 2.7.** *Dla dowolnego spójnego grafu  $\Delta$  następujące trzy warunki są równoważne.*

(a) *Graf  $\Delta$  jest dwudzielny.*

(b) *Spektrum  $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$  jest zbiorem symetrycznym względem zera, tzn. jeśli  $\lambda \in \text{spec}_\Delta$ , to  $-\lambda \in \text{spec}_\Delta$ .*

(c) *Jeśli  $\lambda_+ \in \text{spec}_\Delta$  jest maksymalną liczbą w  $\text{spec}_\Delta$ , to  $-\lambda_+$  jest minimalną liczbą w  $\text{spec}_\Delta$ .*

Bardziej ogólną klasą badaną w teorii grafów są oznakowane grafy proste. Przypomnijmy, że **grafem oznakowanym** nazywamy parę  $(\Delta, \text{sgn})$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem, natomiast  $\text{sgn} : \Delta_1 \rightarrow \{+1, -1\}$  jest funkcją przyporządkowującą dowolnej krawędzi  $\beta \in \Delta_1(a, b)$  jej znak  $\text{sgn}(\beta) \in \{+1, -1\}$ , zobacz [46].

Dowolny oznakowany graf prosty  $(\Delta, \text{sgn}) = ((\Delta_0, \Delta_1), \text{sgn})$  o skończonym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  jest jednoznacznie wyznaczony przez macierz sąsiedztwa  $\text{Ad}_\Delta = [d_{ij}^\Delta] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  zdefiniowaną analogicznie do macierzy (2.3), tj. przyjmujemy  $d_{ij}^\Delta := \text{sgn}(a_i, a_j)$ , gdy istnieje krawędź łącząca wierzchołek  $a_i$  z  $a_j$ , zobacz [101]. Spektrum  $\text{spec}_\Delta \subset \mathbb{R}$  takiego grafu jest skończonym zbiorem wszystkich (rzeczywistych)  $m \geq 1$  pierwiastków wielomianu charakterystycznego  $P_\Delta(t) = \det(t \cdot E - \text{Ad}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$  symetrycznej macierzy sąsiedztwa  $\text{Ad}_\Delta$  grafu  $(\Delta, \text{sgn})$ .

**Uwaga 2.8.** Grafy oznakowane wprowadzone zostały w 1953 roku w artykule [46] i zastosowane tam do opisu zachowań i relacji grup osobników badanych w socjologii społecznej, zobacz również [52] oraz [58]. Grafy te wykorzystuje się również w innych dziedzinach nauki i techniki, np. w elektrotechnice do analizy sieci elektrycznych, w fizyce do opisu modeli szkła spinowego, zobacz [2].

<sup>1</sup> Następującą definicję *izomorfizmu grafów* podajemy za Z. Loncem [62, str. 7]: grafy  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  oraz  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$  są **izomorficzne**, jeśli istnieje taka bijekcja  $f: \Delta_0 \rightarrow \Delta'_0$ , że dla dowolnej pary wierzchołków  $a, b \in \Delta_0$  zachodzi:  $\{a, b\} \in \Delta_1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{f(a), f(b)\} \in \Delta'_1$ , zobacz też [19].



Jedną z najczęściej badanych w literaturze naukowej klas grafów oznakowanych, są proste **grafy zbalansowane**, tzn. takie, w których liczba krawędzi ze znakiem  $-1$  jest parzysta w każdym cyklu.

Inspiracją do badania grafów zbalansowanych były modele graficzne stosowane w socjologii społecznej, gdzie zbalansowanie miało odpowiadać stabilnej sytuacji społecznej badanej grupy osobników opisywanej przez grafy oznakowane, zobacz [46].

Z następującego twierdzenia wynika, że jedną z takich klas jest klasa prostych grafów oznakowanych  $(\Delta, \text{sgn})$ , których spektrum jest równe spektrum grafu nieoznakowanego  $\bar{\Delta}$  otrzymanego z  $\Delta$  przez opuszczenie oznakowania, zobacz [101, Proposition 2.6].

**Twierdzenie 2.9.** *Prosty graf oznakowany jest zbalansowany wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{spec}_{\Delta} = \text{spec}_{\bar{\Delta}}.$$

Więcej informacji o własnościach zbalansowanych grafów oznakowanych można znaleźć w [101]. W rozprawie zajmujemy się badaniem własności spektralnych szerokiej klasy grafów oznakowanych  $\Delta$ , jakimi są grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli. Badamy ich własności wyrażone w terminach zespolonego spektrum  $\text{spec}_{\Delta} \subseteq \mathbb{C}$  macierzy Coxetera, która powstaje przez nietrywialną modyfikację macierzy sąsiedztwa.

## 2.2. Zmodyfikowane macierze sąsiedztwa. Laplasjany

Zazwyczaj macierz sąsiedztwa  $A_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  (2.3) grafu  $\Delta$  oraz spektrum  $\text{spec}_{\Delta} \subseteq \mathbb{R}$  nie wystarczają do jednoznacznej charakteryzacji pewnych własności grafów prostych, co obrazuje następujący przykład pochodzący z [18, Chapter 4.2].

**Przykład 2.10.** Rozważmy następujące dwa grafy proste  $\Delta, \Delta'$

$$\Delta : \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}, \quad \Delta' : \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \quad \text{gdzie } \text{spec}_{\Delta} = \text{spec}_{\Delta'} = \{-2, 0, 0, 0, 2\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że

- grafy  $\Delta, \Delta'$  są kospektralne, tj.  $\text{spec}_{\Delta} = \text{spec}_{\Delta'} \subseteq \mathbb{R}$ ,
- grafy  $\Delta, \Delta'$  nie są izomorficzne,
- graf  $\Delta'$  jest spójny, natomiast graf  $\Delta$  nie jest spójny.

Dlatego w spektralnej teorii grafów stosuje się zmodyfikowane macierze sąsiedztwa dostosowane do badanych klas grafów lub do badanych własności (takich jak: spójność, wierzchołkowa dwudzielność, liczba drzew rozpinających). Najbardziej znanymi modyfikacjami są tzw. „Laplasjany”, w tym następujące trzy macierze Laplace’a (zobacz [18, Chapter 1, Chapter 7]):

- symetryczna **macierz Laplace’a**  $L_{\Delta} := Dg_{\Delta} - A_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  grafu  $\Delta$ , gdzie macierz  $Dg_{\Delta} = \text{diag}(\deg(a_1), \dots, \deg(a_m)) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest przekątniową macierzą stopni wierzchołków  $a_1, \dots, a_m$  grafu  $\Delta$ ,
- symetryczna **bezznakowa macierz Laplace’a**  $Q_{\Delta} := Dg_{\Delta} + A_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ ,
- symetryczna **znormalizowana macierz Laplace’a**  $\hat{L}_{\Delta} := Dg_{\Delta}^{-\frac{1}{2}} L_{\Delta} Dg_{\Delta}^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ .

Wiadomo, że spójności grafu  $\Delta$  nie można opisać poprzez własności spektrum  $\text{spec}_{\Delta}$ , zobacz [18, Figure 1.3]. Z następującego twierdzenia udowodnionego w [18, Theorems 7.1.2-3, Corollary 7.7.4] wynika, że własność tę można opisać w terminach spektrum macierzy Laplace’a  $L_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz znormalizowanej macierzy Laplace’a  $\hat{L}_{\Delta} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ .

**Twierdzenie 2.11.** (a) Liczba  $\lambda = 0$  jest wartością własną macierzy Laplace'a  $L_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz znormalizowanej macierzy Laplace'a  $\hat{L}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  dowolnego prostego grafu  $\Delta$ , a jej krotność  $s \geq 1$  (jako wartości własnej macierzy  $L_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ ) jest równa krotności liczby  $\lambda = 0$  jako wartości własnej macierzy  $\hat{L}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz równa jest liczbie spójnych składowych grafu  $\Delta$ . Ponadto, macierz Laplace'a  $L_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  grafu  $\Delta$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - s$ .

(b) Jeśli  $\Delta$  jest spójnym grafem prostym, to krotność  $s' \geq 1$  liczby  $\lambda = 0$  (jako wartości własnej bezznakowej macierzy Laplace'a  $Q_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ ) równa jest liczbie spójnych składowych dwudzielnych lub trywialnych.

Konsekwencją twierdzenia 2.11 jest następujący wniosek, zobacz [18, Corollary 7.7.4].

**Wniosek 2.12.** Graf prosty  $\Delta$  jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy maksymalna wartość własna  $\hat{\lambda}_+$  znormalizowanej macierzy Laplace'a  $\hat{L}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  jest równa 2 oraz krotność wartości własnej  $\hat{\lambda}_+$  jest równa krotności minimalnej wartości własnej  $\hat{\lambda}_-$  tej macierzy.

Innym przykładem zastosowania macierzy Laplace'a w badaniu własności grafów jest następujące twierdzenie (znane również jako twierdzenie Kirkchoffa lub twierdzenie macierzowe o drzewach), opisujące związek spektrum macierzy Laplace'a z liczbą drzew rozpinających w grafie, zobacz [18, Theorem 7.2.2].

**Twierdzenie 2.13.** Jeśli  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  są wszystkimi niezerowymi wartościami własnymi macierzy Laplace'a  $L_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  spójnego grafu prostego  $\Delta$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach, to liczba wszystkich drzew rozpinających grafu  $\Delta$  jest równa  $\mathbf{t}(\Delta) = \frac{1}{m} \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{m-1}$ .

**Uwaga 2.14.** Innymi modyfikacjami macierzy sąsiedztwa oznakowanego (multi)grafu  $\Delta$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach są: niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz symetryczna macierz Grama  $G_\Delta = \frac{1}{2}[\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Q})$  zdefiniowane w pracy [81], zobacz rozdział 3.

W rozprawie badamy spektralne własności szerokiej klasy grafów oznakowanych  $\Delta$  w terminach macierzy Grama  $\check{G}_\Delta, G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz zespolonego spektrum  $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ .

W naszych badaniach wykorzystujemy pewne idee i fakty pochodzące ze spektralnej teorii grafów oraz metody spektralnej analizy Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych wprowadzone w pracach [80, 81, 83] oraz [87].

## 2.3. Spektralna analiza Coxetera

W tym podrozdziale przedstawiamy motywację spektralnej analizy Coxetera dodatnich oraz nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli o skończonym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  oraz skończonym zbiorze krawędzi  $\Delta_1$  oznakowanych symbolami z dwuelementowego zbioru  $\{-1, +1\}$ . Analiza ta jest głównym przedmiotem badań prezentowanych w rozprawie.

W badaniu nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  bez pętli korzystamy przede wszystkim z idei, narzędzi, metod i technik opracowanych w artykułach [78, 80–83]. Jedną z idei jest redukcja problemu istnienia silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta, \Delta'$  do porównania ich spektrum Coxetera  $\text{specc}_\Delta, \text{specc}_{\Delta'} \subseteq S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  zdefiniowanych we wstępie.

U podstaw spektralnej analizy Coxetera leżą rozwiązywane od wczesnych lat sześćdziesiątych XX wieku problemy klasyfikacyjne matematyki teoretycznej i matematyki dyskretnej, w tym:

- (**równania diofantyczne**) opis algorytmiczno-graficzny całkowitoliczbowych rozwiązań kwadratowych równań diofantycznych  $q(x_1, \dots, x_m) = d$ , rozważany w pracach Simsona [79, 80] w powiązaniu z X problemem Hilberta, a także problemami teorii liczb („przedstawialność liczb przez formy”), zobacz Borevich-Shafarevich [13, Chapter 2];
- (**formy kwadratowe**) klasyfikacja całkowitych form kwadratowych (słabo dodatnio-określonych oraz słabo dodatnio-półokreślonych) w powiązaniu z diagramami Dynkina i Euklidesa, zobacz monografie [1, 29, 74, 76, 92, 93] oraz publikacje Barot-de la Peña [3], Bondarenko [8–11], Bongartz [12], Drozd [21, 22], von Höhne [48], von Höhne-de la Peña [47], Marczak-Polak-Simson [63], Ovsienko [71], Simson [78, 85], Zhang [102, 103];
- (**zbiory częściowo uporządkowane**) klasyfikacja zbiorów częściowo uporządkowanych oraz ich reprezentacji macierzowych, zobacz monografie Gabriel-Roiter [29], Simson [76] oraz artykuły Drozd [22], Bondarenko-Stepochkina [10, 11], Bondarenko-Futorny-Klimchuk-Sergeichuk-Yusenko [8], Gąsiorek [32], Gąsiorek-Simson-Zajac [35, 39, 40], Gąsiorek-Zajac [42], Simson [77, 78, 85], Simson-Wojewódzki [94], Simson-Zajac [96];
- ( **$\mathbb{Z}$ -kongruencja macierzy całkowitoliczbowych**) problem istnienia  $\mathbb{Z}$ -kongruencji całkowitoliczbowych macierzy  $A$  oraz  $A^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  sformułowany w pracach Horn-Sergeichuk [50], Gerasimova-Horn-Sergeichuk [43], Simson [82, 83], zobacz artykuły Felisiak-Simson [25–27], Gąsiorek-Simson [33, 34], Mróz [68], Simson-Zajac [96];
- (**zredukowane systemy pierwiastków**) klasyfikacja zredukowanych nieprzywiedlnych systemów pierwiastków w sensie Bourbaki [14] oraz  $\Phi$ -oczkowych systemów pierwiastków w sensie [80], omówiona w artykułach Simson [79–83, 85, 87], Felisiak-Simson [25–27], Kasjan-Simson [54–56] oraz rozprawie doktorskiej Felisiak [24];
- (**teoria reprezentacji algebr**) klasyfikacja kategorii pochodnych  $\mathcal{D}^b(\text{mod}R)$  w sensie Verdiego dla skończone wymiarowych  $K$ -algebr  $R$  nad ciałem algebraicznie domkniętym  $K$ , oraz opis struktury tubularnej stowarzyszonych kołczanów (grafów skierowanych) Auslandera-Reiten w powiązaniu z rozkładem wielomianów Coxetera  $\text{cox}_R(t) \in \mathbb{Z}[t]$  na iloczyn wielomianów cyklotomicznych, zobacz artykuły Happel [45], Lenzing-de la Peña [60, 61], Simson [80, 87], Zhang [102, 103], Mróz [68], Mróz-de la Peña [69, 70].

## 2.4. Spektralna klasyfikacja Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych

Omówimy teraz pokrótce zastosowanie spektralnej analizy Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych (sformalizowanej w pracach [81, 83]) do spektralnej analizy Coxetera skończonych **zbiorów częściowo uporządkowanych**  $(I, \leq)$  sformułowanej w pracach Simson [76–78], uzupełnionych w pracy Simson-Zajac [96] oraz omówionej w rozprawie doktorskiej M. Gąsiorek [32].

Z dowolnym skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym  $I \equiv (I, \leq)$ , o  $m \geq 1$  elementach  $a_1, \dots, a_m$  i relacji częściowego porządku  $\leq$  (tj. relacja  $\leq$  jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna), stowarzysza się (zobacz [78]) **macierz incydencji**  $C_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz **symetryczną macierz Grama**  $G_I \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$

$$C_I := [c_{ij}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdym } a_i \leq a_j \\ 0, & \text{gdym } a_i \not\leq a_j \end{cases}, \text{ oraz } G_I := \frac{1}{2}(C_I + C_I^{tr}) \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Ponieważ  $\det C_I = 1$  [96], więc macierze  $C_I^{-1}, \text{Cox}_I \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  są dobrze zdefiniowane

w pierścieniu  $\mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie macierz

$$\text{Cox}_I := -C_I \cdot C_I^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \det(\text{Cox}_I) = (-1)^m,$$

nazywamy **macierzą Coxetera zbioru częściowo uporządkowanego  $I$** , zobacz [77, 78, 96]. Ponadto, z dowolnym  $m$ -elementowym zbiorem częściowo uporządkowanym  $I \equiv (I, \leq)$  stowarzyszymy [76–78, 96]:

- **wielomian Coxetera  $\text{cox}_I(t)$  zbioru częściowo uporządkowanego  $I$**  definiowany jako wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_I(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_I) \in \mathbb{Z}[t],$$

macierzy  $\text{Cox}_I$ ,

- **spektrum Coxetera  $\text{spec}_I$  zbioru częściowo uporządkowanego  $I$** , który jest zbiorem  $\text{spec}_I \subseteq \mathbb{C}$  wszystkich  $m \geq 1$  zespolonych rozwiązań (wraz z krotnościami) równania  $\text{cox}_I(t) = 0$ .

W spektralnej klasyfikacji Coxetera skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych  $I$  rozważany jest następujący problem [80, 96].

**Problem 2.15.** *Wskazać niezmienniki, które wyznaczają skończone zbiory częściowo uporządkowane jednoznacznie, z dokładnością do **dwuliniowej  $\mathbb{Z}$ -równoważności**  $\approx_{\mathbb{Z}}$ , gdzie*

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy macierze incydencji } C_I \text{ oraz } C_J \text{ są } \mathbb{Z}\text{-kongruentne,}$$

tzn. istnieje taka macierz  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , że  $C_J = B^{tr} \cdot C_I \cdot B$  oraz  $\det B = \pm 1$ .

W artykułach [39, Theorem 1.2(b)] (por. [33, 34]) oraz [42, Theorem 1.3] (por. [36, 38–40]) dowodzimy, że takimi niezmiennikami są: spektrum Coxetera  $\text{spec}_I$  oraz **typ Dynkina  $\text{Dyn}_I$**  zdefiniowany jako jednorodny diagram Dynkina (zobacz tabela 3.32) stowarzyszony jednoznacznie ze spójnym zbiorem częściowo uporządkowanym (zobacz [39, 40]). W dowodach stosujemy metody wypracowane w spektralnej analizie Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych.

Następujące twierdzenie zostało udowodnione w [39, Theorem 1.2(b)] oraz [42, Theorem 1.3].

**Twierdzenie 2.16.** (a) *Jeśli  $m \leq 10$  oraz symetryczne macierze Grama  $G_I, G_J \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych  $I, J$  są dodatnio określone, to*

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{spec}_I = \text{spec}_J.$$

(b) *Jeśli  $m \leq 16$  oraz symetryczne macierze Grama  $G_I, G_J \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  spójnych zbiorów częściowo uporządkowanych  $I, J$  są dodatnio półokreślone rzędu  $\text{rz}_{\mathbb{Q}}(G_I) = \text{rz}_{\mathbb{Q}}(G_J) \in \{m-2, m-1\}$ , to*

$$I \approx_{\mathbb{Z}} J \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{spec}_I = \text{spec}_J \text{ oraz } \text{Dyn}_I = \text{Dyn}_J.$$

Wyniki tego typu można znaleźć w artykułach [8–11, 22, 39, 40, 73, 78]. Wybrany problemom spektralnej analizy Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych  $I$  z dodatnio półokreśloną macierzą Grama  $G_I$ , poświęcona jest również rozprawa doktorska M. Gąsiorka [32].

## Rozdział 3

# Grafy krawędziowo-dwudzielne bez pętli

W tym rozdziale przedstawiamy definicję grafu krawędziowo-dwudzielnego (w skrócie: bigrafu)  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  o  $m \geq 1$  wierzchołkach oraz podstawowe narzędzia do analizy spektralnej Coxetera bigrafów. W szczególności podajemy definicję niesymetrycznej macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , symetrycznej macierzy Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz funkcjonału Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ , które jednoznacznie wyznaczają graf krawędziowo-dwudzielny bez pętli. Są to narzędzia umożliwiające korzystanie z wyników teorii całkowitych funkcjonałów kwadratowych w analizie grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli. Z drugiej strony, wyniki klasyfikacji grafów krawędziowo-dwudzielnych mają odzwierciedlenie w klasyfikacji całkowitoliczbowych macierzy górnotrójkątnych, wymiernych macierzy symetrycznych oraz funkcjonałów kwadratowych, zobacz [74].

Przybliżamy również znane wyniki klasyfikacji spektralnej Coxetera-Grama dodatnich oraz głównych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli. Ponadto omawiamy narzędzia używane w tej klasyfikacji i umożliwiające rozwiązanie problemów 1.3–1.5.

### 3.1. Podstawowe definicje

Przez skończony graf<sup>1</sup> będziemy rozumieli parę  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ , gdzie  $\Delta_0$  jest skończonym niepustym zbiorem wierzchołków, natomiast  $\Delta_1$  jest skończonym multizbiorem krawędzi (dopuszczamy więcej niż jedną krawędź między ustaloną parą wierzchołków). Dla pary wierzchołków  $a, b \in \Delta_0$ , symbolem  $\Delta_1(a, b)$  oznaczamy multizbiór wszystkich krawędzi grafu  $\Delta$  incydentnych z wierzchołkami  $a$  oraz  $b$ . Krawędzie należące do multizbioru  $\Delta_1(a, a)$  nazywamy pętlami incydentnymi z  $a$ . Mówimy, że  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest grafem **bez pętli**, jeśli dla dowolnego wierzchołka  $a \in \Delta_0$  multizbiór  $\Delta_1(a, a)$  jest zbiorem pustym.

**Uwaga 3.1.** Dla uproszczenia zapisu, w dalszej części dysertacji, zamiast: *multizbiór krawędzi*, będziemy pisać: *zbiór krawędzi*, pamiętając jednak, że dowolne dwa wierzchołki mogą być połączone więcej niż jedną krawędzią.

Przypominamy, że **grafem oznakowanym** nazywamy parę  $(\Delta, \text{sgn})$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem natomiast  $\text{sgn} : \Delta_1 \rightarrow \{+1, -1\}$  jest funkcją przyporządkowującą dowolnej krawędzi  $\beta \in \Delta_1(a, b)$  jej znak  $\text{sgn}(\beta) \in \{+1, -1\}$ . W artykule [81] wprowadzono definicję następującej klasy grafów oznakowanych, tzw. grafów krawędziowo-dwudzielnych.

**Definicja 3.2.** (a) *Grafem krawędziowo-dwudzielnym (w skrócie: bigrafem), nazywamy czwórkę  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$ , gdzie  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  jest skończonym grafem, natomiast*

<sup>1</sup>Na ogół w literaturze przez *graf* rozumie się graf prosty, tj. graf bez wielokrotnych krawędzi, a grafy z wielokrotnymi krawędziami nazywane są *multigrafami*, zobacz [19, str. 24]. W tej rozprawie przez graf rozumiemy multigraf.



$\Delta_1^-, \Delta_1^+$  są rozłącznymi podzbiórami zbioru krawędzi  $\Delta_1$  takimi, że  $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup \Delta_1^-$  oraz  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^+(a, b)$  lub  $\Delta_1(a, b) = \Delta_1^-(a, b)$ , dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ .

- (b) Dla ustalonej liczby naturalnej  $m \geq 1$  symbolem  $\mathcal{Bigr}_m$  będziemy oznaczać zbiór wszystkich grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  o zbiorze  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  wierzchołków  $a_1, \dots, a_m$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, m$ .
- (c) Symbolem  $\mathcal{UBigr}_m$  będziemy oznaczać podzbiór zbioru  $\mathcal{Bigr}_m$  składający się ze wszystkich bigrafów  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_m$  bez pętli o  $m$  wierzchołkach  $a_1, \dots, a_m$ .

**Uwaga 3.3.** (a) Dowolny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  będziemy traktować jako graf oznakowany następująco:

- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^-(a, b)$  będą oznakowane znakiem „-1” oraz realizowane geometrycznie jako krawędzie ciągłe  $a \text{---} b$ ,
- krawędzie ze zbioru  $\Delta_1^+(a, b)$  będą oznakowane znakiem „+1” oraz realizowane geometrycznie jako krawędzie przerywane  $a \text{---} \text{---} b$ .

(b) Graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  będziemy oznaczać symbolem  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ , o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumienia.

(c) Dowolny graf nieoznakowany  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  będziemy traktować jako graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1^-, \Delta_1^+)$  przyjmując  $\Delta_1^-(a, b) = \Delta_1(a, b)$  oraz  $\Delta_1^+(a, b) = \emptyset$ , dla dowolnych wierzchołków  $a \neq b$ , tzn. taki  $\Delta$ , w którym każda krawędź jest ciągła.

Zauważmy, że graf oznakowany  $\Delta : a \text{---} \text{---} b$  nie jest grafem krawędziowo-dwudzielnym, ponieważ nie jest spełniony warunek zachowania dwupodziału krawędzi, tj.  $\Delta_1^+ \cap \Delta_1^- = \{(a, b)\} \neq \emptyset$ , gdzie  $\Delta_1^+ = \{(a, b)\}$  oraz  $\Delta_1^- = \{(a, b)\}$ . Natomiast graf  $\Delta' : a \text{---} b$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym ze zbiorem krawędzi ciągłych równym  $\Delta_1'^- = \{(a, b), (a, b)\}$  oraz pustym zbiorem krawędzi przerywanych  $\Delta_1'^+ = \emptyset$ . Podobnie, grafem krawędziowo-dwudzielnym jest graf oznakowany  $\Delta'' : a \text{---} \text{---} b$  ze zbiorem krawędzi przerywanych równym  $\Delta_1''^+ = \{(a, b), (a, b)\}$  oraz pustym zbiorem krawędzi ciągłych  $\Delta_1''^- = \emptyset$ .

Następujące definicje, pochodzące z artykułu [81], pełnią istotną rolę w spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli. W naszych badaniach zajmujemy się głównie spektralną analizą bigrafów bez pętli. Spektralna analiza Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych z przerywanymi pętlami omówiona jest w artykułach [54–56].

**Definicja 3.4.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_m$  będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, m$ .

- (a) **Niesymetryczną macierzą Grama**  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  nazywamy macierz

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & d_{12}^\Delta & d_{13}^\Delta & \cdots & d_{1m}^\Delta \\ & 1 & d_{23}^\Delta & \cdots & d_{2m}^\Delta \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & d_{m-1m}^\Delta \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), \quad (3.5)$$

gdzie

$$d_{ij}^\Delta = \begin{cases} -|\Delta_1^-(a_i, a_j)|, & \text{jeśli } i < j \text{ oraz istnieje krawędź ciągła } a_i \text{---} a_j, \\ |\Delta_1^+(a_i, a_j)|, & \text{jeśli } i < j \text{ oraz istnieje krawędź przerywana } a_i \text{---} \text{---} a_j. \end{cases}$$

Ponadto przyjmujemy  $d_{ij}^\Delta = 0$ , jeśli wierzchołki  $a_i, a_j$  nie są połączone krawędzią lub  $i > j$ .

### 3.1. Podstawowe definicje

(b) *Symetryczną macierzą Grama bigrafu  $\Delta$  nazywamy macierz*

$$G_\Delta = \frac{1}{2}(\check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}) \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}). \quad (3.6)$$

**Przykład 3.7.** Rozważmy następujący graf krawędziowo-dwudzielny:

$$\check{\Delta} : \bullet \text{---} \circ \text{---} \text{---} \blacksquare,$$

Wierzchołki bigrafu  $\check{\Delta}$  można ponumerować między innymi w następujący sposób

$$\Delta : \underset{1}{\bullet} \text{---} \underset{2}{\circ} \text{---} \text{---} \underset{3}{\blacksquare} \quad \text{oraz} \quad \Delta' : \underset{3}{\bullet} \text{---} \underset{1}{\circ} \text{---} \text{---} \underset{2}{\blacksquare}.$$

Przy tych numeracjach wierzchołków macierze Grama bigrafów  $\Delta, \Delta'$  są równe:

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \text{ oraz } \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Uwaga 3.8.** (a) Zauważmy, że macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wyznaczają jednoznacznie graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_m$  z ponumerowanym zbiorem wierzchołków równym  $\Delta_0 = \{1, \dots, m\}$ .

(b) Definiowanie bigrafu  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{Bigr}_m$  z ponumerowanymi wierzchołkami przez podanie niesymetrycznej macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest szczególnie wygodne do obliczeń symbolicznych algebry komputerowej, w której obliczenia wykonuje się na macierzach.

(c) W spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli podstawowymi narzędziami do analizy są wielomian charakterystyczny i spektrum macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta := -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  (definicja 3.37), które zależą od macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , więc w ogólnym przypadku zależą od numeracji wierzchołków bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  (zobacz twierdzenie 3.46(c) oraz przykład 3.50).

(d) Ponieważ w całej rozprawie przedstawiamy wyniki analizy grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , o zbiorze wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, m$ , oraz „rozdzielnymi” niesymetrycznymi macierzami Grama (uwaga (c)), to w konsekwencji uwag (a)–(c), możemy przyjąć, że dla grafów krawędziowo-dwudzielnych zbiór wierzchołków jest równy  $\Delta_0 = \{1, \dots, m\}$ .

Zauważmy, że każdy graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  bez pętli, można utożsamiać z jednolitym funkcjonałem kwadratowym  $q_\Delta : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowanym następująco (zobacz [3, 48, 64, 71, 74, 79]).

**Definicja 3.9.** Niech  $m \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną.

(a) Załóżmy, że  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{1, \dots, m\}$  oraz  $\check{G}_\Delta = [d_{ij}^\Delta] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest jego niesymetryczną macierzą Grama. **Funkcjonałem Grama bigrafu  $\Delta$  nazywamy funkcjonał całkowity  $q_\Delta : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany przez formę**

$$\begin{aligned} q_\Delta(x) = q_\Delta(x_1, \dots, x_m) &= x_1^2 + \dots + x_m^2 + \sum_{i < j} d_{ij}^\Delta x_i x_j \\ &= x \cdot \check{G}_\Delta \cdot x^{tr} = x \cdot G_\Delta \cdot x^{tr}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

gdzie  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  jest symetryczną macierzą Grama (3.6) bigrafu  $\Delta$  oraz  $x = [x_1, \dots, x_m]$  jest wektorem zmiennych  $x_1, \dots, x_m$ .

(b) Niech  $q : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jednolitym funkcjonałem całkowitym (ang. integral unit form) zdefiniowanym wzorem

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j,$$

gdzie  $q_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Graf krawędziowo-dwudzielny bez pętli  $\Delta := \mathbf{bigr}(q)$  wyznaczony przez  $q : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  definiujemy następująco:

- zbiór wierzchołków bigrafu  $\Delta := \mathbf{bigr}(q)$  jest równy  $\Delta_0 = \{1, \dots, m\}$ ,

- dla dowolnych  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  zbiór  $\Delta_1(i, j)$  składa się z dokładnie

$-q_{ij}$  krawędzi ciągłych postaci  $i \overset{\curvearrowright}{\text{---}} j$ , jeśli  $q_{ij} < 0$ ,

$q_{ij}$  krawędzi przerywanych  $i \overset{\curvearrowleft}{\text{---}} j$ , jeśli  $q_{ij} > 0$ ,

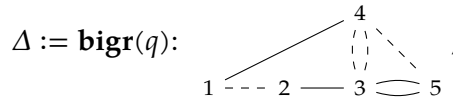
- pomiędzy wierzchołkami  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  nie ma krawędzi, jeśli  $q_{ij} = 0$  lub  $i = j$ .

Następujący przykład ilustruje definicję 3.9.

**Przykład 3.11.** Niech  $q: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie jednolitym funkcjonałem kwadratowym zdefiniowanym wzorem

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_3 + 2x_3x_4 - 2x_3x_5 + x_4x_5.$$

Graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta := \mathbf{bigr}(q)$  funkcjonału  $q: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$  ma następującą postać



a funkcjonał Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  jest równy  $q_\Delta \equiv q: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$ , tzn.  $q_\Delta(x) = q(x)$ .

## 3.2. Pierwiastki bigrafów nieujemnych

Istotną rolę w spektralnej analizie Coxetera nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli (definicja 3.12(b)) pełnią zbiory: pierwiastków z liczby całkowitej  $d \geq 1$  (3.13) oraz jądro funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.15), w sensie następującej definicji, pochodzącej z [81, Section 2].

**Definicja 3.12.** Załóżmy, że  $m \geq 1$  oraz  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, m$ . Niech  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  będzie niesymetryczną macierzą Grama (3.5) bigrafu  $\Delta$ .

- (a) Dla danej liczby całkowitej  $d \geq 1$  zbiór

$$\mathcal{R}_\Delta(d) = \mathcal{R}_{q_\Delta}(d) := \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = d\} \subseteq \mathbb{Z}^m \quad (3.13)$$

nazywamy **zbiorem pierwiastków bigrafu  $\Delta$  (funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ) z liczby  $d$** . W szczególności, **zbiorem pierwiastków bigrafu  $\Delta$  (funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ )** nazywamy zbiór

$$\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_{q_\Delta} = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 1\} \subseteq \mathbb{Z}^m, \quad (3.14)$$

natomiast **jądrem funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$**  nazywamy zbiór

$$\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m, \quad (3.15)$$

pierwiastków z liczby  $d = 0$ .

- (b) Bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  nazywamy  **dodatnim (nieujemnym)**, jeśli funkcjonał Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.10) jest dodatni (nieujemny), tzn.  $q_\Delta(v) > 0$  dla dowolnego niezerowego wektora  $v \in \mathbb{Z}^m$  (odp.  $q_\Delta(v) \geq 0$ , dla dowolnego  $v \in \mathbb{Z}^m$ ).
- (c) **Korang**  $r \geq 0$  bigrafu nieujemnego  $\Delta$  nazywamy **rangę**  $r \geq 0$  grupy wolnej  $\text{Ker } q_\Delta$ , tzn. liczbę  $r \geq 0$  elementów  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Przyjmujemy  $r = 0$ , gdy  $\text{Ker } q_\Delta = \{0\}$ .
- (d) Bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  nazywamy **głównym**, jeśli  $\Delta$  jest nieujemny korangi 1 (tzn. funkcjonał całkowity  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  jest nieujemny oraz grupa  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^m$  jest cykliczna i nieskończona).

**Uwaga 3.16.** Jeśli graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m$  jest nieujemny, to zbiór  $\text{Ker } q_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^m$  jest grupą (na podstawie [79, Proposition 2.8], zobacz też dowód lematu 3.21(b)).

W artykułach [81, Definition 2.3(b), Lemma 2.1(b)], [79, Proposition 2.8] udowodniono następujący fakt.



### 3.2. Pierwiastki bigrafów nieujemnych

**Fakt 3.17.** Załóżmy, że  $m \geq 1$  oraz  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $m \geq 1$  wierzchołkach  $\Delta_0 = \{1, \dots, m\}$ .

- (a) Bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy rzeczywista symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  jest dodatnio określona.
- (b) Bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest nieujemny korangi  $r \leq m - 1$ , wtedy i tylko wtedy, gdy rzeczywista symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - r$  nad  $\mathbb{R}$ .

Następujący przykład ilustruje definicję dodatnich oraz nieujemnych bigrafów bez pętli.

**Przykład 3.18.** (a) Rozważmy bigraf  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_2$  bez pętli o dwuelementowym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0 = \{1, 2\}$  połączonych  $d_{12}^\Delta$  krawędziami:

$$\Delta : \bullet \xrightarrow{d_{12}^\Delta} \bullet. \text{ Ponieważ } q_\Delta(x_1, x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{2}d_{12}^\Delta x_2\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}(d_{12}^\Delta)^2\right)x_2^2,$$

to bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_2$  jest nieujemnie określony wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność  $\left(1 - \frac{1}{4}(d_{12}^\Delta)^2\right) \geq 0$ , która jest spełniona dla  $d_{12}^\Delta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Ponadto, bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_2$  jest spójny, jeśli  $d_{12}^\Delta \neq 0$ . Zauważmy, że bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_2$  jest dodatni, jeśli zachodzi nierówność  $\left(1 - \frac{1}{4}(d_{12}^\Delta)^2\right) > 0$ , która jest spełniona dla  $d_{12}^\Delta \in \{-1, 0, 1\}$ .

- (b) Niech  $n = 2$  oraz niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_2$  będzie bigrafem

$$\Delta : \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet, \text{ gdzie } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{oraz} \quad G_\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right).$$

Analizując postać kanoniczną funkcjonału kwadratowego  $q_\Delta: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowanego wzorem  $q_\Delta(x) = \frac{1}{4}(2x_1 - 3x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2$ , łatwo sprawdzić, że bigraf  $\Delta$  nie jest nieujemnie określony.

**Uwaga 3.19.** Ponieważ każdy podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta'$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  jest nieujemny, zatem z rozważań przedstawionych w przykładzie 3.18 wynika, że jeśli bigraf  $\Delta$  jest nieujemny bez pętli, to  $d_{ij}^\Delta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Innymi słowy:

- jeśli bigraf  $\Delta$  jest nieujemny bez pętli, to dowolne dwa incydentne wierzchołki  $a, b \in \Delta_0$  są połączone jedną lub dwiema krawędziami (ciągłymi lub przerywanymi),
- jeśli bigraf  $\Delta$  jest dodatni bez pętli, to dowolne dwa wierzchołki  $a, b \in \Delta_0$  są połączone co najwyżej jedną krawędzią (ciągłą lub przerywaną).

**Uwaga 3.20.** Zbiory pierwiastków bigrafów dodatnich bez pętli pełnią istotną rolę w analizie spektralnej Coxetera. W artykułach [25–27] oraz [55, 56] udowodniono, że jeśli  $\Delta$  jest dodatnim spójnym bigrafem bez pętli (dodatnim spójnym bigrafem Cox-regularnym w sensie [55, 56]), to zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  (odpowiednio, zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta^\bullet$  zdefiniowany w [55]) jest zredukowanym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki [14].

W lemacie 3.21(a) przypominamy z [80, Proposition 4.1(a)] oraz [74, str. 3], że zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta(d)$  z całkowitej liczby  $d \geq 1$  dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest skończony. W dowodzie używamy argumentów Drozda [22], tj. podajemy ograniczenie na wartość każdej współrzędnej  $v_i$  wektora  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathcal{R}_\Delta(d) \subset \mathbb{Z}^m$ .

Aby pokazać, że zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  jest nieskończony w przypadku spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ , które nie są dodatnie (lemat 3.21(b)), korzystamy z faktu, że jądro  $\text{Ker } q_\Delta \neq \{0\}$  funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  korangi  $r \geq 1$  jest nieskończoną podgrupą  $\mathbb{Z}^m$ , zobacz [79, Proposition 2.8].

**Lemat 3.21.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie nieujemnym spójnym bigrafem bez pętli.

- (a) Jeśli  $\Delta$  jest dodatni, to zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta(d)$  z całkowitej liczby  $d \geq 1$  jest skończony.
- (b) Jeśli  $\Delta$  nie jest dodatni, to jądro  $\text{Ker } q_\Delta$  funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  korangi  $r \geq 1$  jest nieskończoną podgrupą  $\mathbb{Z}^m$  oraz zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^m$  jest nieskończony.

*Dowód.* (a) Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie spójnym dodatnim bigrafem bez pętli. Rozważmy funkcjonal  $q_\Delta : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.10) jako funkcję ciągłą  $q_\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , która dla dowolnego niezerowego wektora przyjmuje wartości dodatnie (zobacz [1, 3.4. Proposition]):

$$q_\Delta(v) > 0 \quad \text{dla } 0 \neq v \in \mathbb{R}^m.$$

Ponieważ  $(m-1)$ -wymiarowa sfera  $\mathcal{S}^{m-1} := \{u \in \mathbb{R}^m; \|u\| = 1\}$  w przestrzeni Euklidesa  $\mathbb{R}^m$  jest zbiorem zwartym, to istnieje punkt  $v_0 \in \mathcal{S}^{m-1}$ , na którym  $q_\Delta|_{\mathcal{S}^{m-1}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  osiąga kres dolny, tzn.  $\inf q_\Delta(\mathcal{S}^{m-1}) = q_\Delta(v_0) > 0$ .

Ustalmy liczbę całkowitą  $d \geq 1$  oraz dowolny wektor  $v := [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  taki, że  $q_\Delta(v) = d$ . Zauważmy, że  $\|v\| > 0$  oraz norma wektora  $\frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{R}^m$  jest równa 1, więc  $\frac{v}{\|v\|} \in \mathcal{S}^{m-1}$  i w konsekwencji otrzymujemy nierówność

$$0 < q_\Delta(v_0) := \inf q_\Delta(\mathcal{S}^{m-1}) \leq q_\Delta\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot q_\Delta(v) = \frac{d}{\|v\|^2}, \quad (3.22)$$

z których wynika następujące ograniczenie na wartości  $v_i$  współrzędnych  $v \in \mathcal{R}_\Delta(d)$

$$|v_i| \leq \|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2} \leq \sqrt{\frac{d}{q_\Delta(v_0)}}, \quad \text{dla } 1 \leq i \leq m. \quad (3.23)$$

Ponieważ współrzędne  $v_i$  wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta(d) = \{u \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(u) = d\}$  są całkowite, to otrzymujemy następujące nierówności

$$-\left\lceil \sqrt{\frac{d}{q_\Delta(v_0)}} \right\rceil \leq v_i \leq \left\lceil \sqrt{\frac{d}{q_\Delta(v_0)}} \right\rceil,$$

gdzie  $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$  jest częścią całkowitą liczby  $a \in \mathbb{R}$ . Stąd wynika, że zbiór pierwiastków

$$\mathcal{R}_\Delta(d) \subseteq \left\{ -\left\lceil \sqrt{\frac{d}{q_\Delta(v_0)}} \right\rceil, \dots, \left\lceil \sqrt{\frac{d}{q_\Delta(v_0)}} \right\rceil \right\}^m \subset \mathbb{Z}^m \quad (3.24)$$

z całkowitej liczby  $d \geq 1$  dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest skończony i jego moc jest ograniczona przez

$$|\mathcal{R}_\Delta(d)| \leq \left( 2 \cdot \left\lceil \sqrt{\frac{d}{q_\Delta(v_0)}} \right\rceil + 1 \right)^m - 1. \quad (3.25)$$

(b) Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli, który nie jest dodatni, tzn.  $\text{Ker } q_\Delta \neq \{0\}$ . Przypominamy (zobacz [79, Proposition 2.8(b)]), że prawdziwa jest równość

$$h \cdot G_\Delta = 0 \quad \text{dla dowolnego } h \in \text{Ker } q_\Delta. \quad (3.26)$$

Stąd dla dowolnych  $h, h' \in \text{Ker } q_\Delta$  oraz  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}$  otrzymujemy następującą równość

$$\begin{aligned} q_\Delta(\lambda h + \lambda' h') &= (\lambda h + \lambda' h') \cdot G_\Delta \cdot (\lambda h + \lambda' h')^{tr} = \\ &= \lambda^2 h \cdot G_\Delta \cdot h^{tr} + (\lambda')^2 h' \cdot G_\Delta \cdot (h')^{tr} + \lambda \lambda' h' \cdot G_\Delta \cdot h^{tr} + \lambda \lambda' h \cdot G_\Delta \cdot (h')^{tr} = \\ &= 0, \end{aligned}$$

która dowodzi, że zbiór  $\text{Ker } q_\Delta$  jest nieskończoną podgrupą grupy  $\mathbb{Z}^m$ .

Ustalmy wektory  $h \in \text{Ker } q_\Delta$  oraz  $v \in \mathcal{R}_\Delta$ . Pokażemy, że wektor  $v + h$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta$ . Zauważmy, że prawdziwa jest równość  $h \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = v \cdot G_\Delta \cdot h^{tr}$  (ponieważ macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  jest symetryczna) i w konsekwencji otrzymujemy

$$q_\Delta(v + h) = (v + h) \cdot G_\Delta \cdot (v + h)^{tr} = v \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} + h \cdot G_\Delta \cdot h^{tr} + 2 \cdot h \cdot G_\Delta \cdot v^{tr} = 1. \quad (3.27)$$

Stąd zbiór  $\mathcal{R}_\Delta$  zawiera nieskończony podzbiór  $v + \text{Ker } q_\Delta$ , więc jest nieskończony.  $\square$

W przypadku zbioru pierwiastków z jedyńki  $\mathcal{R}_\Delta := \{u \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(u) = 1\}$  dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{Bigr}_m$  w [63, Corollary 2.8] można pokazać więcej: współrzędne  $v_i$  pierwiastków  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathcal{R}_\Delta$  dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{Bigr}_m$  (dodatnio określonego funkcjonału  $q_\Delta : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ) są ograniczone przez liczby  $-6$  oraz  $6$ , tj.  $-6 \leq v_i \leq 6$  dla dowolnego pierwiastka  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathcal{R}_\Delta$ , gdzie  $1 \leq i \leq m$ .

**Twierdzenie 3.28.** Niech  $m \geq 1$  oraz  $q : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie dodatnim funkcjonałem kwadratowym zdefiniowanym formą kwadratową  $q(x) = q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  postaci

$$q(x) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{mm}x_m^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_i x_j, \quad \text{gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (3.29)$$

Jeśli wektor  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  jest pierwiastkiem funkcjonału  $q : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ , tj.  $q(v) = 1$ , to

$$-6 \leq v_i \leq 6 \quad \text{dla } 1 \leq i \leq m$$

*Dowód.* Zobacz [63, Corollary 2.8].  $\square$

**Uwaga 3.30.** Dowód lematu 3.21(a) wraz z ograniczeniami przedstawionymi w twierdzeniu 3.28 można wykorzystać do zbudowania algorytmu umożliwiającego wyznaczenie zbioru pierwiastków spójnych dodatnich bigrafów bez pętli, zobacz [80, Algorithm 4.2]. Konstrukcję algorytmu obliczającego zbiór pierwiastków spójnego dodatniego bigrafu bez pętli omawiamy w podrozdziale A.2.

### 3.3. Klasyfikacja grafów nieujemnych

W następującym twierdzeniu przypominamy z [81] klasyfikację wszystkich nieujemnych grafów (równoważnie: bigrafów bez przerywanych krawędzi) bez pętli. W szczególności, z twierdzenia 3.31 wynika, że nie istnieją grafy nieujemne korangi  $r \geq 2$  bez pętli (zobacz twierdzenie 3.36).

**Twierdzenie 3.31.** Niech  $D = (D_0, D_1) \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie spójnym bigrafem bez pętli i bez przerywanych krawędzi, tzn.  $D = (D_0, D_1)$  jest spójnym grafem bez pętli.

- (a) Graf  $D$  jest nieujemny korangi  $r = 0$  (tzn. jest dodatni) wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednym z jednorodnych diagramów Dynkina  $A_m, m \geq 1, D_m, m \geq 4, E_6, E_7, E_8$  (tabela 3.32).
- (b) Graf  $D$  jest nieujemny korangi  $r \geq 1$  (tzn. jest nieujemny, ale nie jest dodatni), wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednym z jednorodnych diagramów Euklidesa  $\tilde{A}_{m-1}, m \geq 2, \tilde{D}_{m-1}, m \geq 5, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$  przedstawionych w tabeli 3.33.

*Dowód.* Ponieważ w grafie  $D = (D_0, D_1) \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , nie ma krawędzi przerywanych, więc funkcjonal kwadratowy  $q_D : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.10) można utożsamić z funkcjonalem kołczanu w sensie definicji [1, Proposition VII.4]. Stąd dowód wynika z [1, Proposition VII.4.5]. □

TABELA 3.32. JEDNORODNE DIAGRAMY DYNKINA

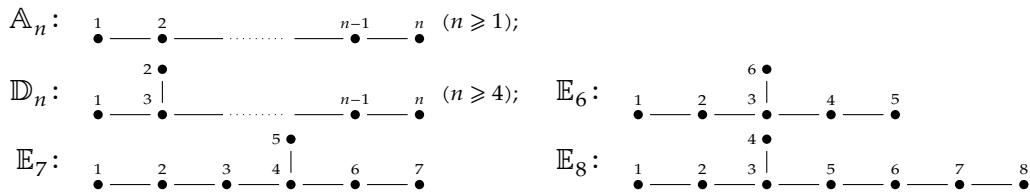
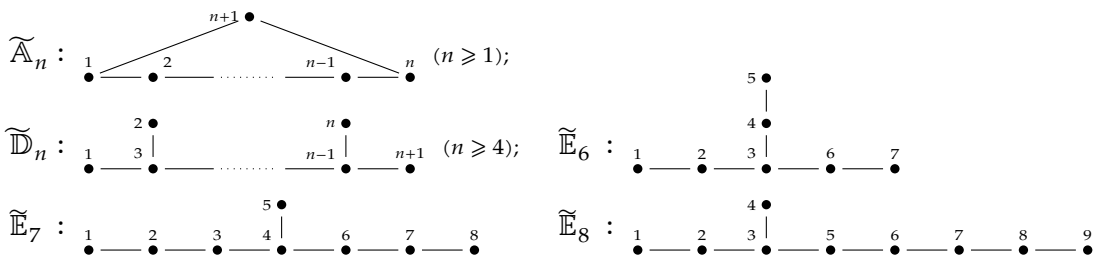


TABELA 3.33. JEDNORODNE DIAGRAMY EUKLIDESA



**Uwaga 3.34.** (a) Jeśli  $\tilde{D}_m \in \{\tilde{A}_m, m \geq 1, \tilde{D}_m, m \geq 4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$  jest jednym z jednorodnych diagramów Euklidesa, to  $\tilde{D}_m$  jest rozszerzeniem o jeden wierzchołek odpowiedniego jednorodnego diagramu Dynkina  $D_m \in \{A_m, m \geq 1, D_m, m \geq 4, E_6, E_7, E_8\}$ . Stąd jednorodne diagramy Euklidesa nazywane są jednorodnymi rozszerzonymi diagramami Dynkina, zobacz [51, 78].

(b) W niniejszej dysertacji używamy następującej konwencji oznaczeń: przez  $D_m$  rozumiemy jednorodny diagram Dynkina o  $m \geq 1$  wierzchołkach, natomiast przez  $\tilde{D}_m$  rozumiemy jednorodny diagram Euklidesa o  $m + 1 \geq 2$  wierzchołkach będący rozszerzeniem o jeden wierzchołek grafu  $D_m$  (tak jak w tabeli 3.33).

(c) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, w niniejszej dysertacji, zamiast pisać: jednorodny diagram Dynkina (Euklidesa), używamy skróconego określenia: diagramy Dynkina (Euklidesa).

**Twierdzenie 3.35.** Niech  $D_m \in \{\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  będzie jednorodnym diagramem Dynkina o  $m \geq 1$  wierzchołkach ponumerowanych jak w tabeli 3.32.

(a) Liczba elementów  $|\mathcal{R}_{D_m}|$  zbioru pierwiastków  $\mathcal{R}_{D_m}$  bigrafu  $D_m$  jest równa

| $D_m$                 | $\mathbb{A}_m, m \geq 1$ | $\mathbb{D}_m, m \geq 4$  | $\mathbb{E}_6$ | $\mathbb{E}_7$ | $\mathbb{E}_8$ |
|-----------------------|--------------------------|---------------------------|----------------|----------------|----------------|
| $ \mathcal{R}_{D_m} $ | $m \cdot (m + 1)$        | $2 \cdot m \cdot (m - 1)$ | 72             | 126            | 240            |

(b) Maksymalny<sup>2</sup> dodatni pierwiastek  $\mathbf{u}_{D_m} \in \mathcal{R}_{D_m} \subset \mathbb{Z}^m$  bigrafu  $D_m$  jest równy odpowiednio

$$\mathbf{u}_{D_m} \in \left\{ 11 \dots 11 ; 1\frac{1}{2} \dots 21 ; 12\frac{2}{3}21 ; 123\frac{2}{4}32 ; 24\frac{3}{6}5432 \right\},$$

gdzie wektory  $\mathbf{u}_{D_m} \in \mathbb{Z}^m$  są przedstawione w formie graficznej odpowiadającej kształtowi bigrafu  $D_m$ .

*Dowód.* Wszystkie pierwiastki funkcjonału Grama  $q_{D_m} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.10) jednorodnego diagramu Dynkina  $D_m$  przedstawione są w monografii [14], zobacz również [74].  $\square$

**Twierdzenie 3.36.** Niech  $\tilde{D}_m \in \{\tilde{\mathbb{A}}_m, m \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_m, m \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$  będzie jednorodnym diagramem Euklidesa o  $m + 1 \geq 2$  wierzchołkach ponumerowanych jak w tabeli 3.33. Bigraf  $\tilde{D}_m$  jest główny oraz wektor  $\mathbf{h}_{\tilde{D}_m} \in \mathbb{Z}^{m+1}$  generujący grupę cykliczną  $\text{Ker } q_{\tilde{D}_m} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\tilde{D}_m}$  ma następującą postać

$$\mathbf{h}_{\tilde{D}_m} \in \left\{ 11 \overset{1}{\dots} 11 ; 1\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}1 ; 12\frac{2}{3}21 ; 123\frac{2}{4}321 ; 24\frac{3}{6}54321 \right\}.$$

*Dowód.* Teza wynika z przedstawienia formy kwadratowej  $q_{\tilde{D}_m}(x)$  definiującej funkcjonał Grama  $q_{\tilde{D}_m} : \mathbb{Z}^{m+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\tilde{D}_m$  w postaci kanonicznej, zobacz [1, Lemma VII.4.2]. Przykładowo, postać kanoniczna funkcjonału Grama bigrafu  $\tilde{\mathbb{D}}_m$  jest następująca:

$$q_{\tilde{\mathbb{D}}_m}(x) = \frac{1}{4}(2x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{4}(2x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_{m-1} - x_m - x_{m+1})^2 + \frac{1}{2}(x_m - x_{m+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{m-2} (x_i - x_{i+1})^2.$$

Stąd łatwo wynika równość  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{D}}_m} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\tilde{\mathbb{D}}_m}$ .  $\square$

### 3.4. Elementy spektralnej analizy Coxetera bigrafów

Podstawowymi narzędziami używanymi w spektralnej klasyfikacji Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych są transformacja Coxetera, wielomian i spektrum Coxetera, a także liczby Coxetera, wprowadzone w artykułach [79–81].

**Definicja 3.37.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m$  będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli,  $\Delta_0 = \{a_1, \dots, a_m\}$  zbiorem wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi  $1, \dots, m$ , gdzie  $m \geq 1$ . Niech  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  będzie niesymetryczną macierzą Grama bigrafu  $\Delta$  (3.5).

(a) **Macierzą Coxetera bigrafu  $\Delta$**  nazywamy macierz  $\mathbb{Z}$ -odwracalną

$$\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}) \text{ o wyznaczniku } (-1)^m.$$

(b) **Transformacją Coxetera bigrafu  $\Delta$**  nazywamy funkcję liniową  $\Phi_\Delta : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  zdefiniowaną wzorem

$$\Phi_\Delta(v) = v \cdot \text{Cox}_\Delta,$$

dla każdego wektora  $v \in \mathbb{Z}^m$ .

<sup>2</sup>Wektor  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  nazywamy **maksymalnym w zbiorze  $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^m$** , jeśli  $v_i \geq w_i$  dla każdego  $w = [w_1, \dots, w_m] \in \mathcal{R}$ .

### 3.4. Elementy spektralnej analizy Coxetera bigrafów

(c) **Wielomianem Coxetera bigrafu**  $\Delta$  nazywamy wielomian charakterystyczny

$$\text{cox}_\Delta(t) := \det(tE - \text{Cox}_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$$

macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta$ .

(d) **Spektrum Coxetera bigrafu**  $\Delta$  nazywamy zbiór  $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  wszystkich  $m$  zespolonych wartości własnych macierzy Coxetera  $\text{Cox}_\Delta$ ; równoważnie zbiór wszystkich  $m$  zespolonych pierwiastków (wraz z krotnościami) wielomianu Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  bigrafu  $\Delta$ .

(e) **Liczbą Coxetera**  $\mathbf{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  nazywamy<sup>3</sup> minimalną liczbę naturalną  $s \geq 1$  taką, że  $\Phi_\Delta^s(v) = v$  dla każdego  $v \in \mathbb{Z}^m$ . Jeśli taka liczba nie istnieje, to przyjmujemy  $\mathbf{c}_\Delta = \infty$ .

(f) **Zredukowaną liczbą Coxetera**  $\check{\mathbf{c}}_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  nazywamy<sup>4</sup> skończoną minimalną liczbę naturalną  $1 \leq s < \infty$  taką, że  $\Phi_\Delta^s(v) - v \in \text{Ker } q_\Delta$  dla każdego  $v \in \mathbb{Z}^m$ .

**Uwaga 3.38.** Kombinatoryczny dowód twierdzenia, że zredukowana liczba Coxetera  $\check{\mathbf{c}}_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  istnieje i jest skończona (twierdzenie A.43), przedstawiamy w podrozdziale A.4. Zastosowane tam argumenty są analogiczne do przedstawionych w ogólnym i abstrakcyjnym dowodzie [79, Theorem 4.7].

Podane definicje ilustrujemy na następujących przykładach.

**Przykład 3.39.** (a) Jeśli  $\Delta$  jest dodatnim krawędziowo-dwudzielnym grafem

$$\Delta : \begin{array}{c} 4 \text{ --- } 3 \\ \vdots \quad \diagdown \quad \vdots \\ 1 \text{ --- } 2 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \vdots \\ \vdots \\ 7 \end{array}, \text{ to } \check{\mathbf{G}}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

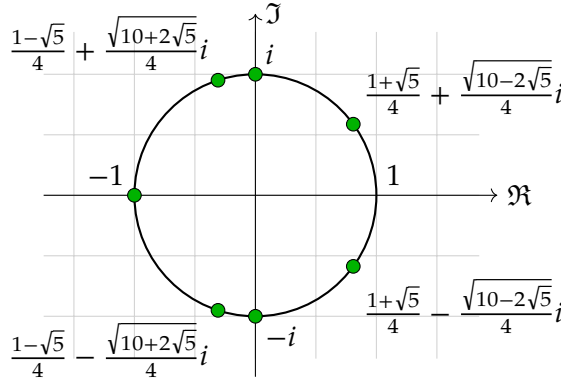
$$\begin{aligned} q_\Delta(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_5 + \\ &\quad - x_3x_4 - x_3x_5 - x_5x_6 + x_5x_7 - x_6x_7 = \\ &= \frac{1}{4} (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5)^2 + \frac{1}{6} (2x_3 - x_4 - x_5)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (x_5 - x_6 + x_7)^2 + \frac{1}{2}x_4^2 + \frac{1}{2}x_6^2 + \frac{1}{2}x_7^2, \end{aligned}$$

transformacja Coxetera  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}^7$  dla każdego  $v \in \mathbb{Z}^7$  ma postać

$$\Phi_\Delta(v) = [v_1 + v_4 - v_6, v_1 + v_4, v_3 - v_4 - v_6, -v_1 + v_3 - v_4, v_2 + v_3 - v_6, -v_7, -v_5 + v_6 - v_7],$$

liczby Coxetera są równe  $\mathbf{c}_\Delta = \check{\mathbf{c}}_\Delta = 20$ , wielomian Coxetera jest równy

$$\text{cox}_\Delta(t) = t^7 + t^5 + t^2 + 1 = (t+1)(t^2+1)(t^4-t^3+t^2-t+1), \text{ oraz}$$



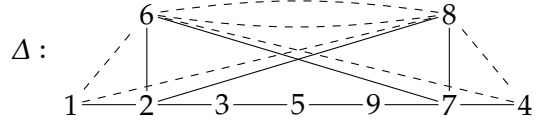
$$\text{specc}_\Delta = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, -1, -i, i \right\}.$$

<sup>3</sup>Liczbę Coxetera bigrafu  $\Delta$  definiuje się równoważnie jako minimalną liczbę naturalną  $\mathbf{c}_\Delta \geq 1$  taką, że  $\text{Cox}_\Delta^{\mathbf{c}_\Delta} = E$ , zobacz [81, Definition 2.3 (c2)].

<sup>4</sup>Zredukowaną liczbę Coxetera bigrafu  $\Delta$  można zdefiniować równoważnie jako skończoną minimalną liczbę naturalną  $1 \leq s < \infty$  taką, że wiersze macierzy  $\text{Cox}_\Delta^s - E$  należą do jądra  $\text{Ker } q_\Delta$  funkcjonu  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Zwracamy szczególną uwagę na fakt, że spektrum Coxetera  $\text{spec}_{\Delta}$  jest podzbiorem okręgu jednostkowego  $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$  i składa się z pierwiastków z jedyńki (wraz z krotnościami) zaznaczonych na wykresie zielonymi punktami, aczkolwiek  $1 \notin \text{spec}_{\Delta}$ , zobacz fakt 3.41. Ponadto liczba Coxetera jest skończona i jest równa zredukowanej liczbie Coxetera, zobacz lemat 3.43.

(b) Jeśli  $\Delta$  jest następującym krawędziowo-dwudzielnym grafem



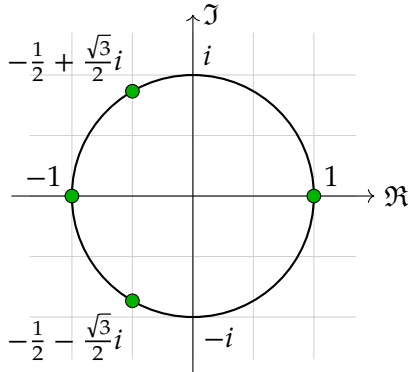
funkcjonał Grama  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^9 \rightarrow \mathbb{Z}$  ma następującą postać kanoniczną

$$\begin{aligned} q_{\Delta}(x) = & \frac{1}{4} (2x_1 - x_2 + x_6 + x_8)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 - 2x_3 - x_6 - x_8)^2 + \frac{1}{24} (4x_3 - 3x_5 - x_6 - x_8)^2 + \\ & + \frac{1}{4} (2x_4 + x_6 - x_7 + x_8)^2 + \frac{1}{40} (5x_5 - x_6 - x_8 - 4x_9)^2 + \\ & + \frac{1}{140} (7x_6 - 5x_7 + 7x_8 - 2x_9)^2 + \frac{4}{7} (x_7 - x_9)^2, \end{aligned}$$

a niesymetryczna macierz Grama oraz macierz Coxetera są następujące

$$\check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd łatwo sprawdzić, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa,  $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(1)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(2)}$ , gdzie  $\mathbf{h}^{(1)} = [0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]$ ,  $\mathbf{h}^{(2)} = [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1]$ , spektrum Coxetera  $\text{spec}_{\Delta}$  jest podzbiorem okręgu jednostkowego  $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$  i składa się z pierwiastków z jedyńki (wraz z krotnościami) zaznaczonych na wykresie zielonymi punktami, oraz



$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\Delta} &= \infty, \check{\mathbf{c}}_{\Delta} = 6, \\ \text{cox}_{\Delta}(t) &= t^9 - t^8 - t^7 - t^6 + 2t^5 + 2t^4 - t^3 - t^2 - t + 1 \\ &= (t-1)^4 (t+1) (t^2 + t + 1)^2, \\ \text{spec}_{\Delta} &= \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \right. \\ & \quad \left. -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, 1, 1, 1, 1 \right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $1 \in \text{spec}_{\Delta}$  w przeciwieństwie do przypadku (a), zobacz fakt 3.41.

Przedstawimy teraz te własności transformacji Coxetera, które odgrywają istotną rolę w konstrukcji  $\Phi_{\Delta}$ -sieciovych geometrii pierwiastków.

**Lemat 3.40.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ ,  $m \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz  $\Phi_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  niech będzie transformacją Coxetera.

- $\Phi_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  jest automorfizmem liniowym, gdzie funkcja  $\Phi_{\Delta}^{-1}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  zdefiniowana jest wzorem  $\Phi_{\Delta}^{-1}(v) = v \cdot \text{Cox}_{\Delta}^{-1}$  dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{Z}^m$ .
- $q_{\Delta}(\Phi_{\Delta}(v)) = q_{\Delta}(v)$  dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{Z}^m$ .
- $\Phi_{\Delta}(h) = h$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $h \in \text{Ker } q_{\Delta}$ .



### 3.4. Elementy spektralnej analizy Coxetera bigrafów

- (d) Zbiór  $\mathcal{R}_\Delta(d)$  jest  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczy, tzn.  $\Phi_\Delta(\mathcal{R}_\Delta(d)) = \mathcal{R}_\Delta(d)$ , dla dowolnej całkowitej liczby  $d \geq 1$ .
- (e)  $\Phi_\Delta(\mathcal{R}_\Delta) = \mathcal{R}_\Delta$ .

*Dowód.* Zobacz [80, Proposition 4.3] oraz [79, Proposition 2.8(b)].  $\square$

W odróżnieniu od rzeczywistego spektrum  $\text{spec}_\Delta \subseteq \mathbb{R}$  grafu  $\Delta$  rozważanego w klasycznej teorii grafów, rozpatrywane przez nas spektrum Coxetera  $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli złożone jest z liczb zespolonych. Co więcej,  $\text{specc}_\Delta \subseteq \mathbb{C}$  jest podzbiorem okręgu jednostkowego i składa się z zespolonych pierwiastków z jedyńki (zobacz przykład 3.39). Dowód tego faktu można znaleźć pracach [3, 81].

**Fakt 3.41.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ ,  $m \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli.

- (a) Spektrum Coxetera  $\text{specc}_\Delta$  bigrafu nieujemnego  $\Delta$  jest podzbiorem okręgu jednostkowego  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$  oraz dowolny  $z \in \text{specc}_\Delta$  jest pierwiastkiem z jedyńki.
- (b) Bigraf nieujemny  $\Delta$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy  $1 \notin \text{specc}_\Delta$ .

W lemacie 3.43 opisujemy pewne własności liczby Coxetera oraz zredukowanej liczby Coxetera nieujemnego bigrafu bez pętli.

**Uwaga 3.42.** (a) Lemat 3.43 wraz z jego dowodem posłużą nam w następnym podrozdziale do zbudowania kombinatorycznych algorytmów umożliwiających obliczanie liczby Coxetera oraz zredukowanej liczby Coxetera.

(b) Kombinatoryczne argumenty użyte w dowodzie są niezbędnym elementem do oszacowania złożoności obliczeniowej zaproponowanych algorytmów, zobacz twierdzenie A.34 oraz twierdzenie A.43.

(c) Argumenty zastosowane przez nas w dowodzie lematu 3.43 są analogiczne do przedstawionych w [79, Theorem 4.7]. Jednak dowód lematu 3.43 ma charakter kombinatoryczny, a dowód [79, Theorem 4.7] ma charakter ogólny i abstrakcyjny.

**Lemat 3.43.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ ,  $m \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli.

- (a) Jeśli  $\Delta$  jest dodatni, to liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  jest skończona.
- (b) Liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy jest równa zredukowanej liczbie Coxetera  $\check{\mathbf{c}}_\Delta$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $m \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli. Aby udowodnić (a) załóżmy, że bigraf  $\Delta$  jest dodatni.

Ponieważ zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  jest  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczy (lemat 3.40), to dla dowolnego  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  oraz  $i \in \mathbb{Z}$  otrzymujemy

$$\Phi_\Delta^i(v) \in \mathcal{R}_\Delta. \quad (3.44)$$

Ponieważ zbiór  $\mathcal{R}_\Delta$  jest skończony (lemat 3.21), więc istnieją liczby całkowite  $1 \leq s < r$ , takie, że w ciągu

$$v, \Phi_\Delta(v), \Phi_\Delta^2(v), \dots, \Phi_\Delta^s(v), \dots, \Phi_\Delta^r(v), \dots$$

zachodzi równość  $\Phi_\Delta^s(v) = \Phi_\Delta^r(v)$ . Transformacja Coxetera  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  jest automorfizmem grup, więc funkcja  $\Phi_\Delta^{-1}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  jest automorfizmem i stąd prawdziwe są równoważności

$$\Phi_\Delta^s(v) = \Phi_\Delta^r(v) \Leftrightarrow \Phi_\Delta^{-s}(\Phi_\Delta^s(v)) = \Phi_\Delta^{-s}(\Phi_\Delta^r(v)) \Leftrightarrow v = \Phi_\Delta^{r-s}(v).$$

W konsekwencji dla dowolnego  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  istnieje liczba całkowita  $s_v \geq 1$  taka, że  $\Phi_\Delta^{s_v}(v) = v$  oraz  $s_v \leq |\mathcal{R}_\Delta| < \infty$  (3.25). Ponieważ bigraf  $\Delta$  nie ma pętli, więc wektory jednostkowe  $e_1 \in \mathbb{Z}^m, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m$  są pierwiastkami funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ . Stąd istnieją liczby całkowite  $s_1, \dots, s_m$  ograniczone przez liczbę  $|\mathcal{R}_\Delta| < \infty$  (3.25) takie, że

$$\Phi_\Delta^{s_1}(e_1) = e_1, \dots, \Phi_\Delta^{s_m}(e_m) = e_m.$$

Niech odpowiednio  $s_1, \dots, s_m$  będą minimalnymi liczbami o tej własności. Ponieważ dowolny wektor  $v \in \mathbb{Z}^m$  ma przedstawienie

$$v = [v_1, \dots, v_m] = v_1 \cdot e_1 + \dots + v_m \cdot e_m,$$

to łatwo sprawdzić, że  $\Phi_\Delta^s(v) = v$ , gdzie  $s = \text{NWW}(s_1, \dots, s_m)$ . Zatem liczba Coxetera jest skończona i równa  $c_\Delta = s$ .

(b) Teza wynika wprost z definicji liczby Coxetera oraz zredukowanej liczby Coxetera, zobacz też [98, Theorem 2.11].  $\square$

Przedstawimy teraz wielomiany Coxetera oraz liczby Coxetera jednorodnych diagramów Dynkina. Będziemy z nich korzystać w dalszej części rozprawy w spektralnej analizie Coxetera nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli.

**Twierdzenie 3.45.** *Jeśli  $D_m$  jest jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w tabeli 3.32, to wielomian Coxetera  $\text{cox}_{D_m}(t)$  oraz liczba Coxetera  $c_{D_m}$  nie zależą od numeracji wierzchołków i są przedstawione w następującej tabeli*

| $D_m$          | $\text{cox}_{D_m}(t)$                 | $c_{D_m}$  |
|----------------|---------------------------------------|------------|
| $\mathbb{A}_m$ | $t^m + t^{m-1} + \dots + t^2 + t + 1$ | $m + 1$    |
| $\mathbb{D}_m$ | $t^m + t^{m-1} + t + 1$               | $2(m - 1)$ |
| $\mathbb{E}_6$ | $t^6 + t^5 - t^3 + t + 1$             | 12         |
| $\mathbb{E}_7$ | $t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1$       | 18         |
| $\mathbb{E}_8$ | $t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$ | 30         |

*Dowód.* Przedstawione formuły zostały udowodnione w [81, Proposition 2.2–2.3].  $\square$

W przeciwieństwie do wielomianu charakterystycznego grafu (zobacz monografia [18, Chapter 1]), wielomian Coxetera bigrafu w ogólnym przypadku zależy od numeracji wierzchołków. W następującym twierdzeniu przedstawiamy wszystkie możliwe postaci wielomianu Coxetera grafu Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_m$ ,  $m \geq 1$ , w zależności od numeracji. Postaci te, wraz z wielomianami Coxetera jednorodnych diagramów Dynkina  $\mathbb{D}_m$ ,  $m \geq 4$ ,  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$ ,  $\mathbb{E}_8$ , będą wykorzystywane w dalszej części rozprawy w spektralnej analizie Coxetera nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli.

**Twierdzenie 3.46.** (a) *Jeśli  $\tilde{\mathbb{D}}_m$  jest jednym z diagramów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{D}}_m$ ,  $m \geq 4$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_6$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_8$  przedstawionych w tabeli 3.33 (o  $m + 1$  wierzchołkach), to liczba Coxetera  $c_{\tilde{\mathbb{D}}_m}$  jest nieskończona oraz wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_m}(t)$  jest przedstawiony w następującej tabeli*

| $\tilde{\mathbb{D}}_m$ | $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{D}}_m}(t)$                  |
|------------------------|---|
| $\tilde{\mathbb{D}}_m$ | $t^{m+1} + t^m - t^{m-1} - t^{m-2} - t^3 - t^2 + t + 1$ |
| $\tilde{\mathbb{E}}_6$ | $t^7 + t^6 - 2t^4 - 2t^3 + t + 1$                       |
| $\tilde{\mathbb{E}}_7$ | $t^8 + t^7 - t^5 - 2t^4 - t^3 + t + 1$                  |
| $\tilde{\mathbb{E}}_8$ | $t^9 + t^8 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$             |

(b) *Jeśli  $\tilde{\mathbb{D}}_m = \tilde{\mathbb{A}}_m$ ,  $m \geq 1$ , to wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_m}(t)$  zależy od numeracji  $a_1, \dots, a_{m+1}$  wierzchołków bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_m$  oraz jest jednym z wielomianów*

$$F_{\tilde{\mathbb{A}}_m}^{(1)}(t), F_{\tilde{\mathbb{A}}_m}^{(2)}(t), \dots, F_{\tilde{\mathbb{A}}_m}^{(\mu_m)}(t), \text{ gdzie } \mu_m = \begin{cases} \frac{m}{2}, & \text{gdy } m \text{ jest liczbą parzystą,} \\ \frac{m+1}{2}, & \text{gdy } m + 1 \text{ jest liczbą parzystą,} \end{cases}$$

zdefiniowanych wzorem

$$F_{\tilde{\mathbb{A}}_m}^{(j)}(t) = t^{m+1} - t^{m-j+1} - t^j + 1, \text{ dla } j = 1, \dots, \mu_m. \quad (3.47)$$

W szczególności, dla  $m = 1$  bigraf  $\tilde{\mathbb{A}}_1 : \bullet \text{---} \bullet$  jest grafem Kroneckera,  $\mu_m = 1$  oraz

$$\text{cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_1}(t) = F_{\tilde{\mathbb{A}}_1}^{(1)}(t) = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2.$$





których niesymetryczne macierze Grama mają postać

$$\check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}), \quad \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}).$$

Zauważmy, że bigrafy te są spójne i nieujemne korangi dwa, ponieważ

$$q_\Delta(x) = \frac{1}{4}(2x_1 - x_3 - x_5)^2 + \frac{1}{4}(2x_2 - x_3 - x_5)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_4 - x_6)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5 - x_6)^2,$$

$$q_{\Delta'}(x) = \frac{1}{4}(2x_1 - x_2 - x_5)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_4 - x_6)^2 + \frac{1}{4}(2x_3 - x_2 - x_5)^2 + \frac{1}{2}(x_4 - x_5 - x_6)^2,$$

a stąd  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(1)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(2)}$  oraz  $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'^{(1)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'^{(2)}$ , gdzie

$$\mathbf{h}^{(1)} = [1, 1, 2, 1, 0, 1], \quad \mathbf{h}'^{(1)} = [1, 2, 1, 1, 0, 1], \text{ oraz}$$

$$\mathbf{h}^{(2)} = [0, 0, -1, 0, 1, -1], \quad \mathbf{h}'^{(2)} = [0, -1, 0, 0, 1, -1].$$

Łatwo sprawdzić, że macierz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}),$$

definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$ , tzn. prawdziwa jest równość  $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B$ . Z drugiej strony, z twierdzenia 3.53 wynika, że bigrafy te nie są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne, ponieważ  $\text{cox}_\Delta = t^6 - 2t^5 - t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t + 1 \neq \text{cox}_{\Delta'} = t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 - t + 1$  (bigrafy silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne mają ten sam wielomian Coxetera).

Następujący lemat, udowodniony w [78, 81] opisuje podstawowe własności relacji słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama grafów krawędziowo-dwudzielnych, do których to własności będziemy odwoływali się w dalszej części dysertacji.

**Lemat 3.51.** (a) Jeśli bigrafy  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  są słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentne oraz macierz  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiuje  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , tzn.  $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B$ , to przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } q_{\Delta'} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^m \xrightarrow{q_{\Delta'}} \mathbb{Z} \\ \check{h}_B \downarrow \cong & & h_B \downarrow \cong \nearrow q_\Delta \\ \text{Ker } q_\Delta & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^m \end{array} \quad (3.52)$$

gdzie  $h_B : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  jest izomorfizmem grup zdefiniowanym wzorem  $h_B(v) = v \cdot B^{tr}$ , dla  $v \in \mathbb{Z}^m$ .

(b) Jeśli przemienny jest diagram (3.52), gdzie  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$ , to

$$G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B \text{ oraz } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'.$$

(c) Jeśli przemienny jest diagram (3.52), to izomorfizm  $h_B : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  przeprowadza zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta'$  na zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  oraz  $|\mathcal{R}_{\Delta'}| = |\mathcal{R}_\Delta|$ .

(d) Jeśli przemienny jest diagram (3.52) oraz  $\Delta'$  jest nieujemny, to  $\Delta$  jest nieujemny oraz ograniczenie  $\check{h}_B$  izomorfizmu  $h_B : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  do podgrupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$  jest izomorfizmem grup, tj.  $\check{h}_B : \text{Ker } q_{\Delta'} \xrightarrow{\cong} \text{Ker } q_\Delta$ . Jeśli ponadto bigraf  $\Delta'$  jest korangi  $r \geq 1$ , to  $\Delta$  jest korangi  $r \geq 1$  oraz wektory  $\mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(r)}$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy wektory  $\check{h}_B(\mathbf{h}^{(1)}), \dots, \check{h}_B(\mathbf{h}^{(r)})$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ .

Silna  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama implikuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama, natomiast implikacja przeciwna na ogół nie jest prawdziwa.

### 3.6. Operatory inflacji

**Twierdzenie 3.53.** *Jeśli bigrafy  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne oraz  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , to*

- macierz  $B$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ,
- macierze  $\text{Cox}_{\Delta}, \text{Cox}_{\Delta'}$  są sprzężone przez macierz  $C = B^{tr}$ , tzn.  $\text{Cox}_{\Delta'} = C \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot C^{-1}$ ,
- $\text{cox}_{\Delta}(t) = \text{cox}_{\Delta'}(t)$ ,  $\text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'}$ ,  $\check{c}_{\Delta} = \check{c}_{\Delta'}$  oraz  $\mathbf{c}_{\Delta} = \mathbf{c}_{\Delta'}$ .

*Implikacja przeciwna nie zawsze jest prawdziwa.*

*Dowód.* Załóżmy, że  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , tzn.  $\check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B$ . Udowodnimy, że zachodzi równość  $\text{Cox}_{\Delta'} = C \cdot \text{Cox}_{\Delta} \cdot C^{-1}$ , gdzie  $C := B^{tr}$ . Z definicji macierzy Coxetera (definicja 3.37(a)) otrzymujemy:

$$\text{Cox}_{\Delta'} = -\check{G}_{\Delta'} \check{G}_{\Delta'}^{-tr} = -(B^{tr} \check{G}_{\Delta} B) (B^{tr} \check{G}_{\Delta} B)^{-tr} = -B^{tr} \check{G}_{\Delta} \check{G}_{\Delta}^{-tr} B^{-tr} = B^{tr} \text{Cox}_{\Delta} B^{-tr}.$$

Stąd łatwo wynika równość wielomianów charakterystycznych macierzy  $\text{Cox}_{\Delta'}$  oraz  $\text{Cox}_{\Delta}$  (a zatem  $\text{specc}_{\Delta} = \text{specc}_{\Delta'}$ ) oraz równość  $\mathbf{c}_{\Delta} = \mathbf{c}_{\Delta'}$ . Przykład 3.50 pokazuje, że implikacja przeciwna nie musi być prawdziwa.  $\square$

**Uwaga 3.54.** Znanymi w literaturze metodami rozwiązywania problemu wyznaczenia macierzy  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiującej słabą (silną)  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$  ( $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$ ) pomiędzy parą spójnych dodatnich (lub głównych) bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli (problem 1.5) są następujące.

- Dla słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$  spójnych bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  dodatnich oraz głównych, problem konstrukcji macierzy  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  redukuje się do wyznaczenia odpowiedniego ciągu operatorów inflacji, zobacz podrozdział 3.6.
- Dla silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$  spójnych bigrafów dodatnich  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  problem konstrukcji macierzy  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  redukuje się do problemu istnienia pewnych  $\Phi_{\Delta}, \Phi_{\Delta'}$ -sietciowych geometrii pierwiastków, zobacz [25–27, 54–56, 79–83, 85, 87] oraz podrozdział 6.2.

Pełne rozwiązanie problemu 1.5 dla relacji  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz dla nieujemnych bigrafów bez pętli podajemy w artykule [97], w szczególności rozwiązanie dla nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli podajemy w podrozdziale 5.5. Natomiast rozwiązanie względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz „małych” nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli podajemy w rozdziale 6 oraz publikacji [98].

## 3.6. Operatory inflacji

W badaniu klas równoważności grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  istotną rolę odgrywają dwa typy operatorów inflacji

$$\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta \quad \text{oraz} \quad \Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta,$$

używane w konstrukcji algorytmu inflacyjnego, zdefiniowanego w pracach [57, 67, 81, 97], zobacz również podrozdział A.5 oraz podrozdział 5.6. W tym podrozdziale przedstawiamy definicję (pochodzącą z [81, Definition 3.1]) oraz główne własności operatorów inflacji (zobacz uwaga 3.57).

Przypominamy również twierdzenie 3.64 (zobacz [57], [81, Section 3], [54, Section 6]) klasyfikujące z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama dodatnie oraz główne bigrafy bez pętli. Z twierdzenia tego korzystamy w dalszej części dysertacji.

**Definicja 3.55.** *Założmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli. Przyjmijmy następujące oznaczenie  $d_{ab}^{\Delta} := |\Delta_1^+(a, b)| - |\Delta_1^-(a, b)|$ , tj. liczba krawędzi łączących wierzchołki  $a, b \in \Delta_0$  z zachowaniem znaku.*

(a) Dla dowolnego wierzchołka  $a \in \Delta_0$  definiujemy nowy bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}_a^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  otrzymany z  $\Delta$  poprzez zamianę znaków w wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem  $a$ .

Przyporządkowanie  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$  nazywamy **inflacją bigrafu  $\Delta$  w punkcie  $a \in \Delta_0$**  lub zamianą znaków krawędzi bigrafu  $\Delta$  w wierzchołku  $a$ .<sup>5</sup>

(b) Dla dowolnej pary wierzchołków  $a, b \in \Delta_0$  połączonych przynajmniej jedną przerywaną krawędzią  $a \text{ --- } b$  (tzn.  $d_{ab}^\Delta > 0$ ) definiujemy nowy bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  otrzymany z grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta$  w następujący sposób:

- wszystkie krawędzie przerywane  $a \text{ --- } b$  w zbiorze  $\Delta_1^+(a, b)$  zamieniamy na ciągłe  $a \text{ --- } b$ , tzn.  $d_{ab}^{\Delta'} = d_{ba}^{\Delta'} := -d_{ab}^\Delta$

- dla każdego wierzchołka  $c \in \Delta_0$ , takiego, że  $a \neq c \neq b$  oraz  $\Delta_1(a, c) \neq \emptyset$ , zbiór  $\Delta_1'(b, c)$  składa się z dokładnie

$$-d_{bc}^{\Delta'} \text{ krawędzi ciągłych postaci } b \text{ --- } c, \text{ jeśli } d_{bc}^{\Delta'} < 0,$$

$$d_{bc}^{\Delta'} \text{ krawędzi przerywanych } b \text{ --- } c, \text{ jeśli } d_{bc}^{\Delta'} > 0,$$

$$\text{gdzie } d_{bc}^{\Delta'} = d_{cb}^{\Delta'} := d_{bc}^\Delta - d_{ac}^\Delta d_{ab}^\Delta,$$

- pozostałe krawędzie nie są modyfikowane.

Przyporządkowanie  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$  nazywamy **inflacją bigrafu  $\Delta$  względem pary punktów  $a, b \in \Delta_0$  połączonych krawędzią przerywaną**.

**Uwaga 3.56.** (a) Standardowe obliczenia dowodzą, że forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca funkcjonal  $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta' := \mathbf{t}_a^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  powstaje z formy  $q_\Delta(x)$  (3.10) bigrafu  $\Delta$  w wyniku podstawienia  $x_a := -x_a$ , tzn.  $q_{\Delta'}(x) := q_\Delta(x|_{x_a := -x_a})$  dla  $a \in \Delta_0$ , zobacz [81, Lemma 3.1(a)].

(b) Forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca funkcjonal  $q_{\Delta'} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta'$  powstaje z formy  $q_\Delta(x)$  (3.10) bigrafu  $\Delta := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  przez podstawienie  $x_a := x_a - d_{ab}^\Delta x_b$ , tzn.  $q_{\Delta'}(x) := q_\Delta(x|_{x_a := x_a - d_{ab}^\Delta x_b})$ , gdzie  $a, b \in \Delta_0$  są parą wierzchołków połączonych przynajmniej jedną przerywaną krawędzią, zobacz [81, Lemma 3.1(b)].

**Uwaga 3.57.** (a) Zauważmy, że Barot-de la Peña [3], von Höhne [48] oraz Ovsienko [71] rozważają operatory „inflacji”  $T_{ab}^-$  (analogicznie: „deflacji”  $T_{ab}^+$ ), które mogą prowadzić od spójnych bigrafów bez pętli do bigrafów niespójnych, zawierających pętle. Inflacje w sensie definicji 3.55 redukują spójny bigraf bez pętli do spójnego bigrafu bez pętli.

(b) W artykule [21, Section 3] stosuje się operatory „inflacji” oraz „deflacji”, zdefiniowane w terminach form kwadratowych i nazywane *transformacjami Gabrielova*. Operator „inflacji” zdefiniowany jest tam analogicznie jak w definicji 3.55.

Następujący przykład ilustruje użycie operatorów inflacji. W szczególności, w punktach (b) oraz (c) tego przykładu pokazujemy, że zazwyczaj  $\mathbf{t}_{ab}^- \Delta \neq \mathbf{t}_{ba}^- \Delta$ , dla pary punktów  $a, b \in \Delta_0$  połączonych w bigrafie  $\Delta$  krawędzią przerywaną.

**Przykład 3.58.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_4$  będzie następującym bigrafem bez pętli

$$\Delta : \begin{array}{c} 2 \text{ --- } 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \text{ --- } 3 \end{array}, \text{ oraz } q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4.$$

(a) Inflacją bigrafu  $\Delta$  w punkcie 1 jest następujące przyporządkowanie

$$\Delta : \begin{array}{c} 2 \text{ --- } 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \text{ --- } 3 \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_1^-} \Delta' := \mathbf{t}_1^- \Delta : \begin{array}{c} 2 \text{ --- } 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \text{ --- } 3 \end{array},$$

<sup>5</sup>W teorii grafów oznakowanych, operacja inflacji w punkcie znana jest pod nazwą „switching”. Można pokazać, że jednym z jej niezmienników jest własność zbalansowania w grafach oznakowanych, zobacz [101].

### 3.6. Operatory inflacji

gdzie w bigrafie  $\Delta'$  niebieskim kolorem oraz pogrubioną krawędzią wyróżniono zmienione krawędzie bigrafu  $\Delta$ . Równoważnie, forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca funkcjonal Grama  $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta'$  ma postać

$$q_{\Delta'}(x) := q_{\Delta}(x|_{x_1 := -x_1}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4.$$

(b) Bigraf  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_4$  otrzymany w wyniku inflacji  $\mathbf{t}_{12}^-$  względem pary punktów  $1, 2 \in \Delta_0$  zdefiniowany jest następująco:

$$\Delta : \begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 4 \\ & \diagdown & / \\ & & 1 \\ & / & \diagdown \\ & & 3 \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{12}^-} \Delta' := \mathbf{t}_{12}^- \Delta : \begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 4 \\ & \text{---} & / \\ & & 1 \\ & / & \text{---} \\ & & 3 \end{array},$$

- krawędź przerywaną  $(1, 2)$  zamieniamy na ciągłą, tzn.  $d_{12}^{\Delta'} = d_{21}^{\Delta'} := -1$ ,

- modyfikujemy krawędzie  $(2, 3)$  oraz  $(2, 4)$  zgodnie ze wzorem

$$d_{23}^{\Delta'} = d_{32}^{\Delta'} := 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \quad \text{oraz} \quad d_{24}^{\Delta'} = d_{42}^{\Delta'} := 2 - (1) \cdot 1 = 1,$$

- pozostałych krawędzi nie modyfikujemy,

gdzie zmienione krawędzie wyróżniono niebieskim kolorem oraz pogrubieniem. Równoważnie, forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca funkcjonal Grama  $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta' := \mathbf{t}_{12}^- \Delta$  ma postać

$$q_{\Delta'}(x) := q_{\Delta}(x|_{x_1 := x_1 - x_2}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

(c) Bigraf  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_4$  otrzymany w wyniku inflacji  $\mathbf{t}_{21}^-$  względem pary punktów  $2, 1 \in \Delta_0$  ma postać:

$$\Delta : \begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 4 \\ & \diagdown & / \\ & & 1 \\ & / & \diagdown \\ & & 3 \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{21}^-} \Delta' := \mathbf{t}_{21}^- \Delta : \begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 4 \\ & \text{---} & / \\ & & 1 \\ & / & \text{---} \\ & & 3 \end{array}, \text{ tj.}$$

- krawędź przerywaną  $(2, 1)$  zamieniamy na ciągłą, tzn.  $d_{21}^{\Delta'} = d_{12}^{\Delta'} := -1$ ,

- modyfikujemy krawędzie  $(1, 3)$  oraz  $(1, 4)$  zgodnie ze wzorem

$$d_{13}^{\Delta'} = d_{31}^{\Delta'} := -1 - (1) \cdot 1 = -2 \quad \text{oraz} \quad d_{14}^{\Delta'} = d_{41}^{\Delta'} := 1 - (2) \cdot 1 = -1,$$

- pozostałych krawędzi nie zmieniamy.

Forma kwadratowa  $q_{\Delta'}(x)$  definiująca funkcjonal  $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$  ma postać

$$q_{\Delta'}(x) := q_{\Delta}(x|_{x_2 := x_2 - x_1}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4.$$

Główne własności operatorów inflacji zawarte są w następującym twierdzeniu udowodnionym w pracach [81, Section 3], [54, Section 6] oraz [97, Proposition 2.2].

**Twierdzenie 3.59.** *Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli oraz niech  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  oznacza bigraf otrzymany przez jeden z operatorów inflacji  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_a^- \Delta$  lub  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$ , gdzie  $a, b \in \Delta_0$ .*

(a) *Bigraf  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$  nie ma pętli. Ponadto  $\Delta' := \mathbf{t}^- \Delta$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy bigraf  $\Delta$  jest spójny.*

(b)  *$\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz następujący diagram jest przemienny*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{q_{\Delta}} & \mathbb{Z} \\ h \downarrow \cong & \nearrow q_{\Delta'} & \\ \mathbb{Z}^m & & \end{array} \quad (3.60)$$

gdzie  $h := \mathbf{t}_{ab}^+ : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  jest izomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu wektorowi  $v \in \mathbb{Z}^m$  wektor  $\mathbf{t}_{ab}^+(v) := [w_1, \dots, w_m] \in \mathbb{Z}^m$  zdefiniowany następująco

$$w_i := v_i \text{ dla } i \neq a, \text{ oraz } w_a := \begin{cases} -v_a, & \text{dla } \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_a^-, \\ v_a + d_{ab}^{\Delta} v_b, & \text{dla } \mathbf{t}^- = \mathbf{t}_{ab}^-. \end{cases} \quad (3.61)$$

- (c) Jeśli  $\mathbf{t}^- = \mathbf{t}_{ab}^-$  oraz  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  jest takim wektorem, że  $v_b > 0$ , to prawdziwa jest nierówność  $v_a < w_b$  i równości  $v_i = w_i$  dla  $i \neq a$ , gdzie  $w = [w_1, \dots, w_m] := \mathbf{t}_{ab}^+(v) \in \mathbb{Z}^m$ .

W [57] oraz [81, Section 3] (zobacz także [54, Section 6]) udowodniono następujące dwa twierdzenia, por. twierdzenie A.58.

**Twierdzenie 3.62.** Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $m \geq 1$  wierzchołkach.

- (a) Bigraf  $\Delta$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje złożenie  $\mathbf{t}^-$  skończonej liczby operatorów inflacji takich, że bigraf  $D\Delta := \mathbf{t}^-\Delta$  jest jednym z grafów Dynkina  $\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$  przedstawionych w tabeli 3.32.
- (b) Jeśli  $\Delta$  jest dodatni, to zbiór  $\mathcal{R}_\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 1\}$  pierwiastków bigrafu  $\Delta$  jest zredukowanym systemem pierwiastków w sensie Bourbaki [14].

*Dowód.* Dowód tego twierdzenia można znaleźć w artykułach [57, Theorem 4.2], [81, Theorem 3.1], zobacz również [55] oraz [32].  $\square$

**Twierdzenie 3.63.** Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{m+1}$  jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $m + 1 \geq 2$  wierzchołkach.

- (a) Bigraf  $\Delta$  jest główny (tzn.  $\Delta$  jest nieujemny korangi 1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje złożenie  $\mathbf{t}^-$  skończonej liczby operatorów inflacji takich, że bigraf  $D\Delta := \mathbf{t}^-\Delta$  jest jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_m, m \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_m, m \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$  przedstawionych w tabeli 3.33.
- (b) Jeśli bigraf  $\Delta$  jest główny oraz  $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_m] \in \text{Ker } q_\Delta$  jest wektorem generującym grupę  $\text{Ker } q_\Delta$ , tzn.  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ , to
- (b1)  $-6 \leq h_j \leq 6$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,
- (b2) istnieje indeks  $s \in \{1, \dots, m\}$  taki, że  $h_s \in \{-1, 1\}$ .

*Dowód.* Dowód części (a) można znaleźć w artykułach [57, Theorem 5.2], [81, Theorem 3.2]. Część (b) została udowodniona w [54, Proposition 6.7(a)].  $\square$

Jako wniosek z twierdzenia 3.59, twierdzenia 3.62 oraz twierdzenia 3.63 otrzymujemy następujące twierdzenie klasyfikujące z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama wszystkie dodatnie oraz główne bigrafy bez pętli.

**Twierdzenie 3.64.** (a) Każdy spójny dodatni bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , bez pętli, z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama, jest jednym z grafów Dynkina  $\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$  (tabela 3.32).

- (b) Każdy spójny główny bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 2$ , bez pętli, z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama, jest jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_{m-1}, m \geq 2, \tilde{\mathbb{D}}_{m-1}, m \geq 5, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$  (tabela 3.33).

*Dowód.* Wynika z zastosowania twierdzeń 3.59, 3.62 oraz twierdzenia 3.63, zobacz również [1, Chapter 6].  $\square$

Następujący lemat podaje postać macierzy  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \stackrel{B}{\sim}_{\mathbb{Z}} \Delta'$  pomiędzy bigrafami  $\Delta$  oraz  $\Delta' := \mathbf{t}^-\Delta$ , tj. spełniającą równość  $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B$ , gdzie  $\mathbf{t}^-$  jest jednym z operatorów inflacji  $\mathbf{t}_a^-, \mathbf{t}_{ab}^-$ , zobacz [81, Lemma 3.1].

**Lemat 3.65.** Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli, oraz  $a, b \in \Delta_0$ .

- (a) Symetryczna macierz Grama  $G_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta' := \mathbf{t}_a^-\Delta$  jest równa  $G_{\Delta'} = E_a^{-tr} \cdot G_\Delta \cdot E_a^-$ , gdzie macierz  $E_a^- := \text{diag}(1, \dots, 1, -1_a, 1, \dots, 1)$  powstaje z macierzy jednostkowej  $E$  przez zamianę  $a$ -tego elementu na przekątnej na  $-1$ .



### 3.6. Operatory inflacji

(b) Jeśli krawędź  $a-b$  jest przerywana, to symetryczna macierz Grama  $G_{\Delta}$ , bigrafu  $\Delta' := \mathbf{t}_{ab}^- \Delta$  jest równa  $G_{\Delta'} = (E_{ab}^-)^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot E_{ab}^-$ , gdzie

$$E_{ab}^- := E - d_{ab}^{\Delta} e_{ab} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$$

oraz  $e_{ab} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest macierzą z jedyną niezerową wartością 1 w  $a$ -tym wierszu oraz  $b$ -tej kolumnie.

*Dowód.* Stwierdzenia (a)-(b) otrzymujemy wprost z definicji inflacji (definicja 3.55) oraz definicji symetrycznej macierzy Grama  $G_{\Delta}$  (3.6), która jednoznacznie wyznacza bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ .  $\square$

Zastosowanie operatorów inflacji zilustrujemy następującym przykładem.

**Przykład 3.66.** Rozważmy następujący graf krawędziowo-dwudzielny

$$\Delta : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z}).$$

Bigraf  $\Delta$  jest spójny i dodatni, gdyż

$$q_{\Delta}(x) = \frac{1}{3}(x_5 + \frac{1}{2}x_6)^2 + \frac{3}{4}(x_4 - \frac{2}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_5)^2 + \frac{3}{4}(x_3 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_7)^2 + (x_2 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5)^2 + (x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_7)^2 + \frac{1}{4}x_6^2 + \frac{1}{3}x_7^2.$$

Pokażemy, że ciąg operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{35}^-$ ,  $\mathbf{t}_{47}^-$ ,  $\mathbf{t}_{56}^-$ ,  $\mathbf{t}_{67}^-$ ,  $\mathbf{t}_{26}^-$ ,  $\mathbf{t}_{36}^-$ ,  $\mathbf{t}_{56}^-$ ,  $\mathbf{t}_{57}^-$ ,  $\mathbf{t}_{27}^-$ ,  $\mathbf{t}_{47}^-$  redukuje bigraf  $\Delta$  do diagramu Dynkina

$$E_7^{\bullet} : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

Przedstawiamy kolejne bigrafy  $\Delta, \Delta^1, \dots, \Delta^9$ , które powstały po zastosowaniu operatorów inflacji z przedstawionego ciągu, przy czym na każdym etapie krawędzie zmodyfikowane w wyniku przeprowadzonej operacji inflacji oznaczamy niebieskim kolorem oraz pogrubieniem.

$$\Delta : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{35}^-} \Delta^1 : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{47}^-}$$

$\mathbf{c}_{\Delta} = 6, \quad \mathbf{c}_{\Delta^1} = 30,$

$$\text{cox}_{\Delta}(t) = t^7 - 2t^6 + 3t^5 - t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + 1, \quad \text{cox}_{\Delta^1}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1,$$

$$\Delta^2 : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{56}^-} \Delta^3 : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{67}^-}$$

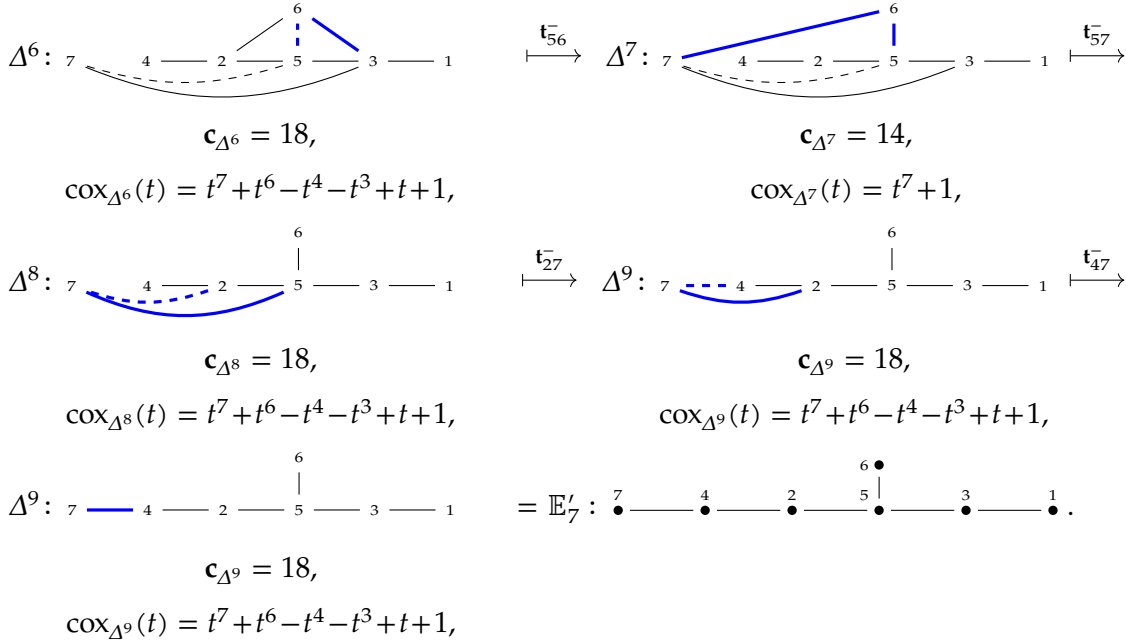
$\mathbf{c}_{\Delta^2} = 30, \quad \mathbf{c}_{\Delta^3} = 30,$

$$\text{cox}_{\Delta^2}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1, \quad \text{cox}_{\Delta^3}(t) = t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 1,$$

$$\Delta^4 : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{26}^-} \Delta^5 : \begin{array}{c} \text{6} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{4} \text{---} \text{2} \text{---} \text{5} \text{---} \text{3} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{7} \text{---} \text{1} \end{array} \xrightarrow{\mathbf{t}_{36}^-}$$

$\mathbf{c}_{\Delta^4} = 12, \quad \mathbf{c}_{\Delta^5} = 12,$

$$\text{cox}_{\Delta^4}(t) = t^7 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 + 1, \quad \text{cox}_{\Delta^5}(t) = t^7 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 + 1,$$



Zauważmy, że wielomian Coxetera oraz liczba Coxetera nie są niezmiennicze ze względu na operację inflacji  $t_{ab}^-$ , tj.

$$\text{spec}c_{t_{ab}^- \Delta} \neq \text{spec}c_{\Delta} \text{ oraz } c_{t_{ab}^- \Delta} \neq c_{\Delta} \text{ dla pewnych } a \neq b, a, b \in \Delta_0.$$

Zgodnie z opisem przedstawionym w lemacie 3.65, budujemy  $\mathbb{Z}$ -odwracalną macierz

$$E^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z}),$$

jako iloczyn macierzy odpowiadającym operatorom inflacji z zastosowanego ciągu, tj.

$$E^- = E_{35}^- \cdot E_{47}^- \cdot E_{56}^- \cdot E_{67}^- \cdot E_{26}^- \cdot E_{36}^- \cdot E_{56}^- \cdot E_{57}^- \cdot E_{27}^- \cdot E_{47}^-.$$

Macierz  $E^- \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{E}'_7$ , to znaczy zachodzi równość  $(E^-)^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot E^- = G_{\mathbb{E}'_7}$ . Zmieniając numerację wierzchołków w  $\mathbb{E}'_7$ , otrzymamy graf Dynkina  $\mathbb{E}_7$  z numeracją standardową taką jak w tabeli 3.32, gdzie macierz permutacji  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  wierzchołków  $\mathbb{E}'_7$  ma następującą postać

$$M_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z}).$$

Zauważmy, że macierz  $B \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})$  definiująca równość  $B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B = G_{\mathbb{E}_7}$  ma postać

$$B := E^- \cdot M_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z}).$$

Podsumowując, pokazaliśmy, że macierz  $B \in \text{Gl}(7, \mathbb{Z})$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama bigrafu  $\Delta$  z diagramem Dynkina  $\mathbb{E}_7$ . Ponieważ

$\text{cox}_{\Delta}(t) = t^7 - 2t^6 + 3t^5 - t^4 - t^3 + 3t^2 - 2t + 1 \neq \text{cox}_{\mathbb{E}_7}(t) = t^7 + t^6 - t^4 - t^3 + t + 1$ ,  
 więc na podstawie twierdzenia 3.53 bigrafy  $\Delta$  oraz  $\mathbb{E}_7$  nie są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne.



## Rozdział 4

# Rozszerzone bigrafy Euklidesa w klasyfikacji nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli

Przypominamy, że jednym z celów badawczych niniejszej dysertacji jest skonstruowanie rodziny bigrafów klasyfikujących wszystkie spójne nieujemne grafy krawędziowo-dwudzielne korangi dwa bez pętli, z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  (problem 1.3). Następujące obserwacje pokazują, że jest to złożone zadanie.

(a) Z twierdzenia 3.31, zawierającego klasyfikację wszystkich spójnych nieujemnych grafów bez pętli, wiemy, że nie istnieją spójne nieujemne grafy korangi dwa bez pętli.

(b) Stąd rodzina spójnych bigrafów, które klasyfikują spójne bigrafy korangi dwa bez pętli, musi składać się z bigrafów zawierających przynajmniej jedną krawędź przerywaną.

(c) Poszukiwana rodzina klasyfikująca spójne nieujemne bigrafy korangi dwa bez pętli powinna być jak najprostsza. Najlepiej, aby składała się wyłącznie z bigrafów prostych (tj. bez wielokrotnych krawędzi), analogicznie jak w przypadku grafów Dynkina, które klasyfikują wszystkie bigrafy dodatnie (z dokładnością do relacji  $\sim_{\mathbb{Z}}$ ).

(d) Już dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli o 7 wierzchołkach otrzymujemy dużą przestrzeń przeszukiwań żądanej rodziny bigrafów równą 41 081 600.

(e) Wskazane bigrafy powinny być „naturalnymi” rozszerzeniami diagramów Dynkina  $D_m \in \{\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  oraz Euklidesa  $\tilde{D}_m \in \{\tilde{\mathbb{A}}_m, m \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_m, m \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ , które z dokładnością do relacji  $\sim_{\mathbb{Z}}$ , klasyfikują wszystkie bigrafy dodatnie oraz główne, zobacz twierdzenie 3.64.

(f) Wyznaczona rodzina klasyfikująca powinna być efektywnym wyborem z punktu widzenia algorytmów. Innymi słowy, dowolny spójny nieujemny bigraf korangi dwa powinien się redukować algorytmicznie do bigrafów ze wskazanej rodziny (problem 1.5).

Skonstruowana przez nas rodzina rozszerzonych bigrafów Euklidesa (definicja 4.1) spełnia stawiane wymagania (w szczególności z punktu widzenia konstrukcji efektywnych algorytmów), z wyjątkiem warunku (c), ponieważ wskazane bigrafy zawierają podwójną krawędź przerywaną. Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w artykułach [37, 41].

W podrozdziale 4.1 podajemy definicję rozszerzonych bigrafów Euklidesa oraz przedstawiamy te ich własności, które są istotne w spektralnej klasyfikacji Coxetera.

W podrozdziale 4.2 wprowadzamy definicję specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy jądra  $\text{Ker } q_{\Delta}$  funkcjonu Grama  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli. Natomiast w podrozdziale 4.3 podajemy algorytm 4.14, który wyznacza specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę jądra  $\text{Ker } q_{\Delta}$  funkcjonu Grama  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta$  korangi dwa bez pętli.

W podrozdziale 4.4 podajemy definicję typu Dynkina  $\text{Dyn}_{\Delta}$  oraz Coxetera-Dynkina  $\text{CDtype}$  dla spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli.

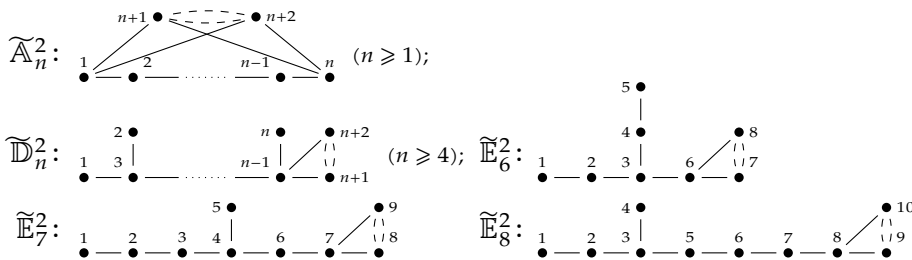
### 4.1. Rozszerzone bigrafy Euklidesa

W niniejszym podrozdziale definiujemy rodzinę rozszerzonych bigrafów Euklidesa (zobacz [41, Definition 2.1] oraz [37, Definition 3.1])  $\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2$ , która klasyfikuje wszystkie spójne nieujemne grafy krawędziowo-dwudzielne korangi dwa bez pętli, z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama (zobacz twierdzenie 5.1).

W dalszej części podrozdziału przedstawiamy te własności rozszerzonych bigrafów Euklidesa, które są istotne w klasyfikacji spektralnej Coxetera nieujemnych bigrafów bez pętli korangi dwa.

**Definicja 4.1.** Niech  $n \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną. **Rozszerzonym bigrafem Euklidesa** nazywamy każdy z grafów krawędziowo-dwudzielnych o  $n + 2$  wierzchołkach przedstawionych w następującej tabeli.

TABELA 4.2. ROZSZERZONE BIGRAFY EUKLIDESA



**Uwaga 4.3.** (a) Jeśli  $\tilde{D}_n \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$  jest jednym z bigrafów Euklidesa o  $n + 1 \geq 2$  wierzchołkach, przedstawionych w tabeli 3.33, to  $\tilde{D}_n$  jest rozszerzeniem o wierzchołek  $n + 1$  odpowiedniego diagramu Dynkina  $D_n \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach, przedstawionego w tabeli 3.32.

(b) Jeśli  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$  jest jednym z rozszerzonych bigrafów Euklidesa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach, przedstawionych w tabeli 4.2, to  $\tilde{D}_n^2$  jest rozszerzeniem o wierzchołek  $n + 2$  i bigraf Kroneckera  $\bullet \dashv \vdash \bullet$  odpowiedniego grafu Euklidesa  $\tilde{D}_n \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$  o  $n + 1 \geq 2$  wierzchołkach, przedstawionego w tabeli 3.33.

(c) Zauważmy, że dla  $n = 1$  graf Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_1$  jest grafem Kroneckera  $\overset{1}{\bullet} \overset{2}{\curvearrowright} \bullet$ , a jego rozszerzenie o wierzchołek 3 oraz bigraf Kroneckera  $\bullet \dashv \vdash \bullet$  ma następującą postać

$$\tilde{\mathbb{A}}_1^2: \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \text{Cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem jego liczba Coxetera jest równa  $c_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2} = 2$  oraz wielomian Coxetera ma postać  $\text{cox}(t)_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2} = t^3 - t^2 - t + 1 = (t - 1)^2(t + 1)$ . Ponieważ funkcjonal Grama  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2}: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany jest przez formę kwadratową  $q_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3)^2$ , to bigraf  $\tilde{\mathbb{A}}_1^2$  jest nieujemny korangi dwa, a wektory  $\mathbf{h}^{(1)} = [1, 1, 0], \mathbf{h}^{(2)} = [1, 0, 1]$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2}$ , tzn.  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_1^2} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(1)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(2)}$ .

W następującym twierdzeniu przedstawiamy istotne w spektralnej klasyfikacji Coxetera własności rozszerzonych bigrafów Euklidesa. Wyniki te zostały opublikowane w [41, Proposition 2.2] oraz [37, Proposition 3.5].

**Twierdzenie 4.4.** (a) Każdy z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa.

(b) Jeśli  $n \geq 4$  oraz  $\tilde{D}_n^2$  jest jednym z bigrafów  $\tilde{\mathbb{D}}_n^2, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2$ , to wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\tilde{D}_n^2}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  oraz liczba Coxetera  $c_{\tilde{D}_n^2}$  nie zależą od numeracji wierzchołków bigrafu  $\tilde{D}_n^2$  oraz są przedstawione w następującej tabeli





Stąd otrzymujemy następujące równości

$$\begin{aligned} \varrho^{(2(n-1))} &= (w^{(2(n-1)-1)} + \dots + w^{(1)}) \cdot [0, \dots, 0, -1, 0]^{tr} + 2 \cdot 2(n-1) = \\ &= [1, \dots, 1, 0] \left( (n-1) (\text{Cox}_{\mathbb{D}_n}^{n-2} + \dots + \text{Cox}_{\mathbb{D}_n}^0) \right) [0, \dots, 0, -1, 0]^{tr} + 2 \cdot 2(n-1) = \\ &= (n-1) [1, \dots, 1, 0] \left( \text{Cox}_{\mathbb{D}_n}^{n-2} [0, \dots, 0, -1, 0]^{tr} + \dots + \text{Cox}_{\mathbb{D}_n}^0 [0, \dots, 0, -1, 0]^{tr} \right) + 4(n-1) = \\ &= (n-1) [1, \dots, 1, 0] (-2e_1 - 2e_2 + e_n)^{tr} + 4(n-1) = -4(n-1) + 4(n-1) = 0, \end{aligned}$$

co należało pokazać. Obliczmy teraz wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2}(t)$  bigrafu  $\widetilde{\mathbb{D}}_n^2$ :

$$\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2}(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2}) = \det \underbrace{\begin{bmatrix} t \cdot E - \text{Cox}_{\mathbb{D}_n} & \begin{matrix} 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline -1 \dots -1 & 0 & t-3 & 2 \\ -1 \dots -1 & 0 & -2 & t+1 \end{bmatrix}}_{(*)}.$$

Po wykonaniu na macierzy  $(*)$  następujących operacji elementarnych

$$w_{n+2} := w_{n+2} - w_{n+1}, \quad k_{n+1} := k_{n+1} + k_{n+2},$$

gdzie  $w_i, k_i$  oznaczają odpowiednio  $i$ -ty wiersz oraz  $i$ -tą kolumnę macierzy  $(*)$ , otrzymujemy równość

$$\det(*) = \det \underbrace{\begin{bmatrix} t \cdot E - \text{Cox}_{\mathbb{D}_n} & \begin{matrix} 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline -1 \dots -1 & 0 & t-1 & 2 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}}_{(**)}.$$

Na podstawie rozwinięcia Laplace'a względem wiersza  $n+2$  oraz kolumny  $n+1$  uzyskujemy równość  $\det(**) = (t-1)^2 \text{cox}_{\mathbb{D}_n}(t)$ . Ponieważ  $\text{cox}_{\mathbb{D}_n}(t) = t^n + t^{n-1} + t + 1$  (zobacz twierdzenie 3.53), to otrzymujemy  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2}(t) = t^{n+2} - t^{n+1} - t^n + t^{n-1} + t^3 - t^2 - t + 1$ .

Analogicznych argumentów można użyć w wypadku, gdy  $\widetilde{\mathbb{D}}_n^2$  jest jednym z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2$  lub też dowód otrzymać przez proste obliczenie z wykorzystaniem komputera.

Aby zakończyć dowód stwierdzenia (b), wystarczy udowodnić, że wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2}(t)$  oraz liczba Coxetera  $c_{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2}$  nie zależą od numeracji wierzchołków każdego z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{D}}_n^2 \in \{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ .

Dowód tego faktu dla  $n=4$  oraz bigrafu  $\widetilde{\mathbb{D}}_4^2 = \widetilde{\mathbb{D}}_4^2$  uzyskujemy przez obliczenia komputerowe, stosując algorytm umożliwiający obliczenie wielomianów oraz liczby Coxetera bigrafu  $\widetilde{\mathbb{D}}_4^2$  dla dowolnej spośród  $6! = 720$  permutacji zbioru wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ .

Dowód w wypadku ogólnym można uzyskać przez zastosowanie metody odbić zdefiniowanej w roku 1973 w pracy Bernstein-Gelfand-Ponomarev [5] dla liniowych reprezentacji kołczanów, powszechnie znanej pod nazwą *sink-source reflection technique*. Modyfikacja tej metody na obszar grafów krawędziowo-dwudzielnych została opisana w artykule [81] i zastosowana w [81, Proposition 2.2]. Modyfikację tę z pewnymi niebanalnymi uzupełnieniami stosujemy do rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{D}}_n^2 \in \{\widetilde{\mathbb{D}}_n^2, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ . Dowód ten opisujemy w artykule [41, Proposition 2.2]. Ponieważ jest on dość żmudny i wymaga wprowadzenia nowych pojęć, twierdzeń i rozwinięcia techniki odbić dla bigrafów, więc nie przedstawiamy go w niniejszej dysertacji.

(c) Dla  $n=4$  oraz  $\Delta = \widetilde{\mathbb{A}}_4^2$  w wyniku standardowych obliczeń komputerowych z zastosowaniem algorytmu umożliwiającego obliczenie wielomianów Coxetera oraz liczb Coxetera bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_4^2$  dla każdej spośród  $6! = 720$  permutacji zbioru wierzchołków  $\Delta_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ , otrzymamy następujące trzy wielomiany Coxetera:

- $F_1(t) = t^6 - t^5 - t + 1,$
- $F_2(t) = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1,$
- $F_3(t) = t^6 - 2t^5 - t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t + 1,$

i odpowiadające im liczby Coxetera  $\mathbf{c}_1 = 5, \mathbf{c}_2 = \infty$  oraz  $\mathbf{c}_3 = \infty$ , co dowodzi zapowiadanej w (c) zależności od numeracji wierzchołków.

Aby udowodnić pozostałą część stwierdzenia (c) załóżmy, że wierzchołki bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$  są ponumerowane tak jak w tabeli 4.2. Korzystając z definicji macierzy Coxetera, otrzymujemy następującą postać macierzy Coxetera  $\text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}$  bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$

$$\text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2} = \left[ \begin{array}{c|cc} \text{Cox}_{\mathbb{A}_n} & \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{matrix} \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}), \text{ gdzie } \text{Cox}_{\mathbb{A}_n} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

jest macierzą Coxetera grafu Dynkina  $\mathbb{A}_n, n \geq 1$ . Ponieważ macierz  $\text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}$  jest macierzą blokową, więc jej  $s$ -ta potęga  $\text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^s, s \geq 1$ , jest macierzą postaci

$$\text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^s = \left[ \begin{array}{c|cc} \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^s & k^{(s)} & -k^{(s)} \\ \hline w^{(s)} & \ell^{(s)} + 1 & -\ell^{(s)} \\ w^{(s)} & \ell^{(s)} & -\ell^{(s)} + 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}),$$

gdzie wektory  $w^{(s)} \in \mathbb{Z}^n$  oraz  $(k^{(s)})^{tr} \in \mathbb{Z}^n$  zdefiniowane są wzorami

$$w^{(s)} = [2, 1, \dots, 1] (\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{s-1} + \dots + \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^0), \quad k^{(s)} = (\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{s-1} + \dots + \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^0) [-1, 0, \dots, 0, -1]^{tr},$$

liczba  $\ell^{(s)} \in \mathbb{Z}$  jest równa  $\ell^{(s)} = (w^{(s-1)} + \dots + w^{(1)}) \cdot [-1, 0, \dots, 0, -1]^{tr} + 2s$ , natomiast postaci macierzy  $\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^s \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  bigrafu Dynkina  $\mathbb{A}_n$  ponumerowanego jak w tabeli 3.32 są następujące:

$$\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^s = \left[ \begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \dots & 1 \\ \hline \begin{matrix} -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \mathbf{0} \end{matrix} \end{array} \right]_{n-s+1}^{n-s} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}), \text{ dla } s = 1, \dots, \mathbf{c}_{\mathbb{A}_n} - 1.$$

Ponieważ  $\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{\mathbf{c}_{\mathbb{A}_n}} = E$  oraz  $\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{\mathbf{c}_{\mathbb{A}_n}-1} + \dots + \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^0 = [0]$ , gdzie  $\mathbf{c}_{\mathbb{A}_n} = n + 1$ , więc do udowodnienia, że liczbą Coxetera bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$  jest  $\mathbf{c}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2} = n + 1$  wystarczy pokazać, że  $\ell^{(n+1)} = 0$ . W tym celu zauważmy, że

$$\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^s \cdot [-1, 0, \dots, 0, -1]^{tr} = \begin{cases} (-e_{n-1} + 2e_n)^{tr} & \text{dla } s = 1, \\ (-e_{n-s} + 2e_{n-s+1} - e_{n-s+2})^{tr} & \text{dla } s = 2, \dots, n-1, \\ (2e_1 - e_2)^{tr} & \text{dla } s = n, \\ e_n^{tr} & \text{dla } s = n+1. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy następujące równości

$$\begin{aligned} \ell^{(n+1)} &= (w^{(n)} + \dots + w^{(1)}) \cdot [-1, 0, \dots, 0, -1]^{tr} + 2(n+1) = \\ &= [2, 1, \dots, 1] (\text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{n-1} + 2 \cdot \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{n-2} + \dots + n \cdot \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^0) [-1, 0, \dots, 0, -1]^{tr} + 2(n+1) = \\ &= [2, 1, \dots, 1] \left( \sum_{i=1}^n i \cdot \text{Cox}_{\mathbb{A}_n}^{n-i} [-1, 0, \dots, 0, -1]^{tr} \right) + 2(n+1) = \\ &= [2, 1, \dots, 1] (-(n+1) \cdot e_1)^{tr} + 2(n+1) = -2(n+1) + 2(n+1) = 0, \end{aligned}$$



#### 4.1. Rozszerzone bigrafy Euklidesa

co należało pokazać. Obliczymy teraz wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}(t)$  bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$ :

$$\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}(t) := \det(t \cdot E - \text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}) = \det \left[ \begin{array}{c|cc} t \cdot E - \text{Cox}_{\mathbb{A}_n} & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 \\ -2 & -1 & \dots & -1 & t-3 & 2 \\ -2 & -1 & \dots & -1 & -2 & t+1 \end{array} \right].$$

(\*)

Po wykonaniu na macierzy (\*) następujących operacji elementarnych

$$w_{n+2} := w_{n+2} - w_{n+1}, \quad k_{n+1} := k_{n+1} + k_{n+2},$$

gdzie  $w_i, k_i$  oznaczają odpowiednio  $i$ -ty wiersz oraz  $i$ -tą kolumnę macierzy (\*), otrzymujemy równość

$$\det(*) = \det \left[ \begin{array}{c|cc} t \cdot E - \text{Cox}_{\mathbb{A}_n} & 0 & -1 \\ \hline & 0 & -1 \\ -2 & -1 & \dots & -1 & t-1 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t-1 \end{array} \right].$$

(\*\*)

Na podstawie rozwinięcia Laplace'a względem wiersza  $n+2$  oraz kolumny  $n+1$  uzyskujemy równość  $\det(**) = (t-1)^2 \text{cox}_{\mathbb{A}_n}(t)$ . Ponieważ  $\text{cox}_{\mathbb{A}_n}(t) = t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1$  (zobacz twierdzenie 3.53), to otrzymujemy  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}(t) = t^{n+2} - t^{n+1} - t + 1$ .

Dowód twierdzenia został więc zakończony.  $\square$

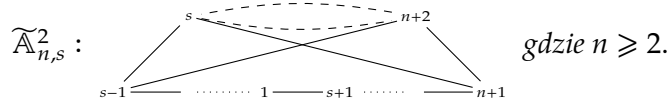
Następujący lemat uzupełnia część (c) twierdzenia 4.4 o wszystkie wielomiany Coxetera bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$  w zależności od numeracji wierzchołków, zobacz [41, Remark 2.3].

**Lemat 4.5.** Dla  $n \geq 1$  wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}(t)$  bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$  zależy od numeracji wierzchołków oraz jest jednym z wielomianów:

$$\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(1)}(t), \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(2)}(t), \dots, \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(\mu_n)}(t) \in \mathbb{Z}[t], \text{ gdzie } \mu_n = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & \text{gd } n \geq 2 \text{ jest parzyste,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{gd } n \geq 1 \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Wielomian

- (i)  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(1)}(t) := t^{n+2} - t^{n+1} - t + 1$  jest wielomianem Coxetera bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$  ponumerowanego jak w tabeli 4.2,
- (ii)  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(s)}(t) := t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n - t^{n+3-s} + 2t^{n+2-s} - t^{n+1-s} - t^{s+1} + 2t^s - t^{s-1} + t^2 - 2t + 1$  dla  $s = 2, \dots, \mu_n$ , jest wielomianem Coxetera następującego bigrafu



W szczególności, dla  $s := \mu_n$  otrzymujemy

$$\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(\mu_n)}(t) := t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n - 2t^{\mu_n+1} + 4t^{\mu_n} - 2t^{\mu_n-1} + t^2 - 2t + 1,$$

gd  $n \geq 2$  jest parzyste, oraz

$$\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(\mu_n)}(t) := t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n - t^{\mu_n+2} + t^{\mu_n+1} + t^{\mu_n} - t^{\mu_n-1} + t^2 - 2t + 1,$$

dla  $n \geq 3$  nieparzystego.

Wielomian Coxetera bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,s}^2$  dla  $s = \mu_n + 1, \dots, n$  jest równy  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}(t) = \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{n,n+2-s}^2}(t)$ .

*Dowód.* Stwierdzenie (i) jest częścią twierdzenia 4.4 (c). Udowodnimy teraz stwierdzenie (ii). Dla  $n = s = 2$  sprawdzamy, że bigraf  $\widetilde{\mathbb{A}}_{2,2}^2$  ma następującą postać



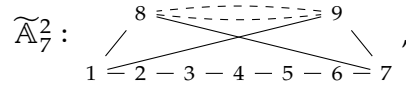


analizy spektralnej Coxetera grafów krawędziowo-dwudzielnych. Polega ona na przyporządkowaniu dowolnemu bigrafowi  $\Delta$  posiadającemu wierzchołek początkowy  $a \in \Delta_0$  (odpowiednio, końcowy  $b \in \Delta_0$ ) nowego bigrafu  $s_a\Delta$  (odpowiednio,  $s_b\Delta$ ) o tym samym zbiorze wierzchołków  $\Delta_0$  tak, że operacja odbiciowa  $\Delta \mapsto s_a\Delta$  (odpowiednio,  $\Delta \mapsto s_b\Delta$ ) nie zmienia wielomianu Coxetera.

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.4 stosując technikę odbić oraz żmudne rozważania kombinatoryczne dowodzi się istnienia skończonego ciągu operacji typu  $\Delta \mapsto s_a\Delta$  oraz  $\Delta \mapsto s_b\Delta$  redukujących bigraf  $\sigma\tilde{\mathbb{A}}_n^2$  (po zastosowaniu skończonej liczby takich operacji) do bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_{n,s}^2$ , gdzie  $s \in \{2, \dots, \mu_n\}$ . Ponieważ stosowane operacje odbiciowe nie zmieniają wielomianu Coxetera, więc otrzymujemy pierwszą tezę lematu, co kończy dowód.  $\square$

W następującym przykładzie przedstawiamy możliwe postaci wielomianów Coxetera bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$  w zależności od numeracji jego wierzchołków, zobacz twierdzenie 4.4(c) oraz lemat 4.5.

**Przykład 4.6.** (a) Niech  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$  będzie rozszerzonym bigrafem Euklidesa

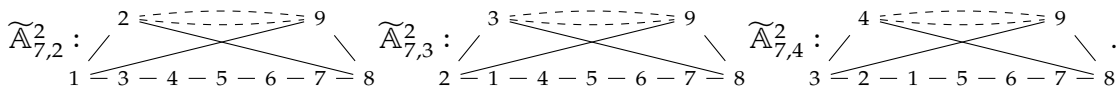


gdzie wierzchołki bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$  ponumerowane są tak jak w tabeli 4.2. Macierz Grama  $\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2} \in M_7(\mathbb{Z})$  oraz macierz Coxetera  $\text{Cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2} \in M_7(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$  są równe:

$$\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

a stąd  $\text{cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2}(t) = t^9 - t^8 - t + 1$ , zobacz też twierdzenie 4.4(c).

(b) Ponieważ  $n = 7$ , więc  $\mu_n = \frac{7+1}{2} = 4$  (lemat 4.5) oraz grafy krawędziowo-dwudzielne  $\tilde{\mathbb{A}}_{7,s}^2$  dla  $s = 2, 3, 4$  mają następujące postaci:



Macierze Grama oraz macierze Coxetera tych bigrafów mają następujące postaci:

$$\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_{7,2}^2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_{7,2}^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_{7,3}^2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_{7,3}^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

## 4.2. Specjalna baza jądra funkcyjatu Grama bigrafu korangi dwa

$$\check{G}_{\check{\mathbb{A}}_{7,4}^2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Cox}_{\check{\mathbb{A}}_{7,4}^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że wielomiany Coxetera mają następujące postaci:

$$\begin{aligned} \text{cox}_{\check{\mathbb{A}}_{7,2}^2}(t) &= \text{cox}_{\check{\mathbb{A}}_7^2}^{(2)}(t) = t^9 - 3t^8 + 3t^7 - t^6 - t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \\ \text{cox}_{\check{\mathbb{A}}_{7,3}^2}(t) &= \text{cox}_{\check{\mathbb{A}}_7^2}^{(3)}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - 2t + 1, \\ \text{cox}_{\check{\mathbb{A}}_{7,4}^2}(t) &= \text{cox}_{\check{\mathbb{A}}_7^2}^{(4)}(t) = t^9 - 2t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - 2t + 1, \end{aligned}$$

zobacz też lemat 4.5.

## 4.2. Specjalna baza jądra funkcyjatu Grama bigrafu korangi dwa

W tym podrozdziale przedstawimy definicję  $(j_1, j_2)$ -specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ , gdzie  $q_\Delta: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest funkcyjatem Grama spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa. Pełni ona istotną rolę w klasyfikacji (z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ ) spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi dwa. Definicja ta pochodzi z [41, Definition 3.1], zobacz też [37, Proposition 4.1], a jej idea zawarta jest w [79, Theorem 3.2(b)].

**Definicja 4.7.** Załóżmy, że  $n \geq 1$  jest liczbą naturalną,  $j_1 < j_2$  jest parą liczb naturalnych nie większych od  $n + 2$  oraz  $\Delta$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  ponumerowanych wierzchołkach  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ . Wektory  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \text{Ker } q_\Delta$  tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy przemiennej  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  rangi dwa, jeśli  $h_{j_1}^{(j_1)} = 1, h_{j_2}^{(j_2)} = 1, h_{j_2}^{(j_1)} = 0$ , oraz  $h_{j_1}^{(j_2)} = 0$ .

W dalszej części pracy, dla danej pary różnych indeksów  $s, r \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$ , symbolem  $\Delta^{(s,r)}$  (odp. symbolem  $\Delta^{(s)}$ ) oznaczamy krawędziowo-dwudzielny podgraf grafu  $\Delta$  otrzymany z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołków  $a_s, a_r$  oraz incydentnych z nimi krawędzi (odp. przez opuszczenie wierzchołka  $a_s$  oraz krawędzi incydentnych z  $a_s$ ).

Następujące twierdzenie, które jest uogólnieniem [79, Theorem 3.2(b)], dowodzimy w [41, Theorem 3.2], zobacz też [37, Proposition 4.1].

**Twierdzenie 4.8.** Załóżmy, że  $n \geq 1$  jest liczbą naturalną oraz  $\Delta$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  ponumerowanych wierzchołkach  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ .

- (a) Grupa przemiennej  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  rangi dwa posiada  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  taką, że podbigrafy  $\Delta^{(j_1)}, \Delta^{(j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  są spójne i główne, tzn. korangi jeden.
- (b) Załóżmy, że  $j_1 < j_2 \leq n + 2$  są liczbami naturalnymi oraz  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  rangi dwa.
  - (b1) Krawędziowo-dwudzielny podgraf  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  grafu  $\Delta$  jest dodatni i spójny.
  - (b2) Każdy z krawędziowo-dwudzielnych podgrafów  $\Delta' := \Delta^{(j_1)}, \Delta'' := \Delta^{(j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest główny i spójny. Ponadto  $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{|\Delta'_0}^{(j_2)}$  oraz  $\text{Ker } q_{\Delta''} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{|\Delta''_0}^{(j_1)}$ , gdzie wektory  $\mathbf{h}_{|\Delta'_0}^{(j_2)}, \mathbf{h}_{|\Delta''_0}^{(j_1)} \in \mathbb{Z}^{n+1}$  powstają z wektorów  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  po usunięciu współrzędnej  $j_1$  oraz  $j_2$ , odpowiednio.
  - (b3) Jeśli  $\{1, 2, \dots, n + 2\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , to grupa  $\mathbb{Z}^{n+2}$  posiada rozkład na sumę prostą grup  $\mathbb{Z}^{n+2} = \text{Ker } q_\Delta \oplus \mathbb{Z}e_{i_1} \oplus \mathbb{Z}e_{i_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_{i_n}$ .

- (c) Załóżmy, że  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa takim, że  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ . Jeśli  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą  $\text{Ker } q_{\Delta}$  oraz  $\mathbf{h}^{(j'_1)}, \mathbf{h}^{(j'_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j'_1, j'_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ , to podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z podgrafem krawędziowo-dwudzielnym  $\Delta'^{(j'_1, j'_2)}$  bigrafu  $\Delta'$ , tzn.  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'^{(j'_1, j'_2)}$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach. Dla danej liczby  $s \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$  forma kwadratowa definiująca funkcjonal Grama podgrafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta^{(s)}$  bigrafu  $\Delta$  jest równa  $q_{\Delta^{(s)}}(x) = q_{\Delta}(x)|_{x_s=0}$ . Stąd wynika, że bigraf  $\Delta^{(s)}$  jest nieujemny korangi  $\leq 2$ , gdyż funkcja

$$\mathbf{u}_s : \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} \rightarrow \text{Ker } q_{\Delta}, v = [v_1, \dots, v_{n+1}] \mapsto \hat{v} = [v_1, \dots, v_{s-1}, 0, v_s, \dots, v_{n+1}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

jest monomorfizmem grup.

Dowód stwierdzenia (a) dzielimy na dwa etapy. W pierwszym etapie dowodzimy indukcyjnie względem  $n \geq 1$ , że istnieje liczba naturalna  $j \leq n + 2$  oraz istnieje wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_{\Delta}$ , w którym  $h_j = 1$ . Następnie, w drugim etapie przechodzimy do konstrukcji specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ .

*Etap 1.* Udowodnimy indukcyjnie względem  $n \geq 1$ , że istnieje liczba naturalna  $j \leq n + 2$  oraz istnieje wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_{\Delta}$  w którym  $h_j = 1$ .

Da  $n = 1$  wszystkie spójne nieujemne bigrafy korangi dwa bez pętli o trzech wierzchołkach (wraz z odpowiednimi wektorami  $\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)} \in \text{Ker } q_{\Delta}$  generującymi  $\text{Ker } q_{\Delta}$ ) są równe:

|                                   |                                   |                                   |                                  |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
|                                   |                                   |                                   |                                  |
| $\mathbf{h}^{(1)} = [1 \ 0 \ -1]$ | $\mathbf{h}^{(1)} = [1 \ 0 \ 1]$  | $\mathbf{h}^{(1)} = [1 \ 0 \ -1]$ | $\mathbf{h}^{(1)} = [1 \ 0 \ 1]$ |
| $\mathbf{h}^{(2)} = [0 \ 1 \ -1]$ | $\mathbf{h}^{(2)} = [0 \ 1 \ -1]$ | $\mathbf{h}^{(2)} = [0 \ 1 \ 1]$  | $\mathbf{h}^{(2)} = [0 \ 1 \ 1]$ |

Założmy, że  $n \geq 2$  oraz teza indukcyjna jest prawdziwa dla  $n - 1 \geq 1$ , tzn. dla wszystkich bigrafów  $\Delta'$  korangi dwa o  $n - 1 + 2 \geq 3$  wierzchołkach. Niech  $\Delta$  będzie bigrafem korangi dwa o  $n + 2 \geq 4$  wierzchołkach.

Zauważmy najpierw, że istnieje liczba  $s \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$  dla której podbigraf  $\Delta^{(s)}$  bigrafu  $\Delta$  nie jest dodatni. W przeciwnym wypadku bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2, n+2} \geq 4$  byłby  $P$ -krytyczny w sensie [81, Definition 2.3] i na podstawie [81, Lemma 2.1(c), Theorem 2.1] oraz [63, Theorem 2.3], bigraf  $\Delta^{(s)}$  byłby główny, tzn. korangi jeden, co przeczyłoby założeniu, że  $\Delta$  jest korangi dwa.

Ustalmy indeks  $s \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$  taki, że nieujemny bigraf  $\Delta^{(s)}$  nie jest dodatni. Jeśli koranga bigrafu  $\Delta^{(s)}$  jest równa dwa, to na podstawie założenia indukcyjnego zastosowanego do bigrafu  $\Delta' = \Delta^{(s)}$ , istnieje indeks  $j \leq n + 1$  oraz wektor  $\mathbf{h}' \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$  takie, że  $h'_j = 1$ . Zatem wektor  $\mathbf{u}_s(\mathbf{h}') = \hat{\mathbf{h}}' \in \text{Ker } q_{\Delta}$  spełnia żądane warunki.

Założmy, że bigraf  $\Delta^{(s)}$  jest korangi jeden, tzn.  $\Delta^{(s)}$  jest główny i grupa  $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$  jest generowana przez pewien wektor  $\mathbf{h}' = [h'_1, \dots, h'_{n+1}] \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$  różny od zera. Na podstawie twierdzenia 3.63 oraz [54, Proposition 6.7], istnieje indeks  $j \leq n + 1$  taki, że  $h'_j = \pm 1$ . Zatem jeden z wektorów  $\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}' \in \text{Ker } q_{\Delta}$  lub  $\mathbf{h} = -\hat{\mathbf{h}}' \in \text{Ker } q_{\Delta}$  spełnia żądane warunki, co kończy indukcyjny krok dowodu.

*Etap 2.* Na podstawie pierwszego etapu, znajdujemy wektor  $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_{n+2}] \in \text{Ker } q_{\Delta}$  oraz indeks  $s \leq n + r$  takie, że  $h_s = 1$ . Definiujemy homomorfizm grup

$$\pi_s : \text{Ker } q_{\Delta} \rightarrow \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \subseteq \text{Ker } q_{\Delta}, v \mapsto \pi_s(v) := v_s \cdot \mathbf{h}.$$

Ponieważ  $\pi_s(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$ , to istnieje rozkład  $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h} \oplus \text{Ker } \pi_s$  na sumę prostą grup. Stąd wynika, że grupa  $\text{Ker } \pi_s$  jest wolna rangi  $\text{rk Ker } \pi_s = 2 - 1 = 1$ .



#### 4.2. Specjalna baza jądra funkcyjonału Grama bigrafu korangi dwa

Rozważmy podbigraf  $\Delta^{(s)} \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  bigrafu  $\Delta$ . Łatwo widać, że  $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} = \text{Ker } q_{\Delta}^{(s)}$  oraz monomorfizm grup

$\mathbf{u}_s: \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} \rightarrow \text{Ker } q_{\Delta}$ ,  $v = [v_1, \dots, v_{n+1}] \mapsto \hat{v} = [v_1, \dots, v_{s-1}, 0, v_s, \dots, v_{n+1}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$  definiuje izomorfizm grup  $\mathbf{u}_s: \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} \xrightarrow{\cong} \text{Ker } \pi_s$ , ponieważ wektor  $\tilde{w} = [w_1, \dots, w_{n+2}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$  należy do  $\text{Ker } \pi_s$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q_{\Delta}(w) = 0$  oraz  $\pi_s(w) = w_s \cdot \mathbf{h} = 0$ ; lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy  $w_s = 0$  oraz  $q_{\Delta}^{(s)}(\tilde{w}) = q_{\Delta^{(s)}}(\tilde{w}) = 0$ , gdzie  $\tilde{w} \in \mathbb{Z}^{n+1}$  jest wektorem otrzymanym z wektora  $w$  przez usunięcie  $s$ -tej współrzędnej. Zatem  $w = \mathbf{u}_s(\tilde{w})$  oraz  $\tilde{w} \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$ , a także  $\hat{v} = \mathbf{u}_s(v) \in \text{Ker } \pi_s$ , dla dowolnego wektora  $v \in \text{Ker } q_{\Delta^{(s)}}$ .

Ponieważ  $\text{rk Ker } q_{\Delta^{(s)}} = \text{rk Ker } \pi_s = 1$ , to bigraf  $\Delta^{(s)} \in \mathcal{UBigr}_{n+1}$  jest nieujemny korangi jeden. Na podstawie twierdzenia 3.63, istnieje wektor  $\mathbf{h}' = [h'_1, \dots, h'_{n+1}] \in \mathbb{Z}^{n+1}$  taki, że  $\text{Ker } q_{\Delta^{(s)}} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}'$  oraz  $h_j = 1$  dla pewnej liczby  $j \leq n+1$ . Stąd wynika, że wektor  $\hat{\mathbf{h}}' = [h'_1, \dots, h'_{s-1}, 0, h'_s, \dots, h'_{n+1}] \in \text{Ker } \pi_s \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  generuje grupę  $\text{Ker } \pi_s$  oraz wektory  $\mathbf{h}, \hat{\mathbf{h}}'$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ . W przypadku, gdy  $j \leq s-1$  przyjmujemy  $j_1 = j, j_2 = s, \mathbf{h}^{(j_1)} = \hat{\mathbf{h}}'$ , oraz  $\mathbf{h}^{(j_2)} = \mathbf{h} - h_{j_1} \cdot \hat{\mathbf{h}}'$ . Jeśli  $j \geq s$ , to przyjmujemy  $j_1 = s, j_2 = j+1, \mathbf{h}^{(j_2)} = \hat{\mathbf{h}}'$ , oraz  $\mathbf{h}^{(j_1)} = \mathbf{h} - h_{j_2} \cdot \hat{\mathbf{h}}'$ . Łatwo sprawdzić, że w obu wypadkach wektory  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)}$  tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ . Wprost z konstrukcji wynika również, że podbigrafy  $\Delta^{(j_1)}$  oraz  $\Delta^{(j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  są główne, co kończy dowód stwierdzenia (a).

(b) Załóżmy, że  $j_1 < j_2 \leq n+2$  są liczbami naturalnymi oraz  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  rangi dwa. Istnienie rozkładu na sumę prostą grup w stwierdzeniu (b3) otrzymujemy przez obliczenia korzystające z własności specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$ .

Aby udowodnić (b1), załóżmy dla uproszczenia zapisu, że  $j_1 = 1, j_2 = 2$  oraz  $i_1 = 3, \dots, i_n = n+2$ . Wtedy rozkład na sumę prostą grup uzyskany w (b3) przyjmuje postać  $\mathbb{Z}^{n+2} = \text{Ker } q_{\Delta} \oplus \mathbb{Z} \cdot e_3 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_{n+2}$ . Rozważmy następujący diagram grup abelowych i ich homomorfizmów

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } q_{\Delta} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^{n+2} \xrightarrow{p} M_n \\ & & \downarrow q_{\Delta} \quad \swarrow \tilde{q}_{\Delta} \\ & & \mathbb{Z} \end{array} \quad (4.9)$$

gdzie  $M_n = \mathbb{Z}^{n+2} / \text{Ker } q_{\Delta}$  jest grupą ilorazową grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$  względem podgrupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ , funkcja  $p: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow M_n$  kanonicznym epimorfizmem ilorazowym przyporządkowującym dowolnemu wektorowi  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$  warstwy  $p(v) = \bar{v} = v + \text{Ker } q_{\Delta} \in M_n$  oraz  $\tilde{q}_{\Delta}: M_n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest funkcją zdefiniowaną wzorem  $\tilde{q}_{\Delta}(\bar{v}) = q_{\Delta}(v)$ , dla dowolnego  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$ . Łatwo widać, że  $\tilde{q}_{\Delta}$  jest jedynym odwzorowaniem uzupełniającym diagram (4.9) do przemiennego trójkąta, tzn.  $\tilde{q}_{\Delta} \circ p = q_{\Delta}$ .

Ponieważ funkcyjonał Grama  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatnio półokreślony, więc definicja funkcji  $\tilde{q}_{\Delta}: M_n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest poprawna. Z równości  $\mathbb{Z}^{n+2} = \text{Ker } q_{\Delta} \oplus \mathbb{Z} \cdot e_3 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_{n+2}$  wynika, że grupa  $M_n$  jest wolna rangi  $n \geq 1$  oraz zbiór  $\mathbf{e} = \{\bar{e}_3, \dots, \bar{e}_{n+2}\} \subset M_n$  jest jej  $\mathbb{Z}$ -bazą, tzn.  $M_n = \mathbb{Z} \cdot \bar{e}_3 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{e}_{n+2}$ . Proste rozważania pokazują, że funkcja  $\tilde{q}_{\Delta}: M_n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest jednorodnym funkcyjonałem  $\mathbb{Z}$ -kwadratowym którego symetryczna macierz Grama  $G_{\tilde{q}_{\Delta}}^{\mathbf{e}}$  w bazie  $\mathbf{e}$  jest równa symetrycznej macierzy Grama  $G_{\Delta^{(j_1, j_2)}}$  podbigrafu  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$ . Łatwo również sprawdzić, że funkcyjonał  $\tilde{q}_{\Delta}: M_n \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatnio określony, tzn.  $\tilde{q}_{\Delta}(\bar{v}) > 0$ , dla dowolnego wektora  $\bar{v} = v + \text{Ker } q_{\Delta} \in M_n$  różnego od zera. Zatem graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  jest dodatni, gdyż  $G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} = G_{\tilde{q}_{\Delta}}^{\mathbf{e}}$ .

Aby zakończyć dowód stwierdzenia (b1), udowodnimy najpierw, że podbigraf  $\check{\Delta} = \Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest spójny. W celu uproszczenia i utrzymania większej przejrzystości dowodu załóżmy, że  $j_1 = 1$  and  $j_2 = 2$ . W dowodzie wykorzystamy następującą równość

$$H \cdot G_{\Delta} \cdot H^{tr} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} \end{array} \right], \text{ gdzie } H := \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(1)} \\ \mathbf{h}^{(2)} \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n+2} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Zauważmy, że macierz  $H \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  jest  $\mathbb{Z}$ -odwracalna, ponieważ  $\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}$  jest  $(1, 2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą grupą  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ .

W dowodzie równości (4.10), wykorzystamy podwojoną symetryczną macierz Grama  $\widehat{G}_\Delta := 2 \cdot G_\Delta = G_\Delta + G_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta$  oraz podwojoną symetryczną polaryzację  $\widehat{b}_\Delta : \mathbb{Z}^{n+2} \times \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  funkcjonału Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowaną wzorem

$$\widehat{b}_\Delta(u, w) := u \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot w^{tr} = q_\Delta(u + w) - q_\Delta(u) - q_\Delta(w).$$

Zauważmy, że macierz  $H \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot H^{tr}$  ma postać

$$H \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot H^{tr} = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{h}^{(1)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot \mathbf{h}^{(1)tr} & \mathbf{h}^{(1)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot \mathbf{h}^{(2)tr} & \bar{\mathbf{h}}^{(1)} \\ \mathbf{h}^{(2)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot \mathbf{h}^{(1)tr} & \mathbf{h}^{(2)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot \mathbf{h}^{(2)tr} & \bar{\mathbf{h}}^{(2)} \\ \hline \bar{\mathbf{h}}^{(1)tr} & \bar{\mathbf{h}}^{(2)tr} & \widehat{G}_\Delta^{(1,2)} \end{array} \right], \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$$

gdzie

$\bar{\mathbf{h}}^{(1)} := [\mathbf{h}^{(1)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot e_3^{tr}, \dots, \mathbf{h}^{(1)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot e_{n+2}^{tr}]$ ,  $\bar{\mathbf{h}}^{(2)} := [\mathbf{h}^{(2)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot e_3^{tr}, \dots, \mathbf{h}^{(2)} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot e_{n+2}^{tr}] \in \mathbb{Z}^n$  oraz macierz  $\widehat{G}_\Delta^{(1,2)} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  otrzymujemy z macierzy  $\widehat{G}_\Delta$  przez opuszczenie pierwszych dwóch wierszy oraz pierwszych dwóch kolumn. Zatem  $\widehat{G}_\Delta^{(1,2)} = \widehat{G}_{\check{\Delta}} = G_{\Delta^{(j_1, j_2)}}$ . Ponieważ bigraf  $\Delta$  jest nieujemny, więc  $\widehat{b}_\Delta(-, \mathbf{h}) = 0$ , dla dowolnego wektora  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$ , tzn. zachodzą równości  $u \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot \mathbf{h}^{tr} = 0$  oraz  $\mathbf{h} \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot u^{tr} = 0$ , dla dowolnego wektora  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$  oraz dowolnego wektora  $u \in \mathbb{Z}^{n+2}$ , zobacz [79, Proposition 2.8(b)], stąd  $\bar{\mathbf{h}}^{(1)} = 0$  oraz  $\bar{\mathbf{h}}^{(2)} = 0$ . Zatem macierz  $H \cdot \widehat{G}_\Delta \cdot H^{tr}$  ma postać (4.10).

Udowodnimy teraz, że podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\check{\Delta} = \Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest spójny. Załóżmy, przez sprzeczność, że bigraf  $\check{\Delta}$  jest rozłączną sumą dwóch podgrafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta'$  oraz  $\Delta''$ . W celu uproszczenia i utrzymania większej przejrzystości dowodu założmy, że  $\Delta'_0 = \{a_3, \dots, a_s\}$  oraz  $\Delta''_0 = \{a_{s+1}, \dots, a_{n+2}\}$ , gdzie  $3 \leq s \leq n+2$ . Zatem podwojona symetryczna macierz Grama  $\widehat{G}_{\check{\Delta}} = \widehat{G}_{\Delta}^{(1,2)}$  bigrafu  $\check{\Delta} = \Delta^{(j_1, j_2)}$  ma postać blokową

$$\widehat{G}_{\check{\Delta}} = \left[ \begin{array}{c|c} \widehat{G}_{\Delta'} & 0 \\ \hline 0 & \widehat{G}_{\Delta''} \end{array} \right]$$

Ponieważ macierz odwrotna  $H^{-1}$  do macierzy  $H$  zdefiniowanej w (4.10) ma postać

$$H^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -u' & -u'' \\ 0 & 1 & -w' & -w'' \\ \hline 0 & & & E \end{array} \right],$$

gdzie  $u' := [h_3^{(1)}, \dots, h_s^{(1)}]$ ,  $u'' := [h_{s+1}^{(1)}, \dots, h_{n+2}^{(1)}]$ ,  $w' := [h_3^{(2)}, \dots, h_s^{(2)}]$ ,  $w'' := [h_{s+1}^{(2)}, \dots, h_{n+2}^{(2)}]$ , to macierz  $\widehat{G}_\Delta$  (4.10) ma następującą postać blokową

$$\widehat{G}_\Delta = H^{-1} \cdot \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \widehat{G}_{\Delta^{(1,2)}} \end{array} \right] \cdot H^{-tr} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -u' \widehat{G}_{\Delta'} & -u'' \widehat{G}_{\Delta''} \\ 0 & 2 & -w' \widehat{G}_{\Delta'} & -w'' \widehat{G}_{\Delta''} \\ \hline (-u' \widehat{G}_{\Delta'})^{tr} & (-w' \widehat{G}_{\Delta'})^{tr} & \widehat{G}_{\Delta'} & 0 \\ (-u'' \widehat{G}_{\Delta''})^{tr} & (-w'' \widehat{G}_{\Delta''})^{tr} & 0 & \widehat{G}_{\Delta''} \end{array} \right]. \quad (4.11)$$

Ponieważ wektory  $\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}$  należą do grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  oraz tworzą jej specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę, więc wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)} - e_1 &= [0, 0, u', 0, \dots, 0] + [0, 0, \dots, 0, u''], \\ \mathbf{h}^{(2)} - e_2 &= [0, 0, w', 0, \dots, 0] + [0, 0, \dots, 0, w''] \end{aligned}$$

są pierwiastkami bigrafu  $\Delta$ , co łatwo sprawdzić:

$q_\Delta(\mathbf{h}^{(i)} - e_i) = b_\Delta(\mathbf{h}^{(i)} - e_i, \mathbf{h}^{(i)} - e_i) = b_\Delta(\mathbf{h}^{(i)}, \mathbf{h}^{(i)}) - 2b_\Delta(\mathbf{h}^{(i)}, e_i) + b_\Delta(e_i, e_i) = q_\Delta(e_i) = 1$ , dla  $i = 1, 2$ , zobacz [79, Theorem 3.2(a)]. Ponieważ bigraf  $\check{\Delta} = G_{\Delta^{(1,2)}}$  jest rozłączną sumą bigrafów  $\Delta'$  and  $\Delta''$ , więc

4.2. Specjalna baza jądra funkcjonatu Grama bigrafu korangi dwa

$$1 = q_{\Delta}(\mathbf{h}^{(1)} - e_1) = q_{\Delta'}(u') + q_{\Delta''}(u'') \text{ oraz } 1 = q_{\Delta}(\mathbf{h}^{(2)} - e_2) = q_{\Delta'}(w') + q_{\Delta''}(w'').$$

Stąd wynika, że dokładnie jeden z wektorów  $u', u''$  jest zerowy oraz dokładnie jeden z wektorów  $w', w''$  jest zerowy, gdyż bigrafy  $\Delta'$  oraz  $\Delta''$  są dodatnie. Z postaci macierzy blokowej (4.11) wynika, że bigraf  $\Delta$  nie jest spójny, co przeczy założeniu. Udowodniliśmy więc, że podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\tilde{\Delta} = \Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest spójny.

(b2) Stosując argumenty użyte w pierwszej części dowodu, pokazujemy, że podgrafy krawędziowo-dwudzielne  $\Delta' := \Delta^{(j_1)}, \Delta'' := \Delta^{(j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  są główne oraz  $\text{Ker } q_{\Delta'} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\Delta_0}^{(j_2)}, \text{Ker } q_{\Delta''} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}_{\Delta_0}^{(j_1)}$ . Wystarczy więc wykazać ich spójność.

Założmy przez sprzeczność, że bigrafy  $\Delta^{(j_1)}$  oraz  $\Delta^{(j_2)}$  nie są spójne. Ponieważ podbigraf  $\tilde{\Delta} = \Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest spójny, więc nie istnieją krawędzie łączące wierzchołek  $a_{j_1}$  z wierzchołkami bigrafu  $\tilde{\Delta}$  oraz nie istnieją krawędzie łączące wierzchołek  $a_{j_2}$  z wierzchołkami bigrafu  $\tilde{\Delta}$ , tzn.  $d_{j, j_1}^{\Delta} = 0$  oraz  $d_{j, j_2}^{\Delta} = 0$ , dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$ .

Jeśli  $\check{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \check{\mathbf{h}}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^n$  są wektorami otrzymanymi z wektorów  $\mathbf{h}^{(j_1)}$  oraz  $\mathbf{h}^{(j_2)}$  przez pominięcie współrzędnych  $j_2, j_1$ , to

$$0 = q_{\Delta}(\mathbf{h}^{(j_1)}) = q_{\tilde{\Delta}}(\check{\mathbf{h}}^{(j_1)}) + 1 \text{ oraz } 0 = q_{\Delta}(\mathbf{h}^{(j_2)}) = q_{\tilde{\Delta}}(\check{\mathbf{h}}^{(j_2)}) + 1,$$

co przeczy dodatniości bigrafu  $\tilde{\Delta}$ . Udowodniliśmy więc, że bigrafy  $\Delta^{(j_1)}$  oraz  $\Delta^{(j_2)}$  są spójne, co kończy dowód stwierdzenia (b2), a tym samym dowód (b).

(c) Założmy, że  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  są słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnymi spójnymi nieujemnymi bigrafami korangi dwa. Założmy również, że istnieje słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  zdefiniowana przez macierz  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$ , tzn.  $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B$ . Z dowodu części (b) oraz z lematu 3.51 wynika, że ograniczenie izomorfizmu grup  $h := \check{h}_B : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}, v \mapsto v \cdot B^{tr}$ , do podgrupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$  definiuje izomorfizm grup  $\check{h} : \text{Ker } q_{\Delta} \rightarrow \text{Ker } q_{\Delta'}$  oraz przemienny jest następujący diagram

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } q_{\Delta} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^{n+2} & \xrightarrow{p_n} & M_n \\ & & \downarrow h & \swarrow q_{\Delta} \quad \searrow \check{q}_{\Delta} & \downarrow \check{h} \\ \check{h} \cong & & \mathbb{Z} & & \\ & & \downarrow h & \swarrow q_{\Delta'} \quad \searrow \check{q}_{\Delta'} & \downarrow \check{h} \\ \text{Ker } q_{\Delta'} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}^{n+2} & \xrightarrow{p'_n} & M'_n \end{array} \quad (4.12)$$

gdzie  $M_n = \mathbb{Z}^{n+2} / \text{Ker } q_{\Delta} \cong \mathbb{Z}^n, M'_n = \mathbb{Z}^{n+2} / \text{Ker } q_{\Delta'} \cong \mathbb{Z}^n$ , funkcje  $p_n$  oraz  $p'_n$  są kanonicznymi homomorfizmami ilorazowymi, funkcje  $\check{q}_{\Delta}$  oraz  $\check{q}_{\Delta'}$  są jednorodnymi funkcjonalami  $\mathbb{Z}$ -kwadratowymi indukowanymi przez funkcjonały  $q_{\Delta}$  oraz  $q_{\Delta'}$  zdefiniowanymi w dowodzie części (b) twierdzenia (zobacz diagram (4.9)), natomiast  $\check{h} : M_n \rightarrow M'_n$  jest izomorfizmem grup indukowanym przez  $h$  zdefiniowanym wzorem  $\check{h}(\bar{v}) = \overline{\check{h}(v)} = p'_n(h(v))$ , dla dowolnej warstwy  $\bar{v} = v + \text{Ker } q_{\Delta}$  w grupie ilorazowej  $M_n$ . Łatwo udowodnić, że wszystkie trójkąty i wszystkie kwadraty w diagramie (4.12) są diagramami przemiennymi.

Aby uprościć zapis formuł w dowodzie stwierdzenia (c) zakładamy, że  $j_1 = 1, j_2 = 2, i_1 = 3, \dots, i_n = n+2$  oraz  $j'_1 = n+1, j'_2 = n+2, i'_1 = 1, \dots, i'_n = n$ . Na podstawie (b2), istnieją rozkłady na sumy proste grup

$$\mathbb{Z}^{n+2} = \text{Ker } q_{\Delta} \oplus \mathbb{Z} \cdot e_3 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_{n+2} \text{ oraz } \mathbb{Z}^{n+2} = \text{Ker } q_{\Delta'} \oplus \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n.$$

Stąd wynika, że każda z grup  $M_n$  oraz  $M'_n$  jest wolna rangi  $n \geq 1$  oraz zbiory wektorów  $\mathbf{e} = \{\bar{e}_3, \dots, \bar{e}_{n+2}\} \subset M_n, \mathbf{e}' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset M'_n$  są wolnymi  $\mathbb{Z}$ -bazami grup  $M_n$  oraz  $M'_n$ , odpowiednio.

Niech  $G_q^e, G_{q'}^{e'} \in \text{Gl}(n, \mathbb{Q})$  będą symetrycznymi macierzami Grama indukowanych odwzorowań kwadratowych  $q := \check{q}_{\Delta} : M_n \rightarrow \mathbb{Z}$  oraz  $q' := \check{q}_{\Delta'} : M'_n \rightarrow \mathbb{Z}$  (4.9) odpowiednio względem  $\mathbb{Z}$ -bazy  $\mathbf{e}$  oraz  $\mathbf{e}'$ . Oznaczmy symbolem  $C \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  macierz izomorfizmu  $\check{h}$  względem  $\mathbb{Z}$ -baz  $\mathbf{e} \subseteq M_n$  oraz  $\mathbf{e}' \subseteq M'_n$ . Na podstawie odpowiedniego twierdzenia znanego z wykładu algebry liniowej zachodzi równość  $G_{q'}^{e'} = C^{tr} \cdot G_q^e \cdot C$ .

Ponieważ  $G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} = G_{\Delta^{(1, 2)}} = G_q^e$  oraz  $G_{\Delta^{(j'_1, j'_2)}} = G_{\Delta^{(n+1, n+2)}} = G_q^{e'}$  (na podstawie (b1)), więc  $G_{\Delta^{(j'_1, j'_2)}} = G_q^{e'} = C^{tr} \cdot G_q^e \cdot C = C^{tr} \cdot G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} \cdot C$ , co oznacza, że macierz  $C$  definiuje  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(j'_1, j'_2)}$ , a tym samym kończy dowód stwierdzenia (c) i dowód twierdzenia.  $\square$

**Wniosek 4.13.** Załóżmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach. Jeśli  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$  oraz  $\mathbf{h}^{(j'_1)}, \mathbf{h}^{(j'_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  inną  $(j'_1, j'_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą tej grupy, to podgrafy krawędziowo-dwudzielne  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  oraz  $\Delta^{(j'_1, j'_2)}$  bigrafu  $\Delta$  są słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentne, tzn.  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(j'_1, j'_2)}$ .

*Dowód.* Stosując twierdzenie 4.8 i jego dowód do bigrafu  $\Delta' = \Delta$  korangi dwa bez pętli z  $(j'_1, j'_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą  $\mathbf{h}^{(j'_1)}, \mathbf{h}^{(j'_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$  oraz do macierzy  $B = E$  otrzymamy  $h = id$  w przemiennym diagramie (4.12) i słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(j'_1, j'_2)}$ .  $\square$

Algorytm konstruujący  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$  spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta$  korangi dwa bez pętli realizujący procedurę opisaną w dowodzie twierdzenia 4.8, przedstawiamy w następnym podrozdziale jako algorytm 4.14.

### 4.3. Obliczanie specjalnej $\mathbb{Z}$ -bazy jądra bigrafów korangi dwa

Przedstawimy teraz algorytm 4.14, który wyznacza specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę jądra  $\text{Ker } q_{\Delta}$  funkcjonału Grama  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta$  korangi dwa bez pętli. Algorytm ten odgrywa istotną rolę w konstruowanych przez nas algorytmach do analizy spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta$  korangi dwa bez pętli.

W jego konstrukcji stosujemy metody przedstawione w dowodzie twierdzenia 4.8, zobacz też [98, Algorithm 3.6].

**Algorytm 4.14.** **DANE** Liczba całkowita  $n \geq 1$  oraz macierz Grama  $\check{G}_{\Delta} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli korangi dwa.

**WYNIK** Specjalna  $\mathbb{Z}$ -baza  $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}^{(i_1)}, \mathbf{h}^{(i_2)}\}$  grupy  $\text{Ker } q_{\Delta} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ , gdzie  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest funkcjonałem Grama bigrafu  $\Delta$ , tj.  $q_{\Delta}(v) = v \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot v^{tr}$  dla  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$ .

**KROK 1.** Przyjmujemy  $\widehat{G}_{\Delta} := \check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ .

**KROK 2.** Szukamy głównego podgrafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta'$  bigrafu  $\Delta$  (na podstawie twierdzenia 4.8, taki główny podgraf krawędziowo-dwudzielny zawsze istnieje) w następujący sposób:

**KROK 2.1.** przyjmujemy  $i := 1$  oraz  $\widehat{G}_{\Delta'} := \widehat{G}_{\Delta}$ ,

**KROK 2.2.** usuwamy pierwszy wiersz oraz pierwszą kolumnę z  $\widehat{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_{n+3-i}(\mathbb{Z})$ ,

**KROK 2.3.** jeśli rząd macierzy  $\widehat{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_{n+2-i}(\mathbb{Z})$  jest równy  $n - i + 1$ , przechodzimy do kroku 3,

**KROK 2.4.** przyjmujemy  $i := i + 1$  i przechodzimy do kroku 2.2.

**KROK 3.** Rozwiązujemy całkowitoliczbowo układ  $n + 2 - i$  równań liniowych

$$\widehat{G}_{\Delta'} \cdot \mathbf{h}^{tr} = 0, \quad (4.15)$$

korzystając z całkowitoliczbowej eliminacji Gaussa. Ponieważ bigraf  $\Delta'$  jest główny, więc  $\mathbf{h} \neq 0$  (definicja 3.12(d)). Jeśli  $\text{NWD}(\mathbf{h}) \neq 1$ , to przyjmujemy  $\mathbf{h} := \frac{\mathbf{h}}{\text{NWD}(\mathbf{h})}$ .

**KROK 4.** Wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^{n+2-i}$  będący rozwiązaniem układu (4.15) jest generatorem grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'} \subset \mathbb{Z}^{n+2-i}$  (zobacz (3.26) w dowodzie lematu 3.21(b) oraz twierdzenie 4.8), zatem na podstawie twierdzenia 3.63(b) istnieje indeks  $j$  taki, że  $\mathbf{h}_j = \pm 1$ .

4.3. Obliczanie specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy jądra bigrafów korangi dwa

**KROK 5.** Przyjmujemy  $i_2 = j + i$  oraz  $\hat{\mathbf{h}} := [0, \dots, 0, \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$ .

**KROK 6.** Definiujemy macierz  $\hat{G}_\Delta^{[i_2]} := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr}$  oraz zerujemy w niej wiersz  $i_2$  oraz kolumnę  $i_2$ .

**KROK 7.** Rozwiązujemy całkowitoliczbowo układ  $n + 2$  równań liniowych  $\hat{G}_\Delta^{[i_2]} \cdot \mathbf{h}'^{tr} = 0$ . Analogicznie jak w kroku 4, ponieważ bigraf  $\Delta^{(i_2)}$  powstały z  $\Delta$  po usunięciu wierzchołka  $i_2$  jest główny (zobacz twierdzenie 4.8), więc istnieje indeks  $i_1$ , dla którego  $\mathbf{h}'_{i_1} = \pm 1$ . Jeśli  $\mathbf{h}'_{i_1} = -1$ , to przyjmujemy  $\mathbf{h}' := -\mathbf{h}'$ .

**KROK 8.** Przyjmujemy  $\mathbf{h}^{(i_1)} := \mathbf{h}'$  oraz  $\mathbf{h}^{(i_2)} := \hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_{i_1} \cdot \mathbf{h}^{(i_1)}$ . Jeśli  $i_1 > i_2$ , zamieniamy  $\mathbf{h}^{(i_1)}$  oraz  $\mathbf{h}^{(i_2)}$ . Wynikiem jest  $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}^{(i_1)}, \mathbf{h}^{(i_2)}\}$ .

**Fakt 4.16.** Pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu 4.14 jest rzędu  $O(n^4)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Aby uzasadnić złożoność obliczeniową algorytmu 4.14 zauważmy, że w algorytmie 4.14 używamy całkowitoliczbowej eliminacji Gaussa

- w kroku 2.3 do obliczenia rzędu macierzy,
- w krokach 3 oraz 7 do rozwiązywania całkowitoliczbowo układów odpowiednio  $n + 2 - i$  oraz  $n + 2$  równań liniowych.

Ponieważ w całkowitoliczbowej eliminacji Gaussa używa się  $O(n^3)$  operacji arytmetycznych, więc pesymistyczna złożoność obliczeniowa kroku 2.3, 3 oraz kroku 7 algorytmu 4.14 względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych jest rzędu  $O(n^3)$ . Ponadto

- krok 2.3 powtarzamy co najwyżej  $n$  razy (bigraf główny  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2-i}$  ma co najmniej dwa wierzchołki), a stąd krok 2 ma złożoność rzędu  $O(m^4)$ ,
- krok 6 ma złożoność rzędu  $O(m^2)$ , ponieważ dodanie dwóch macierzy wymiaru  $n + 2$  wymaga użycia  $(n + 2)^2$  dodawań liczb,
- krok 8 wymaga użycia  $n + 2$  operacji mnożenia oraz odejmowania liczb,

co sumarycznie daje złożoność rzędu  $O(m^4)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.  $\square$

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu 4.14 do obliczenia specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy  $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}^{(i_1)}, \mathbf{h}^{(i_2)}\}$  grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ , gdzie  $q_\Delta: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest funkcjonałem Grama nieujemnego bigrafu korangi dwa  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli.

**Przykład 4.17.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym

$$\Delta: \begin{array}{c} 3 \\ \vdots \\ 5 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} 4, \text{ oraz } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}), G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Ponieważ rząd macierzy  $G_\Delta$  jest równy  $\text{rz}_{\mathbb{Q}}(G_\Delta) = 3$ , oraz funkcjonał Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  można przedstawić w następującej postaci

$$q_\Delta(x) = \left(x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_4}{2} + \frac{x_5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(x_2 - \frac{2x_3}{3} - \frac{x_4}{3} - x_5\right)^2 + \frac{2}{3} (x_3 - x_4)^2,$$

więc łatwo sprawdzić, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa (zobacz fakt 3.17).

**KROK 1.** Przyjmujemy

$$\hat{G}_\Delta := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$



**KROK 2.** Szukamy głównego podgrafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta'$  bigrafu  $\Delta$ , tj.:

**KROK 2.1.** przyjmujemy  $i := 1$  oraz  $\widehat{G}_{\Delta'} := \widehat{G}_{\Delta}$ ,

**KROK 2.2.** usuwamy pierwszy wiersz oraz pierwszą kolumnę z  $\widehat{G}_{\Delta'}$ , otrzymując

$$\widehat{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}),$$

**KROK 2.3.** sprawdzamy, że rząd macierzy  $\widehat{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z})$  jest równy 3 (ponieważ czwarta kolumna powstaje z pierwszej po przemnożeniu przez  $-1$ ), więc przechodzimy do kroku 3.

**KROK 3.** Rozwiązujemy całkowitoliczbowo układ 4 równań liniowych

$$\widehat{G}_{\Delta'} \cdot \mathbf{h}^{tr} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 - 2\mathbf{h}_4 = 0 \\ -\mathbf{h}_1 + 2\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4 = 0 \\ -\mathbf{h}_2 + 2\mathbf{h}_3 = 0 \\ -2\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + 2\mathbf{h}_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 - 2\mathbf{h}_4 = 0 \\ 3\mathbf{h}_2 - 2\mathbf{h}_3 = 0 \\ \mathbf{h}_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Otrzymujemy  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_3 = 0$  oraz  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_4$ . Po podstawieniu  $\mathbf{h}_4 = 1$  wektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^4$  ma następującą postać:  $\mathbf{h} = [1, 0, 0, 1] \in \mathbb{Z}^4$ .

**KROK 4.** Dla wektora  $\mathbf{h} = [1, 0, 0, 1] \in \mathbb{Z}^4$  będącego rozwiązaniem (4.18) oraz  $j = 1$ , spełniona jest równość  $\mathbf{h}_j = 1$ .

**KROK 5.** Przyjmujemy  $i_2 = j + i = 2$  oraz  $\widehat{\mathbf{h}} := [0, 1, 0, 0, 1] \in \mathbb{Z}^5$ .

**KROK 6.** Definiujemy macierz  $\widehat{G}_{\Delta}^{[i_2]} := \check{G}_{\Delta} + \check{G}_{\Delta}^{tr}$  oraz zerujemy w niej wiersz  $i_2$  oraz kolumnę  $i_2$ . Otrzymujemy

$$\widehat{G}_{\Delta}^{[i_2]} := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

**KROK 7.** Rozwiązujemy całkowitoliczbowo układ 5 równań liniowych

$$\widehat{G}_{\Delta}^{[i_2]} \cdot \mathbf{h}'^{tr} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathbf{h}'_1 - \mathbf{h}'_4 + \mathbf{h}'_5 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\mathbf{h}'_3 - \mathbf{h}'_4 + \mathbf{h}'_5 = 0 \\ -\mathbf{h}'_1 - \mathbf{h}'_3 + 2\mathbf{h}'_4 = 0 \\ \mathbf{h}'_1 + \mathbf{h}'_3 + 2\mathbf{h}'_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathbf{h}'_1 - \mathbf{h}'_4 + \mathbf{h}'_5 = 0 \\ 2\mathbf{h}'_3 - \mathbf{h}'_4 + \mathbf{h}'_5 = 0 \\ \mathbf{h}'_4 + \mathbf{h}'_5 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Otrzymujemy  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_4 = -\mathbf{h}_5$ . Po podstawieniu  $\mathbf{h}_5 = 1$ , wektor  $\mathbf{h}' \in \mathbb{Z}^5$  ma następującą postać:  $\mathbf{h}' = [-1, 0, -1, -1, 1] \in \mathbb{Z}^5$ . Ponieważ dla  $i_1 = 1$  spełniona jest równość  $\mathbf{h}'_{i_1} = -1$ , więc przyjmujemy  $\mathbf{h}' := -\mathbf{h}' = [1, 0, 1, 1, -1] \in \mathbb{Z}^5$ .

**KROK 8.** Przyjmujemy  $\mathbf{h}^{(i_1)} := \mathbf{h}' = [1, 0, 1, 1, -1]$  oraz  $\mathbf{h}^{(i_2)} := \widehat{\mathbf{h}} - \widehat{\mathbf{h}}_{i_1} \cdot \mathbf{h}^{(i_1)} = [0, 1, 0, 0, 1]$ , gdzie  $i_1 = 1, i_2 = 2$ . Wynikiem jest (1,2)-specjalna  $\mathbb{Z}$ -baza

$$\mathcal{H} = \{[1, 0, 1, 1, -1], [0, 1, 0, 0, 1]\}$$

grupy  $\text{Ker } q_{\Delta} \subset \mathbb{Z}^5$ .

## 4.4. Typ Dynkina i typ Coxetera-Dynkina bigrafu korangi dwa

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy definicje typu Dynkina oraz typu Coxetera-Dynkina, używane do klasyfikacji Grama bigrafów nieujemnych korangi dwa oraz do spektralnej klasyfikacji Coxetera takich bigrafów. Pojęcia te zostały wprowadzone w artykule Gąsiorek-Simson-Zajac [41, Definition 3.8] jako uogólnienie pewnych koncepcji zawartych w pracy Barot-de la Peña [3] oraz w dwóch naszych artykułach [39, 40] poświęconych spektralnej klasyfikacji Coxetera zbiorów częściowo uporządkowanych korangi co najwyżej dwa.



#### 4.4. Typ Dynkina i typ Coxetera-Dynkina bigrafu korangi dwa

- Definicja 4.20.** (a) *Typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$  spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach nazywamy diagram Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$  taki, że  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D_n$ .*
- (b) *Typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$  spójnego głównego bigrafu  $\Delta$  o  $n + 1 \geq 2$  wierzchołkach względem  $j_1$ -specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  rangi jeden nazywamy diagram Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach taki, że  $\Delta^{(j_1)} \sim_{\mathbb{Z}} D_n$ .*
- (c) *Założmy, że  $n \geq 1$  jest liczbą naturalną oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach. **Typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  nazywamy diagram Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  taki, że  $D_n$  jest słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z bigrafem  $\Delta^{(j_1, j_2)}$ , powstałym z  $\Delta$  względem  $(j_1, j_2)$ -specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa.***
- (d) *Typem Coxetera-Dynkina bigrafu spójnego nieujemnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli nazywamy parę  $\mathbf{CDtype}_\Delta = (\mathbf{specc}_\Delta, \mathbf{Dyn}_\Delta)$ , gdzie  $\mathbf{specc}_\Delta \subset \mathcal{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  jest spektrum Coxetera bigrafu  $\Delta$  oraz  $\mathbf{Dyn}_\Delta$  jest jego typem Dynkina.*

W następującym lemacie dowodzimy, że definicje typu Dynkina oraz typu Coxetera-Dynkina są poprawne, zobacz [41, Lemma 3.9].

- Lemat 4.21.** (a) *Typ Dynkina  $D = \mathbf{Dyn}_\Delta$  dowolnego spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach istnieje oraz jest wyznaczony jednoznacznie przez  $\Delta$ , z dokładnością do numeracji wierzchołków diagramu Dynkina  $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ .*
- (b) *Założmy, że  $n \geq 1$  jest liczbą naturalną oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach.*
- (b1) *Typ Dynkina  $D = \mathbf{Dyn}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  istnieje oraz nie zależy od wyboru  $(j_1, j_2)$ -specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa, z dokładnością do numeracji wierzchołków diagramu Dynkina  $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ .*
- (b2) *Jeśli  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójny oraz  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , to  $\Delta'$  jest nieujemny korangi dwa oraz  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ .*
- (b3) *Jeśli  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójny oraz  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , to  $\Delta'$  jest nieujemny korangi dwa oraz  $\mathbf{CDtype}_\Delta = \mathbf{CDtype}_{\Delta'}$ .*

*Dowód.* (a) Na podstawie twierdzenia 3.64(a), dla dowolnego spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach istnieje diagram Dynkina  $D$  taki, że  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$  oraz diagram (3.60) jest przemienny, w którym  $\Delta' = D$ . Stąd wynika, że  $|\mathcal{R}_\Delta| = |\mathcal{R}_D|$ . Jeśli istnieje inny diagram Dynkina  $D'$  taki, że  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D'$ , to liczby wierzchołków bigrafów  $\Delta, D$  oraz  $D'$  są identyczne oraz  $|\mathcal{R}_D| = |\mathcal{R}_\Delta| = |\mathcal{R}_{D'}|$ . Stąd wynika, że grafy Dynkina  $D$  oraz  $D'$  są izomorficzne (na podstawie twierdzenia 3.35 zawierającego liczby pierwiastków poszczególnych diagramów Dynkina), co kończy dowód stwierdzenia (a).

(b1) Na podstawie twierdzenia 4.8, grupa  $\text{Ker } q_\Delta$  posiada  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę oraz bigraf  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  jest spójny i dodatni. Zatem na podstawie (a) typ Dynkina  $\mathbf{Dyn}_{\Delta^{(j_1, j_2)}}$  bigrafu  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  istnieje oraz graf Dynkina  $\mathbf{Dyn}_{\Delta^{(j_1, j_2)}}$  jest wyznaczony jednoznacznie, z dokładnością do numeracji wierzchołków, przez bigraf  $\Delta^{(j_1, j_2)}$ . Przyjmujemy  $\mathbf{Dyn}_\Delta := \mathbf{Dyn}_{\Delta^{(j_1, j_2)}}$ . Na podstawie wniosku 4.13, graf Dynkina  $D = \mathbf{Dyn}_{\Delta^{(j_1, j_2)}}$  nie zależy od wyboru  $(j_1, j_2)$ -specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ , z dokładnością do izomorfizmu grafów.

(b2) Założmy, że  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  są spójne bez pętli, bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa oraz  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ . Na podstawie lematu 3.51 i przemienności diagramu (3.52) bigraf  $\Delta'$  jest nieujemny korangi dwa. Ustalmy  $(j'_1, j'_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\mathbf{h}^{(j'_1)}, \mathbf{h}^{(j'_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ . Na podstawie twierdzenia 4.8(c), istnieje słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(j'_1, j'_2)}$ , a na podstawie stwierdzenia (a) typ Dynkina bigrafu  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  jest równy typowi Dynkina bigrafu  $\Delta^{(j'_1, j'_2)}$ , z dokładnością do izomorfizmu grafów. Zatem  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ , co kończy dowód stwierdzenia (b2).

(b3) Jeśli  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójny oraz  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , to na podstawie twierdzenia 3.53 istnieje słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  oraz  $\mathbf{specc}_{\Delta} = \mathbf{specc}_{\Delta'}$ . Na podstawie lematu 3.51 i przemienności diagramu (3.52) bigraf  $\Delta'$  jest również nieujemny korangi dwa. Zatem uwzględniając (b2), otrzymujemy równość  $\mathbf{CDtype}_{\Delta} = \mathbf{CDtype}_{\Delta'}$ , co kończy dowód lematu.  $\square$

**Wniosek 4.22.** Jeśli  $\widetilde{D}_n^2$  jest jednym z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{A}_n^2, n \geq 1, \widetilde{D}_n^2, n \geq 4, \widetilde{E}_6^2, \widetilde{E}_7^2, \widetilde{E}_8^2$ , to  $\widetilde{D}_n^2$  jest nieujemny korangi dwa oraz typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_{\widetilde{D}_n^2}$  jest podbigraf Dynkina  $D_n$  otrzymany z  $\widetilde{D}_n^2$  przez opuszczenie podbigrafu Kroneckera  $\bullet \text{---} \square \text{---} \bullet$ .

*Dowód.* Na podstawie twierdzenia 4.4, spójny bigraf  $\Delta = \widetilde{D}_n^2$  jest nieujemny korangi dwa oraz wektory  $\mathbf{h}_{\widetilde{D}_n^2}^{(1)}, \mathbf{h}_{\widetilde{D}_n^2}^{(2)}$  przedstawione w punktach (i)-(v) dowodu twierdzenia 4.4 tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\widetilde{D}_n^2}$ , gdzie  $j_1 = n + 1$  and  $j_2 = n + 2$ . Ponieważ  $\Delta^{(j_1, j_2)} = D_n$ , więc  $\mathbf{Dyn}_{\widetilde{D}_n^2} = D_n$ .  $\square$

**Przykład 4.23.** Rozważmy następujący graf krawędziowo-dwudzielny

$$\Delta : \begin{array}{ccc} 3 & \text{---} & 4 \\ | & \diagdown & / \\ 1 & \text{---} & 5 \\ | & \diagup & \backslash \\ 2 & \text{---} & 6 \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \text{Cox}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ funkcjonal Grama  $q_{\Delta} : \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  jest równy

$$q_{\Delta}(x) = \frac{1}{4} (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6)^2 + \frac{1}{6} (2x_3 - x_4 - x_5 - x_6)^2 + \frac{1}{2} (x_4 - x_5 + x_6)^2,$$

więc bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa, oraz wektory

$$\mathbf{h}^{(4)} = [1, 1, 1, 1, 1, 0], \quad \mathbf{h}^{(6)} = [1, 1, 1, 0, 1, 1]$$

tworzą  $(4, 6)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ . Stąd typ Dynkina bigrafu  $\Delta$  jest równy

$$\mathbf{Dyn}_{\Delta} = \Delta^{(4,6)} = \mathbb{D}_4: \begin{array}{c} 3 \\ | \\ 2 \text{---} 1 \text{---} 5 \end{array}.$$

Wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\Delta}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  bigrafu  $\Delta$  jest równy

$$\text{cox}_{\Delta}(t) = t^6 - 2t^5 - t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^4 (t + 1)^2,$$

więc typ Coxetera-Dynkina jest następującą parą:  $\mathbf{CDtype}_{\Delta} = (\{-1, -1, 1, 1, 1, 1\}, \mathbb{D}_4)$ .

Ponieważ  $\text{cox}_{\widetilde{D}_4^2}(t) = t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 - t + 1$ , więc

$$\mathbf{CDtype}_{\Delta} \neq \mathbf{CDtype}_{\widetilde{D}_4^2} = (\{-1, -1, 1, 1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}, \mathbb{D}_4).$$

## Rozdział 5

# Klasyfikacja Grama nieujemnych bigrafów korangi dwa. Konstrukcja pierwiastkowa

W niniejszym rozdziale podajemy pełne rozwiązanie problemu klasyfikacyjnego (problem 1.3) dla klasy wszystkich spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$ .

Udowodnimy m.in., że rodziną klasyfikującą (z dokładnością do słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama) takie bigrafy jest pięcioelementowa rodzina rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \widetilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2$  przedstawionych w tabeli 4.2 w podrozdziale 4.1.

W podrozdziale 5.1 przedstawiamy twierdzenie 5.1(a) klasyfikujące wszystkie spójne nieujemne bigrafy korangi dwa bez pętli. W dowodzie twierdzenia 5.1(b) podajemy sposób konstrukcji macierzy definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama dla pary słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli.

W podrozdziale 5.2 podajemy konstrukcję pierwiastkową (konstrukcja 5.5), umożliwiającą konstrukcję spójnego nieujemnego bigrafu korangi dwa bez pętli, na podstawie trójki  $(\Delta', u, w)$ , gdzie  $\Delta'$  jest spójnym dodatnim bigrafem bez pętli, a wektory  $u, w \in \mathbb{Z}^n$  są parą pierwiastków funkcjonału Grama  $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta'$ .

W podrozdziale 5.3 pokazujemy, że dowolny spójny nieujemny bigraf korangi dwa bez pętli można uzyskać stosując przedstawioną konstrukcję 5.5. Ponadto konstrukcję tę stosujemy w podrozdziale 5.5 do zbudowania algorytmu inflacyjnego dla spójnych bigrafów korangi dwa bez pętli (algorytm 5.48), zobacz dowód twierdzenia 5.28. Algorytm ten (w czasie wielomianowym, zobacz twierdzenie 5.50) wyznacza typ Dynkina (definicja 4.20) spójnego nieujemnego bigrafu korangi dwa bez pętli (zobacz uwaga 5.43) oraz oblicza macierz  $B \in Gl(n+2, \mathbb{Z})$  definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \Delta'$  pomiędzy parą spójnych słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli korangi dwa.

Przedstawiamy też macierzową wersję algorytmu inflacyjnego (zobacz algorytm 5.48), który wyznacza  $\mathbb{Z}$ -odwracalną macierz  $B \in Gl(n+2, \mathbb{Z})$  definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{D}}_n^2$ , gdzie  $\widetilde{\mathbb{D}}_n^2 \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \widetilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2\}$  jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa przedstawionym w tabeli 4.2 (z dokładnością do numeracji wierzchołków).

Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w artykułach [37, 41, 97].

### 5.1. Twierdzenie klasyfikujące

Przedstawimy teraz główne osiągnięcie tego rozdziału oraz jedno z głównych osiągnięć całej rozprawy. Jest nim pełna klasyfikacja klas równoważności spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ .

Klasyfikacja ta jest zawarta w następującym twierdzeniu (opublikowanym w artykule [41]), które jest rozwiązaniem problemu 1.3 dla bigrafów korangi dwa. Jest również

rozszerzeniem na wypadek bigrafów korangi dwa twierdzenia 3.64, zawierającego klasyfikację Grama spójnych dodatnich (tj. korangi zero) oraz głównych (tj. korangi jeden) bigrafów bez pętli.

**Twierdzenie 5.1.** (a) *Spójny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli, o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach, jest nieujemny korangi dwa typu Dynkina  $D_n = \mathbf{Dyn}_\Delta$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozszerzony bigraf Euklidesa*

$$\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$$

oraz słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_n^2$ .

(b) *Jeśli  $\Delta, \Delta'$  jest parą spójnych nieujemnych krawędziowo-dwudzielnych grafów korangi dwa bez pętli o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach, to słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $n \geq 1$  jest liczbą naturalną oraz  $\Delta$  jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach.

(a) „ $\Leftarrow$ ” Z twierdzenia 4.4 wynika, że spójny bigraf  $\tilde{D}_n^2$  jest nieujemny korangi dwa. Zatem z lematu 4.21(b) oraz z istnienia słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_n^2$  wynika, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa. Ponieważ na podstawie wniosku 4.22 otrzymujemy równość  $D_n = \mathbf{Dyn}_{\tilde{D}_n^2}$ , to z lematu 4.21(b) wynika, że  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\tilde{D}_n^2} = D_n$ .

„ $\Rightarrow$ ” Załóżmy, że spójny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa oraz  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n \in \{A_n, D_n, E_6, E_7, E_8\}$  jest typem Dynkina. Ponieważ na podstawie wniosku 4.22 bigraf  $\tilde{D}_n^2$  jest nieujemny korangi dwa oraz  $D_n = \mathbf{Dyn}_{\tilde{D}_n^2}$ , to dowodzona implikacja jest konsekwencją stwierdzenia (b) udowodnionego poniżej.

(b) Na podstawie lematu 4.21(b), istnienie słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  implikuje równość  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ .

Aby udowodnić implikację przeciwną załóżmy, że  $\Delta$  oraz  $\Delta'$  są spójnymi nieujemnymi bigrafami korangi dwa oraz  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ . Ustalmy  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  oraz  $(j'_1, j'_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\mathbf{h}'^{(j'_1)}, \mathbf{h}'^{(j'_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  grupy  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ . Wprost z definicji typu Dynkina bigrafu wynika, że założenie  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$  implikuje istnienie słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'^{(j'_1, j'_2)}$ . Ponieważ  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta'' \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'''$  danych bigrafów  $\Delta'', \Delta'''$  jest niezmiennicza względem permutacji wierzchołków tych bigrafów, więc bez utraty ogólności rozważań, możemy założyć, że  $(j_1, j_2) = (n + 1, n + 2)$  oraz  $(j'_1, j'_2) = (n + 1, n + 2)$ .

Niech  $C \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  będzie macierzą definiującą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta^{(j_1, j_2)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'^{(j'_1, j'_2)}$  oraz utwórzmy nową macierz  $\hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n + 2, \mathbb{Z})$ . Stosując (4.10), otrzymujemy równości

$$H \cdot G_\Delta \cdot H^{tr} = \left[ \begin{array}{c|cc} G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}) \text{ oraz } H' \cdot G_{\Delta'} \cdot H'^{tr} = \left[ \begin{array}{c|cc} G_{\Delta'^{(j'_1, j'_2)}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}),$$

gdzie

$$H := \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \mathbf{h}^{(n+1)} \\ \mathbf{h}^{(n+2)} \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n + 2, \mathbb{Z}), \text{ oraz } H' := \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \mathbf{h}'^{(n+1)} \\ \mathbf{h}'^{(n+2)} \end{bmatrix} \in \text{Gl}(n + 2, \mathbb{Z}).$$

Zatem, po uwzględnieniu równości  $G_{\Delta'^{(j'_1, j'_2)}} = C^{tr} \cdot G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} \cdot C$ , otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} \hat{C}^{tr} \cdot (H \cdot G_\Delta \cdot H^{tr}) \cdot \hat{C} &= \hat{C}^{tr} \cdot \left[ \begin{array}{c|cc} G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \hat{C} = \left[ \begin{array}{c|cc} C^{tr} \cdot G_{\Delta^{(j_1, j_2)}} \cdot C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} G_{\Delta'^{(j'_1, j'_2)}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \\ &= H' \cdot G_{\Delta'} \cdot H'^{tr}, \end{aligned}$$

z których wynika:

### 5.1. Twierdzenie klasyfikujące

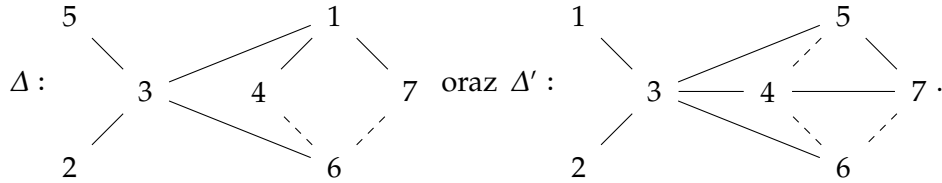
$$G_{\Delta'} = H'^{-1} \cdot (\widehat{C}^{tr} \cdot (H \cdot G_{\Delta} \cdot H^{tr}) \cdot \widehat{C}) \cdot H'^{-tr} = (H^{tr} \cdot \widehat{C} \cdot H'^{-tr})^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot (H^{tr} \cdot \widehat{C} \cdot H'^{-tr}) = B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B,$$

gdzie  $B := H^{tr} \cdot \widehat{C} \cdot H'^{-tr} \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$ . Udowodniliśmy więc, że  $\mathbb{Z}$ -odwracalna macierz  $B$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , co kończy dowód stwierdzenia (b), a tym samym dowód całego twierdzenia.  $\square$

**Uwaga 5.2.** Klasyfikacja spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi  $\geq 3$  bez pętli, analogiczna do przedstawionej w twierdzeniu 5.1 podana jest w [86, Theorem 2.12].

Następujący przykład ilustruje opisaną w dowodzie twierdzenia 5.1 konstrukcję macierzy  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  dla spójnych bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli, jeśli  $\mathbf{Dyn}_{\Delta} = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ .

**Przykład 5.3.** Rozważmy następujące dwa nieizomorficzne grafy krawędziowo-dwudzielne



Pokażemy, że bigrafy  $\Delta, \Delta'$  są nieujemne korangi dwa oraz ich typy Dynkina są równe  $\mathbf{Dyn}_{\Delta} = \mathbf{Dyn}_{\Delta'} = \mathbb{D}_5$ , a stąd bigrafy  $\Delta, \Delta'$  są słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentne. Ich symetryczne macierze Grama mają postaci:

$$G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\frac{1}{2}\mathbb{Z}), \quad G_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\frac{1}{2}\mathbb{Z}),$$

natomiast funkcjonały kwadratowe  $q_{\Delta}, q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowane są wzorami

$$q_{\Delta}(x) = \frac{1}{4} (2x_1 - x_3 - x_4 - x_7)^2 + \frac{1}{4} (2x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{8} (2x_3 - x_4 - 2x_5 - 2x_6 - x_7)^2 + \frac{1}{40} (5x_4 - 2x_5 + 2x_6 - 3x_7)^2 + \frac{2}{5} (x_5 - x_6 - x_7)^2,$$

$$q_{\Delta'}(x) = \frac{1}{4} (2x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2} (2x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} (x_3 - x_4 - x_5 - x_6)^2 + \frac{1}{2} (x_4 - x_7)^2 + \frac{1}{2} (x_5 - x_6 - x_7)^2.$$

Stąd bigrafy  $\Delta, \Delta'$  są nieujemne korangi dwa, oraz wektory  $\{\mathbf{h}^{(6)}, \mathbf{h}^{(7)}\}, \{\mathbf{h}'^{(6)}, \mathbf{h}'^{(7)}\}$ :

$$\mathbf{h}^{(6)} = [1, 1, 2, 0, 1, 1, 0], \quad \mathbf{h}'^{(6)} = [1, 1, 2, 0, 1, 1, 0],$$

$$\mathbf{h}^{(7)} = [2, 1, 2, 1, 1, 0, 1], \quad \mathbf{h}'^{(7)} = [1, 1, 2, 1, 1, 0, 1],$$

tworzą odpowiednio (6,7)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\text{Ker } q_{\Delta}$  oraz (6,7)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\text{Ker } q_{\Delta'}$ .

Na podstawie twierdzenia 4.8 bigrafy  $\Delta^{(6,7)}, \Delta'^{(6,7)}$  są dodatnie. Korzystając z algorytmu inflacyjnego (zobacz algorytm A.59) pokazujemy, że bigrafy  $\Delta^{(6,7)}, \Delta'^{(6,7)}$  są słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentne z diagramem Dynkina  $\mathbb{D}_5$ , gdzie macierze

$$C_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}), \quad C_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}),$$

definiują odpowiednie słabe  $\mathbb{Z}$ -kongruencje Grama  $\mathbb{D}_5 \sim_{\mathbb{Z}}^{C_\Delta} \Delta^{(6,7)}$  oraz  $\mathbb{D}_5 \sim_{\mathbb{Z}}^{C_{\Delta'}} \Delta'^{(6,7)}$ , a stąd  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'} = \mathbb{D}_5$ . Ponadto macierz

$$C = C_\Delta \cdot C_{\Delta'}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Gl}(5, \mathbb{Z})$$

definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta^{(6,7)} \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'^{(6,7)}$ . Definiujemy  $\mathbb{Z}$ -odwracalne macierze (zobacz dowód twierdzenia 5.1(b))

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Gl}(7, \mathbb{Z}).$$

Z obliczeń przedstawionych w dowodzie twierdzenia 5.1(b) wynika, że macierz

$$B := H^{tr} \cdot \widehat{C} \cdot H'^{-tr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Gl}(7, \mathbb{Z})$$

definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , tzn.  $G_{\Delta'} = B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B$ .

**Uwaga 5.4.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  będzie spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa bez pętli.

(a) Konstrukcję użytą w dowodzie twierdzenia 5.1 oraz zilustrowaną w przykładzie 5.3 można zastosować do zbudowania algorytmu, który umożliwia

- wyznaczenie typu Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$  dla dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli korangi dwa, oraz macierzy definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \widetilde{D}_n^2$  do rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\widetilde{D}_n^2$ .
- skonstruowanie macierzy  $B \in \mathrm{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  dla pary  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  dowolnych spójnych bigrafów korangi dwa bez pętli takich, że  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbf{Dyn}_{\Delta'}$ .

(b) Algorytm opisany w podpunkcie (a) wymaga obliczenia macierzy definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama pomiędzy diagramem Dynkina  $D_n$  a dodatnim podgrafem krawędziowo-dwudzielnym  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  wyznaczonym przez  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathrm{Ker} \, q_\Delta$ . Taką macierz obliczamy używając algorytmu inflacyjnego dla dodatnich bigrafów bez pętli (zobacz algorytm A.59), który wyznacza typ Dynkina dodatniego bigrafu (por. [86, Algorithm 2.16]).

(c) Na podstawie uwagi 5.4(b), naturalne są pytania: czy dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli można zbudować skończony ciąg operatorów inflacji (algorytm inflacyjny zbieżny do jednego z rozszerzonych bigrafów Euklidesa)? oraz: czy taki algorytm wyznacza typ Dynkina?

(d) Pozytywnej odpowiedzi na pytania sformułowane w podpunkcie (d) udzielamy w podrozdziale 5.5 (zobacz dowód twierdzenia 5.28), gdzie konstruujemy algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa bez pętli (zobacz algorytm 5.48), który jest efektywnym sposobem na wyznaczenie typu Dynkina dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu korangi dwa bez pętli (zobacz uwaga 5.43).

(e) Uwagi zawarte w podpunktach (b)–(d) uzasadniają brak potrzeby implementacji żmudnego algorytmu opisanego w podpunkcie (a).



## 5.2. Konstrukcja pierwiastkowa i jej własności

Przedstawimy teraz zapowiadaną we wstępie rozprawy algorytmiczną konstrukcję pierwiastkową  $(\Delta', u, w) \mapsto \Delta'[[u, w]]$ , wprowadzoną w [41, Construction 4.2]. Umożliwia ona konstrukcję dowolnego spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta$  bez pętli korangi dwa o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach, z pewnego dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta'$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach oraz pary pierwiastków  $u, w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  bigrafu  $\Delta'$ .

**Konstrukcja 5.5.** Załóżmy, że  $n + 2 \geq 3$  jest liczbą naturalną oraz dana jest trójka  $(\Delta', u, w)$ , w której  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  jest spójnym dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $n \geq 1$  ponumerowanych wierzchołkach  $a_1, \dots, a_n$  oraz  $u, w$  jest parą pierwiastków bigrafu  $\Delta'$ , tzn. parą niezerowych wektorów  $u, w \in \mathbb{Z}^n$  spełniających równości  $q_{\Delta'}(u) := u \cdot G_{\Delta'} \cdot u^{tr} = 1$  oraz  $q_{\Delta'}(w) := w \cdot G_{\Delta'} \cdot w^{tr} = 1$ .

Dla danej trójki  $(\Delta', u, w)$  konstruujemy graf krawędziowo-dwudzielny

$$\widehat{\Delta}' = (\widehat{\Delta}'_0, \widehat{\Delta}'_1) := \Delta'[[u, w]] \in \mathcal{UBigr}_{n+2} \quad (5.6)$$

bez pętli o  $n + 2 \geq 1$  wierzchołkach następująco.

- (i) Zbiór wierzchołków  $\Delta'_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  powiększamy o dwa nowe wierzchołki  $a_{n+1}$  oraz  $a_{n+2}$ , tzn.  $\widehat{\Delta}'_0 = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}$ .
- (ii) Oznakowanymi krawędziami bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  pomiędzy wierzchołkami  $a_1, \dots, a_n$  są krawędzie bigrafu  $\Delta'$ .
- (iii) Aby zdefiniować krawędzie łączące wierzchołki  $a_1, \dots, a_n$  z wierzchołkami  $a_{n+1}$  oraz  $a_{n+2}$  definiujemy dwa wektory

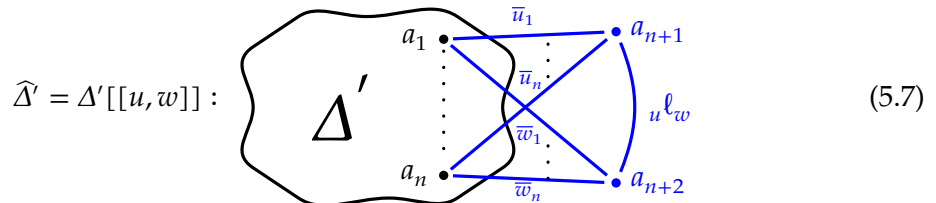
$$\bar{u} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n] := -u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n, \quad \bar{w} = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n] := -w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n,$$

gdzie  $\widehat{G}_{\Delta'} = 2G_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta'} + \check{G}_{\Delta'}^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest podwojoną symetryczną macierzą Grama dodatniego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ . Następnie, zbiór krawędzi zdefiniowanych w (ii) powiększamy o:

- multikrawędzie oznakowane  $a_j \xrightarrow{\bar{u}_j} a_{n+1}$  oraz  $a_j \xrightarrow{\bar{w}_j} a_{n+2}$ , dla każdego wierzchołka  $a_j$  bigrafu  $\Delta'$ , jeśli liczby  $\bar{u}_j$  oraz  $\bar{w}_j$  są różne od zera.
- multikrawędź  $a_{n+1} \xrightarrow{u \ell_w} a_{n+2}$  gdzie  $u \ell_w := u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr}$ . Jeśli  $u \ell_w = 0$ , to wierzchołki  $a_{n+1}$  oraz  $a_{n+2}$  nie są połączone krawędzią.

Przypominamy, że przez multikrawędź  $a \xrightarrow{m} a'$  oznakowaną liczbą  $m \geq 1$  pomiędzy wierzchołkami  $a$  oraz  $a'$  rozumiemy  $m$  przerywanych krawędzi pomiędzy  $a$  oraz  $a'$ , natomiast przez multikrawędź oznakowaną liczbą ujemną  $m \leq -1$  pomiędzy wierzchołkami  $a$  oraz  $a'$  rozumiemy  $-m \geq 1$  krawędzi ciągłych pomiędzy  $a$  oraz  $a'$ .

Następujący schemat graficzny jest ilustracją konstrukcji (5.6)

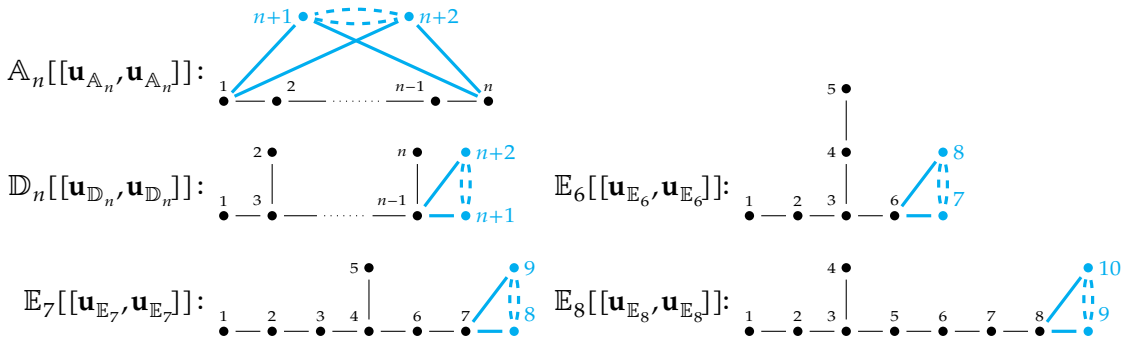


Zanim przedstawimy własności konstrukcji (5.6), podamy dwa przykłady jej zastosowania.

**Przykład 5.8.** Niech  $\Delta' = D_n$  będzie jednym z diagramów Dynkina  $D_n \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach  $a_1, \dots, a_n$  ponumerowanych jak w tabeli 3.32. Niech  $u \in \mathbb{Z}^n$  oraz  $w \in \mathbb{Z}^n$  będą równe maksymalnemu dodatniemu pierwiastkowi  $\mathbf{u}_{D_n} \in \mathbb{Z}^n$  bigrafu  $D_n$  (twierdzenie 3.35(b)), tzn.

$$u = w = \mathbf{u}_{D_n} = \begin{cases} 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 & \text{dla } D_n = \mathbb{A}_n, n \geq 1, \\ 1 \ 2 \ \dots \ 2 \ 1 & \text{dla } D_n = \mathbb{D}_n, n \geq 4, \\ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 & \text{dla } D_n = \mathbb{E}_6, \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 & \text{dla } D_n = \mathbb{E}_7, \\ 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 & \text{dla } D_n = \mathbb{E}_8. \end{cases} \quad (5.9)$$

Graf krawędziowo-dwudzielny  $\widehat{\Delta}' = D_n[[\mathbf{u}_{D_n}, \mathbf{u}_{D_n}]]$  otrzymany w konstrukcji 5.5 jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa, tj.  $D_n[[\mathbf{u}_{D_n}, \mathbf{u}_{D_n}]] \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \widetilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ , gdzie na następujących rysunkach dodane wierzchołki oraz krawędzie wyróżniamy kolorem szarobłękitnym:



**Przykład 5.10.** Rozważmy następujący spójny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_5$  o 5 wierzchołkach bez pętli:

$$\Delta' : \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{ --- } 4 \\ | \\ 5 \\ | \\ 3 \end{array}, \text{ gdzie } \widehat{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

Ponieważ

$$q_{\Delta'}(x) = \frac{1}{4} (2x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 + x_3 - x_4)^2 + \frac{1}{24} (4x_3 - x_4 - 3x_5)^2 + \frac{1}{40} (5x_4 + 3x_5)^2 + \frac{2}{5} x_5^2,$$

więc łatwo sprawdzić, że bigraf  $\Delta'$  jest dodatni. Korzystając z algorytmu inflacyjnego A.59, pokazujemy, że bigraf  $\Delta'$  jest słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z diagramem Dynkina  $\mathbb{D}_5$ , gdzie słabą

$\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\mathbb{D}_5 \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$  definiuje macierz  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$ . Jeśli

w konstrukcji 5.5 za  $u$  oraz  $w$  przyjmiemy następujące pierwiastki  $u := e_3$  oraz  $w := -e_5$  bigrafu  $\Delta'$ , to wektory  $\bar{u}, \bar{w}$  są równe

$$\bar{u} := -u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} = [ -1, 0, -2, 0, 1 ], \quad \bar{w} := -w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} = [ 0, 0, -1, 1, 2 ],$$

oraz  ${}_u \ell_w := u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr} = 1$ . Zatem graf krawędziowo-dwudzielny  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]]$  ma postać

$$\widehat{\Delta}' := \Delta'[[u, w]] : \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{ --- } 4 \\ | \\ 5 \\ | \\ 3 \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\widehat{\Delta}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z}).$$

## 5.2. Konstrukcja pierwiastkowa i jej własności

Proste obliczenia pokazują, że forma kwadratowa  $q_{\widehat{\Delta}}(x)$  definiująca funkcjonal Grama  $q_{\widehat{\Delta}} : \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\widehat{\Delta}$  posiada następującą postać kanoniczną:

$$q_{\widehat{\Delta}} = \frac{1}{4} (2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_6)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 + x_3 - x_4 - x_6)^2 + \frac{1}{24} (4x_3 - x_4 - 3x_5 - 4x_6 - 3x_7)^2 + \frac{1}{40} (5x_4 + 3x_5 + 3x_7)^2 + \frac{2}{5} (x_5 + x_7)^2.$$

Zatem bigraf  $\widehat{\Delta}$  jest nieujemny korangi dwa, oraz (6,7)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}}$  tworzą wektory  $\mathbf{h}^{(6)} = [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{h}^{(7)} = [0, 0, 0, 0, -1, 0, 1]$ . Ponieważ  $\widehat{\Delta}^{(6,7)} = \Delta' \sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{D}_5$ , więc typ Dynkina bigrafu  $\widehat{\Delta}$  jest równy  $\text{Dyn}_{\widehat{\Delta}} = \mathbb{D}_5$ .

Najważniejsze własności konstrukcji 5.5 przedstawiamy w następującym twierdzeniu, udowodnionym w [41, Theorem 4.7]. Ponadto w kolejnym podrozdziale pokażemy, że z dokładnością do numeracji wierzchołków, dowolny spójny bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest postaci  $\Delta = \Delta'[[u, w]]$ , dla pewnej trójki  $(\Delta', u, w)$  o własnościach żądanych w konstrukcji 5.5.

**Twierdzenie 5.11.** *Załóżmy, że  $n \geq 1$  oraz  $(\Delta', u, w)$  jest trójką taką jak w konstrukcji 5.5. Graf krawędziowo-dwudzielny  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]]$  posiada następujące własności.*

(a) *Niesymetryczną macierzą Grama bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  jest macierz*

$$\check{G}_{\widehat{\Delta}'} = \left[ \begin{array}{c|cc} \check{G}_{\Delta'} & \bar{u}^{tr} & \bar{w}^{tr} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 & u \widehat{G}_{\Delta'} w^{tr} \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}), \quad (5.12)$$

gdzie  $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  jest niesymetryczną macierzą Grama dodatniego bigrafu  $\Delta'$  oraz wektory  $\bar{u}, \bar{w} \in \mathbb{Z}^n$  są takie jak w konstrukcji 5.5.

(b) *Bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest spójny, nie posiada pętli, jest nieujemny korangi dwa oraz wektory  $\mathbf{h}_u := [u_1, \dots, u_n, 1, 0]$  oraz  $\mathbf{h}_w := [w_1, \dots, w_n, 0, 1]$  tworzą  $(n+1, n+2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'}$ .*

(c)  *$\Delta'[-u, w] = \mathbf{t}_{a_{n+1}}^- \Delta'[[u, w]]$  oraz  $\Delta'[[u, -w]] = \mathbf{t}_{a_{n+2}}^- \Delta'[[u, w]]$ , tzn. graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta'[-u, w]$  powstaje z bigrafu  $\Delta'[[u, w]]$  przez zamianę znaków wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem  $a_{n+1}$  oraz bigraf  $\Delta'[[u, -w]]$  powstaje z bigrafu  $\Delta'[[u, w]]$  przez zamianę znaków wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem  $a_{n+2}$ .*

*Dowód.* Stwierdzenie (a) otrzymujemy wprost z konstrukcji bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  oraz definicji 3.4(a) niesymetrycznej macierzy Grama  $\check{G}_{\widehat{\Delta}'} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ .

Udowodnimy teraz stwierdzenie (b). Z postaci (5.12) niesymetrycznej macierzy Grama  $\check{G}_{\widehat{\Delta}'}$  wynika, że funkcjonal Grama  $q_{\widehat{\Delta}'} : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\widehat{\Delta}'$  zdefiniowany wzorem  $q_{\widehat{\Delta}'}(x) = x \cdot \check{G}_{\widehat{\Delta}'} \cdot x^{tr}$  ma następującą postać

$$q_{\widehat{\Delta}'}(x) = q_{\Delta'}(\check{x}) + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 - (u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot \check{x}^{tr}) \cdot x_{n+1} - (w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot \check{x}^{tr}) \cdot x_{n+2} + (u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr}) \cdot x_{n+1} x_{n+2}, \quad (5.13)$$

gdzie  $x = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$  oraz  $\check{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{Z}^n$  są wektorami zmiennych. Ponieważ  $u, w \in \mathbb{Z}^n$  są pierwiastkami bigrafu  $\Delta'$ , tzn.  $q_{\Delta'}(u) = q_{\Delta'}(w) = 1$ , to wektory  $\mathbf{h}_u := [u_1, \dots, u_n, 1, 0]$  oraz  $\mathbf{h}_w := [w_1, \dots, w_n, 0, 1]$  należą do jądra  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'}$  funkcjonu  $q_{\widehat{\Delta}'}$ , gdyż:

$$q_{\widehat{\Delta}'}(\mathbf{h}_u) = q_{\widehat{\Delta}'}(u_1, \dots, u_n, 1, 0) = q_{\Delta'}(u) + 1 - (u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot u^{tr}) \cdot 1 = q_{\Delta'}(u) + 1 - 2q_{\Delta'}(u) = 0,$$

$$q_{\widehat{\Delta}'}(\mathbf{h}_w) = q_{\widehat{\Delta}'}(w_1, \dots, w_n, 0, 1) = q_{\Delta'}(w) + 1 - (w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr}) \cdot 1 = q_{\Delta'}(w) + 1 - 2q_{\Delta'}(w) = 0.$$

Stosując argumenty użyte w dowodzie formuły (4.10), otrzymujemy równości

$$H \cdot G_{\widehat{\Delta}'} \cdot H^{tr} = \left[ \begin{array}{c|cc} G_{\Delta'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \text{gdzie } H := \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \mathbf{h}_u \\ \mathbf{h}_w \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Ponieważ macierz  $H \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  jest  $\mathbb{Z}$ -odwracalna oraz bigraf  $\Delta'$  jest dodatnio określony, więc bigraf  $\widehat{\Delta}'$  jest dodatnio półokreślony korangi dwa oraz wektory  $\mathbf{h}_u = (u_1, \dots, u_n, 1, 0)$ ,  $\mathbf{h}_w = (w_1, \dots, w_n, 0, 1) \in \text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'}$  tworzą  $(n+1, n+2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\widehat{\Delta}'}$ .

Aby udowodnić spójność bigrafu  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]]$ , przypomnijmy, że bigraf  $\Delta'$  jest spójny. Wystarczy więc udowodnić, że wierzchołek  $a_{n+1}$  jest połączony krawędzią z pewnym wierzchołkiem  $a_i$  bigrafu  $\Delta'$  oraz wierzchołek  $a_{n+2}$  jest połączony krawędzią z pewnym wierzchołkiem  $a_j$  bigrafu  $\Delta'$  lub z wierzchołkiem  $a_{n+1}$ , zobacz rysunek (5.7). Zauważmy, że gdyby wierzchołek  $a_{n+1}$  lub wierzchołek  $a_{n+2}$  nie był połączony krawędzią z żadnym wierzchołkiem bigrafu  $\Delta'$ , to na podstawie konstrukcji 5.5 otrzymalibyśmy

$$\bar{u} = -u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} = 0 \text{ oraz } \bar{w} = -w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} = 0,$$

co implikuje sprzeczne równości

$$0 = -u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot u^{tr} = -2q_{\Delta'}(u) = -2 \text{ oraz } 0 = -w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr} = -2q_{\Delta'}(w) = -2,$$

ponieważ każdy z wektorów  $u$  oraz  $w$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ , tzn.  $2q_{\Delta'}(u) = 2$  oraz  $2q_{\Delta'}(w) = 2$ . Dowód stwierdzenia (b) został więc zakończony.

(c) Załóżmy tak jak w konstrukcji 5.5, że każdy z wektorów  $u$  oraz  $w$  jest pierwiastkiem bigrafu  $\Delta'$ . Zatem wektory  $-u$  oraz  $-w$  są również pierwiastkami bigrafu  $\Delta'$  oraz prawdziwe są równości

$$\begin{aligned} \overline{(-u)} &:= -(-u) \cdot \widehat{G}_{\Delta'} = [-\bar{u}_1, \dots, -\bar{u}_n], & \overline{(-w)} &:= -(-w) \cdot \widehat{G}_{\Delta'} = [-\bar{w}_1, \dots, -\bar{w}_n], \\ (-u) \ell_w &:= (-u) \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr} = -u \ell_w, & u \ell_{(-w)} &:= u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot (-w)^{tr} = -u \ell_w \end{aligned} \quad (5.15)$$

z których wynika, że bigraf  $\Delta'[-u, w]$  powstaje z bigrafu  $\Delta'[[u, w]]$  przez zamianę na przeciwne znaków wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem  $a_{n+1}$ , oraz bigraf  $\Delta'[[u, -w]]$  powstaje z bigrafu  $\Delta'[[u, w]]$  przez zamianę na przeciwne znaków wszystkich krawędzi incydentnych z wierzchołkiem  $a_{n+2}$ . Zatem pokazaliśmy, że zachodzą równości  $\Delta'[-u, w] = \mathbf{t}_{a_{n+1}}^- \Delta'[[u, w]]$  oraz  $\Delta'[[u, -w]] = \mathbf{t}_{a_{n+2}}^- \Delta'[[u, w]]$ , gdzie  $\mathbf{t}_{a_m}^-$  jest operatorem inflacji w punkcie  $a_m$ , co kończy dowód stwierdzenia (c) oraz całego twierdzenia.  $\square$

### 5.3. Opis struktury krawędziowo-dwudzielnych grafów korangi dwa

W niniejszym podrozdziale opisujemy strukturę dowolnego spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach. W szczególności pokażemy, że (z dokładnością do permutacji zbioru wierzchołków)

$$\Delta = \Delta'[[u, w]],$$

dla pewnego dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  bez pętli oraz pary jego pierwiastków  $u, w \in \mathcal{R}_{\Delta'} = \{v \in \mathbb{Z}^n, q_{\Delta'}(v) = 1\}$ .

**Twierdzenie 5.16.** *Założmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach. Niech  $D_n = \text{Dyn}_{\Delta}$  będzie typem Dynkina bigrafu  $\Delta$ . Załóżmy również, że  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$  oraz  $\Delta' := \Delta^{(j_1, j_2)}$  jest podgrafem krawędziowo-dwudzielnym bigrafu  $\Delta$  otrzymanym z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołków  $a_{j_1}, a_{j_2}$  oraz incydentnych z nimi krawędzi.*

- Bigrafy  $\Delta^{(j_1)}$  oraz  $\Delta^{(j_2)}$  otrzymane z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołków  $a_{j_1}$  oraz  $a_{j_2}$  są spójne, główne (tzn. korangi jeden) oraz słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentne z diagramem Euklidesa  $\widetilde{D}_n$  otrzymanym z diagramu Dynkina  $D_n$  przez naturalne rozszerzenie o jeden wierzchołek (uwaga 4.3).
- Bigraf  $\sigma\Delta$  otrzymany z  $\Delta$  przez transpozycje dwóch par wierzchołków  $a_{j_1}, a_{n+1}$  oraz  $a_{j_2}, a_{n+2}$  ma postać

$$\sigma\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]],$$

gdzie  $u, w \in \mathbb{Z}^n$  są pierwiastkami bigrafu  $\Delta'$  otrzymanymi z wektorów  $\mathbf{h}^{(n+1)}, \mathbf{h}^{(n+2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  przez opuszczenie współrzędnych  $n+1$  oraz  $n+2$ . Ponadto bigrafy główne  $\sigma\Delta^{(n+2)} = \Delta'[[u]]$

### 5.3. Opis struktury krawędziowo-dwudzielnych grafów korangi dwa

oraz  $\sigma\Delta^{(n+1)} = \Delta'[[w]]$  otrzymujemy z bigrafu  $\Delta'[[u, w]]$  przez opuszczenie wierzchołków  $a_{n+2}$  oraz  $a_{n+1}$ , odpowiednio.

*Dowód.* Załóżmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  ponumerowanych wierzchołkach. Na podstawie twierdzenia 4.8 krawędziowo-dwudzielne podgrafy  $\Delta^{(j_1)}$  oraz  $\Delta^{(j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  są spójne oraz główne. Ponadto wektory  $\mathbf{h}_{|\Delta_0^{(j_2)}}^{(j_1)}, \mathbf{h}_{|\Delta_0^{(j_1)}}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+1}$  powstałe z wektorów  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  przez usunięcie odpowiednio współrzędnej  $j_2$  oraz  $j_1$ , tworzą specjalne  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_{\Delta^{(j_1)}}$  oraz  $\text{Ker } q_{\Delta^{(j_2)}}$ , odpowiednio. Stąd otrzymujemy  $\text{Dyn}_{\Delta^{(j_1)}} = \text{Dyn}_{\Delta^{(j_2)}} = \text{Dyn}_{\Delta} = D_n$ . Ponieważ bigrafy  $\Delta^{(j_1)}, \Delta^{(j_2)}$  są główne, to są słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentne z jednym z diagramów Euklidesa  $\tilde{D}_n$  (twierdzenie 3.64(b)), takim, że  $\text{Dyn}_{\tilde{D}_n} = D_n$ . Zatem  $\tilde{D}_n$  jest diagramem Euklidesa otrzymanym z diagramu Dynkina  $D_n = \text{Dyn}_{\Delta}$  przez naturalne rozszerzenie o jeden wierzchołek (uwaga 4.3).

(b) Na podstawie twierdzenia 4.8, grupa  $\text{Ker } q_{\Delta}$  posiada  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  oraz krawędziowo-dwudzielny podgraf  $\Delta' := \Delta^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\Delta$  jest dodatni oraz spójny. Ponieważ wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(j_1)} - e_{j_1} &= [\mathbf{h}_1^{(j_1)}, \dots, \mathbf{h}_{j_1-1}^{(j_1)}, 0, \mathbf{h}_{j_1+1}^{(j_1)}, \dots, \mathbf{h}_{j_2-1}^{(j_1)}, 0, \mathbf{h}_{j_2+1}^{(j_1)}, \dots, \mathbf{h}_{n+2}^{(j_1)}] \in \mathbb{Z}^{n+2} \\ \mathbf{h}^{(j_2)} - e_{j_2} &= [\mathbf{h}_1^{(j_2)}, \dots, \mathbf{h}_{j_1-1}^{(j_2)}, 0, \mathbf{h}_{j_1+1}^{(j_2)}, \dots, \mathbf{h}_{j_2-1}^{(j_2)}, 0, \mathbf{h}_{j_2+1}^{(j_2)}, \dots, \mathbf{h}_{n+2}^{(j_2)}] \in \mathbb{Z}^{n+2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

są pierwiastkami bigrafu  $\Delta$  (zobacz [79, Proposition 2.8(b)]), więc wektory  $u, w \in \mathbb{Z}^n$  otrzymane z wektorów  $\mathbf{h}^{(j_1)} - e_{j_1}, \mathbf{h}^{(j_2)} - e_{j_2}$  przez opuszczenie jego zerowych współrzędnych o indeksach  $j_1$  oraz  $j_2$ , są pierwiastkami bigrafu  $\Delta' = \Delta^{(j_1, j_2)}$ . Zatem funkcjonal Grama  $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta'$  zdefiniowany jest wzorem

$$q_{\Delta'}(x) = q_{\Delta'}(\tilde{x}) + x_{j_1}^2 + x_{j_2}^2 - (u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot \tilde{x}^{tr}) \cdot x_{j_1} - (w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot \tilde{x}^{tr}) \cdot x_{j_2} + (u \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \cdot w^{tr}) \cdot x_{j_1} x_{j_2}, \quad (5.18)$$

gdzie wektor  $\tilde{x} = x^{(j_1, j_2)}$  otrzymujemy z wektora  $x = [x_1, \dots, x_{n+2}]$  przez opuszczenie jego współrzędnych o indeksach  $j_1, j_2$ , zobacz [63, Proposition 3.7(a2)] oraz [40, Theorem 3.4(a)].

Zatem dla  $j_1 = n+1$  oraz  $j_2 = n+2$ , funkcjonal Grama (5.18) jest równy (5.13), a stąd niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_{\sigma\Delta} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\sigma\Delta$  posiada postać blokową (5.12), gdzie  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  jest taką permutacją, że  $\sigma(j_1) = n+1$  oraz  $\sigma(j_2) = n+2$ . W konsekwencji, graf krawędziowo-dwudzielny  $\sigma\Delta$  ma postać  $\sigma\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]]$ . Ponadto wektory  $\mathbf{h}^{(n+1)} := \sigma\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(n+2)} := \sigma\mathbf{h}^{(j_2)}$  tworzą  $(n+1, n+2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\sigma\Delta}$ . Zatem, na podstawie twierdzenia 4.8, krawędziowo-dwudzielne podgrafy  $\sigma\Delta^{(n+2)}$  oraz  $\sigma\Delta^{(n+1)}$  bigrafu  $\sigma\Delta = \Delta'[[u, w]]$  otrzymane przez opuszczenie odpowiednio wierzchołków  $a_{n+2}$  oraz  $a_{n+1}$ , są spójne oraz główne. Korzystając z postaci (5.12) niesymetrycznej macierzy Grama  $\check{G}_{\sigma\Delta} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\sigma\Delta = \widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]]$  pokazujemy, że niesymetryczne macierze Grama bigrafów  $\sigma\Delta^{(n+2)}, \sigma\Delta^{(n+1)}$  są postaci

$$\check{G}_{\Delta'[[u]]} = \left[ \begin{array}{c|c} \check{G}_{\Delta'} & \overline{u}^{tr} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}), \quad \text{oraz} \quad \check{G}_{\Delta'[[w]]} = \left[ \begin{array}{c|c} \check{G}_{\Delta'} & \overline{w}^{tr} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{Z}),$$

co dowodzi równości  $\sigma\Delta^{(n+2)} = \Delta'[[u]]$  oraz  $\sigma\Delta^{(n+1)} = \Delta'[[w]]$  i kończy dowód stwierdzenia (b) oraz całego twierdzenia.  $\square$

Z twierdzenia 5.16 otrzymujemy następujący opis struktury dowolnego spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach, zobacz [41, Corollary 4.12].

**Wniosek 5.19.** *Założmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ . Jeśli  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ , to bigraf  $\Delta$  ma postać*

$$\Delta = \sigma^{-1}\Delta'[[u, w]],$$

gdzie

- $\sigma \in \mathcal{S}_n$  jest taką permutacją, że  $\sigma(j_1) = n + 1$  oraz  $\sigma(j_2) = n + 2$ ,
- $\Delta' := \Delta^{(j_1, j_2)}$  jest podgrafem krawędziowo-dwudzielnym bigrafu  $\Delta$  otrzymanym z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołków  $a_{j_1}, a_{j_2}$  oraz incydentnych z nimi krawędzi,
- $u, w \in \mathbb{Z}^n$  są pierwiastkami bigrafu  $\Delta'$  otrzymanymi z wektorów  $\mathbf{h}^{(j_1)} - e_{j_1}, \mathbf{h}^{(j_2)} - e_{j_2}$  przez opuszczenie jego zerowych współrzędnych o indeksach  $j_1$  oraz  $j_2$ , zobacz (5.17).

**Przykład 5.20.** Rozważmy następujący spójny graf krawędziowo-dwudzielnym.

$$\Delta: \begin{array}{ccccccccc} 1 & \cdots & 3 & - & 4 & - & 6 & - & 7 & - & 9 \\ & \searrow & & & & & & & & & \\ & & 2 & & 5 & & 8 & & & & \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ forma kwadratowa  $q_\Delta(x)$  definiująca funkcjonal Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^9 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  posiada następującą postać kanoniczną:

$$q_\Delta(x) = \frac{1}{4} (2x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{24} (4x_3 - 3x_4 - 3x_5)^2 + \frac{1}{40} (5x_4 + x_5 - 4x_6)^2 + \frac{1}{15} (3x_5 - 2x_6)^2 + \frac{1}{12} (2x_6 - 3x_7 - 3x_8)^2 + \frac{1}{4} (x_7 - x_8 - 2x_9)^2,$$

to bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa, oraz wektory  $\mathbf{h}^{(8)} = [-1, -1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{h}^{(9)} = [-1, -1, 3, 2, 2, 3, 2, 0, 1]$  tworzą (8,9)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ .

Stąd bigraf  $\Delta' = \Delta^{(8,9)}$  jest spójny i dodatni, gdzie

$$\Delta' = \Delta^{(8,9)}: \begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & 3 & - & 4 & - & 6 & - & 7 \\ & \searrow & & & & & & & \\ & & 2 & & 5 & & & & \end{array}, \check{G}_{\Delta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

funkcjonal Grama  $q_{\Delta'}: \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta'$  posiada następującą postać:

$$q_{\Delta'}(x) = \frac{1}{4} (2x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{24} (4x_3 - 3x_4 - 3x_5)^2 + \frac{1}{40} (5x_4 + x_5 - 4x_6)^2 + \frac{1}{15} (3x_5 - 2x_6)^2 + \frac{1}{12} (2x_6 - 3x_7)^2 + \frac{1}{4} x_7^2.$$

oraz wektory  $u = [-1, -1, 3, 2, 2, 3, 1]$ ,  $w = [-1, -1, 3, 2, 2, 3, 2]$  są pierwiastkami bigrafu  $\Delta'$ , tzn.  $q_{\Delta'}(u) = q_{\Delta'}(w) = 1$ . Zatem bigraf  $\Delta$  ma postać  $\Delta = \Delta'[[u, w]]$ .

Ponieważ bigraf  $\Delta'$  jest słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z diagramem Dynkina  $\mathbb{E}_7$ , to  $\text{Dyn}_\Delta = \mathbb{E}_7$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_7 \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(8)}$  oraz  $\tilde{\mathbb{E}}_7 \sim_{\mathbb{Z}} \Delta^{(9)}$ , gdzie macierze

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_9 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

definiują odpowiednie słabe  $\mathbb{Z}$ -równoważności Grama, to zachodzą równości  $G_{\mathbb{E}_7} = B'^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B'$ ,  $G_{\tilde{\mathbb{E}}_7} = B_8^{tr} \cdot G_{\Delta^{(8)}} \cdot B_8$  oraz  $G_{\tilde{\mathbb{E}}_7} = B_9^{tr} \cdot G_{\Delta^{(9)}} \cdot B_9$ .

## 5.4. Algorytm realizujący konstrukcję pierwiastkową

W tym podrozdziale przedstawiamy algorytm 5.22 konstruujący wszystkie spójne nieujemne bigrafy  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$ ,  $n \geq 1$ , korangi dwa bez pętli. W algorytmie 5.22 używamy konstrukcji 5.5 oraz korzystamy z następujących spostrzeżeń.



**Uwaga 5.21.** Załóżmy, że  $n + 2 \geq 3$  jest liczbą naturalną oraz dana jest trójka  $(\Delta', u, w)$ , w której  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  jest spójnym dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $n \geq 1$  ponumerowanych wierzchołkach  $a_1, \dots, a_n$  oraz  $u, w$  jest parą pierwiastków bigrafu  $\Delta'$ .

- (a) Na podstawie twierdzenia 5.16(b), aby obliczyć wszystkie spójne nieujemne bigrafy  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli, do zbioru wynikowego dodajemy bigrafy  $\widehat{\Delta}' := \Delta'[[u, w]]$  (5.6) uzyskane w konstrukcji 5.5 oraz bigrafy  $\sigma\widehat{\Delta}'$  powstałe w wyniku transpozycji każdej pary  $a_{j_1}, a_{n+1}$  oraz  $a_{j_2}, a_{n+2}$  wierzchołków bigrafu  $\widehat{\Delta}' := \Delta'[[u, w]]$ , gdzie  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$ .
- (b) Aby zmniejszyć liczbę obliczeń wykonywanych w algorytmie 5.22, zauważmy, że wektory  $-u$  oraz  $-w$  są pierwiastkami bigrafu  $\Delta'$ . Stąd, na podstawie równości (5.15) do zbioru wynikowego  $\mathcal{UBigr}_{n+2}$  dodajemy bigrafy  $\Delta'[-u, w], \Delta'[u, -w], \Delta'[-u, -w]$ , gdzie wartości  $\overline{(-u)} = -\bar{u}, \overline{(-w)} = -\bar{w}, {}_{(-u)}\ell_w = u\ell_{(-w)} = -u\ell_w, {}_{(-u)}\ell_{(-w)} = u\ell_w$  otrzymujemy na podstawie dowodu twierdzenia 5.11(c).
- (c) Stosując uwagę (b) w algorytmie 5.22, przed zastosowaniem konstrukcji 5.5, dla każdego pierwiastka  $v \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  usuwamy ze zbioru  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  pierwiastek  $-v$ .
- (d) Na podstawie twierdzenia 4.8(c), typ Dynkina  $\mathbf{Dyn}_{\Delta'} = D_n$  (zobacz definicja 4.20) bigrafu  $\widehat{\Delta}' = \Delta'[[u, w]] \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  uzyskanego w konstrukcji 5.5 jest równy typowi Dynkina  $\mathbf{Dyn}_{\Delta'} = D_n$  dodatniego bigrafu  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$ . Dlatego, aby obliczyć zbiór  $\mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_n^2}$  wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\widetilde{D}_n^2$ , rozważamy zbiór  $\mathcal{UBigr}_{D_n}$  wszystkich spójnych dodatnich bigrafów słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z grafem  $D_n$ .

**Algorytm 5.22.** **DANE** Liczba całkowita  $n \geq 1$  oraz zbiór  $\mathcal{UBigr}_{D_n}$  macierzy Grama  $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  wszystkich spójnych dodatnich bigrafów  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z grafem Dynkina  $D_n$ .

**WYNIK** Zbiór  $\mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_n^2}$  macierzy Grama  $\check{G}_{\Delta} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\widetilde{D}_n^2$  o  $n + 2 \geq 3$  ponumerowanych wierzchołkach.

**KROK 1.** Inicjalizujemy puste zbiory **konstrukcja** $_n = \{ \}$  oraz **transpozycje** $_n = \{ \}$ .

**KROK 2.** Dla każdej macierzy Grama  $\check{G}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta'$  ze zbioru  $\mathcal{UBigr}_{D_n}$ :

**KROK 2.1.** Wyznaczamy zbiór  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  pierwiastków bigrafu  $\Delta'$ , zobacz algorytm A.21.

**KROK 2.2.** Dla każdego  $v \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  usuwamy ze zbioru  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  pierwiastek  $-v$ , zobacz uwagę 5.21(c). Obliczamy  $\widehat{G}_{\Delta'} = \check{G}_{\Delta'} + \check{G}_{\Delta'}^{tr} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ .

**KROK 2.3.** Dla każdej pary  $u, w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$  pierwiastków bigrafu  $\Delta'$ :

**KROK 2.3.1.** obliczamy  $\bar{u} = -u \cdot \widehat{G}_{\Delta'}, \bar{w} = -w \cdot \widehat{G}_{\Delta'} \in \mathbb{Z}^n$ , oraz  ${}_u\ell_w = -\bar{u} \cdot w^{tr} \in \mathbb{Z}$ ,

**KROK 2.3.2.** do zbioru **konstrukcja** $_n$  dodajemy macierze Grama  $\check{G}_{\Delta'[[u^*, w^*]]}$  bigrafów

$$\Delta'[[u, w]], \Delta'[[u, w]], \Delta'[[u, -w]], \Delta'[[u, -w]]$$

zdefiniowanych zgodnie z konstrukcją 5.5, to znaczy

$$\check{G}_{\Delta'[[u^*, w^*]]} = \left[ \begin{array}{c|cc} \check{G}_{\Delta'} & * & ** \\ \hline 0 \dots 0 & 1 & *** \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}),$$

gdzie wartości  $(*, **, ***)$  są równe  $(\bar{u}^{tr}, \bar{w}^{tr}, {}_u\ell_w), (-\bar{u}^{tr}, \bar{w}^{tr}, -{}_u\ell_w), (\bar{u}^{tr}, -\bar{w}^{tr}, -{}_u\ell_w)$  oraz  $(-\bar{u}^{tr}, -\bar{w}^{tr}, {}_u\ell_w)$ , odpowiednio, zobacz uwagę 5.21(b).

Krok 2 jest realizacją konstrukcji 5.5 udowodnionej w twierdzeniu 5.11. Stąd zbiór **konstrukcja**<sub>n</sub> zawiera macierze Grama spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli.

**KROK 3.** Dla każdej macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta$  ze zbioru **konstrukcja**<sub>n</sub>:

**KROK 3.1.** dla indeksów  $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ , jeśli macierz  $\check{G}_{\tau\Delta}$  bigrafu  $\tau\Delta$  otrzymanego z bigrafu  $\Delta$  przez transpozycję  $\tau = (j_1, n+1)$  wierzchołków  $a_{j_1}$  oraz  $a_{n+1}$  (zobacz uwaga 5.23), nie należy do zbioru **konstrukcja**<sub>n</sub>, to dodajemy ją do zbioru **transpozycje**<sub>n</sub>,

**KROK 3.1.1.** dla indeksów  $j_2 \in \{j_1+1, \dots, n+1\}$ , jeśli macierz  $\check{G}_{\tau'\tau\Delta}$  bigrafu  $\tau'\tau\Delta$  otrzymanego z bigrafu  $\tau\Delta$  przez transpozycję  $\tau' = (j_2, n+2)$  wierzchołków  $a_{j_2}$  oraz  $a_{n+2}$  (zobacz uwaga 5.23), nie należy do zbioru **konstrukcja**<sub>n</sub>, to dodajemy ją do zbioru **transpozycje**<sub>n</sub>.

Krok 3 jest realizacją twierdzenia 5.16(b), zobacz też uwagę 5.21(a), i pozwala na uzyskanie wszystkich możliwych numeracji wierzchołków spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli.

**KROK 4.** Jako wynik zwracamy zbiór  $\mathcal{UBigr}_{\mathbb{D}_n^2} := \text{konstrukcja}_n \cup \text{transpozycje}_n$ .

**Uwaga 5.23.** Macierz Grama  $\check{G}_{\tau\Delta}$  bigrafu  $\tau\Delta$  otrzymanego w kroku 3.1 algorytmu 5.22 z bigrafu  $\Delta$  przez transpozycję  $\tau = (j_1, n+1)$  wierzchołków  $a_{j_1}$  oraz  $a_{n+1}$ , realizujemy poprzez zamianę kolumny  $j_1$  z kolumną  $n+1$ , wiersza  $j_1$  z wierszem  $n+1$ , a następnie doprowadzamy tak powstałą macierz do postaci górnotrójkątnej, tj. do wartości elementów powyżej przekątnej dodajemy wartości elementów poniżej przekątnej, a następnie zerujemy wartości elementów znajdujących się poniżej przekątnej. Analogicznie postępujemy w kroku 3.1.1 algorytmu 5.22.

### Analiza złożoności obliczeniowej

Przeprowadzimy teraz analizę złożoności obliczeniowej algorytmu 5.22.

**Uwaga 5.24.** (a) Złożoność obliczeniowa kroku 2 algorytmu 5.22 zależy od mocy zbioru  $\mathcal{UBigr}_{D_n}$  podanej w tabeli A.63. Dla każdej z macierzy Grama ze zbioru  $\mathcal{UBigr}_{D_n}$ :

- w kroku 2.1 wykonujemy co najwyżej  $O(13^n \cdot n^2)$  operacji arytmetycznych, zobacz uwaga A.22,
- w kroku 2.2 zmniejszamy moc zbioru  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  o połowę, zobacz uwaga 5.21(c),
- w kroku 2.3.1, dla każdej pary pierwiastków ze zbioru mocy  $\frac{|\mathcal{R}_{\Delta'}|}{2}$  wykonujemy jedno dodawanie macierzy, dwa mnożenia wektora przez macierz oraz jedno mnożenie wektorów, co sumuje się do  $n^2 + n^2 + n^2 + n = 3n^2 + n$  operacji arytmetycznych.

Na podstawie lematu 3.51(c), twierdzenia 3.64 oraz twierdzenia 3.35(a) otrzymujemy równość  $|\mathcal{R}_{\Delta'}| = O(n^2)$ , a stąd pesymistyczna złożoność obliczeniowa kroku 2 algorytmu 5.22 względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych jest równa

$$|\mathcal{UBigr}_{D_n}| \cdot \left[ O(13^n \cdot n^2) + \left( \frac{|\mathcal{R}_{\Delta'}|}{2} \right)^2 \cdot (3n^2 + n) \right] = |\mathcal{UBigr}_{D_n}| \cdot [O(13^n \cdot n^2) + O(n^6)].$$

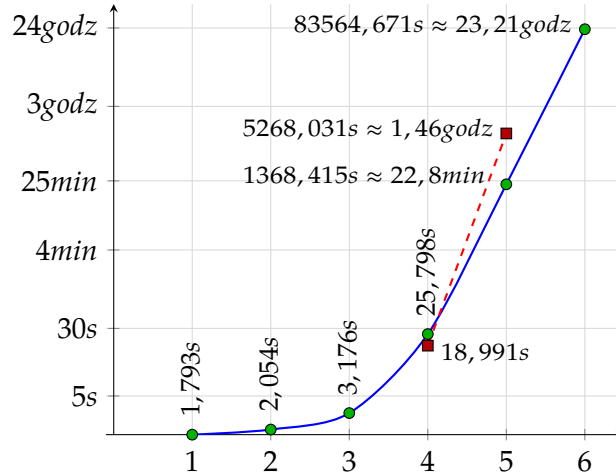
(b) Złożoność obliczeniowa kroku 3 algorytmu 5.22 zależy głównie od mocy zbioru **konstrukcja**<sub>n</sub> obliczonego w kroku 2 algorytmu 5.22, gdzie

| $\text{Dyn}_\Delta = D_n$       | $\mathbb{A}_1$ | $\mathbb{A}_2$ | $\mathbb{A}_3$ | $\mathbb{A}_4$ | $\mathbb{D}_4$ | $\mathbb{A}_5$ | $\mathbb{D}_5$ | $\mathbb{A}_6$ |
|---------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>konstrukcja</b> <sub>n</sub> | 4              | 72             | 2304           | 80 000         | 59 904         | 3 110 400      | 12 083 200     | 135 531 648    |

#### 5.4. Algorytm realizujący konstrukcję pierwiastkową

Zauważmy, że w kroku 3.1 wykonujemy  $n$  operacji transpozycji, a w kroku 3.1.1 wykonujemy co najwyżej  $n \cdot n$  operacji transpozycji dla każdej z macierzy Grama ze zbioru **konstrukcja** $_n$ . Ponieważ operację transpozycji realizujemy przy użyciu  $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$  dodawań liczb (zobacz uwaga 5.23), więc złożoność obliczeniowa względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych kroku 3 jest rzędu  $|\mathbf{konstrukcja}_n| \cdot O(n^4)$ .

Ze względu na czas trwania obliczeń implementacji algorytmu 5.22 oraz dużą moc wynikowych zbiorów, algorytm ten stosujemy dla  $n \leq 5$ .



RYSUNEK 5.25. CZASY WYKONYWANIA ALGORYTMU 5.22 OBLICZAJĄCEGO SPÓJNE NIEUJEMNE BIGRAFY KORANGI DWA BEZ PĘTLI SŁABO  $\mathbb{Z}$ -KONGRUENTNE Z ROZSZERZONYM BIGRAFEM EUKLIDESA  $\tilde{\mathbb{A}}_n^2$  (OZNACZONE ZIEŁONĄ KROPKĄ I POŁĄCZONE NIEBIESKĄ LINIĄ CIĄGLĄ) ORAZ  $\tilde{\mathbb{D}}_4^2, \tilde{\mathbb{D}}_5^2$  (OZNACZONE CZERWONYM KWADRATEM I POŁĄCZONE CZERWONĄ LINIĄ PRZERYWANĄ)

**Uwaga 5.26.** (a) Czasy obliczeń algorytmu 5.22 będącego realizacją pierwiastkowej konstrukcji 5.5 wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli, zaimplementowanego w Pythonie i uruchomionego przy pomocy interpretera PyPy przedstawiamy na wykresie 5.25. Obliczenia zostały wykonane na komputerze wyposażonym w procesor AMD taktowany zegarem 3,6 GHz, wyposażonym w 32GB pamięci RAM.

(b) Ze względu na dużą liczbę wynikowych bigrafów (zobacz tabela 5.27), w praktycznych zastosowaniach algorytm wykonujemy dla bigrafów o małej liczbie wierzchołków. Dla  $n = 6$  oraz  $D_6 = \mathbb{D}_6$  obliczany zbiór

$$UBigr_{\tilde{\mathbb{D}}_n^2} = \{\Delta \in UBigr_{n+2}; \Delta \text{ jest spójny oraz } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{D}}_n^2\},$$

wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\tilde{\mathbb{D}}_n^2$  nie zmieścił się w 32GB pamięci operacyjnej komputera, na których obliczenia były wykonywane.<sup>1</sup> Moc zbiorów wynikowych  $|UBigr_{\tilde{\mathbb{D}}_n^2}|$  prezentujemy w tabeli 5.27.

TABELA 5.27. LICZBA  $|UBigr_{\tilde{\mathbb{D}}_n^2}|$  SPÓJNYCH BIGRAFÓW  $\Delta \in UBigr_{n+2}, n \leq 6$ , KORANGI DWA BEZ PĘTLI, SŁABO  $\mathbb{Z}$ -KONGRUENTNYCH Z  $\tilde{\mathbb{D}}_n^2$

| $\tilde{\mathbb{D}}_n^2$           | $\tilde{\mathbb{A}}_1^2$ | $\tilde{\mathbb{A}}_2^2$ | $\tilde{\mathbb{A}}_3^2$ | $\tilde{\mathbb{A}}_4^2$ | $\tilde{\mathbb{D}}_4^2$ | $\tilde{\mathbb{A}}_5^2$ | $\tilde{\mathbb{D}}_5^2$ | $\tilde{\mathbb{A}}_6^2$ |
|------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $ UBigr_{\tilde{\mathbb{D}}_n^2} $ | 4                        | 104                      | 4480                     | 197920                   | 135520                   | 9408000                  | 31673600                 | 486830848                |

<sup>1</sup>Precyzyjniej: w 32GB pamięci operacyjnej komputera nie zmieścił się nawet zbiór sygnatur wartości nad przekątną macierzy Grama wynikowych bigrafów, czyli wartości funkcji mieszającej (ang. *hash*).

## 5.5. Operatory inflacji w klasyfikacji bigrafów korangi dwa

Celem tego podrozdziału jest budowa efektywnych narzędzi algorytmicznych pozwalających na pełną klasyfikację spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama (problem 1.5).

W tym celu konstruujemy złożony operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^-$  redukujący dowolny spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli do rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{D}_n^2$  przedstawionego w tabeli 4.2 (z dokładnością do numeracji wierzchołków). Konstrukcję takiego złożonego operatora  $\mathbf{t}_\bullet^-$ :

$$\Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_2 b_2}^- (\mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta) \mapsto \dots \mapsto \mathbf{t}_\bullet^- \Delta = \tilde{D}_n^2,$$

przedstawiamy w dowodzie następującego twierdzenia. Opiera się ona na wynikach omówionych w rozdziale 4 oraz twierdzeniu o strukturze spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli, zobacz [97, Theorem 3.7].

**Twierdzenie 5.28.** *Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$ ,  $n \geq 1$ , jest spójnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli o  $m \geq 1$  wierzchołkach. Bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa typu Dynkina  $D_n = \mathbf{Dyn}_\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_k b_k}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$  będący złożeniem skończonej liczby operatorów inflacji*

$$\Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta \mapsto \mathbf{t}_{a_2 b_2}^- (\mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \Delta) \mapsto \dots \mapsto \mathbf{t}_\bullet^- \Delta = \tilde{D}_n^2,$$

redukujący bigraf  $\Delta$  do jednego z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^2, \tilde{\mathbb{E}}_7^2, \tilde{\mathbb{E}}_8^2\}$  przedstawionych w tabeli 4.2.

*Dowód.* Implikacja „ $\Leftarrow$ ” wynika z twierdzenia 3.59 oraz z twierdzenia 5.1. Stąd wystarczy udowodnić implikację „ $\Rightarrow$ ”.

Załóżmy, że  $n \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli korangi dwa oraz  $\Delta_0 = \{1, \dots, n, n+1, n+2\}$ . Niech

$$D_n = \mathbf{Dyn}_\Delta \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\},$$

będzie typem Dynkina bigrafu  $\Delta$ . Załóżmy również, że  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  jest  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Dowód przeprowadzamy w dwóch etapach, w których wyznaczamy złożenie  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \Delta \circ \mathbf{t}_\bullet^- \Delta$  operatorów inflacji redukujące bigraf  $\Delta$  do rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{D}_n^2$ :

$$\Delta \mapsto \dots \mapsto \tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \Delta \mapsto \dots \mapsto \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \circ \mathbf{t}_\bullet^- \Delta = \tilde{D}_n^2.$$

**Etap 1.** Konstruujemy operator  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^-$  będący złożeniem skończonej liczby operatorów inflacji typu  $\mathbf{t}_{ab}^-$ , gdzie  $a, b \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$

$$\Delta \mapsto \dots \mapsto \tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \Delta, \quad (5.29)$$

taki, że podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)}$  bigrafu  $\tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \Delta$  jest diagramem Dynkina  $D_n = \mathbf{Dyn}_\Delta$  o zbiorze wierzchołków  $\tilde{\Delta}_0 = \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  następująco.

Jeśli w bigrafie  $\Delta$  nie ma krawędzi przerywanych postaci  $a_i \text{-----} b_i$ , gdzie  $a_i, b_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$ , to przechodzimy do etapu drugiego. W przeciwnym wypadku przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_i b_i}^-$  oraz  $\tilde{\Delta} := \mathbf{t}_{a_i b_i}^- \Delta$ . Dopóki w bigrafie  $\tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \Delta$  istnieją krawędzie przerywane postaci  $a_\ell \text{-----} b_\ell$ , gdzie  $a_\ell, b_\ell \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$ , to podstawiamy:

$$\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_\ell b_\ell}^- \circ \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \quad \text{oraz} \quad \tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \Delta.$$

Niech  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_k b_k}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$  będzie tak otrzymanym złożonym operatorem inflacji

$$\mathbf{t}_{a_i b_i}^-, \quad \text{gdzie } a_i, b_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}. \quad (5.30)$$

Pokażemy, że dowolny złożony operator inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^-$ , który może zostać użyty w tym etapie składa się ze skończonej liczby co najwyżej  $3 \cdot (n-2) \cdot (n-3)$  operatorów typu (5.30).

## 5.5. Operatory inflacji w klasyfikacji bigrafów korangi dwa

Na podstawie lematu 3.51 oraz twierdzenia 3.59(b), wektory

$$\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(\mathbf{h}^{(j_1)}), \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(\mathbf{h}^{(j_2)}) \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ , gdzie przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+ := \mathbf{t}_{a_k b_k}^+ \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^+$  dla izomorfizmów grup  $\mathbf{t}_{ab}^+ : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  (3.61) przyporządkowujących dowolnemu wektorowi  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$  wektor  $\mathbf{t}_{ab}^+(v) := [w_1, \dots, w_{n+2}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$  zdefiniowany następująco

$$w_a := v_a + d_{ab}^{\tilde{\Delta}} v_b \text{ oraz } w_i := v_i \text{ dla } i \neq a. \quad (5.31)$$

Z doboru operatorów (5.30) oraz definicji (5.31) wektory  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}$  tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ . Na podstawie twierdzenia 4.8 bigraf  $\tilde{\Delta}' := \tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)}$  jest dodatni i spójny. Stąd, jeśli pierwiastek  $v \in \mathcal{R}_{\tilde{\Delta}}$  bigrafu  $\tilde{\Delta}$  ma następującą postać

$$v := [v_1, \dots, v_{j_1-1}, 0, v_{j_1+1}, \dots, v_{j_2-1}, 0, v_{j_2+1}, \dots, v_{n+2}] \in \mathbb{Z}^{n+2}, \quad (5.32)$$

to wektor

$$\check{v} := v^{(j_1, j_2)} = [v_1, \dots, v_{j_1-1}, v_{j_1+1}, \dots, v_{j_2-1}, v_{j_2+1}, \dots, v_{n+2}] \in \mathbb{Z}^n \quad (5.33)$$

jest pierwiastkiem dodatniego bigrafu  $\tilde{\Delta}' := \tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)} \in \mathcal{UBigr}_n$ .

Na podstawie twierdzenia 3.59(c) dla  $1 \leq i \leq n+2$  oraz wektorów jednostkowych  $e_i$  otrzymujemy nierówności:  $0 < e_i \leq \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_i)$ , więc z lematu 3.51(c) wektory

$$\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_1), \dots, \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_{j_1-1}), \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_{j_1+1}), \dots, \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_{j_2-1}), \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_{j_2+1}), \dots, \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_{n+2}) \in \mathbb{Z}^{n+2} \quad (5.34)$$

są nieujemnymi pierwiastkami bigrafu  $\tilde{\Delta}$  i mają postać (5.32). Stąd dla  $i \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  wektory

$$\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(\check{e}_i) := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_i)^{(j_1, j_2)} \in \mathbb{Z}^n \quad (5.35)$$

mają postać (5.35) i są nieujemnymi pierwiastkami dodatniego bigrafu  $\tilde{\Delta}' := \tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)} \in \mathcal{UBigr}_n$ . Na podstawie twierdzenia 3.28, dla każdego  $i \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  otrzymujemy następujące ograniczenia na współrzędne

$$0 \leq v_i \leq 6 \quad (5.36)$$

pierwiastków  $\check{v} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(\check{e}_i) \in \mathcal{R}_{\tilde{\Delta}'}$  (5.35) bigrafu  $\tilde{\Delta}'$ , a stąd również pierwiastków  $v := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(e_i) \in \mathcal{R}_{\tilde{\Delta}}$  (5.34) bigrafu  $\tilde{\Delta}$ .

Niech  $k_{a_i b_i} \geq 0$  oznacza liczbę operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$  dla  $a_i, b_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  użytych w redukcji:

$$\Delta \mapsto \dots \mapsto \tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- \Delta. \quad (5.37)$$

Po  $k_{a_i b_i}$ -krotnym zastosowaniu operacji  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^+ : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  (5.31) na wektorze jednostkowym  $v := e_{b_i}$ , otrzymujemy następującą równość

$$v_{a_i} = k_{a_i b_i} \cdot d_{a_i b_i}^{\tilde{\Delta}} \cdot v_{b_i},$$

gdzie  $v_{b_i} \geq 1$  oraz  $d_{a_i b_i}^{\tilde{\Delta}} \in \{1, 2\}$  (zobacz uwaga 3.19) i w konsekwencji:

$$v_{a_i} \geq \frac{v_{a_i}}{d_{a_i b_i}^{\tilde{\Delta}} \cdot v_{b_i}} = k_{a_i b_i}. \quad (5.38)$$

Na podstawie (5.36) oraz (5.38) otrzymujemy następujące ograniczenie

$$6 \geq v_{a_i} \geq k_{a_i b_i}$$

na liczbę  $k_{a_i b_i} \geq 0$  operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$  użytych w (5.37).

W konsekwencji przedstawionych rozważań, dla dowolnej krawędzi przerywanej  $a_i - \dots - b_i$  w bigrafie  $\Delta$ , gdzie  $a_i, b_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$ , operator inflacji  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$  może zostać użyty w (5.37) co najwyżej  $k_{a_i b_i} = 6$  razy. Ponieważ wszystkich par  $a_i, b_i$ , gdzie  $a_i, b_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$ , jest co najwyżej  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  (w przypadku bigrafu pełnego), operator  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^-$  postaci (5.29) składa się ze skończonej liczby co najwyżej  $6 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 3 \cdot (n-2) \cdot (n-3)$  operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_1 b_1}^-, \dots, \mathbf{t}_{a_k b_k}^-$ .



Ponieważ w skonstruowanym dodatnim bigrafie  $\tilde{\Delta}' := \tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)}$  nie istnieją przerywane krawędzie, więc na podstawie twierdzenia 3.31(a), graf  $\tilde{\Delta}'$  jest jednym z diagramów Dynkina  $\tilde{\Delta}' := D_n$  przedstawionym w tabeli 3.32, gdzie  $D_n = \mathbf{Dyn}_\Delta$ .

**Etap 2.** Udowodnimy, że istnieje operator  $\tilde{\mathbf{t}}_-$  będący złożeniem skończonej liczby operatorów inflacji typu  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$ , gdzie  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_i \in \{j_1, j_2\}$ , redukujący bigraf  $\tilde{\Delta}$ , uzyskany w pierwszym etapie, do rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{\mathbf{t}}_- \tilde{\Delta} = \tilde{D}_n^2$ :

$$\tilde{\Delta} \mapsto \dots \mapsto \tilde{\mathbf{t}}_- \tilde{\Delta} = \tilde{D}_n^2.$$

Rozważamy dwa przypadki w zależności od tego, czy w bigrafie  $\tilde{\Delta}$  istnieją krawędzie przerywane  $a_i \text{-----} b_i$ , gdzie  $a_i \in \tilde{\Delta}_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_i \in \{j_1, j_2\}$ .

*Przypadek 1.* Załóżmy, że w bigrafie  $\tilde{\Delta}$  nie ma krawędzi przerywanych  $a_i \text{-----} b_i$ , gdzie  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_i \in \{j_1, j_2\}$ . Pokażemy, że  $\tilde{\Delta}$  jest jednym z rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\tilde{D}_n^2$  przedstawionych w tabeli 4.2.

Ponieważ  $\tilde{\Delta}$  jest spójny nieujemny korangi dwa oraz wektory  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}$  tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ , to na podstawie twierdzenia 4.8 bigrafy  $\tilde{\Delta}^{(j_1)}, \tilde{\Delta}^{(j_2)}$  są spójne oraz nieujemne korangi jeden.

Z założenia wszystkie krawędzie w  $\tilde{\Delta}^{(j_1)}$  oraz  $\tilde{\Delta}^{(j_2)}$  są ciągłe, zatem na podstawie twierdzenia 3.31, każdy z bigrafów  $\tilde{\Delta}^{(j_1)}$  oraz  $\tilde{\Delta}^{(j_2)}$  jest jednym z grafów Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ . Ponadto wektory  $\tilde{\mathbf{h}}' := \tilde{\mathbf{h}}_{|\tilde{\Delta}_0^{(j_1)}}^{(j_2)}$  oraz  $\tilde{\mathbf{h}}'' := \tilde{\mathbf{h}}_{|\tilde{\Delta}_0^{(j_2)}}^{(j_1)} \in \mathbb{Z}^{n+1}$  powstałe z wektorów  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}, \tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$  przez usunięcie odpowiednio współrzędnej  $j_1$  oraz  $j_2$ , tworzą specjalne  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}^{(j_1)}}$  oraz  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}^{(j_2)}}$ .

Ponieważ każdy z grafów Euklidesa  $\tilde{\Delta}^{(n+1)}$  oraz  $\tilde{\Delta}^{(n+2)}$  jest rozszerzeniem o jeden wierzchołek grafu Dynkina  $\tilde{\Delta}' := D_n \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  (zobacz uwaga 4.3), więc każdy z nich jest grafem Euklidesa  $\tilde{D}_n \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$ . Stąd wynika, że wektory  $\tilde{\mathbf{h}}', \tilde{\mathbf{h}}'' \in \mathbb{Z}^{n+1}$  są równe oraz  $u := \tilde{\mathbf{h}}'_{|\tilde{\Delta}_0^{(j_1, j_2)}} = \tilde{\mathbf{h}}''_{|\tilde{\Delta}_0^{(j_1, j_2)}} \in \mathbb{Z}^n$  jest pierwiastkiem grafu Dynkina  $\tilde{\Delta}' = D_n$ .

Na podstawie twierdzenia 5.16, bigraf  $\tilde{\Delta}$  ma postać  $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}'[[u, u]]$  (5.7). Ponieważ  $u \ell_u := 2(u \cdot G_{D_n} \cdot u^{tr}) = 2q_{D_n}(u) = 2$ , więc wierzchołki  $j_1$  oraz  $j_2$  bigrafu  $\tilde{\Delta}$  są połączone dwiema krawędziami przerywanymi i w rezultacie otrzymujemy równość bigrafów  $\tilde{\Delta} = \tilde{D}_n^2$ .

*Przypadek 2.* Załóżmy, że w bigrafie  $\tilde{\Delta}$  istnieje krawędź przerywana  $a_i \text{-----} b_i$ , gdzie  $a_i \in \tilde{\Delta}_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_i \in \{j_1, j_2\}$ .

Udowodnimy, że istnieje operator  $\tilde{\mathbf{t}}_- := \mathbf{t}_{a_k b_k}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$  będący złożeniem skończonej liczby operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$ , gdzie  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_i \in \{j_1, j_2\}$ , redukujący bigraf  $\tilde{\Delta}$ , uzyskany w pierwszym etapie, do bigrafu  $\tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_- \tilde{\Delta}$

$$\tilde{\Delta} \mapsto \dots \mapsto \tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_- \tilde{\Delta},$$

który nie posiada przerywanych krawędzi postaci  $a_\ell \text{-----} b_\ell$ , gdzie  $a_\ell \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_\ell \in \{j_1, j_2\}$ .

Przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{t}}_- := \mathbf{t}_{a_i b_i}^-$  oraz  $\tilde{\tilde{\Delta}} := \mathbf{t}_{a_i b_i}^- \tilde{\Delta}$ . Dopóki w bigrafie  $\tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_- \tilde{\Delta}$  istnieją krawędzie przerywane postaci  $a_\ell \text{-----} b_\ell$ , gdzie  $a_\ell \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_\ell \in \{j_1, j_2\}$ , to podstawiamy:

$$\tilde{\mathbf{t}}_- := \mathbf{t}_{a_\ell b_\ell}^- \circ \tilde{\mathbf{t}}_- \quad \text{oraz} \quad \tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_- \tilde{\Delta}. \quad (5.39)$$

Na podstawie lematu 3.51 oraz twierdzenia 3.59(b), wektory

$$\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)} := \tilde{\mathbf{t}}_+^{(j_1)}(\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}), \quad \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)} := \tilde{\mathbf{t}}_+^{(j_2)}(\tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}) \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\tilde{\Delta}}}$ , gdzie przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{t}}_+ := \mathbf{t}_{a_k b_k}^+ \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^+$  dla izomorfizmów grup  $\mathbf{t}_{ab}^+ : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  (3.61). Co więcej, na podstawie konstrukcji (5.39) oraz definicji (5.31) prawdziwe są nierówności:



$$\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)} \leq \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_1)} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)} \leq \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_2)}. \quad (5.40)$$

Na podstawie twierdzenia 5.16 wektory  $u, u' \in \mathbb{Z}^n$  otrzymane z  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_2)}$  przez opuszczenie współrzędnych o numerach  $j_1$  oraz  $j_2$  są pierwiastkami bigrafu  $\tilde{\tilde{\Delta}}^{(j_1, j_2)} = \tilde{\Delta}' = D_n \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ . Ponieważ zbiór  $\mathcal{R}_{D_n} \subseteq \mathbb{Z}^n$  pierwiastków bigrafu Dynkina  $D_n$  jest skończony, więc pierwiastki  $u, u'$  są mniejsze lub równe jednemu maksymalnemu dodatniemu pierwiastkowi  $\mathbf{u}_{D_n}$  bigrafu  $D_n$ , zobacz (5.9):

$$\begin{aligned} u &:= \left[ \tilde{\mathbf{h}}_1^{(j_1)}, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{j_1-1}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}_{j_1+1}^{(j_1)}, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{j_2-1}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}_{j_2+1}^{(j_1)}, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{n+2}^{(j_1)} \right] \leq \mathbf{u}_{D_n} \quad \text{oraz} \\ u' &:= \left[ \tilde{\mathbf{h}}_1^{(j_2)}, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{j_1-1}^{(j_2)}, \tilde{\mathbf{h}}_{j_1+1}^{(j_2)}, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{j_2-1}^{(j_2)}, \tilde{\mathbf{h}}_{j_2+1}^{(j_2)}, \dots, \tilde{\mathbf{h}}_{n+2}^{(j_2)} \right] \leq \mathbf{u}_{D_n}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

W konsekwencji, prawdziwe są nierówności (definiowane „po współrzędnych“):

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_1)} &= [u_1, \dots, u_{j_1-1}, 1, u_{j_1}, \dots, u_{j_2-2}, 0, u_{j_2-1}, \dots, u_n] \leq \mathbf{h}_{D_n}^{(1)}, \\ \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_2)} &= [u'_1, \dots, u'_{j_1-1}, 0, u'_{j_1}, \dots, u'_{j_2-2}, 1, u'_{j_2-1}, \dots, u'_n] \leq \mathbf{h}_{D_n}^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

gdzie wektory  $\mathbf{h}_{D_n}^{(1)}, \mathbf{h}_{D_n}^{(2)} \in \text{Ker } q_{D_n}^2$  (z dokładnością do numeracji wierzchołków bigrafu  $\tilde{D}_n^2$ ) zostały przedstawione w dowodzie twierdzenia 4.4.

Stąd istnieje operator  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- := \mathbf{t}_{a_k b_k}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$  będący złożeniem skończonej liczby operatorów inflacji typu  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$ , gdzie  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_i \in \{j_1, j_2\}$ , redukujący bigraf  $\tilde{\Delta}$  do bigrafu  $\tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- \tilde{\Delta}$ , który nie posiada przerywanych krawędzi postaci  $a_\ell \text{-----} b_\ell$ , gdzie  $a_\ell \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_\ell \in \{j_1, j_2\}$ . Istotnie, w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy rosnący nieskończony ciąg nierówności postaci (5.40), co przeczy ograniczeniom (5.42).

Na podstawie twierdzenia 3.59, bigraf  $\tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- \tilde{\Delta}$  jest spójny nieujemny korangi dwa oraz istnieje słaba  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\tilde{\tilde{\Delta}} \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{\Delta}$ . Ponieważ bigraf  $\tilde{\tilde{\Delta}}$  nie posiada krawędzi przerywanych postaci  $a_\ell \text{-----} b_\ell$ , gdzie  $a_\ell \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b_\ell \in \{j_1, j_2\}$ , więc stosuje się do niego przypadek pierwszy tego dowodu. Zatem  $\tilde{\tilde{\Delta}}$  jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\tilde{D}_n^2$ , co kończy dowód.  $\square$

Algorytm inflacyjny opisany w dowodzie twierdzenia 5.28 przedstawiamy w następnym podrozdziale jako algorytm 5.48.

**Uwaga 5.43.** Typ Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$  spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta$  korangi co najwyżej dwa bez pętli można otrzymać przez zastosowanie jednego z algorytmów inflacyjnych A.59, A.66, 5.48.

- Typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$**  spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  o  $n \geq 1$  wierzchołkach nazywamy diagram Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$  wyznaczony przez algorytm inflacyjny A.59.
- Niech  $\Delta$  będzie spójnym głównym bigrafem bez pętli o  $n + 1 \geq 2$  wierzchołkach oraz niech  $\tilde{D}_n \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$  będzie grafem Euklidesa wyznaczonym przez algorytm inflacyjny A.66. **Typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$**  bigrafu  $\Delta$  nazywamy diagram Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$  taki, że bigraf  $\tilde{D}_n$  jest rozszerzeniem o jeden wierzchołek bigrafu  $D_n$ , zobacz uwaga 4.3.
- Niech  $\Delta$  będzie spójnym bigrafem korangi dwa bez pętli o  $n + 2 \geq 3$  wierzchołkach oraz niech  $\tilde{D}_n^2 \sim_{\mathbb{Z}} \Delta$  będzie rozszerzonym bigrafem Euklidesa wyznaczonym przez algorytm inflacyjny 5.48. **Typem Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta$**  bigrafu  $\Delta$  nazywamy diagram Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  taki, że bigraf  $\tilde{D}_n^2$  jest rozszerzeniem bigrafu  $D_n$  o dwa wierzchołki, zobacz uwaga 4.3.

Przedstawiona w dowodzie twierdzenia 5.28 konstrukcja operatorów  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^-$  oraz  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^-$  jest podstawą zbudowanego przez nas algorytmu inflacyjnego dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli. Algorytm ten (algorytm 5.48 opisany w podrozdziale 5.6)

jest jednym z głównych osiągnięć niniejszej dysertacji, ponieważ pozwala na pełne rozwiązanie problemu 1.5 względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$ , zobacz uwaga 5.62.

Konstrukcję złożonego operatora  $\mathbf{t}_{\bullet}^{-} = \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^{-} \circ \mathbf{t}_{\bullet}^{-}$  stosowanego w dowodzie twierdzenia 5.28 oraz sposób wyznaczenia typu Dynkina zgodnie z uwagą 5.43 ilustrujemy w następującym przykładzie.

**Przykład 5.44.** Rozważmy następujący graf krawędziowo-dwudzielny

$$\Delta : \begin{array}{c} 9 \text{ --- } 6 \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} 8 \text{ --- } 7 \\ | \quad \quad \quad | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5 \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_9(\mathbb{Z}).$$

Ponieważ funkcjonał Grama  $q_{\Delta} : \mathbb{Z}^9 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  jest równy

$$\begin{aligned} q_{\Delta}(x) = & \frac{4}{7}(x_7 - x_8)^2 + \frac{1}{4}(2x_1 + x_2 + x_8 + x_9)^2 + \frac{1}{12}(3x_2 - 2x_3 - x_8 - x_9)^2 + \\ & + \frac{1}{24}(4x_3 - 3x_4 - x_8 - x_9)^2 + \frac{1}{84}(7x_6 + x_7 - x_8 - 7x_9)^2 + \\ & + \frac{1}{40}(5x_4 - 4x_5 - 4x_7 - x_8 - x_9)^2 + \frac{1}{60}(6x_5 - 5x_6 + x_7 - x_8 - x_9)^2, \end{aligned}$$

więc bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa, oraz wektory

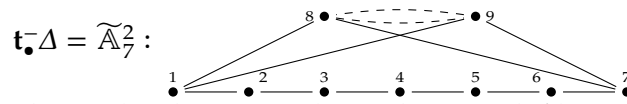
$$\mathbf{h}^{(8)} = [-1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0], \mathbf{h}^{(9)} = [-1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1]$$

tworzą (8,9)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\Delta}$ .

Pokażemy, że złożony operator inflacji  $\mathbf{t}_{\bullet}^{-} = \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^{-} \circ \mathbf{t}_{\bullet}^{-}$  zbudowany zgodnie z opisem zastosowanym w dowodzie twierdzenia 5.28, gdzie

$$\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^{-} := \mathbf{t}_{67}^{-} \circ \mathbf{t}_{57}^{-} \circ \mathbf{t}_{12}^{-} \text{ oraz } \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^{-} := \mathbf{t}_{79}^{-} \circ \mathbf{t}_{19}^{-} \circ \mathbf{t}_{18}^{-},$$

redukuje bigraf  $\Delta$  do bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$



w sześciu krokach, gdzie na każdym etapie krawędzie zmodyfikowane w wyniku zastosowania operatora inflacji oznaczamy niebieskim kolorem oraz pogrubieniem.

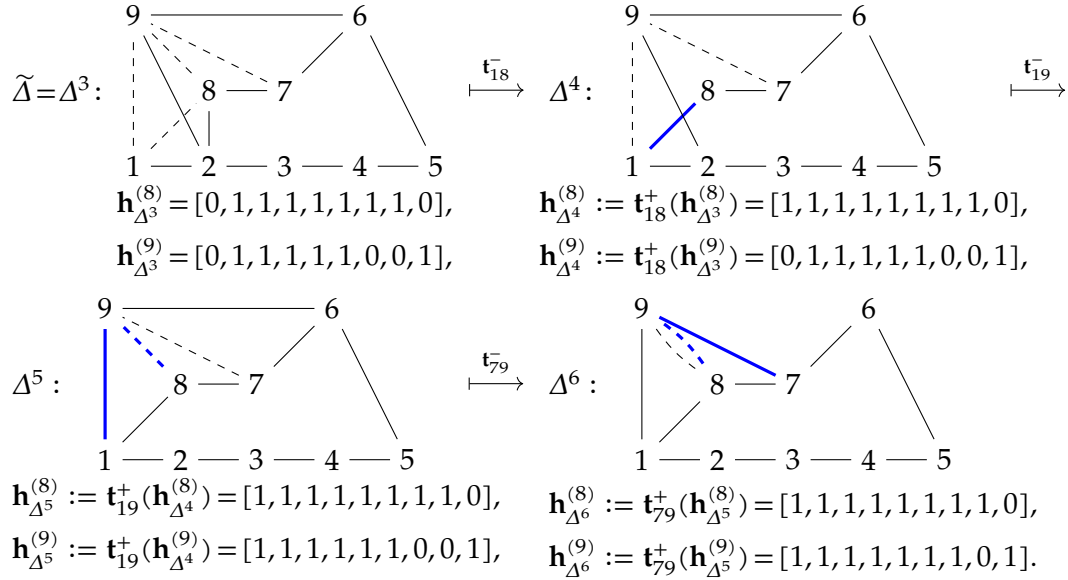
$$\begin{array}{ccc} \Delta : \begin{array}{c} 9 \text{ --- } 6 \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} 8 \text{ --- } 7 \\ | \quad \quad \quad | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5 \end{array} & \xrightarrow{\mathbf{t}_{12}^{-}} & \Delta^1 : \begin{array}{c} 9 \text{ --- } 6 \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} 8 \text{ --- } 7 \\ | \quad \quad \quad | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5 \end{array} & \xrightarrow{\mathbf{t}_{57}^{-}} & \\ \mathbf{h}_{\Delta}^{(8)} := \mathbf{h}^{(8)} = [-1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0], & & \mathbf{h}_{\Delta^1}^{(8)} := \mathbf{t}_{12}^{+}(\mathbf{h}_{\Delta}^{(8)}) = [0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0], & & \\ \mathbf{h}_{\Delta}^{(9)} := \mathbf{h}^{(9)} = [-1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1], & & \mathbf{h}_{\Delta^1}^{(9)} := \mathbf{t}_{12}^{+}(\mathbf{h}_{\Delta}^{(9)}) = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1], & & \\ \Delta^2 : \begin{array}{c} 9 \text{ --- } 6 \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} 8 \text{ --- } 7 \\ | \quad \quad \quad | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5 \end{array} & \xrightarrow{\mathbf{t}_{67}^{-}} & \Delta^3 : \begin{array}{c} 9 \text{ --- } 6 \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} 8 \text{ --- } 7 \\ | \quad \quad \quad | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5 \end{array} & & \\ \mathbf{h}_{\Delta^2}^{(8)} := \mathbf{t}_{57}^{+}(\mathbf{h}_{\Delta^1}^{(8)}) = [0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0], & & \mathbf{h}_{\Delta^3}^{(8)} := \mathbf{t}_{67}^{+}(\mathbf{h}_{\Delta^2}^{(8)}) = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0], & & \\ \mathbf{h}_{\Delta^2}^{(9)} := \mathbf{t}_{57}^{+}(\mathbf{h}_{\Delta^1}^{(9)}) = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1], & & \mathbf{h}_{\Delta^3}^{(9)} := \mathbf{t}_{67}^{+}(\mathbf{h}_{\Delta^2}^{(9)}) = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1], & & \end{array}$$

Zauważmy, że dla bigrafu  $\tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^{-} \Delta = \mathbf{t}_{67}^{-} \circ \mathbf{t}_{57}^{-} \circ \mathbf{t}_{12}^{-} \Delta = \Delta^3$  powstałego po zastosowaniu do  $\Delta$  złożonego operatora inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^{-} := \mathbf{t}_{67}^{-} \circ \mathbf{t}_{57}^{-} \circ \mathbf{t}_{12}^{-}$  opisanego w dowodzie twierdzenia 5.28, podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\tilde{\Delta}^{(8,9)}$ , powstały z bigrafu  $\tilde{\Delta}$  po opuszczeniu wierzchołków 8,9, nie zawiera przerywanych krawędzi i jest grafem Dynkina  $\mathbb{A}_7$

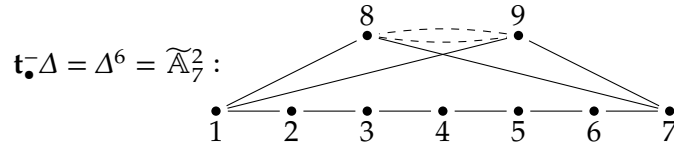
5.5. Operatory inflacji w klasyfikacji bigrafów korangi dwa

$$\mathbb{A}_7 : \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5 - \bullet_6 - \bullet_7.$$

Zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie twierdzenia 5.28, w kolejnym etapie budujemy złożenie operatorów inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- := \mathbf{t}_{79}^- \circ \mathbf{t}_{19}^- \circ \mathbf{t}_{18}^-$ , które redukuje bigraf  $\tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- \Delta = \Delta^3$  do rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{\tilde{\mathbf{t}}}_{\bullet}^- \tilde{\Delta} = \mathbf{t}_{79}^- \circ \mathbf{t}_{19}^- \circ \mathbf{t}_{18}^- \tilde{\Delta} = \tilde{\mathbb{A}}_7^2$ :



Pokazaliśmy, że złożony operator inflacji  $\mathbf{t}_{\bullet}^- := \tilde{\tilde{\mathbf{t}}}_{\bullet}^- \circ \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- := \mathbf{t}_{79}^- \circ \mathbf{t}_{19}^- \circ \mathbf{t}_{18}^- \circ \mathbf{t}_{67}^- \circ \mathbf{t}_{57}^- \circ \mathbf{t}_{12}^-$  redukuje bigraf  $\Delta$  do bigrafu  $\mathbf{t}_{\bullet}^- \Delta := \tilde{\tilde{\mathbf{t}}}_{\bullet}^- \circ \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- \Delta = \Delta^6 = \tilde{\mathbb{A}}_7^2$ .



Wielomiany Coxetera, liczby Coxetera oraz zredukowane liczby Coxetera dla kolejnych bigrafów  $\Delta, \Delta^1, \dots, \Delta^6$ , które powstały po zastosowaniu złożonego operatora inflacji  $\mathbf{t}_{\bullet}^- = \tilde{\tilde{\mathbf{t}}}_{\bullet}^- \circ \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- = \mathbf{t}_{79}^- \circ \mathbf{t}_{19}^- \circ \mathbf{t}_{18}^- \circ \mathbf{t}_{67}^- \circ \mathbf{t}_{57}^- \circ \mathbf{t}_{12}^-$  są równo odpowiednio

|   |                                   |                                       |
|---|-----------------------------------|---------------------------------------|
| $\text{cox}_{\Delta}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - 2t + 1,$   | $\mathbf{c}_{\Delta} = \infty,$   | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta} = 10,$   |
| $\text{cox}_{\Delta^1}(t) = t^9 - t^8 - 2t^7 + 2t^6 + 2t^3 - 2t^2 - t + 1,$ | $\mathbf{c}_{\Delta^1} = \infty,$ | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta^1} = 4,$  |
| $\text{cox}_{\Delta^2}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - 2t + 1,$ | $\mathbf{c}_{\Delta^2} = \infty,$ | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta^2} = 10,$ |
| $\text{cox}_{\Delta^3}(t) = t^9 - t^8 - t + 1,$                             | $\mathbf{c}_{\Delta^3} = 8,$      | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta^3} = 8,$  |
| $\text{cox}_{\Delta^4}(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - 2t + 1,$ | $\mathbf{c}_{\Delta^4} = \infty,$ | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta^4} = 10,$ |
| $\text{cox}_{\Delta^5}(t) = t^9 - t^8 - t + 1,$                             | $\mathbf{c}_{\Delta^5} = 8,$      | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta^5} = 8,$  |
| $\text{cox}_{\Delta^6}(t) = t^9 - t^8 - t + 1,$                             | $\mathbf{c}_{\Delta^6} = 8,$      | $\check{\mathbf{c}}_{\Delta^6} = 8.$  |

Pokazaliśmy, że typ Dynkina  $\text{Dyn}_{\Delta}$  bigrafu  $\Delta$  jest równy  $\text{Dyn}_{\Delta} = \mathbb{A}_7$  (zobacz uwaga 5.43). Ponadto bigraf  $\Delta$  jest słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$ , tzn. zachodzi równość  $B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B = G_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2}$ . Macierz  $B \in \mathbb{M}_9(\mathbb{Z})$  definiująca słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \tilde{\mathbb{A}}_7^2$  jest iloczynem macierzy odpowiadających operatorom inflacji z zastosowanego ciągu operatorów inflacji (lemat 3.65) i ma następującą postać

$$B = E_{12}^- \cdot E_{57}^- \cdot E_{67}^- \cdot E_{18}^- \cdot E_{19}^- \cdot E_{79}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_9(\mathbb{Z}).$$

Ponieważ

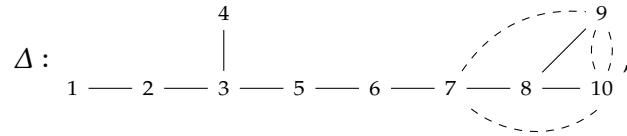
$$\text{cox}_\Delta(t) = t^9 - 2t^8 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - 2t + 1 \neq \text{cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2}(t) = t^9 - t^8 - t + 1,$$

otrzymujemy  $\text{CDtype}_\Delta \neq \text{CDtype}_{\tilde{\mathbb{A}}_7^2}$ , co na podstawie twierdzenia 3.53 oznacza, że bigrafy  $\Delta$  oraz  $\tilde{\mathbb{A}}_7^2$  nie są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne.

**Uwaga 5.45.** W twierdzeniu 5.50 pokazujemy, że pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu inflacyjnego zbudowanego zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie twierdzenia 5.28 jest rzędu  $O(n^2)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji: etap 1 ma wielomianową złożoność obliczeniową rzędu  $O(n^2)$ , a etap 2 ma liniową złożoność obliczeniową rzędu  $O(n)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji. W praktycznych obliczeniach zastosowana liczba operatorów inflacji jest znacznie niższa.

W następującym przykładzie przedstawiamy przypadek, gdzie w pierwszym etapie algorytmu inflacyjnego opisanego w dowodzie twierdzenia 5.28 nie wykonujemy żadnych obliczeń, a zbudowany złożony operator inflacji jest równy  $\mathbf{t}_\bullet := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet$  i powstaje w drugim etapie algorytmu inflacyjnego opisanego w dowodzie twierdzenia 5.28. Stąd złożoność obliczeniowa zastosowanego algorytmu inflacyjnego w tym przypadku jest liniowa: rzędu  $O(n)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji (zobacz dowód twierdzenia 5.50).

**Przykład 5.46.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{10}$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym



oraz

$$\tilde{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{10}(\mathbb{Z}), \quad G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{10}(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Z przedstawienia formy kwadratowej  $q_\Delta(x)$  funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^{10} \rightarrow \mathbb{Z}$  w postaci kanonicznej

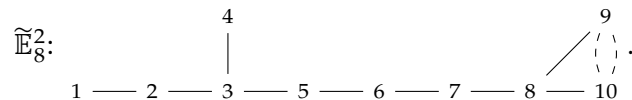
$$q_\Delta(x) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5\right)^2 + \frac{5}{8}\left(x_4 - \frac{3}{5}x_5\right)^2 + \\ + \frac{2}{5}\left(x_5 - \frac{5}{4}x_6\right)^2 + \frac{3}{8}\left(x_6 - \frac{4}{3}x_7\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x_7 - 3x_8\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_7 - \frac{1}{2}x_8 + x_9 + x_{10}\right)^2$$

wniosujemy, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa oraz wektory

$$\mathbf{h}^{(9)} = [-2, -4, -6, -3, -5, -4, -3, -1, 1, 0], \quad \mathbf{h}^{(10)} = [-2, -4, -6, -3, -5, -4, -3, -1, 0, 1]$$

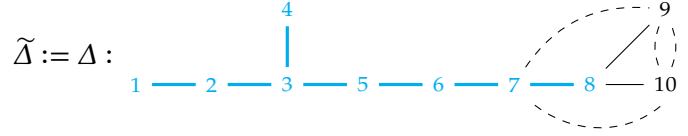
tworzą (9, 10)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^{10}$ .

Wskażemy złożony operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet$  zbudowany zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie twierdzenia 5.28, redukujący bigraf  $\Delta$  do bigrafu  $\tilde{\mathbb{E}}_8^2$ :



## 5.6. Algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa

Ponieważ dodatni podgraf  $\Delta^{(9,10)}$  krawędziowo-dwudzielny bigrafu  $\Delta$  nie posiada przerywanych krawędzi, więc zgodnie z pierwszym etapem algorytmu inflacyjnego opisanym w dowodzie twierdzenia 5.28 podstawiamy  $\tilde{\Delta} = \Delta$  i przechodzimy do drugiego etapu algorytmu inflacyjnego opisanego w dowodzie twierdzenia 5.28. Na następującym rysunku podgraf  $\Delta' := \tilde{\Delta}^{(9,10)}$  zaznaczamy kolorem szarobłękitnym:



Zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie twierdzenia 5.28, w drugim etapie budujemy złożony operator inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}$ . Na podstawie dowodu twierdzenia 5.50 etap ten ma liniową złożoność obliczeniową rzędu  $O(n)$  względem zastosowanych operatorów inflacji: operator  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}$  jest złożeniem co najwyżej  $24 \cdot n = 24 \cdot 8 = 192$  (5.51) operatorów inflacji.

Skonstruowane złożenie operatora  $\mathbf{t}_{\bullet} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}$  redukuje bigraf  $\tilde{\Delta} = \Delta$  do rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{\mathbb{E}}_8^2$ :

$$\mathbf{t}_{\bullet}\Delta := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}\Delta = \tilde{\mathbb{E}}_8^2$$

przy użyciu następujących 119 operatorów inflacji względem par  $a_i, b_i$  wierzchołków bigrafu  $\Delta$  połączonych przerywaną krawędzią, gdzie  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{9, 10\}$  oraz  $b_i \in \{9, 10\}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet} := & \mathbf{t}_{8,9} \circ \mathbf{t}_{7,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{4,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{1,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{4,9} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{7,9} \circ \mathbf{t}_{8,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{7,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{4,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{8,10} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{7,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{1,10} \circ \mathbf{t}_{4,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{7,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{4,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{8,10} \circ \mathbf{t}_{7,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{4,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{1,9} \circ \mathbf{t}_{1,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{4,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{4,9} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{7,10} \circ \mathbf{t}_{7,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{4,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{8,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{1,9} \circ \mathbf{t}_{7,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{2,9} \circ \mathbf{t}_{4,9} \circ \mathbf{t}_{3,9} \circ \mathbf{t}_{5,9} \circ \mathbf{t}_{6,9} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{8,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{4,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{7,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{4,10} \circ \mathbf{t}_{1,10} \circ \\ & \circ \mathbf{t}_{2,10} \circ \mathbf{t}_{3,10} \circ \mathbf{t}_{5,10} \circ \mathbf{t}_{6,10} \circ \mathbf{t}_{7,10} \circ \mathbf{t}_{7,9}. \end{aligned}$$

Typ Dynkina bigrafu  $\Delta$  jest równy  $\text{Dyn}_{\Delta} = \mathbb{E}_8$  (zobacz uwaga 5.43) oraz bigraf  $\Delta$  jest słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\tilde{\mathbb{E}}_8^2$ , tzn. zachodzi równość  $B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B = G_{\tilde{\mathbb{E}}_8^2}$ . Macierz  $B \in \text{M}_{10}(\mathbb{Z})$  definiująca słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}}^B \tilde{\mathbb{E}}_8^2$  jest iloczynem macierzy odpowiadających operatorom inflacji z przedstawionego ciągu operatorów inflacji (lemat 3.65) i ma następującą postać

$$B := E_{8,9}^- \cdot E_{7,9}^- \cdot \dots \cdot E_{3,2}^- \cdot E_{7,9}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(10, \mathbb{Z}).$$

## 5.6. Algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy algorytm inflacyjny (algorytm 5.48) dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli. Pozwala on na pełne rozwiązanie problemu 1.5 względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  (zobacz uwaga 5.62) oraz na

efektywną klasyfikację (pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu 5.48 jest wielomianowa rzędu  $O(n^2)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji, zobacz twierdzenie 5.50) spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli, zobacz problem 1.3 oraz twierdzenie 5.28. W konsekwencji jest jednym z głównych osiągnięć przedstawionych w niniejszej dysertacji.

**Uwaga 5.47.** Jednym z najważniejszych osiągnięć o charakterze algorytmicznym niniejszej dysertacji jest konstrukcja algorytmu 5.48. W konstrukcji tego algorytmu najtrudniejszym zadaniem było określenie warunku stopu, w tym:

- (a) wybór bigrafów, do których algorytm jest zbieżny,
- (b) określenie wektora lub wektorów sterujących algorytmem i gwarantujących zatrzymanie się algorytmu na wybranej rodzinie bigrafów.

Algorytm 5.48 przy użyciu odpowiednio wyznaczonego ciągu operatorów inflacji redukuje dowolny spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny korangi dwa bez pętli do jednego z rozszerzonych bigrafów Euklidesa. Wybranie rodziny rozszerzonych bigrafów Euklidesa  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$  okazało się optymalnym wyborem rodziny, do której skonstruowany algorytm jest zbieżny.

Przedstawione przez nas rozwiązanie wynika z twierdzenia o strukturze dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli (zobacz twierdzenie 5.16 oraz wniosek 5.19), i korzysta w dużej mierze z twierdzenia 4.8 o istnieniu specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy jądra  $\text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  funkcjonału Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

W niniejszym podrozdziale do zbudowania algorytmu inflacyjnego dla spójnych bigrafów korangi dwa bez pętli stosujemy konstrukcję użytą w dowodzie twierdzenia 5.28. W rozprawie przedstawiamy macierzową wersję tego algorytmu, w którym obliczamy  $\mathbb{Z}$ -odwrotną macierz  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_n^2$ , gdzie  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$  jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa przedstawionym w tabeli 4.2 (z dokładnością do numeracji wierzchołków), oraz wyznaczamy typ Dynkina  $\text{Dyn}_\Delta = D_n \in \{A_n, n \geq 1, D_n, n \geq 4, E_6, E_7, E_8\}$  (definicja 4.20).

**Algorytm 5.48.** DANE Liczba całkowita  $n \geq 1$  oraz symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_{n+2}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  spójnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta$  korangi dwa bez pętli.

WYNIK Symetryczna macierz Grama  $G_{\tilde{D}^2} \in \mathbb{M}_{n+2}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{D}^2 \in \{\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ , słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnego z bigrafem  $\Delta$ , typ Dynkina  $\text{Dyn}_\Delta = D \in \{A_n, n \geq 1, D_n, n \geq 4, E_6, E_7, E_8\}$  (definicja 4.20) zakodowany w postaci symetrycznej macierzy Grama  $G_D \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , oraz macierz  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiująca słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}^2$ .

KROK 1. Wyznaczamy  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ , zobacz algorytm 4.14.

KROK 2. Inicjalizujemy macierze  $G_{\tilde{D}^2} = [d_{ij}] := G_\Delta \in \mathbb{M}_{n+2}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz  $B := E \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ .

KROK 3. Dopóki istnieją takie indeksy  $i, j \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  w macierzy  $G_{\tilde{D}^2}$ , że  $d_{ij} > 0$ :

KROK 3.1. przyjmujemy  $G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_{ij}^- := E - (d_{ij} + d_{ji})e_{ij} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ , zobacz lemat 3.65.

W kroku 3 budujemy złożony operator inflacji  $\check{\bullet}$ , opisany w dowodzie twierdzenia 5.28 (etap 1).

KROK 4. Dopóki istnieją takie indeksy  $i \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $j \in \{j_1, j_2\}$  w macierzy  $G_{\tilde{D}^2}$ , że  $d_{ij} > 0$ :

KROK 4.1. przyjmujemy  $G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_{ij}^- := E - (d_{ij} + d_{ji})e_{ij} \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$ , zobacz lemat 3.65.



## 5.6. Algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa

W kroku 4 budujemy złożony operator inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}^-$  opisany w dowodzie twierdzenia 5.28 (etap 2).

**KROK 5.** Definiujemy macierz Grama  $G_D := G_{\mathcal{D}^2}^{(j_1, j_2)} \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , która powstaje z symetrycznej macierzy Grama  $G_{\mathcal{D}^2} \in \mathbb{M}_{n+2}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  poprzez usunięcie wiersza i kolumny o indeksie  $j_2$  oraz usunięcie wiersza i kolumny o indeksie  $j_1$ . Macierz  $G_D := G_{\mathcal{D}^2}^{(j_1, j_2)} \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  wyznacza jednorodny diagram Dynkina  $D \in \{\mathbb{A}_n, n \geq 1, \mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  przedstawiony (z dokładnością do numeracji wierzchołków) w tabeli 3.32.

**KROK 6.** Zwracamy macierze:  $G_{\mathcal{D}^2} \in \mathbb{M}_{n+2}(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ ,  $G_D \in \mathbb{M}_n(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  jako wynik.

Zanim przejdziemy do analizy złożoności obliczeniowej algorytmu 5.48, przedstawiamy następujący przykład ilustrujący jego zastosowanie.

**Przykład 5.49.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym

$$\Delta : \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 5 \end{array} \quad \text{oraz } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}), \quad G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Z przedstawienia formy kwadratowej  $q_\Delta(x)$  funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$  w postaci kanonicznej

$$q_\Delta(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - x_5\right)^2 + \frac{2}{3}(x_3 + x_4)^2$$

wniosujemy, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa.

**KROK 1.** Używając algorytmu 4.14 wyznaczamy specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Obliczone wektory

$$\mathbf{h}^{(1)} = [1, 0, -1, 1, -1], \quad \mathbf{h}^{(2)} = [0, 1, -1, 1, 0]$$

tworzą  $(1, 2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ .

**KROK 2.** Inicjalizujemy macierze

$$G_{\mathcal{D}^2} := G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \quad \text{oraz} \quad B := E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

**KROK 3.** Dopóki istnieją takie indeksy  $i, j \in \{3, 4, 5\}$  w macierzy  $G_{\mathcal{D}^2}$ , że  $d_{ij} > 0$ :

**KROK 3.1.** Dla  $i = 3, j = 4$  oraz  $d_{34} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\mathcal{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\mathcal{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

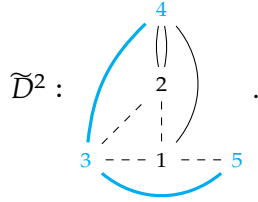
**KROK 3.1.** Dla  $i = 4, j = 5$  oraz  $d_{45} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\mathcal{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\mathcal{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 3.1.** Dla  $i = 3, j = 5$  oraz  $d_{35} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Złożony operator inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- := \mathbf{t}_{35}^- \circ \mathbf{t}_{45}^- \circ \mathbf{t}_{34}^-$  zbudowany jest zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie twierdzenia 5.28 i realizuje krok 3 algorytmu 5.48. Stąd podgraf  $D$  krawędziowo-dwudzielny bigrafu  $\tilde{D}^2$  (powstały po usunięciu wierzchołków 1 oraz 2) nie posiada przerywanych krawędzi. Ilustrujemy to na następującym rysunku, gdzie graf  $D$  zaznaczamy kolorem szarobłękitnym:



Zgodnie z opisem przedstawionym w dowodzie twierdzenia 5.28, w kolejnych krokach budujemy złożony operator inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^- := \mathbf{t}_{41}^- \circ \mathbf{t}_{31}^- \circ \mathbf{t}_{52}^- \circ \mathbf{t}_{51}^- \circ \mathbf{t}_{32}^- \circ \mathbf{t}_{31}^-$  realizując krok 4 algorytmu 5.48.

**KROK 4.** Dopóki istnieją takie indeksy  $i \in \{3, 4, 5\}$  oraz  $j \in \{1, 2\}$  w macierzy  $G_{\tilde{D}^2}$ , że  $d_{ij} > 0$ :

**KROK 4.1.** Dla  $i = 3, j = 1$  oraz  $d_{31} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 4.1.** Dla  $i = 3, j = 2$  oraz  $d_{32} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 4.1.** Dla  $i = 5, j = 1$  oraz  $d_{51} = 1 > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 4.1.** Dla  $i = 5, j = 2$  oraz  $d_{52} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.6. Algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa

**KROK 4.1.** Dla  $i = 3, j = 1$  oraz  $d_{31} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 4.1.** Dla  $i = 4, j = 1$  oraz  $d_{41} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy:

$$G_{\tilde{D}^2} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}^2} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 5.** Definiujemy macierz

$$G_D := G_{\tilde{D}^2}^{(j_1, j_2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\frac{1}{2}\mathbb{Z}),$$

która powstaje z symetrycznej macierzy  $G_{\tilde{D}^2} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  przez usunięcie wiersza i kolumny o indeksie 2 oraz usunięcie wiersza i kolumny o indeksie 1.

Jako wynik otrzymujemy trzy macierze:  $G_{\tilde{D}^2} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ ,  $G_D \in \mathbb{M}_3(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$ , gdzie

- macierz  $G_{\tilde{D}^2} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  jest symetryczną macierzą Grama rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{D}^2 = \tilde{\mathbb{A}}_3^2$

$$\tilde{\mathbb{A}}_3^2: \begin{array}{c} \bullet 1 \quad \bullet 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet 4 \quad \bullet 3 \quad \bullet 5 \end{array}, \text{ gdzie } G_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} := G_{\tilde{D}^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- typem Dynkina  $\text{Dyn}_\Delta = D$  bigrafu  $\Delta$  jest graf Dynkina  $D = \mathbb{A}_3$

$$\mathbb{A}_3: \bullet 2 \text{ --- } \bullet 1 \text{ --- } \bullet 3,$$

wyznaczony przez symetryczną macierz Grama  $G_{\mathbb{A}_3} := G_D = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$ ,

- macierz

$$B = E_{41}^- \cdot E_{31}^- \cdot E_{52}^- \cdot E_{51}^- \cdot E_{32}^- \cdot E_{31}^- \cdot E_{35}^- \cdot E_{45}^- \cdot E_{34}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$$

opisuje złożony operator inflacji  $\tilde{\mathbf{t}}_- := \tilde{\mathbf{t}}_- \circ \tilde{\mathbf{t}}_- := \mathbf{t}_{41}^- \circ \mathbf{t}_{31}^- \circ \mathbf{t}_{52}^- \circ \mathbf{t}_{51}^- \circ \mathbf{t}_{32}^- \circ \mathbf{t}_{31}^- \circ \mathbf{t}_{35}^- \circ \mathbf{t}_{45}^- \circ \mathbf{t}_{34}^-$  i definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}^2 = \tilde{\mathbb{A}}_3^2$ , tzn. prawdziwa jest równość

$$B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B = G_{\tilde{D}^2} = G_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}.$$

### Analiza złożoności obliczeniowej

Przedstawimy teraz oszacowanie pesymistycznej złożoności obliczeniowej względem liczby zastosowanych operatorów inflacji algorytmu inflacyjnego (algorytm 5.48) opisanego w twierdzeniu 5.28 dla spójnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$ ,  $n \geq 1$ , korangi dwa bez pętli.

**Twierdzenie 5.50.** *Niech  $n \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną. Dla dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli pesymistyczna złożoność algorytmu inflacyjnego (algorytm 5.48) opisanego w dowodzie twierdzenia 5.28 jest wielomianowa rzędu  $\mathcal{O}(n^2)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji.*

*Dowód.* Ustalmy liczbę  $n \geq 1$ . Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  będzie spójnym, nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli, oraz  $\Delta_0 = \{1, \dots, n, n+1, n+2\}$  zbiorem wierzchołków. Na podstawie twierdzenia 4.8 istnieje  $(j_1, j_2)$ -specjalna  $\mathbb{Z}$ -baza  $\{\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)}\}$  grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Stąd bigraf  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  jest dodatni i spójny.

W dowodzie twierdzenia 5.28 pokazujemy, że pesymistyczna złożoność obliczeniowa etapu 1 algorytmu inflacyjnego (kroku 3 algorytmu 5.48) jest wielomianowa rzędu  $\mathcal{O}(n^2)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji. Używając analogicznych argumentów pokażemy, że w kroku 4 algorytmu 5.48 (etap 2 dowodu twierdzenia 5.28) wykonujemy co najwyżej

$$2 \cdot 12 \cdot n = 24 \cdot n \quad (5.51)$$

operatorów inflacji typu  $\mathbf{t}_{ab}^-$ , gdzie  $a \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b \in \{j_1, j_2\}$ . Stąd pesymistyczna złożoność obliczeniowa względem liczby operatorów inflacji kroku 4 algorytmu 5.48 jest rzędu  $\mathcal{O}(n)$ .

Niech  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet$  będzie złożeniem operatorów inflacji zastosowanym w etapie 1 dowodu twierdzenia 5.28 (w kroku 3 algorytmu 5.48). Przypominamy z dowodu twierdzenia 5.28, że dla  $\tilde{\Delta} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet \Delta$  bigraf  $\tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)}$  jest dodatni i spójny (zobacz twierdzenie 4.8) oraz wektory

$$\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^+(\mathbf{h}^{(j_1)}), \quad \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^+(\mathbf{h}^{(j_2)}) \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\Delta}}$ , gdzie przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^+ := \mathbf{t}_{a_k b_k}^+ \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^+$  dla izomorfizmów grup  $\mathbf{t}_{ab}^+ : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  (3.61) przyporządkowujących dowolnemu wektorowi  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$  wektor  $\mathbf{t}_{ab}^+(v) := [w_1, \dots, w_{n+2}] \in \mathbb{Z}^{n+2}$  zdefiniowany następująco

$$w_a := v_a + d_{ab}^{\tilde{\Delta}} v_b \text{ oraz } w_i := v_i \text{ dla } i \neq a. \quad (5.52)$$

Na podstawie twierdzenia 3.28, dla każdego  $i \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  otrzymujemy następujące ograniczenia na współrzędne

$$-6 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_1)} \leq 6 \text{ oraz } -6 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_2)} \leq 6 \quad (5.53)$$

wektorów  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}$ .

Niech  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^-$  będzie złożonym operatorem inflacji zastosowanym w etapie 2 dowodu twierdzenia 5.28 oraz w kroku 4 algorytmu 5.48, tj.  $\tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_k b_k}^-$  jest takim złożeniem operatorów inflacji

$$\mathbf{t}_{a_i b_i}^-, \text{ gdzie } a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\} \text{ oraz } b_i \in \{j_1, j_2\}, \quad (5.54)$$

że bigraf  $\tilde{\tilde{\Delta}} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^- \tilde{\Delta}$  nie zawiera przerywanych krawędzi z wyjątkiem krawędzi incydentnych z wierzchołkami  $j_1$  oraz  $j_2$ . Na podstawie lematu 3.51 oraz twierdzenia 3.59(b), wektory

$$\tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_1)} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^-(\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}), \quad \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}^{(j_2)} := \tilde{\mathbf{t}}_\bullet^-(\tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}) \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\tilde{\Delta}}}$ . Na podstawie twierdzenia 5.16 wektory

$$\begin{aligned} u &:= \left[ \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_1^{(j_1)}, \dots, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_1-1}^{(j_1)}, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_1+1}^{(j_1)}, \dots, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_2-1}^{(j_1)}, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_2+1}^{(j_1)}, \dots, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{n+2}^{(j_1)} \right] \in \mathbb{Z}^n \text{ oraz} \\ u' &:= \left[ \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_1^{(j_2)}, \dots, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_1-1}^{(j_2)}, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_1+1}^{(j_2)}, \dots, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_2-1}^{(j_2)}, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{j_2+1}^{(j_2)}, \dots, \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_{n+2}^{(j_2)} \right] \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \quad (5.55)$$

## 5.6. Algorytm inflacyjny dla bigrafów korangi dwa

otrzymane z  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}$  przez opuszczenie współrzędnych o numerach  $j_1$  oraz  $j_2$  są pierwiastkami dodatniego grafu  $\tilde{\Delta}^{(j_1, j_2)} = D_n \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ . Stąd na podstawie twierdzenia 3.28, dla każdego  $i \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  otrzymujemy następujące ograniczenia na współrzędną

$$1 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_1)} \leq 6 \text{ oraz } 1 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_2)} \leq 6 \quad (5.56)$$

wektorów  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}, \tilde{\mathbf{h}}^{(j_2)}$  i w konsekwencji otrzymujemy nierówności:

$$-6 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_1)} \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_1)} \leq 6 \text{ oraz } -6 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_2)} \leq \tilde{\mathbf{h}}_i^{(j_2)} \leq 6. \quad (5.57)$$

Ustalmy liczbę  $k_{a, j_1} \geq 0$  operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a, j_1}^-$  dla  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  użytych w redukcji:

$$\tilde{\Delta} \mapsto \dots \mapsto \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet} \tilde{\Delta}. \quad (5.58)$$

Po zastosowaniu operacji  $\tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+ : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  (5.31) na wektorze  $\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)}$  otrzymujemy:

$$6 \geq \tilde{\mathbf{h}}_{a_i}^{(j_1)} := \tilde{\mathbf{t}}_{\bullet}^+(\tilde{\mathbf{h}}^{(j_1)})_{a_i} = \tilde{\mathbf{h}}_{a_i}^{(j_1)} + k_{a, j_1} \cdot d_{a, j_1}^{\tilde{\Delta}} \cdot \tilde{\mathbf{h}}_{j_1}^{(j_1)} \geq -6 + k_{a, j_1} \cdot d_{a, j_1}^{\tilde{\Delta}} \cdot 1,$$

gdzie  $d_{a, j_1}^{\tilde{\Delta}} \in \{1, 2\}$  (zobacz uwaga 3.19). Stąd wynikają następujące nierówności

$$12 \geq k_{a, j_1} \cdot d_{a, j_1}^{\tilde{\Delta}} \Rightarrow 12 \geq \frac{12}{d_{a, j_1}^{\tilde{\Delta}}} \geq k_{a, j_1}, \quad (5.59)$$

które pokazują, że w redukcji (5.58) używamy co najwyżej 12 operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a, j_1}^-$  dla ustalonego wierzchołka  $a_i \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  połączonego przerywaną krawędzią z wierzchołkiem  $j_2$ .

Ponieważ  $|\Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}| = n$  oraz  $|\{j_1, j_2\}| = 2$ , więc w redukcji (5.58) używamy co najwyżej

$$2 \cdot 12 \cdot n = 24 \cdot n \quad (5.60)$$

operatorów inflacji typu  $\mathbf{t}_{ab}^-$ , gdzie  $a \in \Delta_0 \setminus \{j_1, j_2\}$  oraz  $b \in \{j_1, j_2\}$ . Stąd pesymistyczna złożoność obliczeniowa względem liczby zastosowanych operatorów inflacji kroku 4 algorytmu 5.48 opisanego w etapie 2 dowodu twierdzenia 5.28 jest liniowa: rzędu  $O(n)$ .

W konsekwencji pesymistyczna złożoność obliczeniowa względem liczby zastosowanych operatorów inflacji algorytmu inflacyjnego (algorytm 5.48) opisanego w twierdzeniu 5.28 jest wielomianowa rzędu  $O(n^2)$ .  $\square$

W fakcie 5.61 pokazujemy, że algorytm 5.48 ma wielomianową pesymistyczną złożoność obliczeniową względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

**Fakt 5.61.** Niech  $n \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną. Dla dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli pesymistyczna złożoność algorytmu 5.48 jest rzędu  $O(n^5)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Na podstawie twierdzenia 5.50 pesymistyczna złożoność algorytmu 5.48 jest rzędu  $O(n^2)$  względem liczby zastosowanych operatorów inflacji.

Obliczenie macierzy  $G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  odpowiadających operatorom inflacji zastosowanym w krokach 3.1 oraz 4.1 (lemat 3.65) wymaga wykonania  $O(n^3)$  operacji arytmetycznych (przy użyciu standardowych algorytmów mnożenia macierzy; ze względu na niski wymiar analizowanych macierzy nie stosujemy algorytmów szybkiego mnożenia macierzy). W konsekwencji otrzymujemy pesymistyczną złożoność algorytmu 5.48 rzędu  $O(n^5)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.  $\square$

**Uwaga 5.62.** (a) W artykule [97] przedstawiamy algorytm inflacyjny [97, Algorithm 3.18], który jest konsekwencją [97, Theorem 3.7] i opisujemy inną konstrukcję złożonego operatora inflacji redukującego spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+r}$  dowolnej korangi  $r \geq 0$  do standardowego rozszerzonego bigrafu Dynkina  $\tilde{D}_n^{(r)} \in \{\tilde{\mathbb{A}}_n^{(r)}, n \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_n^{(r)}, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6^{(r)}, \tilde{\mathbb{E}}_7^{(r)}, \tilde{\mathbb{E}}_8^{(r)}\}$  (zobacz [86, Definition 2.2]). Zauważmy, że dla  $r = 0$  bigraf  $\tilde{D}_n^{(r)}$  jest grafem Dynkina, dla  $r = 1$  jest grafem Euklidesa, a dla  $r = 2$  bigraf  $\tilde{D}_n^{(r)}$  jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa.

(b) Na podstawie wyników [97], algorytm 5.48 można łatwo zmodyfikować do wersji konstruującej ciąg operatorów inflacji redukujących spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+r}$  dowolnej korangi  $r \geq 0$  do standardowego rozszerzonego bigrafu Dynkina  $\tilde{D}_n^{(r)} \in \{\tilde{A}_n^{(r)}, n \geq 1, \tilde{D}_n^{(r)}, n \geq 4, \tilde{E}_6^{(r)}, \tilde{E}_7^{(r)}, \tilde{E}_8^{(r)}\}$ . W tym celu należy:

- w kroku 1 wyznaczyć  $(j_1, \dots, j_r)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  [87, Appendix],
- w kroku 3 przeprowadzać inflacje względem wierzchołków  $i, j \in \{1, \dots, n+r\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$  połączonych przerywaną krawędzią,
- w kroku 4 przeprowadzać inflacje względem wierzchołków  $i, j \in \Delta_0$  połączonych przerywaną krawędzią, gdzie  $i \in \{1, \dots, n+r\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$  oraz  $j \in \{j_1, \dots, j_r\}$ .

Tym samym przedstawione przez nas rozwiązanie jest uogólnieniem algorytmu A.59 dla spójnych dodatnich bigrafów bez pętli, oraz uproszczeniem algorytmu A.66 dla spójnych głównych bigrafów bez pętli.

(c) Autorską implementację algorytmu inflacyjnego dla spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli dowolnej korangi  $0 \leq r \leq m-1$  umieszczamy na płycie dołączonej do rozprawy, a także na stronie internetowej [99]. W konsekwencji poszerzamy dostępne narzędzia obliczeniowe używane w spektralnej analizie bigrafów o kolejne algorytmy gotowe do przeprowadzania takiej analizy.



## Rozdział 6

# Geometrie $\Phi_\Delta$ -sieciovie pierwiastków w spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych bigrafów korangi dwa

W tym rozdziale prezentujemy (w pewnym skrócie) wyniki eksperymentalne, z których większość została opublikowana w artykule [98]. Celem tych badań jest budowa narzędzi algorytmicznych, umożliwiających klasyfikację wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa, z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$ . Niestety, w przeciwieństwie do wyników prezentowanych w poprzednim rozdziale o klasyfikacji względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$ , uzyskane wyniki nie umożliwiają pełnej klasyfikacji względem kongruencji  $\approx_{\mathbb{Z}}$  wszystkich bigrafów, a jedynie pozwalają na klasyfikację względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$  bigrafów o małej liczbie wierzchołków. Sytuacja ogólna będzie przedmiotem naszych dalszych badań.

W podrozdziale 6.1 przedstawiamy twierdzenie klasyfikujące z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\approx_{\mathbb{Z}}$ , wszystkie grafy krawędziowo-dwudzielne  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o co najwyżej  $n + 2 \leq 6$  wierzchołkach.

W podrozdziale 6.2 przypominamy podstawowe definicje i twierdzenia stosowane w klasyfikacji  $\Phi_\Delta$ -sieciovych systemów pierwiastków.

W pozostałych podrozdziałach przedstawiamy ideę konstrukcji algorytmów umożliwiających obliczenie macierzy  $B \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  pomiędzy spójnymi bigrafami  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa o  $n + 2$  wierzchołkach, gdzie  $3 \leq n + 2 \leq 6$ , przy założeniu, że taka kongruencja istnieje.

### 6.1. Twierdzenie klasyfikujące dla bigrafów o małej liczbie wierzchołków

Jednym z celów tego rozdziału jest rozwiązanie problemów 1.4 oraz 1.5 spektralnej klasyfikacji Coxetera sformułowanych we wstępie niniejszej dysertacji. Problemy te dla spójnych nieujemnych bigrafów są rozważane m.in. w publikacjach [56, 68, 86, 87]. Podobnie jak w artykułach [54–56, 82, 84] oraz [39–41, 98] pierwszy z nich formułujemy dla bigrafów korangi dwa następująco.

**Problem 6.1.** *Czy równość typów Coxetera-Dynkina*

$$\text{CDtype}_\Delta = (\text{specc}_\Delta, \text{Dyn}_\Delta) = (\text{specc}_{\Delta'}, \text{Dyn}_{\Delta'}) = \text{CDtype}_{\Delta'}$$

*implikuje istnienie silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa?*

W dalszej części, za [86, Definition 3.1 (i)], symbolami

$$\begin{aligned} \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2} &= \{\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}; \Delta \text{ jest spójny oraz } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_n^2\}, \\ \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2} &= \{\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}; \Delta \text{ jest spójny oraz } \Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_{n,j}^2\}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

oznaczamy zbiory wszystkich nieujemnych spójnych bigrafów korangi dwa bez pętli słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z rozszerzonymi bigrafami Euklidesa  $\tilde{D}_n^2$  (przedstawionymi w tabeli 4.2), oraz odpowiednio, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z bigrafami  $\tilde{D}_{n,j}^2, j \geq 1$  (przedstawionymi w tabeli 6.5). Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, dla bigrafów korangi dwa problem 1.5 formułujemy następująco.

**Problem 6.3.** *Dla danego rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{D}_n^2, n \geq 1$ , z tabeli 4.2, zbudować algorytm konstruujący dla dowolnej pary spójnych bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2}$  spełniających relację  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  pewną macierz  $B \in \mathbb{M}_{n+2}$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama, tzn.  $\check{G}_{\Delta'} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$ .*

W dalszej części rozdziału pokażemy, że problemy 6.1 oraz 6.3 posiadają pozytywne rozwiązanie dla wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa o co najwyżej sześciu wierzchołkach. Wyniki te zostały opublikowane w artykule [98], zobacz uwaga 6.9.

Dla ustalonego rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ , symbolami

$$\begin{aligned} \mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} &= \{\text{cox}_\Delta(t); \Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2}\}, \\ \mathcal{CN}_{\tilde{D}_{n,j}^2} &= \{(\mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta); \Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}\}, \end{aligned}$$

oznaczamy zbiory wszystkich wielomianów Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathbb{Z}[t]$  oraz par  $(\mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta)$  liczb Coxetera spójnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2}$  słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z  $\tilde{D}_n^2$ . Ponadto symbolem

$$\mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} \ominus \mathcal{CN}_{\tilde{D}_{n,j}^2} = \{(\text{cox}_\Delta(t), \mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta); \text{cox}_\Delta(t) \in \mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2}, (\mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta) \in \mathcal{CN}_{\tilde{D}_{n,j}^2}\},$$

oznaczamy zbiór wszystkich trójek  $(\text{cox}_\Delta(t), \mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta)$ , gdzie  $\text{cox}_\Delta(t) \in \mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2}, (\mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta) \in \mathcal{CN}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ , oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2}$  jest spójnym bigrafem słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z  $\tilde{D}_n^2$ .

Konsekwencją obliczeń komputerowych przedstawionych w artykule [98] jest następujące twierdzenie klasyfikujące.

**Twierdzenie 6.4.** (a) *Jeśli  $3 \leq n+2 \leq 6$  oraz  $\tilde{D}_n^2 \in \{\tilde{A}_n^2, n \geq 1, \tilde{D}_n^2, n \geq 4, \tilde{E}_6^2, \tilde{E}_7^2, \tilde{E}_8^2\}$ , jest rozszerzonym bigrafem Euklidesa, to*

(a1) *zbiór bigrafów  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2}$  jest skończony, a jego moc można odczytać z tabeli 6.6,*

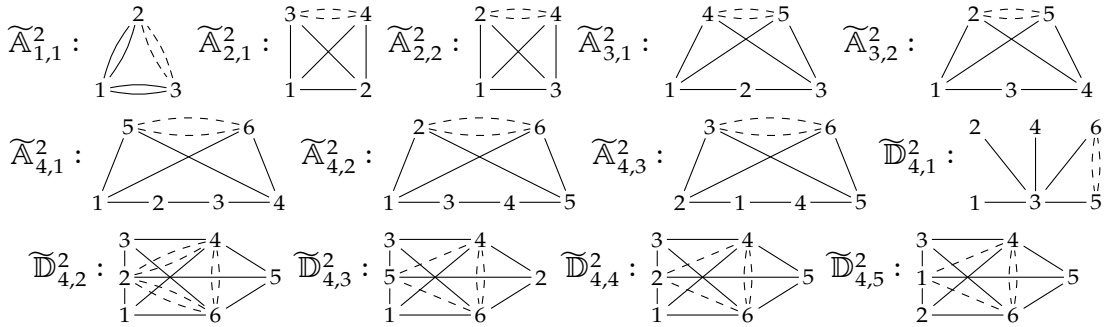
(a2) *zbiór  $\mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} \ominus \mathcal{CN}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$  jest skończony i składa się z trójek  $(F_{\tilde{D}_n^2}^{(j)}(t), \mathbf{c}_{\tilde{D}_n^2}^{(j)}, \check{\mathbf{c}}_{\tilde{D}_n^2}^{(j)})$  przedstawionych w tabeli 6.6.*

(b) *Dowolny spójny nieujemny bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa o co najwyżej sześciu wierzchołkach jest silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z jednym z bigrafów  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$  przedstawionych w tabeli 6.5. Para bigrafów  $\tilde{D}_{n,j}^2, \tilde{D}_{n,s}^2$  z tabeli 6.5 jest silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{D}_{n,s}^2$ .*

(c) *Jeśli  $3 \leq n+2 \leq 6$  oraz  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  są spójnymi nieujemnymi bigrafami korangi dwa takimi, że  $\mathbf{CDtype}_\Delta = \mathbf{CDtype}_{\Delta'}$ , to istnieje silna  $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ .*

6.1. Twierdzenie klasyfikujące dla bigrafów o małej liczbie wierzchołków

TABELA 6.5. LISTA REPREZENTANTÓW SPÓJNYCH BIGRAFÓW KORANGI DWA  
 $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}, n+2 \leq 6$ , WZGLĘDEM  $\approx_{\mathbb{Z}}$



W następującej tabeli przedstawiamy zbiory  $\mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} \ominus \mathcal{CN}_{\tilde{D}_n^2}$  dla  $3 \leq n+2 \leq 6$  oraz liczby  $|\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}|$  spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z bigrafem  $\tilde{D}_{n,j}^2$ , gdzie  $\tilde{D}_{n,j}^2, j \geq 1$ , są bigrafami przedstawionymi w tabeli 6.5. Zauważmy, że  $\tilde{D}_{n,1}^2 := \tilde{D}_n^2$ .

TABELA 6.6. ZBIORY  $\mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} \ominus \mathcal{CN}_{\tilde{D}_n^2}$  DLA  $3 \leq n+2 \leq 6$

| $\tilde{D}_n^2$ | $\tilde{D}_{n,j}^2$ | $\mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} = \{F_{\tilde{D}_n^2}^{(j)}(t)\}_{j \leq m_{\tilde{D}_n^2}}$ | $\mathcal{CN}_{\tilde{D}_n^2} = \{c_{\tilde{D}_n^2}^{(j)}, \check{c}_{\tilde{D}_n^2}^{(j)}\}  \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2} $ |
|-----------------|---------------------|--|---|
| $\tilde{A}_1^2$ | $\tilde{A}_{1,1}^2$ | $F_{\tilde{A}_1^2}^{(1)}(t) = t^3 - t^2 - t + 1$   | $c_{\tilde{A}_1^2}^{(1)} = 2, \check{c}_{\tilde{A}_1^2}^{(1)} = 2$ 4  |
| $\tilde{A}_2^2$ | $\tilde{A}_{2,1}^2$ | $F_{\tilde{A}_2^2}^{(1)}(t) = t^4 - t^3 - t + 1$   | $c_{\tilde{A}_2^2}^{(1)} = 3, \check{c}_{\tilde{A}_2^2}^{(1)} = 3$ 72   |
|                 | $\tilde{A}_{2,2}^2$ | $F_{\tilde{A}_2^2}^{(2)}(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$                                    | $c_{\tilde{A}_2^2}^{(2)} = \infty, \check{c}_{\tilde{A}_2^2}^{(2)} = 1$ 32  |
| $\tilde{A}_3^2$ | $\tilde{A}_{3,1}^2$ | $F_{\tilde{A}_3^2}^{(1)}(t) = t^5 - t^4 - t + 1$   | $c_{\tilde{A}_3^2}^{(1)} = 4, \check{c}_{\tilde{A}_3^2}^{(1)} = 4$ 2 560  |
|                 | $\tilde{A}_{3,2}^2$ | $F_{\tilde{A}_3^2}^{(2)}(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3 + 2t^2 - 3t + 1$                             | $c_{\tilde{A}_3^2}^{(2)} = \infty, \check{c}_{\tilde{A}_3^2}^{(2)} = 2$ 1 920   |
| $\tilde{A}_4^2$ | $\tilde{A}_{4,1}^2$ | $F_{\tilde{A}_4^2}^{(1)}(t) = t^6 - t^5 - t + 1$   | $c_{\tilde{A}_4^2}^{(1)} = 5, \check{c}_{\tilde{A}_4^2}^{(1)} = 5$ 100 000  |
|                 | $\tilde{A}_{4,2}^2$ | $F_{\tilde{A}_4^2}^{(2)}(t) = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1$                      | $c_{\tilde{A}_4^2}^{(2)} = \infty, \check{c}_{\tilde{A}_4^2}^{(2)} = 3$ 51 840  |
|                 | $\tilde{A}_{4,3}^2$ | $F_{\tilde{A}_4^2}^{(3)}(t) = t^6 - 2t^5 - t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t + 1$                        | $c_{\tilde{A}_4^2}^{(3)} = \infty, \check{c}_{\tilde{A}_4^2}^{(3)} = 2$ 46 080  |
| $\tilde{D}_4^2$ | $\tilde{D}_{4,1}^2$ | $F_{\tilde{D}_4^2}^{(1)}(t) = t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 - t + 1$                          | $c_{\tilde{D}_4^2}^{(1)} = 6, \check{c}_{\tilde{D}_4^2}^{(1)} = 6$ 51 840   |
|                 | $\tilde{D}_{4,2}^2$ | $F_{\tilde{D}_4^2}^{(2)}(t) = t^6 - 2t^5 + 3t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1$                      | $c_{\tilde{D}_4^2}^{(2)} = 4, \check{c}_{\tilde{D}_4^2}^{(2)} = 4$ 20 480   |
|                 | $\tilde{D}_{4,3}^2$ | $F_{\tilde{D}_4^2}^{(3)}(t) = t^6 + 2t^5 - t^4 - 4t^3 - t^2 + 2t + 1$                        | $c_{\tilde{D}_4^2}^{(3)} = 2, \check{c}_{\tilde{D}_4^2}^{(3)} = 2$ 1 280  |
|                 | $\tilde{D}_{4,4}^2$ | $F_{\tilde{D}_4^2}^{(4)}(t) = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1$                      | $c_{\tilde{D}_4^2}^{(4)} = \infty, \check{c}_{\tilde{D}_4^2}^{(4)} = 3$ 38 880  |
|                 | $\tilde{D}_{4,5}^2$ | $F_{\tilde{D}_4^2}^{(5)}(t) = t^6 - 2t^5 - t^4 + 4t^3 - t^2 - 2t + 1$                        | $c_{\tilde{D}_4^2}^{(5)} = \infty, \check{c}_{\tilde{D}_4^2}^{(5)} = 2$ 23 040  |

Dowód twierdzenia 6.4. (a) Dowód ma charakter obliczeniowy.

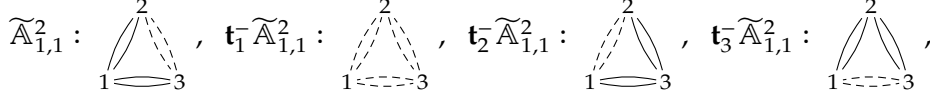
**Etap 1.** Korzystając z algorytmu 5.22, obliczamy zbiory

$$\mathcal{UBigr}_{\leq 6}^2 = \mathcal{UBigr}_{\tilde{A}_1^2}^2 \cup \mathcal{UBigr}_{\tilde{A}_2^2}^2 \cup \mathcal{UBigr}_{\tilde{A}_3^2}^2 \cup \mathcal{UBigr}_{\tilde{A}_4^2}^2 \cup \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_4^2}^2$$

wszystkich spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o co najwyżej sześciu wierzchołkach oraz typie Dynkina  $\text{Dyn}_\Delta = D_n \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, D_4\}$ . Czasy obliczeń przedstawiamy w tabeli 5.25.

**Etap 2.** Dla każdego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_n^2}^2$  słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnego z bigrafem  $\tilde{D}_n^2$ , przy użyciu obliczeń algebry komputerowej oraz algorytmu A.55, obliczamy wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t)$  oraz liczbę Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  i zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{\mathbf{c}}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$ . Otrzymaną trójkę  $(\text{cox}_\Delta(t), \mathbf{c}_\Delta, \check{\mathbf{c}}_\Delta)$  dodajemy do zbioru  $\mathcal{CPol}_{\tilde{D}_n^2} \ominus \mathcal{CN}_{\tilde{D}_n^2}$  przedstawionego w tabeli 6.6.

Wyniki zastosowanego podziału przedstawiamy w tabeli 6.6, co kończy dowód części (a).  
(b) Da  $n = 1$  następujące bigrafy



są jedynymi spójnymi nieujemnymi bigrafami  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$  korangi dwa bez pętli o trzech wierzchołkach, gdzie  $t_a^- : \mathcal{UBigr}_m \rightarrow \mathcal{UBigr}_m$  jest operatorem inflacji  $\Delta \mapsto t_a^- \Delta$  bigrafu  $\Delta$  w punkcie  $a \in \Delta_0$ , zobacz definicja 3.55(a). Na podstawie lematu 3.65(a) macierz  $B := T_i^-$ ,  $i = 1, 2, 3$ , definiująca silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\tilde{A}_{1,1}^2 \approx_{\mathbb{Z}}^B \Delta := t_i^- \tilde{A}_{1,1}^2$  ma następującą postać:

$$T_1^- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_3^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dla  $2 \leq n \leq 4$  dowód ma charakter obliczeniowy. Dla każdego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o  $n + 2$  wierzchołkach, macierz  $B \in \text{Gl}(n + 2, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\check{G}_{\tilde{D}_{n,j}^2} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$ , gdzie  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{A}_{4,4}^2, \tilde{A}_{4,5}^2, \mathbb{D}_{4,1}^2, \mathbb{D}_{4,2}^2, \mathbb{D}_{4,3}^2, \mathbb{D}_{4,4}^2, \mathbb{D}_{4,5}^2\}$ , obliczamy korzystając z algorytmów kombinatoryczno-graficznych przedstawionych w artykule [98] oraz następujących podrozdziałach.

Obliczenia przeprowadzamy w następujący sposób.

**Etap 1.** Dla każdego bigrafu  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \mathbb{D}_{4,1}^2, \mathbb{D}_{4,2}^2, \mathbb{D}_{4,3}^2, \mathbb{D}_{4,4}^2, \mathbb{D}_{4,5}^2\}$ :

**Etap 1.1.** dla każdej klasy  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^2$ :

**Etap 1.1.1.** dla każdego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli, należącego do klasy  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^2$ :

**Etap 1.1.1.1.** obliczamy macierz  $B \in \text{Gl}(n + 2, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\check{G}_{\tilde{D}_{n,j}^2} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$  korzystając z jednego z dwóch typów algorytmów zależnych od rozważanego przypadku bigrafu  $\tilde{D}_{n,j}^2$ .

Użyte algorytmy zostały zaimplementowane w języku Python i uruchomione przy pomocy interpretera PyPy. Ich implementacja dostępna jest na płycie dołączonej do dysertacji oraz na stronie internetowej [99]. Poszczególne czasy obliczeń: minimalny  $t_{min}$ , maksymalny  $t_{max}$ , średni  $t_{avg}$ , oraz całkowity  $t_{sum}$  dla wszystkich bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^2$  silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z bigrafami  $\tilde{D}_{n,j}^2$ , przedstawiamy w tabeli 6.7.

TABELA 6.7. CZASY OBLICZEŃ: MINIMALNY  $t_{min}$ , MAKSYMALNY  $t_{max}$ , ŚREDNI  $t_{avg}$ , CAŁKOWITY  $t_{sum}$  MACIERZY DEFINIUJĄCEJ  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_{n,j}^2$ , DLA  $2 \leq n \leq 4$

| $\tilde{D}_{n,j}^2$ | $\tilde{A}_{2,1}^2$ | $\tilde{A}_{2,2}^2$ | $\tilde{A}_{3,1}^2$ | $\tilde{A}_{3,2}^2$ | $\tilde{A}_{4,1}^2$ | $\tilde{A}_{4,2}^2$ | $\tilde{A}_{4,3}^2$ | $\mathbb{D}_{4,1}^2$ | $\mathbb{D}_{4,2}^2$ | $\mathbb{D}_{4,3}^2$ | $\mathbb{D}_{4,4}^2$ | $\mathbb{D}_{4,5}^2$ |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $t_{min}$           | 0,06s               | 0,03s               | 0,04s               | 0,04s               | 0,06s               | 0,06s               | 0,05s               | 0,06s                | 0,06s                | 0,05s                | 0,06s                | 0,05s                |
| $t_{max}$           | 0,29s               | 0,04s               | 0,21s               | 0,14s               | 0,19s               | 0,19s               | 0,25s               | 0,17s                | 0,16s                | 0,13s                | 0,21s                | 0,16s                |
| $t_{avg}$           | 0,10s               | 0,03s               | 0,05s               | 0,05s               | 0,07s               | 0,07s               | 0,08s               | 0,07s                | 0,08s                | 0,07s                | 0,08s                | 0,07s                |
| $t_{sum}$           | 7,6s                | 1,1s                | 2,5min              | 1,7s                | 129min              | 67min               | 67min               | 63min                | 27min                | 1,5min               | 57min                | 27min                |

6.1. Twierdzenie klasyfikujące dla bigrafów o małej liczbie wierzchołków

Całkowity czas pracy jednego procesora<sup>1</sup> obliczającego macierze  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiujące silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_{n,j}^2$ , gdzie  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$  jest jednym z bigrafów z tabeli 6.5, dla wszystkich 338 024 spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o  $4 \leq n+2 \leq 6$  wierzchołkach wyniósł 7 godzin i 43 minuty. Obliczone macierze definiujące silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{D}_{n,j}^2$  dostępne są na stronie internetowej [99].

Jeśli para bigrafów  $\tilde{D}_{n,j}^2, \tilde{D}_{n,s}^2$  przedstawionych w tabeli 6.5 jest silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentna, to na podstawie lematu 4.21(b) prawdziwa jest równość

$$\mathbf{CDtype}_{\tilde{D}_{n,j}^2} = \left( \mathbf{spec}_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \mathbf{Dyn}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \right) = \left( \mathbf{spec}_{\tilde{D}_{n,s}^2}, \mathbf{Dyn}_{\tilde{D}_{n,s}^2} \right) = \mathbf{CDtype}_{\tilde{D}_{n,s}^2}. \quad (6.8)$$

Na podstawie tabeli 6.6 równość (6.8) jest prawdziwa w przypadku, gdy  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{D}_{n,s}^2$ .

Jeśli  $\tilde{D}_{n,j}^2 \neq \tilde{D}_{n,s}^2$ , to na podstawie twierdzenia 3.53 bigrafy  $\tilde{D}_{n,j}^2$  oraz  $\tilde{D}_{n,s}^2$  nie są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne.

(c) Niech  $3 \leq n+2 \leq 6$  oraz  $\Delta, \Delta' \in \check{\mathcal{UBigr}}_{n+2}^2$  będą parą spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli, takich, że  $\mathbf{CDtype}_{\Delta} = \mathbf{CDtype}_{\Delta'}$ . Aby udowodnić istnienie silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , korzystamy z przechodniości operacji  $\approx_{\mathbb{Z}}$  oraz z wyników podpunktu (b). Jeśli  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$  oraz prawdziwe są równości  $\check{G}_{\tilde{D}_{n,j}^2} = B_{\Delta'}^{\text{tr}} \cdot \check{G}_{\Delta} \cdot B_{\Delta}$  oraz  $\check{G}_{\tilde{D}_{n,j}^2} = B_{\Delta'}^{\text{tr}} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B_{\Delta'}$ , gdzie  $B_{\Delta}, B_{\Delta'} \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$ , to macierz  $B := B_{\Delta'} \cdot B_{\Delta}^{-1} \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiuje równość  $\check{G}_{\Delta} = B^{\text{tr}} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B$ , co kończy dowód.  $\square$

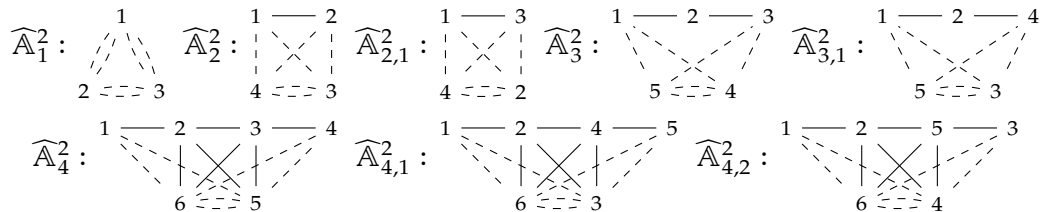
**Uwaga 6.9.** (a) W artykule [98] przedstawiamy klasyfikację spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli, która wykorzystuje inną listę reprezentantów bigrafów od tych w tabeli 6.6 (które wyznaczają te bigrafy jednoznacznie z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama), zobacz [98, Theorem 3.9] oraz twierdzenie 6.4.

(b) W twierdzeniu klasyfikującym [98, Theorem 3.9] rozważamy bigraf  $\tilde{D}_4^2$ , natomiast w twierdzeniu 6.4 rozważamy bigraf  $\tilde{D}_4^2$  ponumerowany jak w tabeli 4.2 gdzie

$$\tilde{D}_4^2 : \begin{array}{c} 5 & & 6 & & 1 \\ & \diagdown & | & \diagup & \binom{1}{1} \\ 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & 2 \end{array}, \text{ oraz } \tilde{D}_4^2 : \begin{array}{c} 2 & & 4 & & 6 \\ & \diagdown & | & \diagup & \binom{1}{1} \\ 1 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 \end{array},$$

co nie zmniejsza ogólności wyników, ponieważ  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_4^2}^{\approx} = \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_4^2}^{\approx}$ , zobacz twierdzenie 4.4(b).

(c) W twierdzeniu klasyfikującym 6.4 rozważamy rozszerzone bigrafy Euklidesa  $\tilde{A}_{n,s}^2$  (przedstawione w lemacie 4.5), natomiast w [98, Theorem 3.9] rozważamy następujące bigrafy:



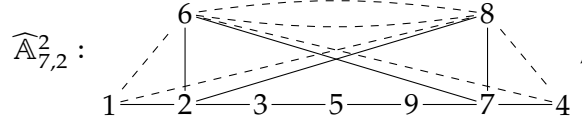
(d) Zauważmy, że dla  $n \geq 7$ , bigrafy typu  $\tilde{A}_{n,s-1}^2$  [98, Table C, Table D] pozwalają na wyznaczenie większej liczby klas bigrafów  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{A}_{n,s-1}^2}^{\approx}$  (6.2) niż rozszerzone bigrafy Euklidesa  $\tilde{A}_{n,s}^2$  (zobacz podpunkt (f) tej uwagi), gdzie stosujemy oznaczenie  $\tilde{A}_{n,0}^2 := \tilde{A}_n^2$ .

<sup>1</sup>Obliczenia zostały wykonane na komputerze wyposażonym w procesor AMD taktowany zegarem 3,6 GHz, wyposażonym w 32 GB pamięci RAM.

Rozdział 6. Geometrie  $\Phi_\Delta$ -sieciovie pierwiastków w spektralnej klasyfikacji Coxetera nieujemnych bigrafów korangi dwa

(e) Ze względu na spójność dysertacji oraz ograniczenie na liczbę wierzchołków  $1 \leq n + 2 \leq 6$ , bigrafy typu Dynkina  $\mathbf{Dyn}_\Delta = \mathbb{A}_n$  przedstawione w twierdzeniu klasyfikacyjnym 6.4 są rozszerzonymi bigrafami Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,s}^2$ . Nie zmniejsza to ogólności wyników, ponieważ  $\mathcal{UBigr}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{n,s-1}^2} \approx \mathcal{UBigr}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{n,s}^2}$  dla  $1 \leq n + 2 \leq 6$ .

(f) Przykładowo, dla następującego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\widetilde{\mathbb{A}}_{7,2}^2 \in \mathcal{UBigr}_9$



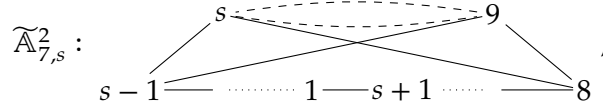
przedstawionego w przykładzie 3.39(b), wielomian Coxetera  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{7,2}^2}(t) \in \mathbb{Z}[t]$

$$\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{7,2}^2}(t) = t^9 - t^8 - t^7 - t^6 + 2t^5 + 2t^4 - t^3 - t^2 - t + 1$$

jest różny od wielomianów Coxetera  $\text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(1)}(t), \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2}^{(2)}(t), \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^{(2)}}^{(3)}(t), \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_n^{(2)}}^{(4)}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ , rozszerzonego bigrafu Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{A}}_7^2$  w zależności od numeracji jego wierzchołków (zobacz też twierdzenie 4.4(c) oraz lemat 4.5) przedstawionych w przykładzie 4.6:

$$\begin{aligned} \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_7^2}^{(1)}(t) &= \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_7^2} &= t^9 - t^8 - t + 1, \\ \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_7^2}^{(2)}(t) &= \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{7,2}^2} &= t^9 - 3t^8 + 3t^7 - t^6 - t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \\ \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_7^2}^{(3)}(t) &= \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{7,3}^2} &= t^9 - 2t^8 + 2t^6 - t^5 - t^4 + 2t^3 - 2t + 1, \\ \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_7^2}^{(4)}(t) &= \text{cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{7,4}^2} &= t^9 - 2t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - 2t + 1. \end{aligned}$$

Przypominamy, że bigraf  $\widetilde{\mathbb{A}}_{7,s}^2$  ma postać



dla  $s = 2, 3, 4$  oraz wierzchołki bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_7^2$  są ponumerowane jak w tabeli 4.2.

Na zakończenie niniejszego podrozdziału przypominamy istniejące metody obliczania macierzy definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  dla pary spójnych nieujemnych bigrafów bez pętli.

**Uwaga 6.10.** Metody obliczania macierzy definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  pomiędzy spójnymi nieujemnymi bigrafami  $\Delta, \Delta'$  bez pętli przedstawione są:

(a) w niniejszym rozdziale oraz w artykule [98] dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli, gdzie budujemy algorytm kombinatoryczno-graficzny umożliwiające obliczenie macierzy definiującej silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama wykorzystujące geometrie  $\Phi_\Delta$ -oczkowe pierwiastków, zobacz też uwaga 6.25,

(b) w artykule [42, Algorithm 3.5], gdzie podany jest heurystyczny algorytm dla spójnych nieujemnych zbiorów częściowo uporządkowanych, który może być stosowany również w przypadku spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych bez pętli; co prawda nie gwarantuje on znalezienia szukanej macierzy, ale wyznacza szukaną macierz w wielu przypadkach, zobacz [32, 42],

(c) w artykule [68] proponowana jest metoda *poprawiania* macierzy definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ , tak aby zmodyfikowana macierz definiowała silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$ . Jednak metoda ta ([68, Algorithm 3.7]) korzysta z grup izotropii diagramów Dynkina i jest stosowana oraz udowodniona jedynie w przypadku spójnych  **dodatnich**  bigrafów bez pętli, zobacz też [86, 87].



## 6.2. O geometriach $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów dodatnich

Niniejszy podrozdział poświęcony jest krótkiemu omówieniu metody zapowiedzianej w uwadze 6.10(a). Rozpocznemy od przypomnienia podstawowych definicji i twierdzeń stosowanych do redukcji problemu klasyfikacji spójnych dodatnich bigrafów bez pętli (z dokładnością do silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama), do problemu klasyfikacji  $\Phi$ -sieciovych systemów pierwiastków (z dokładnością do izomorfizmu kołczanów  $\Phi$ -oczkowych).

W tym celu przypominamy metodę konstruowania  $\Phi_\Delta$ -oczkowych kołczanów  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ , definiowanych w artykułach [80–82, 87] i inspirowanych ideą stosowania kołczanów Auslandera-Reiten (zobacz na przykład [1, 74]).

Idea zastosowania kołczanów  $\Phi_\Delta$ -oczkowych  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  opiera się na następującym fakcie udowodnionym w [87, Theorem 3.13], [7, Theorem 2.4]. Jeśli istnieją „odpowiednio dobrze dobrane”  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowe kołczany  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta), \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  dodatnich spójnych bigrafów  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli, to istnienie macierzy  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  definiującej silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama pomiędzy bigrafami  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  redukuje się do istnienia izomorfizmu  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \simeq \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  stowarzyszonych kołczanów  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowych (grafów skierowanych „z dodatkową strukturą”), zobacz [87, Theorem 3.13], [7, Theorem 2.4].

Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  będzie spójnym **dodatnim** bigrafem bez pętli,  $\mathcal{R}_\Delta(d) = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = d\}$  zbiorem pierwiastków z całkowitej liczby  $d \geq 1$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  (definicja 3.12(a)),  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m, \Phi_\Delta(v) = v \cdot \text{Cox}_\Delta$  transformacją Coxetera (definicja 3.37(b)).

- (a) Zbiór  $\mathcal{R}_\Delta(d)$  jest skończony oraz skończona jest liczba Coxetera  $c_\Delta < \infty$  (lemat 3.43(a)).  
 (b) Dla dowolnego wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta(d)$  jego  $\Phi_\Delta$ -orbita

$$\text{Orb}(v) := \{\Phi_\Delta^k(v); k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{R}_\Delta(d), \quad (6.11)$$

jest skończona. Przedstawiamy ją graficznie na płaszczyźnie euklidesowej  $\mathbb{R}^2$  w postaci grafu skierowanego

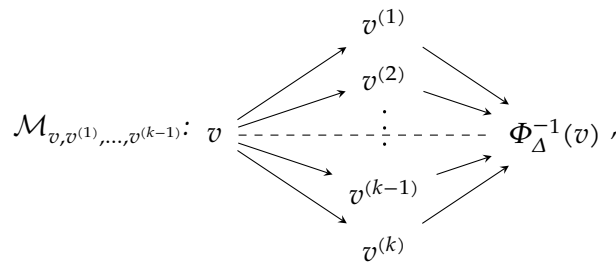
$$\mathcal{O}(v) : \dots \Phi_\Delta^2(v) \leftarrow \Phi_\Delta(v) \leftarrow v \leftarrow \Phi_\Delta^{-1}(v) \leftarrow \Phi_\Delta^{-2}(v) \dots$$

- (c) Często w przedstawieniu  $\Phi_\Delta$ -orbity  $\text{Orb}(v)$  wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta(d)$  pomijamy kierunek strzałek, a sam graf przedstawiamy w następującej (skończonej) postaci

$$\mathcal{O}(v) : v \text{ ---- } \Phi_\Delta^{-1}(v) \text{ ---- } \Phi_\Delta^{-2}(v) \text{ ---- } \Phi_\Delta^{-c_\Delta+2}(v) \text{ ---- } \Phi_\Delta^{-c_\Delta+1}(v)$$

W [80, Definition 3.1] wprowadza się pojęcie  $\Phi_\Delta$ -oczka szerokości  $k \geq 1$  następująco.

**Definicja 6.12.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  będzie nieujemnym bigrafem bez pętli,  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m, \Phi_\Delta(v) = v \cdot \text{Cox}_\Delta$  transformacją Coxetera. Mówimy, że wektory  $v, v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{Z}^m$  tworzą  $\Phi_\Delta$ -oczko  $\mathcal{M}_{v, v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}}$  szerokości  $k \geq 1$

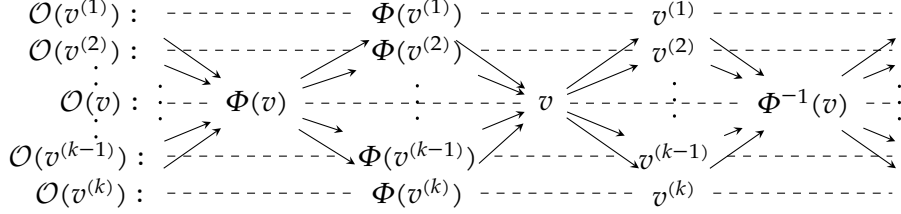


jeśli spełnione są następujące warunki:

- (i)  $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) = v^{(1)} + \dots + v^{(k)}$ , oraz  
 (ii)  $\Phi_\Delta$ -orbity wektorów  $v, v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$  są parami różne, tzn.  $\text{Orb}(v) \neq \text{Orb}(v^{(i)})$  oraz  $\text{Orb}(v^{(i)}) \neq \text{Orb}(v^{(j)})$  dla  $1 \leq i \neq j \leq k$ .

W [80, Definition 3.3] wprowadza się definicję kołczanu  $\Phi$ -oczkowego  $\Gamma(\mathcal{R}, \Phi)$  na zbiorze  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^m$  następująco.

**Definicja 6.13.** Niech  $\Phi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  będzie nietrywialnym automorfizmem grup oraz  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^m$  zbiorem  $\Phi$ -niezmiennicznym, tzn.  $\Phi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ . Mówimy, że zbiór  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}^m$  ma strukturę kołczanu  $\Phi$ -oczkowego  $\Gamma(\mathcal{R}, \Phi)$ , jeśli wszystkie  $\Phi$ -orbity wektorów  $u \in \mathcal{R}$  połączone są  $\Phi$ -oczkami tak, że dla każdego  $u \in \mathcal{R}$  pełny wypukły podkołczan (indukowany podgraf skierowany) zawierający  $\Phi$ -orbitę  $\text{Orb}(u)$  składa się z  $\Phi$ -oczek i ma następującą postać



W artykule [80], dla dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ , wprowadza się pojęcie jego  $\Phi_\Delta$ -siecioviej geometrii orbit pierwiastków następująco.

**Definicja 6.14.** Kołczan  $\Phi_\Delta$ -oczkowy  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  nazywamy  $\Phi_\Delta$ -sieciovą geometrią  $\Phi_\Delta$ -orbit pierwiastków dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n$ , jeśli

- (a)  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  jest zbiorem  $\Phi_\Delta$ -niezmiennicznym, tzn.  $\Phi_\Delta(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta) \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_\Delta$ ,
- (b)  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^n$  zawiera skończony zbiór  $\mathcal{R}_\Delta$  wszystkich pierwiastków  $\Delta$  z liczby  $d = 1$ ,
- (c)  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  jest minimalnym kołczanem  $\Phi_\Delta$ -oczkowym spełniającym (a) oraz (b).

Problem istnienia  $\Phi_\Delta$ -sieciovych geometrii pierwiastków dla bigrafów dodatnich nie został jeszcze rozwiązany, choć z nowych prac promotora [88–91] wynika, że dla bigrafów dodatnich typu  $\mathbb{D}_n, n \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$  przedstawionych w tabeli 3.32, oraz  $\mathcal{B}_n, n \geq 2, \mathcal{C}_n, n \geq 3, \mathcal{F}_4, \mathcal{G}_2$ , przedstawionych w [55, Table 3.11] takie geometrie istnieją.

Dla bigrafów dodatnich  $\Delta$  typu  $\mathbb{D}_5$  o wielomianie Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t) = t^5 + t^3 + t^2 + 1$  taka geometria  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  została skonstruowana w artykule [7]. Można jednak pokazać, że w tym wypadku jest więcej niż jedna  $\Phi_\Delta$ -oczkowa geometria pierwiastków  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  z dokładnością do izomorfizmu.

Z nowych wyników promotora [88–91] wynika, że dla dowolnego dodatniego spójnego bigrafu Cox-regularnego [55, Definition 3.1]  $\Delta$  z pętlami istnieje (dokładnie jedna) geometria  $\Phi_\Delta$ -oczkowa  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ . Analogiczny wynik nie jest jeszcze udowodniony dla bigrafów bez pętli.

Jeśli bigraf  $\Delta$  jest spójny i dodatni oraz istnieje geometria  $\Phi_\Delta$ -oczkowa  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  (tzn.  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta$ ), to kołczan  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  nazywamy  $\Phi_\Delta$ -sieciovym systemem pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$ , zobacz [80, Definition 4.13] oraz [80, Remark 4.15].

Przykłady bigrafów dodatnich  $\Delta$  posiadających  $\Phi_\Delta$ -oczkową geometrię pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  podajemy w dalszej części tego podrozdziału, zobacz przykład 6.19 oraz 6.24.

W zastosowaniach buduje się na ogół geometrie  $\Phi_\Delta$ -oczkowe spełniające pewne dodatkowe warunki wynikające z charakteru problemu, który rozwiązujemy.

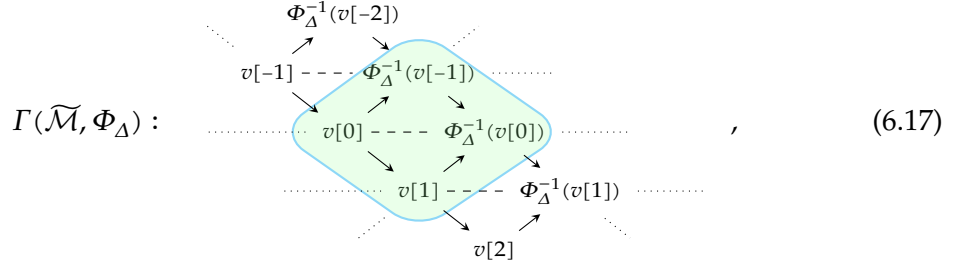
Następujące twierdzenie udowodnione w [80, Proposition 4.5] zawiera opis minimalnej konstrukcji rozszerzenia dowolnego  $\Phi_\Delta$ -oczka  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{w,v} \subseteq \mathbb{Z}^n$  szerokości dwa do kołczanu  $\Phi_\Delta$ -oczkowego  $\Gamma(\tilde{\mathcal{M}}, \Phi_\Delta)$ . Konstrukcję tę będziemy też stosować w następnym podrozdziale w budowie geometrii sieciowych dla bigrafów korangi dwa.

**Twierdzenie 6.15.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 2$ , będzie spójnym dodatnim bigrafem bez pętli,  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  transformacją Coxetera,  $\mathbf{c}_\Delta < \infty$  liczbą Coxetera. Każde  $\Phi_\Delta$ -oczko:

$$\mathcal{M}_{w,v} : \begin{array}{ccc} & v & \\ & \nearrow & \searrow \\ w & \text{-----} & \Phi_\Delta^{-1}(w) \\ & \searrow & \nearrow \\ & v' & \end{array} , \quad (6.16)$$

6.2. O geometriach  $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów dodatnich

gdzie  $w, v \in \mathbb{Z}^m$  oraz  $v' := w + \Phi_\Delta^{-1}(w) - v \in \mathbb{Z}^m$ , można jednoznacznie uzupełnić do następującego kołczanu  $\Phi_\Delta$ -oczkowego



w którym  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{w,v}$  oraz  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczy zbiór  $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_{w,v} \subseteq \mathbb{Z}^m$  zdefiniowany jest następująco

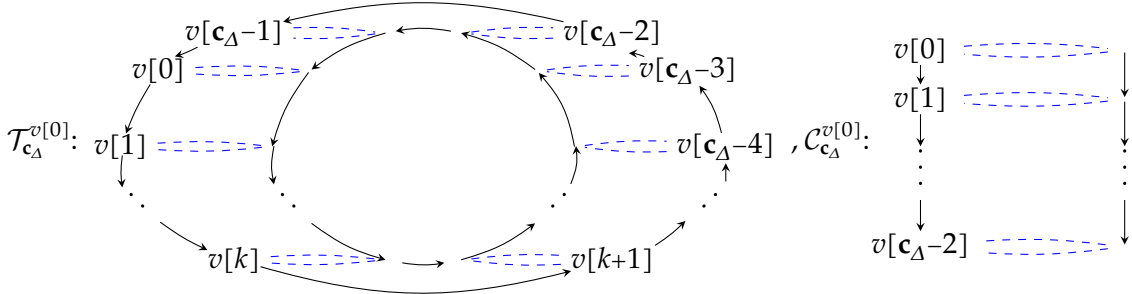
$$\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_{w,v} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{Orb(v[k])\} \subseteq \mathbb{Z}^m, \quad (6.18)$$

tj. składa się z wektorów należących do  $\Phi_\Delta$ -orbit  $Orb(v[k])$  wektorów  $v[k] \in \mathbb{Z}^m$ , gdzie  $v[0] = w, v[1] = v', v[-1] = \Phi_\Delta(v)$ , oraz dla każdego  $k \geq 1$  zachodzą równości:

- $v[k] = v[0] + \dots + \Phi_\Delta^{-k}(v[0]) - (\Phi_\Delta^{-1}(v[-1]) + \dots + \Phi_\Delta^{-k}(v[-1]))$ ,
- $v[-k] = -(\Phi_\Delta(v[0]) + \dots + \Phi_\Delta^{k-1}(v[0])) + v[-1] + \dots + \Phi_\Delta^{k-1}(v[-1])$ ,
- $v[\mathbf{c}_\Delta] = v[0]$  oraz  $\Phi_\Delta^{\mathbf{c}_\Delta}(v[k]) = v[k]$ , tj. kołczan  $\Gamma(\tilde{\mathcal{M}}, \Phi_\Delta)$  leży na torusie  $\mathcal{T}_{\mathbf{c}_\Delta}^{v[0]}$  rangi  $\mathbf{c}_\Delta$ .

Jeśli  $v = 0$  (tzn.  $\mathcal{M}_{w,v}$  jest oczkiem szerokości jeden), to wektory  $v[-1] := \Phi_\Delta(v)$  oraz  $v[\mathbf{c}_\Delta - 1] = v[-1]$  są zerowe, tj.  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan  $\Gamma(\tilde{\mathcal{M}}, \Phi_\Delta)$  leży na skończonym cylindrze  $\mathcal{C}_{\mathbf{c}_\Delta}^{v[0]}$  rangi  $\mathbf{c}_\Delta$ .

Kształty kołczanów  $\Gamma(\tilde{\mathcal{M}}, \Phi_\Delta)$  skonstruowanych w twierdzeniu 6.15 schematycznie przedstawiamy na następującym rysunku, gdzie kolorem niebieskim oznaczamy  $\Phi_\Delta$ -orbitę wektorów  $v[i], i = 0, \dots, \mathbf{c}_\Delta - 1$ . Są to odpowiednio torus  $\mathcal{T}_{\mathbf{c}_\Delta}^{v[0]}$  rangi  $\mathbf{c}_\Delta$  oraz cylinder  $\mathcal{C}_{\mathbf{c}_\Delta}^{v[0]}$  rangi  $\mathbf{c}_\Delta$  (zobacz [79, 80]):

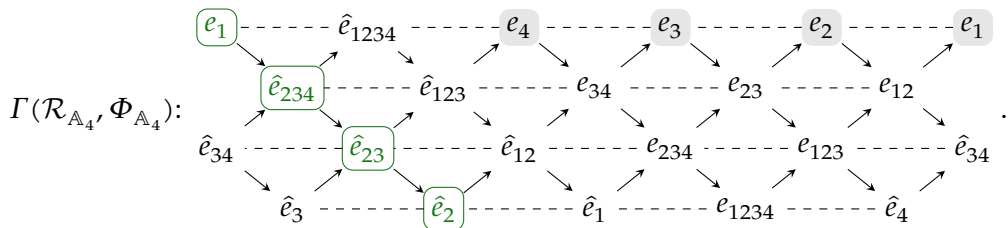


W następującym przykładzie ilustrujemy definicję  $\Phi_\Delta$ -sieciovego systemu pierwiastków na przykładzie grafu Dynkina  $\mathbb{A}_4$ .

**Przykład 6.19.** Rozważmy następujący spójny dodatni graf krawędziowo-dwudzielny bez pętli

$$\mathbb{A}_4 : 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4, \text{ gdzie } \check{G}_{\mathbb{A}_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_{\mathbb{A}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{c}_{\mathbb{A}_4} = 5.$$

Zbiór  $\mathcal{R}_{\mathbb{A}_4}$  pierwiastków bigrafu  $\mathbb{A}_4$  składa się z 20 wektorów, jest sumą czterech  $\Phi_{\mathbb{A}_4}$ -orbit każda długości  $\mathbf{c}_{\mathbb{A}_4} = 5$  i ma następującą strukturę  $\Phi_{\mathbb{A}_4}$ -sieciovego systemu pierwiastków:



Stosujemy oznaczenia  $e_{a_1, \dots, a_k} := e_{a_1} + \dots + e_{a_k}$ ,  $\hat{v} := -v$ . Łatwo zauważyć, że  $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_4}, \Phi_{\mathbb{A}_4}) = \Gamma(\tilde{\mathcal{M}}, \Phi_{\mathbb{A}_4})$  gdzie  $\mathcal{M}$  jest następującym  $\Phi_{\mathbb{A}_4}$ -oczkiem szerokości jeden

$$\mathcal{M}_{e_1, 0} : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \nearrow & \searrow \\ e_1 & \cdots & \hat{e}_{1234} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \hat{e}_{234} & \end{array}$$

Kołczan  $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_4}, \Phi_{\mathbb{A}_4})$  ma kształt skończonego cylindra  $C_5^{e_1}$  rangi  $\mathbf{c}_{\mathbb{A}_4} = 5$ , gdzie zielonym kolorem oznaczamy wektory  $v[1] := e_1, v[2] := -e_{234}, v[3] := -e_{23}, v[4] := -e_2$  wyznaczone w twierdzeniu 6.15, a szarym tłem wyróżniamy wektory jednostkowe  $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{Z}^4$  stanowiące standardową  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^4$ .

W [79, 80, 82, 84, 87] pokazuje się, że jeśli „odpowiednio dobrze dobrane” kołczany  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowe  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta), \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  dodatnich bigrafów bez pętli  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  są izomorficzne (oraz  $\varphi$  definiuje taki izomorfizm), to  $\Delta, \Delta'$  są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne. Innymi słowy, prawdziwa jest równoważność

$$\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \Delta' \Leftrightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \stackrel{\varphi}{\cong} \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'}).$$

W tym celu korzysta się z następującej definicji izomorfizmu kołczanów  $\Phi$ -oczkowych (*mesh translation quiver isomorphism*) wprowadzonej w [87, str. 63].

**Definicja 6.20.** Kołczany  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowe  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta), \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje izomorfizm  $\varphi: \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  grafów skierowanych, który

- (i) przeprowadza  $\Phi_\Delta$ -orbitę  $\mathcal{O}(v) \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_\Delta$  dowolnego pierwiastka  $v \in \tilde{\mathcal{R}}_\Delta$  z całkowitej liczby  $d \geq 0$  na  $\Phi_{\Delta'}$ -orbitę pierwiastka  $\varphi(v) \in \tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}$  z  $d \geq 0$ ,
- (ii) przeprowadza dowolne  $\Phi_\Delta$ -oczko  $\mathcal{M}_{v, v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}}$  szerokości  $k \geq 1$  kołczanu  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  na  $\Phi_{\Delta'}$ -oczko  $\mathcal{M}_{\varphi(v), \varphi(v^{(1)}), \dots, \varphi(v^{(k-1)})}$  szerokości  $k \geq 1$  kołczanu  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$ , tj.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & v^{(1)} & \\ & \nearrow & \searrow \\ v & \cdots & \Phi_\Delta^{-1}(v) \\ & \searrow & \nearrow \\ & v^{(k-1)} & \\ & \nearrow & \searrow \\ & v^{(k)} & \end{array} & \xrightarrow{\varphi} & \begin{array}{ccc} & \varphi(v^{(1)}) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \varphi(v) & \cdots & \varphi(\Phi_\Delta^{-1}(v)) = \Phi_{\Delta'}^{-1}(\varphi(v)) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \varphi(v^{(k-1)}) & \\ & \nearrow & \searrow \\ & \varphi(v^{(k)}) & \end{array} \end{array}$$

- (iii) oraz dla każdego  $v \in \tilde{\mathcal{R}}_\Delta$  prawdziwa jest równość  $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ .

Przypominamy teraz ideę zastosowania  $\Phi_\Delta$ -oczkowych geometrii pierwiastków w budowaniu algorytmów kombinatoryczno-graficznych opisujących macierz  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}} \Delta$ , o ile taka istnieje. Idea ta zawarta jest w następującym twierdzeniu, którego część (a) pochodzi z [80, Proposition 4.8(c)], a część (b) z pracy [87, Theorem 3.13], por. [79, 82, 84].

**Twierdzenie 6.21.** Niech  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n, n \geq 1$ , będą dodatnimi spójnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi bez pętli oraz  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  transformacjami Coxetera.

- (a) Załóżmy, że macierz  $B \in \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$  definiuje  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta' \approx_{\mathbb{Z}}^B \Delta$  oraz  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  jest ustaloną  $\Phi_\Delta$ -oczkową geometrią pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$ . Wtedy

- (a1) homomorfizm  $h_B: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, v \mapsto v \cdot B^{\text{tr}}$  grupy  $\mathbb{Z}^n$  jest automorfizmem,
- (a2) istnieje dokładnie jedna  $\Phi_{\Delta'}$ -oczkowa geometria pierwiastków  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  bigrafu  $\Delta'$  taka, że ograniczenie  $h_B: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  do  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^n$  definiuje izomorfizm

$$\varphi_B = h_B: \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$$

6.2. O geometriach  $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów dodatnich

kołczanów  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowych. Ponadto macierz  $B$  ma postać

$$B = B\varphi := \left[ \varphi_B(e_1)^{tr}, \dots, \varphi_B(e_n)^{tr} \right],$$

gdzie  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}^n$  jest standardową  $\mathbb{Z}$ -bazą grupy  $\mathbb{Z}^n$ . Innymi słowy,  $j$ -tą kolumną macierzy  $B$  jest wektor  $\varphi_B(e_j) \in \mathbb{Z}^n$  dla  $j = 1, \dots, n$ .

(b) Jeśli  $\varphi: \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  jest izomorfizmem ustalonych geometrii  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowych takim, że macierz

$$B_\varphi = \left[ \varphi(e_1)^{tr}, \dots, \varphi(e_n)^{tr} \right] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

jest  $\mathbb{Z}$ -odwracalna oraz  $\varphi(v) = v \cdot B_\varphi$ , dla dowolnego wektora  $v \in \tilde{\mathcal{R}}_\Delta$ , to zachodzi równość

$$\check{G}_\Delta = B_\varphi^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B_\varphi, \text{ tzn. } B_\varphi \text{ definiuje } \mathbb{Z}\text{-kongruencję } \Delta' \approx_{\mathbb{Z}}^{B_\varphi} \Delta.$$

Idea dowodu. Załóżmy, że  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_n, n \geq 1$ , są dodatnimi spójnymi grafami krawędziowo-dwudzielnymi bez pętli,  $\text{Cox}_\Delta, \text{Cox}_{\Delta'} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  macierzami Coxetera oraz  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  transformacjami Coxetera.

Część (a) została udowodniona w [80, Proposition 4.8(c)]. Dowód części (b) w przypadku, gdy  $\Delta$  jest jednym z grafów Dynkina  $A_n, n \geq 1, D_n, n \geq 4, E_6, E_7, E_8$ , jest podany w [87, Theorem 3.13]. Metodę dowodu można zastosować w sytuacji rozważanej w (b). W tym celu wykazuje się, że założenia w implikacji (b) implikują równość:

$$\text{Cox}_\Delta \cdot B_\varphi^{tr} = B_\varphi^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta'}. \quad (6.22)$$

Stąd  $\text{Cox}_\Delta = B_\varphi^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta'} \cdot B_\varphi^{-tr}$ . Na podstawie [83, Theorem 3.3] (zobacz też [82, Notes added in proof]) prawdziwe są równości

$$\check{G}_\Delta = 2 \cdot G_\Delta \cdot (E - \text{Cox}_\Delta)^{-tr}, \quad \check{G}_{\Delta'} = 2 \cdot G_{\Delta'} \cdot (E - \text{Cox}_{\Delta'})^{-tr}, \quad (6.23)$$

i w konsekwencji otrzymujemy następujące równości

$$\begin{aligned} \check{G}_\Delta &= 2 \cdot G_\Delta \cdot (E - \text{Cox}_\Delta)^{-tr} = 2 \cdot G_\Delta \cdot (B_\varphi^{tr} \cdot B_\varphi^{-tr} - B_\varphi^{tr} \cdot \text{Cox}_{\Delta'} \cdot B_\varphi^{-tr})^{-tr} = \\ &= 2 \cdot G_\Delta \cdot (B_\varphi^{tr} \cdot (E - \text{Cox}_{\Delta'}) \cdot B_\varphi^{-tr})^{-tr} = 2 \cdot G_\Delta \cdot B_\varphi^{-1} \cdot (E - \text{Cox}_{\Delta'})^{-tr} \cdot B_\varphi = \\ &= 2 \cdot B_\varphi^{tr} \cdot G_{\Delta'} \cdot B_\varphi \cdot B_\varphi^{-1} \cdot (E - \text{Cox}_{\Delta'})^{-tr} \cdot B_\varphi = B_\varphi^{tr} \cdot 2 \cdot G_{\Delta'} \cdot (E - \text{Cox}_{\Delta'})^{-tr} \cdot B_\varphi = \\ &= B_\varphi^{tr} \cdot \check{G}_{\Delta'} \cdot B_\varphi, \end{aligned}$$

co należało pokazać.  $\square$

Następujący przykład ilustruje zastosowanie twierdzenia 6.21.

**Przykład 6.24.** Rozważmy następujący graf krawędziowo-dwudzielny bez pętli

$$\Delta: \begin{array}{ccc} 3 & \text{---} & 4 \\ & \text{---} & \\ 1 & \text{---} & 2 \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{c}_\Delta = 5.$$

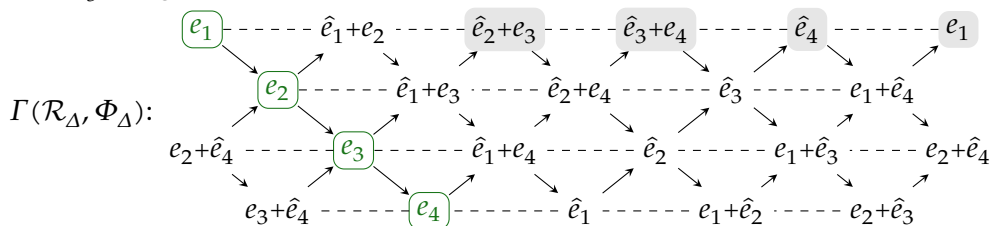
Bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_4$  jest dodatni, gdyż

$$q_\Delta(x) = \frac{1}{4}(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{12}(3x_2 + x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{24}(4x_3 + x_4)^2 + \frac{5}{8}x_4^2.$$

Łatwo sprawdzić, że zbiór  $\mathcal{R}_\Delta$  pierwiastków bigrafu  $\Delta$  składa się z 20 pierwiastków

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Delta &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + \hat{e}_2, e_1 + \hat{e}_3, e_1 + \hat{e}_4, e_2 + \hat{e}_3, e_2 + \hat{e}_4, e_3 + \hat{e}_4\} \cup \\ &\cup \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_1 + e_2, \hat{e}_1 + e_3, \hat{e}_1 + e_4, \hat{e}_2 + e_3, \hat{e}_2 + e_4, \hat{e}_3 + e_4\}, \end{aligned}$$

jest rozłączną sumą czterech  $\Phi_\Delta$  orbit każda długości  $\mathbf{c}_\Delta = 5$ , oraz ma strukturę następującego  $\Phi_\Delta$ -sieciovego systemu pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  w kształcie skończonej tuby (cylindra)  $\mathcal{C}_5^{\mathbf{e}_1}$  rangi  $\mathbf{c}_\Delta = 5$ :





Stosujemy oznaczenie  $\hat{v} := -v$ . Ponadto zielonym kolorem zaznaczamy są wektory  $v[1] := e_1, v[2] := e_2, v[3] := e_3, v[4] := e_4$  wyznaczone w twierdzeniu 6.15. Łatwo zauważyć, że geometria  $\Phi_\Delta$ -oczkowa  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^5$  jest izomorficzna z geometrią  $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_4}, \Phi_{\mathbb{A}_4})$  przedstawioną w przykładzie 6.19. Szarym tłem wyróżnione są wektory odpowiadające przez naturalny izomorfizm  $\varphi$  wektorom bazowym  $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{Z}^4$  w izomorficznym z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \subseteq \mathbb{Z}^5$  kołczanie  $\Phi_{\mathbb{A}_4}$ -oczkowym  $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_4}, \Phi_{\mathbb{A}_4}) \subseteq \mathbb{Z}^5$ . Zgodnie z twierdzeniem 6.21, izomorfizm  $\varphi: \Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_4}, \Phi_{\mathbb{A}_4}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta)$  wyznaczony jest następująco

$$\varphi(v) = \begin{cases} e_1, & \text{dla } v = e_1, \\ \hat{e}_4, & \text{dla } v = e_2, \\ \hat{e}_3 + e_4, & \text{dla } v = e_3, \\ \hat{e}_2 + e_3, & \text{dla } v = e_4, \\ e_1 + \hat{e}_2, & \text{dla } v = e_{1234}, \end{cases} \quad \varphi(v) = \begin{cases} e_1 + \hat{e}_4, & \text{dla } v = e_{12}, \\ \hat{e}_3, & \text{dla } v = e_{23}, \\ \hat{e}_2 + e_4, & \text{dla } v = e_{34}, \\ e_1 + \hat{e}_3, & \text{dla } v = e_{123}, \\ \hat{e}_2, & \text{dla } v = e_{234}, \end{cases} \quad \text{oraz } \varphi(-v) = -\varphi(v),$$

gdzie stosujemy oznaczenia  $e_{a_1, \dots, a_k} := e_{a_1} + \dots + e_{a_k}$  oraz  $\hat{v} := -v$ .

Łatwo sprawdzić, że macierz  $B_\varphi = [\varphi(e_1)^{tr}, \varphi(e_2)^{tr}, \varphi(e_3)^{tr}, \varphi(e_4)^{tr}]$  jest  $\mathbb{Z}$ -odwracalna oraz definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_4$ , tzn.  $\det B_\varphi = 1$  oraz  $B_\varphi^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B_\varphi = \check{G}_{\mathbb{A}_4}$ , gdzie

$$B_\varphi^{tr} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \cdot \text{Cox}_\Delta \\ e_1 \cdot \text{Cox}_\Delta^2 \\ e_1 \cdot \text{Cox}_\Delta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ -e_4 \\ -e_3 + e_4 \\ -e_2 + e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}).$$

**Uwaga 6.25.** (a) Zagadnienie konstrukcji kołczanów  $\Phi_\Delta$ -oczkowych rozważano m.in. w artykule [80], gdzie zdefiniowano algorytmy wyznaczające kołczany  $\Phi_\Delta$ -oczkowe (tzw. *mesh tubular algorithm* oraz *mesh toroidal algorithm*). W artykule [80] podano kształty geometrii  $\Phi_D$ -sieniowych dla grafów Dynkina  $D \in \{\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ . W [87, Theorem 3.13] wykazano następującą równoważność

$$\Gamma(\mathcal{R}_D, \Phi_D) \stackrel{\varphi}{\cong} \Gamma(\mathcal{R}_\Delta, \Phi_\Delta) \Leftrightarrow D \stackrel{B_\varphi}{\approx}_{\mathbb{Z}} \Delta, \quad (6.26)$$

gdzie  $D \in \{\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$  jest jednym z grafów Dynkina przedstawionych w tabeli 3.32. Geometrie  $\Phi_\Delta$ -oczkowe pierwiastków pewnych bigrafów głównych  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  przedstawione są w artykułach [79, 80].

(b) Opisana w twierdzeniu 6.21 idea budowania algorytmów umożliwiających obliczenie macierzy  $B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  pomiędzy spójnymi bigrafami  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{Bigr}_m$  wykorzystujących izomorfizm  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_{\Delta'}, \Phi_{\Delta'})$  kołczanów  $\Phi_\Delta, \Phi_{\Delta'}$ -oczkowych stosowana jest

- przez nas w tym rozdziale oraz artykule [98] dla spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli o co najwyżej 6 wierzchołkach,
- w [82, Lemma 4.6] dla dodatnich bigrafów bez pętli silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z diagramami Dynkina o co najwyżej  $n \leq 8$  wierzchołkach,
- w [34, Procedure 7.2] dla dodatnich zbiorów częściowo uporządkowanych silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z diagramami Dynkina  $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ ,
- w [38, Procedure 3.6, Theorem 1.9] dla głównych zbiorów częściowo uporządkowanych o co najwyżej  $n \leq 15$  elementach, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z diagramami Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_m, m \geq 1, \tilde{\mathbb{D}}_m, m \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$  przedstawionymi w tabeli 3.33,
- w [7, Theorem 3.4] dla macierzowych morsyfikacji diagramów Dynkina,
- w [87, Theorem 3.13] dla dodatnich bigrafów Cox-regularnych [55, Definition 3.1] silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z grafami Dynkina  $\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$  przedstawionymi w tabeli 3.32, oraz silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z bigrafami  $\mathcal{B}_m, m \geq 2, \mathcal{C}_m, m \geq 3, \mathcal{F}_4, \mathcal{G}_2$ , przedstawionymi w [55, Table 3.11].



### 6.3. O geometriach $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach

Analizując geometrie  $\Phi$ -sieciovych, konstruujemy algorytmy umożliwiające obliczenie macierzy  $B \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \Delta'$  pomiędzy spójnymi bigrafami  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa o  $n+2$  wierzchołkach, gdzie  $3 \leq n+2 \leq 6$ , przy założeniu, że taka kongruencja istnieje.

W niniejszym podrozdziale oraz artykule [98] pokazujemy, że dla dowolnego spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o  $n+2 \leq 6$  wierzchołkach, na zbiorze  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta$  istnieje geometria  $\Phi_\Delta$ -sieciovowa  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta)$ .

W całym podrozdziale przyjmujemy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  jest spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa bez pętli o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach. Z bigrafem  $\Delta$  stowarzyszymy kołczan  $\Phi_\Delta$ -oczkowy  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ , gdzie  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  jest transformacją Coxetera bigrafu  $\Delta$ , a zbiór  $\tilde{\mathcal{R}}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  równy

$$\tilde{\mathcal{R}}_\Delta := \mathcal{R}_\Delta \text{ lub } \tilde{\mathcal{R}}_\Delta := \mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}, \quad (6.27)$$

jest  $\Phi_\Delta$ -niezmienniczy, zobacz lemat 3.40(d).

Ponieważ zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  jest nieskończony (zobacz lemat 3.21(b)), więc do konstrukcji i opisu nieskończonego kołczanu  $\Phi_\Delta$ -oczkowego  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  wykorzystujemy pojęcie reduktu  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} \subset \mathcal{R}_\Delta$  zbioru pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  wprowadzone w [79, Definition 3.6]:

$$\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} := \{v \in \mathcal{R}_\Delta; v_{j_1} = v_{j_2} = 0\} \subset \mathbb{Z}^{n+2}, \quad (6.28)$$

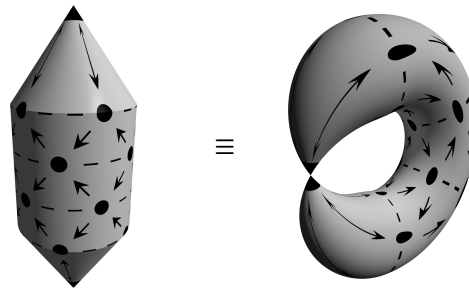
gdzie indeksy  $(j_1, j_2)$  wyznaczone są przez  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa, zobacz definicja A.25 w podrozdziale A.3 oraz [79, (3.10)].

Schemat (6.17) konstrukcji  $\Phi_\Delta$ -oczkowych kołczanów  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  z powodzeniem stosujemy do budowy kołczanów  $\Phi_\Delta$ -oczkowych dla spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach. W dalszej części korzystamy z nazewnictwa i oznaczeń wprowadzonych w [79, 80].

**Uwaga 6.29.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  będzie spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli oraz  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  transformacją Coxetera. Przypominamy, że jeśli  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ , to  $\Phi_\Delta(h) = h$  (zobacz lemat 3.40(c)). Stąd  $\Phi_\Delta$ -orbita dowolnego wektora z jądra  $h \in \text{Ker } q_\Delta$  składa się z jednego wektora  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ . W konsekwencji, w  $\Phi_\Delta$ -oczkowych kołczanach  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  całą  $\Phi_\Delta$ -orbitę wektora z jądra  $h \in \text{Ker } q_\Delta$  utożsamiamy z pojedynczym punktem (innymi słowy, skleamy ją do punktu)  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ , zobacz [79, 80].

(a) Jeśli  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  ma kształt nieskończonej tuby oraz zawiera  $\Phi_\Delta$ -orbitę wektora z jądra  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ , to w miejscu tej orbity powstaje *przewężenie*, od którego pochodzi nazwa wynikowego kształtu: *tuba klepsydralna*, zobacz [79, 80].

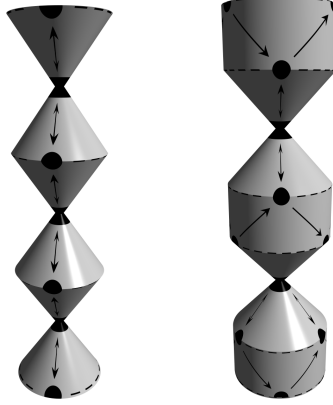
(b) Jeśli  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  ma kształt torusa oraz zawiera  $\Phi_\Delta$ -orbitę wektora z jądra  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ , to w miejscu tej orbity powstaje *przewężenie*, co ilustrujemy na następującym rysunku:



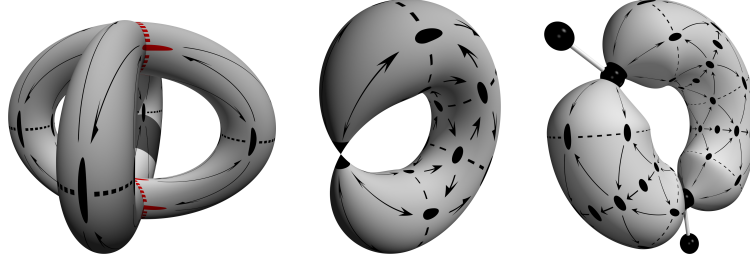
W dowodzie twierdzenia 6.30 pokazujemy, że dla spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o  $n+2 \leq 6$  wierzchołkach, na zbiorze  $\Phi_\Delta$ -orbit

zbioru  $\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta$  istnieją geometrie  $\Phi_\Delta$ -sieciovie pierwiastków  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta)$  będące nieskończoną sumą:

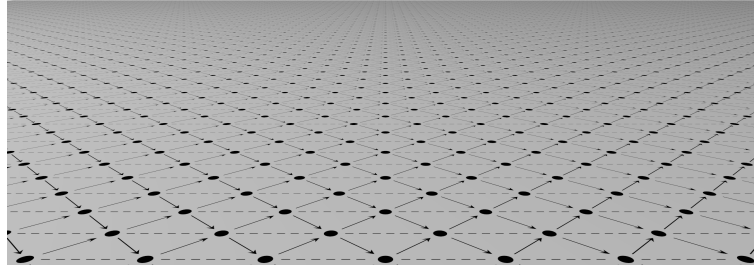
(i) nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych rangi 2 oraz 3:



(ii) skończonych torusów rangi 3, 4, 5 oraz 6, w tym następujących sklejonych torusów:



(iii) płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku następującej postaci:



**Twierdzenie 6.30.** Niech  $1 \leq n \leq 4$  oraz  $\tilde{D}_{n,j}^2, j \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa przedstawionym w tabeli 6.5.

(a) Zbiór  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -orbit zbioru  $\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2} \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  ma strukturę  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -siecioviej geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2})$  pierwiastków bigrafu  $\tilde{D}_{n,j}^2$  w postaci nieskończonej sumy

(a1) torusów rangi  $c_{\tilde{D}_{n,j}^2} < \infty$  dla  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2\}$ ,

(a2) nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych rangi  $c_{\tilde{D}_{n,j}^2} = 2$  dla  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{D}_{4,3}^2\}$ ,

(a3) płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku dla  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{A}_{2,2}^2$ ,

(a4) nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych rangi  $\check{c}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \in \{2, 3\}$  oraz płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku, dla  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$ .

(b) Jeśli  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \tilde{D}_{n,j}^2$  oraz  $h_B: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  jest izomorfizmem grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$  zdefiniowanym wzorem  $h_B(v) := v \cdot B^{tr}$  dla  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$ , to istnieje dokładnie jedna geometria  $\Phi_\Delta$ -oczkowa  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta)$  taka, że ograniczenie  $h_B: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}$  do  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}) \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  definiuje izomorfizm kołczanów  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_\Delta$ -oczkowych

$$h_B: \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta).$$

6.3. O geometriach  $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach

*Dowód.* Niech  $1 \leq n \leq 4$  oraz  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$  będzie spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa przedstawionym w tabeli 6.5.

(a) W każdym z rozważanych przypadków  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$  dowód przeprowadzamy w następujących etapach.

*Etap 1.* Obliczamy redukt  $\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^{red} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  (zobacz algorytm A.30) i na jego podstawie wskazujemy pewne kanoniczne kołczany  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowe zawierające  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$ . W rozważanych przypadkach skonstruowane kołczany  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowe mają kształt

- skończonych cylindrów  $\mathcal{C}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^v \equiv \mathcal{T}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^v$  rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{D}_{n,j}^2} < \infty$ ,
- cylindra  $\mathcal{C}_6^{e_4+\hat{h}', \hat{e}_1+\hat{h}'} \equiv \mathcal{T}_6^{e_4+\hat{h}', \hat{e}_1+\hat{h}'}$  rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{D}_{4,1}^2} = 6$  z  $\Phi_{\tilde{D}_{4,1}^2}$ -oczkciem szerokości trzy,
- nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych  $\mathcal{T}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^v$  rangi  $\check{\mathbf{c}}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \in \{2, 3\}$ ,
- płaskich kołczanów  $\mathcal{N}^{u,w}$  nieskończonych w każdym kierunku.

*Etap 2.* Podajemy metody konstrukcji kołczanów  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowych  $\mathbf{t}_h \mathcal{T}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^v, \mathbf{t}_h \mathcal{T}_6^{e_4+\hat{h}', \hat{e}_1+\hat{h}'}, \mathbf{t}_h \mathcal{N}^{u,w}$  powstałych w wyniku przesunięcia kanonicznych kołczanów  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowych o dowolny wektor z jądra  $h \in \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ .

*Etap 3.* Dowodzimy, że  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -niezmienniczy zbiór  $\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  ma strukturę kołczanu  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowego  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2})$ , będącego następującą nieskończoną sumą kołczanów  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowych

$$\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}) = \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}} \mathbf{t}_h \mathcal{T}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^v \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}} \mathbf{t}_h \mathcal{T}_6^{e_4+\hat{h}', \hat{e}_1+\hat{h}'} \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}} \mathbf{t}_h \mathcal{N}^{u,w}.$$

W ten sposób dowodzimy część (a) w każdym z rozważanych przypadków. Szczegółowy dowód dla  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{A}_{3,1}^2 \equiv \tilde{A}_3^2$  przedstawiamy w lemacie 6.32. Używając analogicznych argumentów, dowodzi się prawdziwości tezy dla bigrafów  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2\}$ , których geometrie  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -sieciovych pierwiastków mają kształty torusów rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{D}_{n,j}^2} < \infty$ . Przypadek  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{A}_{2,1}^2$  rozważamy również w [64].

W przypadku, gdy  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{A}_{4,2}^2$ , szczegółowy dowód twierdzenia przedstawiamy w lemacie 6.36. Dla bigrafów  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$ , których geometrie  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -sieciovych pierwiastków mają jeden z następujących kształtów

- nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych oraz płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku,
- nieskończonych w dół i górę tub klepsydralnych,
- płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku,

w dowodzie twierdzenia używa się analogicznych argumentów jak w przypadku  $\tilde{A}_{4,2}^2$ . Przypadki  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{1,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2\}$  rozważamy również w artykule [64], a przypadek  $\tilde{D}_{n,j}^2 = \tilde{D}_{4,5}^2$  w artykule [98].

(b) Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}^{\sim}$  (6.2) będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z bigrafem  $\tilde{D}_{n,j}^2$ . W dowodzie tezy wystarczy zastosować argumenty użyte w dowodzie twierdzenia 6.21, por. [79, 82, 84].  $\square$

Przypominamy, że zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa jest nieskończony (zobacz lemat 3.21(b)), a zatem  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  zawierający zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_\Delta$  jest nieskończony. Na potrzeby skończonego

opisu  $\Phi_\Delta$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  oraz budowy algorytmów kombinatoryczno-graficznych, w kołczanie  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  wyróżnia się skończony podzbiór  $\Gamma_\Delta \subset \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ , tak zwany  $\Phi_\Delta$ -oczkowy obszar podstawowy, wprowadzony w [82, Definition 1.11(b)].

**Definicja 6.31.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach oraz  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  kołczaniem  $\Phi_\Delta$ -oczkowym. Mówimy, że skończony podzbiór  $\Gamma_\Delta \subset \Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$  jest  $\Phi_\Delta$ -oczkowym obszarem podstawowym  $\Phi_\Delta$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ , jeśli

- (i)  $\Gamma_\Delta$  zawiera  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$ , oraz
- (ii)  $\Gamma_\Delta$  uzupełnia się zgodnie ze schematem (6.17) przedstawionym w twierdzeniu 6.15 do  $\Phi_\Delta$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\tilde{\mathcal{R}}_\Delta, \Phi_\Delta)$ .

Zacniemy od przedstawienia  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -siecioviej geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2})$  pierwiastków bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_3^2$  przedstawionego w tabeli 6.5. Niemniej wyniki te przenoszą się na przypadek  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{\mathbb{A}}_{2,1}^2, \tilde{\mathbb{A}}_{4,1}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,2}^2, \tilde{\mathbb{D}}_{4,2}^2\}$ , ponieważ zbiór  $\mathcal{R}_{\tilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{D}_{n,j}^2}$  ma strukturę  $\Phi_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ -sieciovych geometrii w kształcie torusów rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{D}_{n,j}^2} < \infty$ .

**Lemat 6.32.** Niech  $\tilde{\mathbb{A}}_3^2 \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie standardowym rozszerzonym bigrafem Euklidesa przedstawionym w tabeli 6.5. Zbiór  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} \subseteq \mathbb{Z}^5$  ma strukturę  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -siecioviej geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2})$  pierwiastków bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_3^2$ , która ma postać

$$\bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}} \mathbf{t}_h \mathcal{T}_4^{e_2} \quad (6.33)$$

nieskończonej sumy torusów rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = 4$ .

*Dowód.* Przypomnijmy z podrozdziału 4.1, że standardowy rozszerzony bigraf Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_3^2$  ma następującą postać:

$$\tilde{\mathbb{A}}_3^2 \equiv \tilde{\mathbb{A}}_{3,1}^2 : \begin{array}{c} 4 \text{ --- } 5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \text{Cox}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ wektory  $\mathbf{h}^{(4)} = [1, 1, 1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{h}^{(5)} = [1, 1, 1, 0, 1]$  tworzą (4, 5)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} \subseteq \mathbb{Z}^5$  (zobacz dowód twierdzenia 4.4(a)), więc redukt (6.28) jest równy

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^{\text{red}} = \{e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{123}, e_{23}, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_{12}, \hat{e}_{123}, \hat{e}_{23}\} \subseteq \mathbb{Z}^5,$$

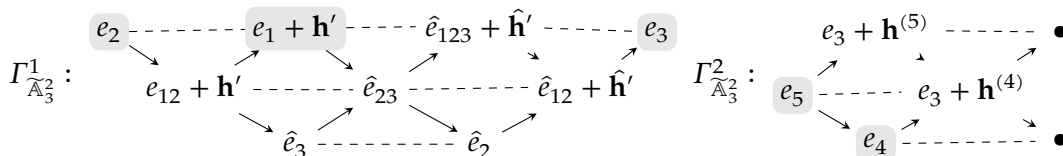
gdzie stosujemy oznaczenia  $e_{a_1, \dots, a_k} := e_{a_1} + \dots + e_{a_k}$  oraz  $\hat{v} := -v$ . Ustalmy wektor  $\mathbf{h}' := \mathbf{h}^{(4)} - \mathbf{h}^{(5)}$ . Ponieważ liczba Coxetera  $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = 4$  (zobacz twierdzenie 4.4(b)) jest skończona, więc  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -orbity pierwiastków są skończone.

*Etap 1.* Używając reduktu  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^{\text{red}} \subset \mathbb{Z}^5$ , wskażemy kanoniczne  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -oczkowe kołczany  $\mathcal{T}_4^{e_2} \equiv \mathcal{C}_4^{e_2}$  oraz  $\mathcal{T}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^{e_5, e_3 + \mathbf{h}^{(5)}}}$  zawierające  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^5$ .

Łatwo sprawdzić, że zbiór  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^1 \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^2 \subseteq \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ , gdzie

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^1 := \text{Orb}(e_2) \cup \text{Orb}(\hat{e}_{23}) \cup \text{Orb}(\hat{e}_3) \subseteq \mathbb{Z}^5 \text{ oraz } \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^2 := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \text{Orb}(e_5 + k \cdot \mathbf{h}') \subseteq \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2},$$

ma strukturę  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -siecioviej geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^1 \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2})$  pierwiastków wyznaczoną przez następujący  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -oczkowy obszar podstawowy  $\Gamma_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = \Gamma_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^1 \cup \Gamma_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2}^2$



6.3. O geometriach  $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach

gdzie wektory (wyróżnione szarym tłem)

$$\{e_1 + \mathbf{h}', e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \subseteq \mathbb{Z}^5 \quad \text{dla} \quad \mathbf{h}' := \mathbf{h}^{(4)} - \mathbf{h}^{(5)} = e_4 - e_5$$

tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^5$ .

Przedstawiony obszar podstawowy  $\Gamma_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$  jednoznacznie wyznacza strukturę  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^1 \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$  będącego sumą dwóch kołczanów

$$\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^1 \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) = \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^1, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) \cup \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$$

leżących odpowiednio na skończonym cylindrze  $\mathcal{C}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2}^{e_2}$  rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2 = 4$  oraz na nieskończonej tubie  $\mathcal{T}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2}^{e_5, e_3 + \mathbf{h}^{(5)}}$  rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2 = 4$ .

*Etap 2.* Pokażemy, że zbiór  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$  ma strukturę kołczanu  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$ -oczkowego  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$ , będącego nieskończoną sumą kołczanów  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$ -oczkowych

$$\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) = \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}} \mathbf{t}_h \mathcal{T}_4^{e_2}.$$

W tym celu podamy metodę konstrukcji kołczanów  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$ -oczkowych  $\mathbf{t}_h \mathcal{T}_4^{e_2}$  powstałych w wyniku przesunięcia kanonicznego  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$ -oczkowego kołczanu  $\mathcal{T}_4^{e_2}$  o dowolny wektor z jądra  $h \in \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \subset \mathbb{Z}^5$ .

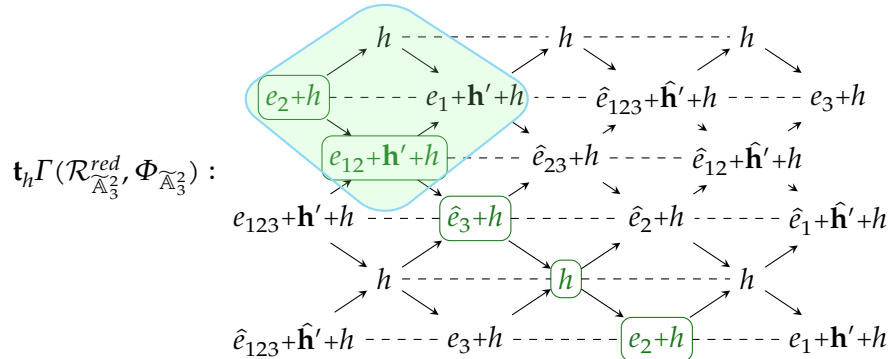
Z rozkładu  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} = \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}} + \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \subseteq \mathbb{Z}^5$  (A.28) wynika, że każdy pierwiastek  $v \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$  jest wierzchołkiem kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) = \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^1, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$  przesuniętego o wektor z jądra, tzn.  $v \in \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$ , gdzie

$$\mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) := \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) + h, \quad \text{dla pewnego } h \in \text{Ker } q_\Delta. \quad (6.34)$$

Co za tym idzie, zbiór  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \subseteq \mathbb{Z}^5$  posiada strukturę  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$ -sieciovych geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$  pierwiastków bigrafu  $\tilde{\mathbb{A}}_3$ , gdzie

$$\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) = \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_3}} \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) \quad (6.35)$$

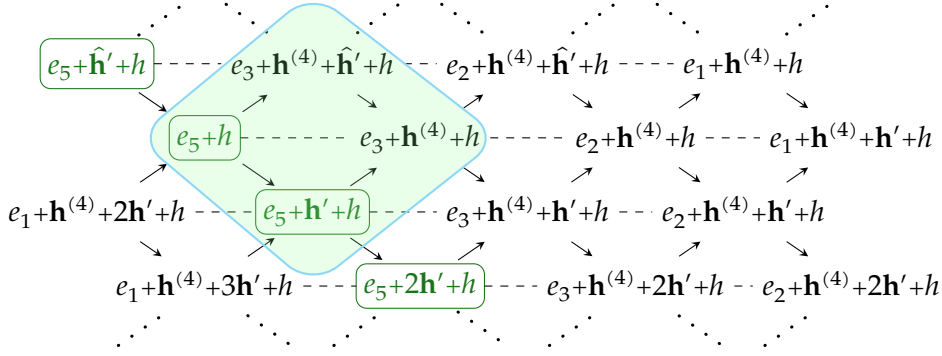
oraz kołczan  $\mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) := \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^{\text{red}} + h, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$  leży na torusie  $\mathbf{t}_h \mathcal{T}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2}^{e_2}$  rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2 = 4$



Zauważmy, że wektory  $e_4, e_5 \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$  leżą na torusach  $\mathbf{t}_{2\mathbf{h}^{(4)} - \mathbf{h}^{(5)}} \mathcal{T}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2}^{e_2}$  oraz  $\mathbf{t}_{\mathbf{h}^{(4)}} \mathcal{T}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2}^{e_2}$ , odpowiednio. Co więcej, wektory  $e_4, e_5 \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}$  należą również do kołczanu  $\mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3}) := \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2 + h, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_3})$ , który leży na nieskończonej tubie  $\mathbf{t}_h \mathcal{T}_{\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2}^{e_5, e_3 + \mathbf{h}^{(5)}}$  rangi  $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_3}^2 = 4$ , której fragment posiada następującą postać:



$$\mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}) :$$



□

Omówimy teraz przypadek tych spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli  $\widetilde{D}_{n,j}^2 \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_{1,1}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{2,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{3,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,3}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,3}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,4}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,5}^2\}$ , które posiadają geometrie  $\Phi_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowe będące sumą tub klepsydralnych rangi  $\check{c}_{\widetilde{D}_{n,j}^2} \in \{2, 3\}$  oraz płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku.

Dla ustalenia uwagi przyjmujemy  $\widetilde{D}_{n,j}^2 = \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ . Niemniej wyniki tego podrozdziału przenoszą się na przypadek  $\widetilde{D}_{n,j}^2 \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_{1,1}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{2,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{3,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,3}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,3}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,4}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,5}^2\}$  ponieważ zbiór  $\mathcal{R}_{\widetilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$  ma strukturę  $\Phi_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$ -sieciami geometrii będącej sumą tub klepsydralnych rangi  $\check{c}_{\widetilde{D}_{n,j}^2} \in \{2, 3\}$  oraz płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku.

Zaczynamy od przedstawienia  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -sieciami geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  pierwiastków bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  przedstawionego w tabeli 6.5.

**Lemat 6.36.** Niech  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2 \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym przedstawionym w tabeli 6.5. Zbiór  $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \subseteq \mathbb{Z}^6$  posiada strukturę  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -sieciami geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  pierwiastków bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  w postaci:

$$\bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \mathcal{T}_3^{e_4} \quad (6.37)$$

nieskończonej sumy tub klepsydralnych  $\mathbf{t}_h \mathcal{T}_3^{e_4}$  rangi  $\check{c}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = 3$  oraz:

$$\begin{aligned} & \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^2, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^3, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^4, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \\ & \cup \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^2, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^3, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^4, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \end{aligned}$$

nieskończonej sumy płaskich kołczanów nieskończonych w każdym kierunku.

*Dowód.* Przypominamy, że graf krawędziowo-dwudzielnny  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  ma następującą postać:

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2: \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{1} \text{---} \text{3} \text{---} \text{4} \text{---} \text{5} \\ \text{6} \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } \text{Cox}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$



6.3. O geometriach  $\Phi_\Delta$ -sieciovych pierwiastków bigrafów korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach

Łatwo sprawdzić, że wektory  $\mathbf{h}^{(2)} = [1, 1, 1, 1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{h}^{(6)} = [1, 0, 1, 1, 1, 1]$  tworzą (2, 6)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \subseteq \mathbb{Z}^6$ , więc redukt (6.28) składa się z następujących wektorów

$$\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{red} = \{e_1, e_3, e_4, e_5, e_{13}, e_{134}, e_{1345}, e_{34}, e_{345}, e_{45}, \hat{e}_1, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5, \hat{e}_{13}, \hat{e}_{134}, \hat{e}_{1345}, \hat{e}_{34}, \hat{e}_{345}, \hat{e}_{45}\}$$

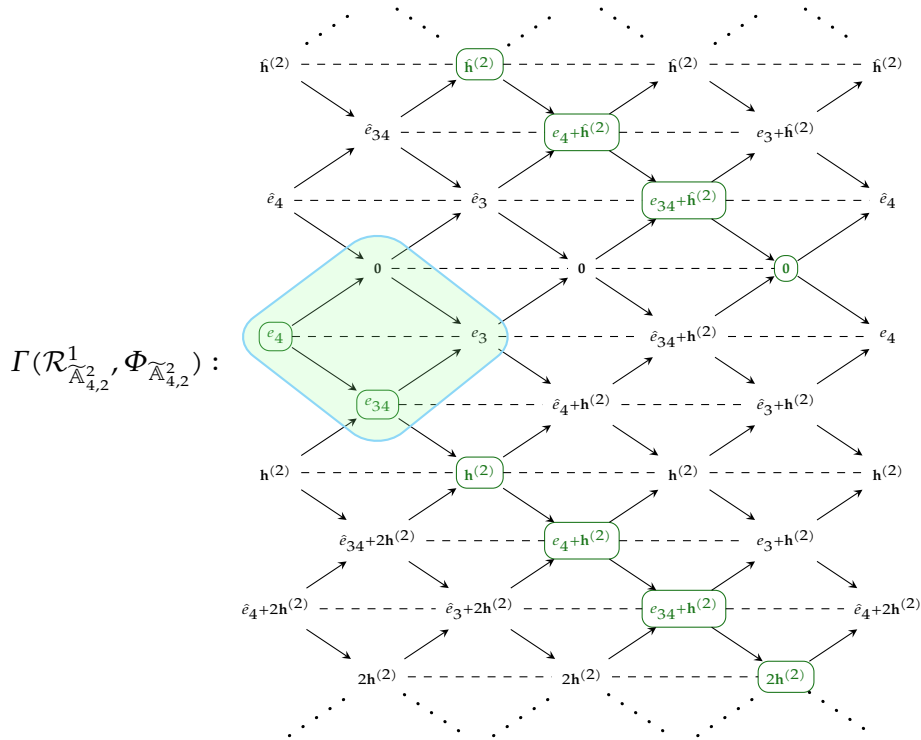
gdzie stosujemy oznaczenia  $e_{a_1, \dots, a_k} := e_{a_1} + \dots + e_{a_k}$  oraz  $\hat{v} := -v$ . Ustalmy wektor  $\mathbf{h}' := \mathbf{h}^{(2)} - \mathbf{h}^{(6)}$ . Korzystając z algorytmu A.55 przedstawionego w podrozdziale A.4, obliczamy zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{c}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = 3$  i sprawdzamy, że liczba Coxetera  $c_{\mathbb{D}_4^2} = \infty$  jest nieskończona.

Używając reduktu  $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{red} \subset \mathbb{Z}^6$ , wskażemy kanoniczne kołczany  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -oczkowe  $\mathcal{T}_3^{e_4}$ ,  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{\kappa}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  oraz podamy metody konstrukcji kołczanów  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -oczkowych  $\mathfrak{t}_h \mathcal{T}_3^{e_4}$ ,  $\mathfrak{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{\kappa}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  powstałych w wyniku przesunięcia kanonicznych kołczanów o dowolny wektor z jądra  $h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \subset \mathbb{Z}^6$ .

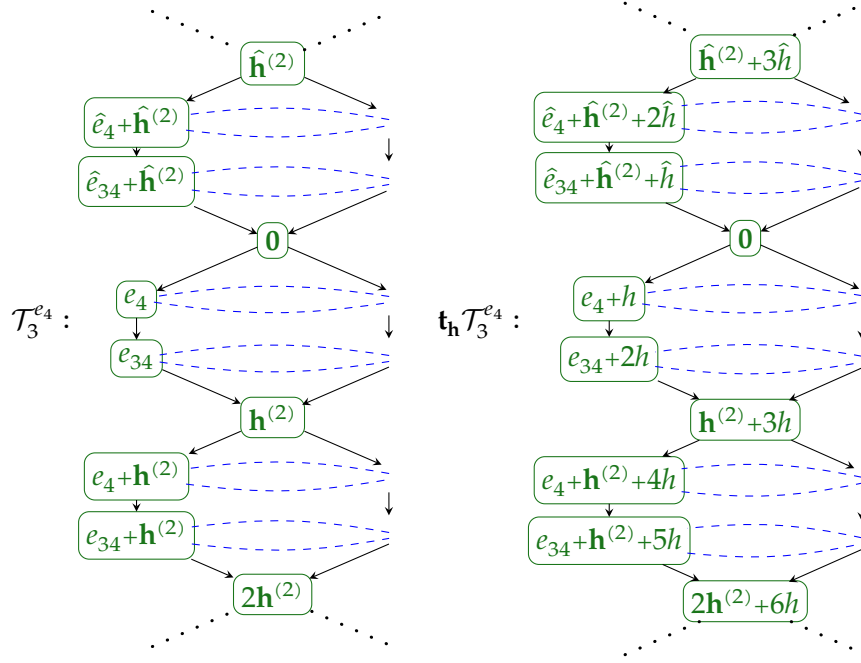
Pierwiastki  $e_3, e_4, e_{34}, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_{34} \in \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{red}$  są jedynymi pierwiastkami ze zbioru  $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{red}$ , które należą do skończonych  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -orbit. Zatem zbiór

$$\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^1 := \{\pm \text{Orb}(e_4 + a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{N}\} \cup \{a \cdot \mathbf{h}^{(2)}, a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^6$$

posiada następującą strukturę  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -sieciovych geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^1, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  leżącej na tubie klepsydralnej  $\mathcal{T}_3^{e_4}$  rangi  $\check{c}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = 3$  wyznaczonej jest przez  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -oczko  $\mathcal{M}_{e_4, 0}$ :



Z rozkładu (A.28) wynika, że jedyne pierwiastki bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , które należą do skończonych  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -orbit są postaci  $e_3 + h, e_4 + h, e_{34} + h, \hat{e}_3 + h, \hat{e}_4 + h, \hat{e}_{34} + h$ , gdzie  $h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ . Zatem leżą na jednej z następujących tub klepsydralnych  $\mathfrak{t}_h \mathcal{T}_3^{e_4}$  rangi  $\check{c}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = 3$ :



Zauważmy, że zbiory

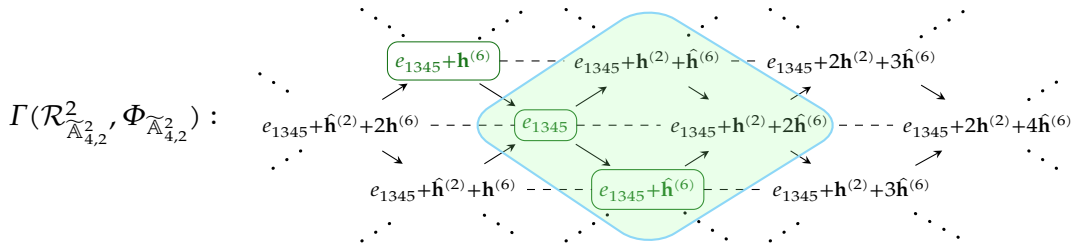
$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2 := \{\text{Orb}(e_{1345} + a \cdot \mathbf{h}^{(6)}), a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}} \subseteq \mathbb{Z}^6,$$

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3 := \{\text{Orb}(e_1 + 2a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\text{Orb}(e_{134} + 2a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\text{Orb}(e_{13} + 2a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^4 := \{\text{Orb}(e_5 + a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\text{Orb}(e_{45} + a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\text{Orb}(e_{345} + a \cdot \mathbf{h}^{(2)}), a \in \mathbb{Z}\},$$

mają strukturę płaskiej  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2$ -sieciami geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2), \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2), \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^4, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2)$  nieskończonej w każdym kierunku, odpowiednio.

W szczególności  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2$ -sieciami geometria  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2)$  na zbiorze  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2$

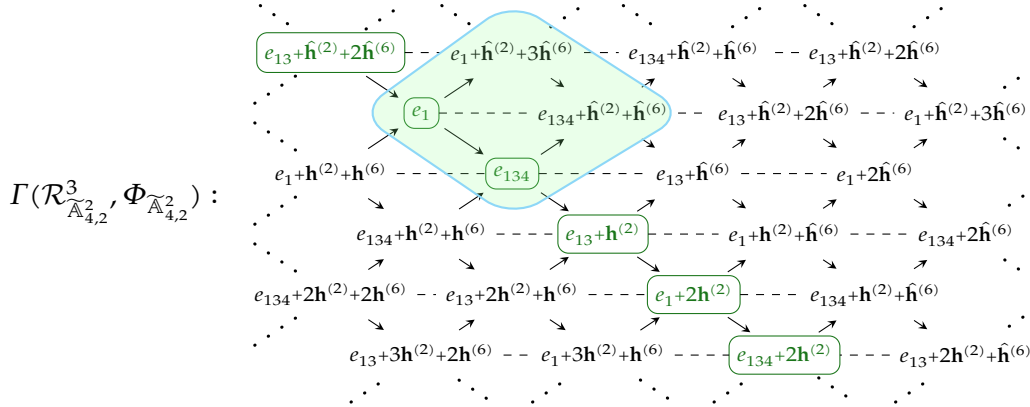


wyznaczona jest przez  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2$ -oczko  $\mathcal{M}_{e_{1345}, e_{1345} + \mathbf{h}^{(2)} + \mathbf{h}^{(6)}}$ , gdzie dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} v[k] &= e_{1345} - k \cdot \mathbf{h}^{(6)}, \text{ oraz} \\ \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^k(e_{1345}) &= -e_{1345} - k \cdot \mathbf{h}^{(2)} + 2k \cdot \mathbf{h}^{(6)}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Geometria  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3$ -sieciami  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3)$  na zbiorze  $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3$

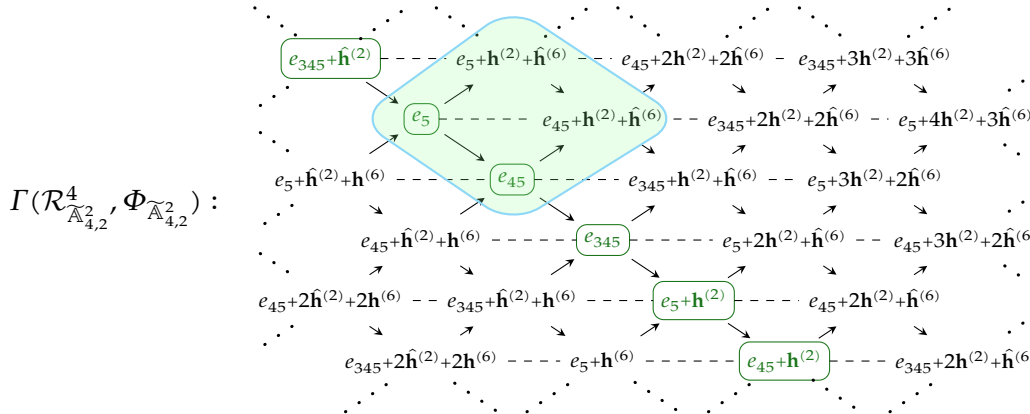
6.3. O geometriach  $\Phi_\Delta$ -sieniowych pierwiastków bigrafów korangi dwa o co najwyżej 6 wierzchołkach



wyznaczona jest przez  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -oczko  $\mathcal{M}_{e_1, e_1 + \hat{h}(2) + 3\hat{h}(6)}$ , gdzie dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  wartości  $v[3k], v[3k + 1]$  oraz  $v[3k + 2]$  wyznaczone są wzorem

$$\begin{aligned} v[3k] &= e_1 + 2k \cdot \mathbf{h}^{(2)}, \\ v[3k + 1] &= e_{134} + 2k \cdot \mathbf{h}^{(2)}, \\ v[3k + 2] &= e_{13} + k \cdot \mathbf{h}^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Analogicznie geometria  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -sieniowa  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^4}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  na zbiorze  $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^4}$



wyznaczona jest przez  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -oczko  $\mathcal{M}_{e_5, e_5 + \hat{h}(2) + \hat{h}(6)}$ , gdzie dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  wartości  $v[3k], v[3k + 1]$  oraz  $v[3k + 2]$  wyznaczone są wzorem

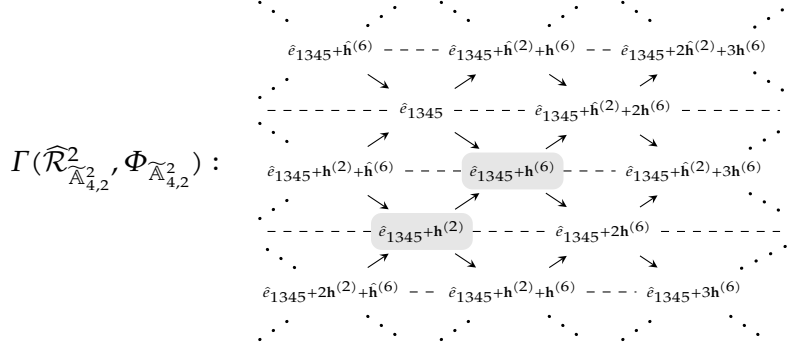
$$\begin{aligned} v[3k] &= e_5 + 2k \cdot \mathbf{h}^{(2)}, \\ v[3k + 1] &= e_{45} + 2k \cdot \mathbf{h}^{(2)}, \\ v[3k + 2] &= e_{345} + 2k \cdot \mathbf{h}^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że dowolny pierwiastek  $u \in \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$  bigrafu  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  jest wierzchołkiem kołczanu

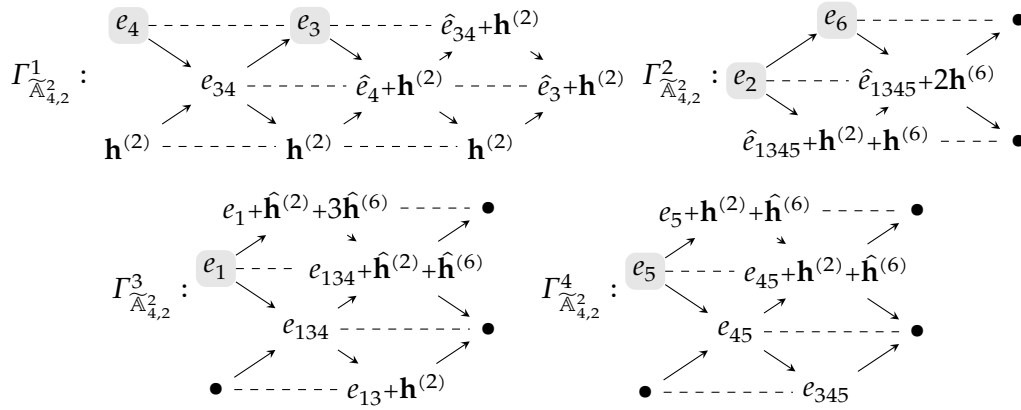
$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) &:= \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^3}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \\ &\cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^4}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \\ &\cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^3}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^4}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \cup \\ &\cup \bigcup_{h \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}} \mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^1}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}), \end{aligned}$$

gdzie przyjmujemy  $\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^i := -\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^i$  dla  $i = 2, 3, 4$ .

Ponieważ  $e_2 = \widehat{e}_{1345} + \mathbf{h}^{(2)}$  oraz  $e_6 = \widehat{e}_{1345} + \mathbf{h}^{(6)}$ , więc wektory  $e_2, e_6 \in \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}$  leżą na nieskończonym kołczanie  $\Gamma(\widehat{\mathcal{R}}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2)$ , którego fragment jest następujący



Podsumowując, zbiór  $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}} \cup \text{Ker}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}$  posiada strukturę  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}$ -sieciovie geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}} \cup \text{Ker}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}})$  pierwiastków wyznaczoną przez następujący  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}$ -oczkowy obszar podstawowy  $\Gamma_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}} = \Gamma_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^1 \cup \Gamma_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^2 \cup \Gamma_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^3 \cup \Gamma_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}}^4$



gdzie wektory (wyróżnione szarym tłem)

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \subset \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}} \subseteq \mathbb{Z}^6$$

tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$ . □

## 6.4. Algorytmy kombinatoryczno-graficzne

Metody konstrukcji macierzy definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{D}_{n,j}^2$  dla  $\widetilde{D}_{n,j}^2 \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2\}$  przedstawiamy w lematach 6.41–6.42, których dowody umieszczamy w dalszej części tego podrozdziału. Sposoby konstrukcji macierzy definiujących silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{D}_{n,j}^2$  dla pozostałych bigrafów  $\widetilde{D}_{n,j}^2$  przedstawionych w tabeli 6.5 są analogiczne. Implementacja algorytmów kombinatoryczno-graficznych (zobacz algorytm 6.52 oraz algorytm 6.68) konstruujących takie macierze (wraz ze skonstruowanymi macierzami definiującymi silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{D}_{n,j}^2$ ) dostępna jest na stronie internetowej [99] oraz na płycie dołączonej do rozprawy.

**Lemat 6.41.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie spójnym bigrafem korangi dwa oraz niech wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \in \text{Ker } q_\Delta$  tworzą  $(i, j)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Jeśli

$$\text{CDtype}_\Delta = (t^5 - t^4 - t + 1, \mathbb{A}_3) = \text{CDtype}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2},$$

#### 6.4. Algorytmy kombinatoryczno-graficzne

to istnieje taki pierwiastek  $e'_2 \in \mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ , że jedna z macierzy:  $B_1^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  lub  $B_2^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama, tj.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , gdzie  $B = B_1^{tr}$  lub  $B = B_2^{tr}$  oraz

$$B_1 = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \\ e'_2 \\ \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + 2\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \\ e'_2 \\ \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -2\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \end{bmatrix}.$$

**Lemat 6.42.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie spójnym bigrafem korangi dwa. Jeśli

$$\text{CDtype}_\Delta = (t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \mathbb{A}_4) = \text{CDtype}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2},$$

to istnieją takie pierwiastki  $u^*, v^*, w^* \in \mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^6$  oraz wektory  $\mathbf{h}_\Delta, \mathbf{h}'_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^6$ , że macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , gdzie

$$B = \begin{bmatrix} u^* \\ \mathbf{h}_\Delta - u^* - v^* - \Phi_\Delta(v^*) - w^* \\ v^* \\ \Phi_\Delta(v^*) \\ w^* \\ \mathbf{h}'_\Delta - u^* - v^* - \Phi_\Delta(v^*) - w^* \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}).$$

Dowody lematów 6.41 oraz 6.42 przedstawiamy na stronach 108 (jako dowód lematu 6.51) oraz 114 (jako dowód lematu 6.65), odpowiednio.

Podstawą konstrukcji zapowiedzianych algorytmów kombinatoryczno-graficznych jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.43.** Niech  $1 \leq n \leq 4$  oraz  $\widetilde{D}_{n,j}^2, j \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym grafem krawędziowo-dwudzielnym korangi dwa przedstawionym w tabeli 6.5. Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$  (6.2) jest spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z bigrafem  $\widetilde{D}_{n,j}^2$ , to macierz

$$B = [ e_1^{tr}, \dots, e_{n+2}^{tr} ] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}),$$

definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{D}_{n,j}^2$  można zbudować korzystając, analogicznie jak w twierdzeniu 6.21(b), z izomorfizmu kołczanów  $\varphi: \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{D}_{n,j}^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{D}_{n,j}^2}, \Phi_{\widetilde{D}_{n,j}^2}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta)$ , tj.:

$$B = B_\varphi = [ \varphi(e_1)^{tr}, \dots, \varphi(e_{n+2})^{tr} ] \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z}).$$

*Dowód.* Twierdzenie szczegółowo dowodzimy dla przypadków, gdy  $\widetilde{D}_{n,j}^2 = \widetilde{\mathbb{A}}_{3,1}^2 \equiv \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  (lemat 6.51), oraz  $\widetilde{D}_{n,j}^2 = \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  (lemat 6.65). Pozostałe przypadki dowodzimy używając tych samych argumentów. Dowód przeprowadzamy w następujących etapach.

*Etap 1.* Dowodzimy, że z reduktu  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  (6.28) można wybrać pierwiastki wyznaczające skończoną liczbę kanonicznych geometrii  $\Phi_\Delta$ -oczkowych izomorficznych z kanonicznymi geometriami  $\Phi_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowymi przedstawionymi w 6.30(a). Wskazujemy metodę wyboru takich wektorów ze skończonego zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ .

*Etap 2.* Dowodzimy, że geometrie  $\Phi_\Delta$ -oczkowe wskazane w poprzednim etapie zawierają  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$ . W szczególności, że taką  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n+2}\} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$  można wskazać na podstawie pierwiastków z reduktu bez konieczności konstrukcji kołczanów  $\Phi_\Delta$ -oczkowych.

*Etap 3.* Z pierwiastków  $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n+2}\} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  wyznaczonych w etapie 2 konstruujemy  $\mathbb{Z}$ -odwracalną macierz

$$B = [ \tilde{e}_1^{tr}, \dots, \tilde{e}_{n+2}^{tr} ] \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z}).$$

Na podstawie twierdzenia 6.30(b) dowolna macierz  $B' \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  definiująca silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^{B'} \widetilde{D}_{n,j}^2$ , wyznacza  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\{e'_1 := e_1 \cdot B', \dots, e'_{n+2} := e_{n+2} \cdot B'\} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  grupy  $\mathbb{Z}^{n+2}$ , gdzie wektory  $\{e'_1, \dots, e'_{n+2}\} \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  należą do obszaru podstawowego (definicja 6.31), który można uzupełnić do kanonicznych geometrii  $\Phi_\Delta$ -oczkowych izomorficznych z kanonicznymi geometriami  $\Phi_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowymi.

Ponieważ liczba kanonicznych geometrii  $\Phi_\Delta$ -oczkowych izomorficznych z kanonicznymi geometriami  $\Phi_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$ -oczkowymi jest skończona (w rozważanych przypadkach jest równa co najwyżej 12; w szczególności, jeśli geometrie  $\Phi_\Delta$ -oczkowe mają kształt cylindrów, to liczba ta jest równa 2), więc liczba tak skonstruowanych macierzy  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  również jest skończona. Stąd skonstruowane przez nas algorytmy kombinatoryczno-graficzne mają własność stopu. Ponadto w skończonym zbiorze tak wyznaczonych macierzy  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  istnieje macierz definiująca silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama.  $\square$

Macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  konstruujemy używając własności (i')–(iv') pierwiastków  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5 \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$  będących wierzchołkami kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2})$ . Własności te przedstawiamy w następującym lemacie.

**Lemat 6.44.** Niech  $\widetilde{\mathbb{A}}_3^2 \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie bigrafem przedstawionym w tabeli 6.5,  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}^5$  transformacją Coxetera, oraz  $\text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(4)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(5)}$ , gdzie wektory  $\mathbf{h}^{(4)} = [1, 1, 1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{h}^{(5)} = [1, 1, 1, 0, 1]$  tworzą (4, 5)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}$ .

(a) Wektory  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2} \subseteq \mathbb{Z}^5$  tworzące  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^5$  mają następujące własności

$$(i) \quad e_2 + \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^{-1}(e_2) + \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^{-2}(e_2) + \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^{-3}(e_2) = 0 \text{ oraz } e_2 + \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^{-1}(e_2) \in \mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2},$$

$$(ii) \quad e_3 = \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^{-3}(e_2),$$

$$(iii) \quad e_1 = \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^{-1}(e_2) - \mathbf{h}', \text{ gdzie } \mathbf{h}' = \mathbf{h}^{(4)} - \mathbf{h}^{(5)} \in \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2},$$

$$(iv) \quad e_4 = \mathbf{h}^{(4)} - e_1 - e_2 - e_3 \text{ oraz } e_5 = \mathbf{h}^{(5)} - e_1 - e_2 - e_3.$$

(b) Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  jest bigrafem silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z  $\widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  oraz wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$  dla  $1 \leq i < j \leq 5$  tworzą (i, j)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ , to istnieją wektory  $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5\} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$  tworzące  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^5$  oraz posiadające następujące własności

$$(i') \quad e'_2 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) + \Phi_\Delta^{-2}(e'_2) + \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) = 0 \text{ oraz } e'_2 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) \in \mathcal{R}_\Delta,$$

$$(ii') \quad e'_3 = \Phi_\Delta^{-3}(e'_2),$$

$$(iii') \quad e'_1 = \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}'_\Delta, \text{ gdzie } \mathbf{h}'_\Delta = \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \in \text{Ker } q_\Delta,$$

$$(iv') \quad e'_4 = \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - e'_1 - e'_2 - e'_3 \text{ oraz } e'_5 = \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_1 - e'_2 - e'_3.$$

*Dowód.* (a) Własności (i)–(iv) łatwo sprawdzić analizując strukturę geometrii  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}$ -siecionej przedstawionej w dowodzie lematu 6.32.

(b) Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  jest bigrafem silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z  $\widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  oraz wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$  dla  $1 \leq i < j \leq 5$  tworzą (i, j)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Ustalmy wektor  $\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$ . Dowód przedstawiamy w dwóch etapach: w pierwszym konstruujemy wektory  $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5\} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$ , a w drugim dowodzimy, że tworzą one  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^5$ .

*Etap 1.* Pokażemy najpierw, że w skończonym zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathcal{R}_\Delta$  istnieje wektor  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  taki, że  $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) \in \mathcal{R}_\Delta$  oraz  $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) + \Phi_\Delta^{-3}(v) = 0$ .

Ponieważ bigrafy  $\widetilde{\mathbb{A}}_3^2, \Delta$  są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne, więc na podstawie twierdzenia 6.30(b) oraz lematu 6.32 istnieje  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}) \quad (6.45)$$



izomorficzny z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\mathbb{A}_3^2}, \Phi_{\mathbb{A}_3^2})$ , a w szczególności

$$\Gamma(\mathcal{R}_{\Delta}^1, \Phi_{\Delta}) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_3^2}^1, \Phi_{\mathbb{A}_3^2}) = \Gamma(\mathcal{R}_{\mathbb{A}_3^2}^{\text{red}}, \Phi_{\mathbb{A}_3^2}). \quad (6.46)$$

W konsekwencji istnieje wektor  $w \in \mathcal{R}_{\Delta}$  taki, że

$$w + \Phi_{\Delta}^{-1}(w) \in \mathcal{R}_{\Delta} \text{ oraz } w + \Phi_{\Delta}^{-1}(w) + \Phi_{\Delta}^{-2}(w) + \Phi_{\Delta}^{-3}(w) = 0. \quad (6.47)$$

Z przedstawienia  $\mathcal{R}_{\Delta} = \mathcal{R}_{\Delta}^{\text{red}} + \text{Ker } q_{\Delta}$  (zobacz (A.28) oraz [79, Theorem 3.2]) wynika, że

$$w = v + h, \text{ gdzie } v \in \mathcal{R}_{\Delta}^{\text{red}}, h \in \text{Ker } q_{\Delta}.$$

Ponieważ dla dowolnego wektora  $h \in \text{Ker } q_{\Delta}$  zachodzi równość  $\Phi_{\Delta}^{-1}(h) = h$  (zobacz lemat 3.40(c)) oraz  $w' + h' \in \mathcal{R}_{\Delta}$  dla dowolnych wektorów  $w' \in \mathcal{R}_{\Delta}, h' \in \text{Ker } q_{\Delta}$ , więc

$$v + \Phi_{\Delta}^{-1}(v) = w - h + \Phi_{\Delta}^{-1}(w - h) = w + \Phi_{\Delta}^{-1}(w) - 2 \cdot h \in \mathcal{R}_{\Delta},$$

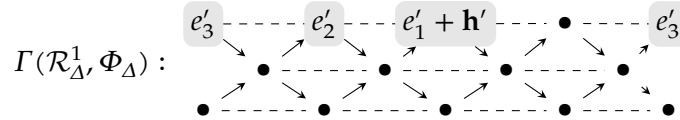
gdzie  $v \in \mathcal{R}_{\Delta}^{\text{red}}$ . Ponadto z równości (6.47) wynikają następujące równości

$$\begin{aligned} v + \Phi_{\Delta}^{-1}(v) + \Phi_{\Delta}^{-2}(v) + \Phi_{\Delta}^{-3}(v) &= w - h + \Phi_{\Delta}^{-1}(w - h) + \Phi_{\Delta}^{-2}(w - h) + \Phi_{\Delta}^{-3}(w - h) = \\ &= w + \Phi_{\Delta}^{-1}(w) + \Phi_{\Delta}^{-2}(w) + \Phi_{\Delta}^{-3}(w) - 4 \cdot h = \\ &= -4 \cdot h \in \text{Ker } q_{\Delta}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu:  $v := v - \frac{h}{4} \in \mathcal{R}_{\Delta}$ , gdzie  $h = v + \Phi_{\Delta}^{-1}(v) + \Phi_{\Delta}^{-2}(v) + \Phi_{\Delta}^{-3}(v)$ , otrzymujemy wektor  $v \in \mathcal{R}_{\Delta}$  spełniający własność (i') i w konsekwencji wektory  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$  konstruujemy następująco

$$\begin{aligned} e'_2 &:= v, \\ e'_3 &:= \Phi_{\Delta}^{-3}(e'_2) = \Phi_{\Delta}^{-3}(v), \\ e'_1 &:= \Phi_{\Delta}^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}'_{\Delta} = \Phi_{\Delta}^{-1}(v) - \mathbf{h}'_{\Delta}, \\ e'_4 &:= \mathbf{h}_{\Delta}^{(i)} - e'_1 - e'_2 - e'_3 = \mathbf{h}_{\Delta}^{(j)} - v - \Phi_{\Delta}^{-1}(v) - \Phi_{\Delta}^{-3}(v), \\ e'_5 &:= \mathbf{h}_{\Delta}^{(j)} - e'_1 - e'_2 - e'_3 = -\mathbf{h}_{\Delta}^{(i)} + 2\mathbf{h}_{\Delta}^{(j)} - v - \Phi_{\Delta}^{-1}(v) - \Phi_{\Delta}^{-3}(v). \end{aligned}$$

*Etap 2.* Zauważmy, że wektory  $e'_2, e'_1 + \mathbf{h}', e'_3 \in \mathcal{R}_{\Delta}$  należą do  $\Phi_{\Delta}$ -orbity, którą można jednoznacznie uzupełnić do następującego kołczanu  $\Phi_{\Delta}$ -oczkowego



Stąd wynika, że wszystkie wektory  $u \in \mathcal{R}_{\Delta}$ , które są wierzchołkami  $\Phi_{\Delta}$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_{\Delta}^1, \Phi_{\Delta})$  są jednoznacznie wyznaczone przez wektory  $e'_2, e'_1 + \mathbf{h}', e'_3 \in \mathcal{R}_{\Delta}$ , tzn. istnieją liczby  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{Z}$  takie, że

$$u = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 (\mathbf{h}_{\Delta}^{(i)} - \mathbf{h}_{\Delta}^{(j)}). \quad (6.48)$$

Z konstrukcji wektorów  $e'_4, e'_5 \in \mathbb{Z}^5$  wynika, że

$$\mathbf{h}_{\Delta}^{(i)} = e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4 \text{ oraz } \mathbf{h}_{\Delta}^{(j)} = e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_5. \quad (6.49)$$

W konsekwencji dowolny pierwiastek  $w \in \mathcal{R}_{\Delta} \subset \mathbb{Z}^5$  jest  $\mathbb{Z}$ -liniową kombinacją wektorów  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$ . Ponieważ bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  nie ma pętli, więc wektory jednostkowe  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset \mathcal{R}_{\Delta} \subseteq \mathbb{Z}^5$  są jego pierwiastkami i w konsekwencji są  $\mathbb{Z}$ -liniową kombinacją wektorów  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$ , tj.

$$e_i = \tilde{\lambda}_1 e'_1 + \tilde{\lambda}_2 e'_2 + \tilde{\lambda}_3 e'_3 + \tilde{\lambda}_4 e'_4 + \tilde{\lambda}_5 e'_5, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (6.50)$$

dla pewnych  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4, \tilde{\lambda}_5 \in \mathbb{Z}$ . Stąd dowolny wektor  $w \in \mathbb{Z}^5$  jest  $\mathbb{Z}$ -liniową kombinacją wektorów  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$ .

Ponieważ wektory  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$  są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne, z równości (6.50) wynika, że wektory  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$  także są  $\mathbb{Q}$ -liniowo niezależne. Stąd wektory  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$  są  $\mathbb{Z}$ -liniowo niezależne. Podsumowując, pierwiastki  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^5$ , co kończy dowód.  $\square$

Korzystając z własności przedstawionych w lemacie 6.44 konstruujemy macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ . Metodę konstrukcji macierzy definiującej  $\mathbb{Z}$ -kongruencję  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  opisuje następujący lemat.

**Lemat 6.51.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie spójnym bigrafem korangi dwa oraz niech wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \in \text{Ker } q_\Delta$  tworzą  $(i, j)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Jeśli

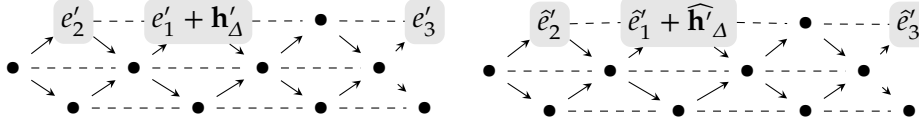
$$\mathbf{CDtype}_\Delta = (t^5 - t^4 - t + 1, \mathbb{A}_3) = \mathbf{CDtype}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2},$$

to istnieje taki pierwiastek  $e'_2 \in \mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ , że jedna z macierzy:  $B_1^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  lub  $B_2^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama, tj.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , gdzie  $B = B_1^{tr}$  lub  $B = B_2^{tr}$  oraz

$$B_1 = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \\ e'_2 \\ \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + 2\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \\ e'_2 \\ \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -2\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \end{bmatrix}.$$

*Dowód.* Załóżmy, że  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ . Z lematu 6.44(b) oraz jego dowodu wynika, że zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta$  posiada strukturę  $\Phi_\Delta$ -siecioviej geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta)$  pierwiastków bigrafu  $\Delta$  izomorficzną z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2})$  oraz zawierającą  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5\} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^5$  grupy wolnej  $\mathbb{Z}^5$  wyznaczoną przez własności (i')–(iv').

Niech wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$  dla  $1 \leq i < j \leq 5$  tworzą  $(i, j)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  oraz podstawmy  $\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$ . Zauważmy, że z dokładnością do operacji  $v \mapsto -v$ , wektory  $e'_1 + \mathbf{h}'_\Delta, e'_2, e'_3$  o własnościach (i')–(iii') należą do tej samej  $\Phi_\Delta$ -orbity, a stąd kołczany



są jedynymi kołczanami  $\Phi_\Delta$ -oczkowymi izomorficznymi z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^1, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^1)$ . Stąd macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  i wyznaczoną przez izomorficzny z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^1, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2}^1)$  kołczan  $\Phi_\Delta$ -oczkowy konstruujemy na jeden z dwóch sposobów

$$B^{tr} = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}'_\Delta \\ e'_2 \\ \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + 2\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}),$$

lub po zamianie wektorów  $\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(i)} = -\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(j)} = -\mathbf{h}_\Delta^{(j)}$  i obliczeniu wektorów  $e'_4, e'_5 \in \mathbb{Z}^5$ :

$$e'_4 := \tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = -\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v),$$

$$e'_5 := -\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(i)} + 2\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - 2\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v),$$

(korzystamy z faktu, że jeśli macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , to macierz  $B' := -B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  również definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ )

$$B^{tr} = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}'_\Delta \\ e'_2 \\ \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \\ -2\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_2 - \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}).$$

Zgodnie z przedstawionym opisem konstruujemy algorytm 6.52, wyznaczający macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  i na podstawie przeprowadzonych obliczeń komputerowych otrzymujemy tezę.  $\square$

Następujący algorytm wyznacza macierz definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  zgodnie z opisem przedstawionym w lemacie 6.51.

**Algorytm 6.52.** **DANE** Niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$  spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  korangi dwa bez pętli, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnego z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , tzn.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ .

**WYNIK** Macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}); \det A = \pm 1\}$  definiująca silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$  pomiędzy bigrafami  $\Delta$  oraz  $\widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , tzn.  $\check{G}_{\widetilde{\mathbb{A}}_3^2} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$ .

**KROK 1.** Obliczamy wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$ , tworzące  $(i, j)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ , gdzie  $1 \leq i < j \leq 5$ , zobacz algorytm 4.14. Ustalamy wektor  $\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$ .

**KROK 2.** Obliczamy skończony 12-elementowy (na podstawie lematu 3.51(c), twierdzenia 3.64 oraz twierdzenia 3.35(a)) zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \in \mathbb{Z}^5$  (6.28) względem  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)} \in \text{Ker } q_\Delta$ , zobacz algorytm A.30.

**KROK 3.** Obliczamy macierz  $\text{Cox}_\Delta^{-1} = -\check{G}_\Delta^{tr} \cdot \check{G}_\Delta^{-1} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$ , oraz przyjmujemy

$$\Phi_\Delta^{-1}(w) = w \cdot \text{Cox}_\Delta^{-1}$$

dla dowolnego wektora  $w \in \mathbb{Z}^5$ .

**KROK 4.** Ze zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  wybieramy jeden wektor  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$ , który spełnia relację:  $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) \in \mathcal{R}_\Delta$ , tzn.  $(v + \Phi_\Delta^{-1}(v)) \cdot \check{G}_\Delta \cdot (v + \Phi_\Delta^{-1}(v))^{tr} = 1$ . W dowodzie lematu 6.44(b) pokazujemy, że taki wektor zawsze można wybrać ze skończonego zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$ , gdzie  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ . Ponadto dowodzimy, że dla takiego wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  spełniona jest następująca własność

$$v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) + \Phi_\Delta^{-3}(v) \in \text{Ker } q_\Delta.$$

**KROK 5.** Obliczamy wektor

$$h_v = v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) + \Phi_\Delta^{-3}(v) \in \text{Ker } q_\Delta.$$

Na podstawie dowodu lematu 6.44(b) tak obliczony wektor  $h_v \in \text{Ker } q_\Delta$  jest podzielny przez liczbę 4.

**KROK 5.1.** Jeśli  $h_v \neq 0$ , to przyjmujemy  $h_v := \frac{h_v}{4}$  oraz  $v := v - h_v$ . Tak zmodyfikowany wektor  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  spełnia własność (i') lematu 6.44(b), tj. dla  $e'_2 := v$

$$e'_2 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) + \Phi_\Delta^{-2}(e'_2) + \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) = 0 \quad \text{oraz} \quad e'_2 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) \in \mathcal{R}_\Delta,$$

zobacz dowód lematu 6.44(b).

**KROK 6.** Tworzymy następującą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^5$  (zobacz lemt 6.44(b)):

**KROK 6.1.**  $e'_2 := v$ ,

**KROK 6.2.**  $e'_3 := \Phi_\Delta^{-3}(e'_2) = \Phi_\Delta^{-3}(v)$ ,

**KROK 6.3.**  $e'_1 := \Phi_\Delta^{-1}(e'_2) - \mathbf{h}'_\Delta = \Phi_\Delta^{-1}(v) - \mathbf{h}'_\Delta$ ,

**KROK 6.4.**  $e'_4 := \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - e'_1 - e'_2 - e'_3 = \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v)$ ,

**KROK 6.5.**  $e'_5 := \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - e'_1 - e'_2 - e'_3 = -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + 2\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v)$ .

**KROK 7.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(v) - \mathbf{h}'_\Delta \\ v \\ \Phi_\Delta^{-3}(v) \\ \mathbf{h}_\Delta^{(i)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} + 2\mathbf{h}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}).$$

**KROK 8.** Jeśli prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\check{\mathbb{A}}_3^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , to zwracamy macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  jako wynik. W przeciwnym wypadku przechodzimy do kroku 9.

**KROK 9.** Modyfikujemy wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)}$  w następujący sposób:

$$\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(i)} = -\mathbf{h}_\Delta^{(j)}, \quad \tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(j)} = -\mathbf{h}_\Delta^{(i)}$$

i obliczamy wektory  $e'_4, e'_5$ :

$$\begin{aligned} e'_4 &:= \tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v), \\ e'_5 &:= -\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(i)} + 2\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(j)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - 2\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v), \end{aligned}$$

zobacz dowód lematu 6.51.

**KROK 10.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_\Delta^{-1}(v) - \mathbf{h}'_\Delta \\ v \\ \Phi_\Delta^{-3}(v) \\ -\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) \\ \mathbf{h}_\Delta^{(j)} - 2\mathbf{h}_\Delta^{(i)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}).$$

**KROK 11.** Na podstawie dowodu lematu 6.51, macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \check{\mathbb{A}}_3^2$ , tj. prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\check{\mathbb{A}}_3^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , więc zwracamy macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  jako wynik.

Zanim przejdziemy do analizy złożoności obliczeniowej algorytmu 6.52, przedstawiamy przykład, który ilustruje zastosowanie tego algorytmu.

**Przykład 6.53.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym korangi dwa

$$\Delta: 4 \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} 1 \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} 2 \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} 3, \text{ gdzie } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz wielomian Coxetera jest równy  $\text{cox}_\Delta(t) = t^5 - t^4 - t + 1$ . Używając algorytmu inflacyjnego (algorytm 5.48) obliczamy typ Dynkina bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  równy  $\text{Dyn}_\Delta = \mathbb{A}_3$ . Korzystając z algorytmu 6.52 pokażemy, że bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  jest silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\check{\mathbb{A}}_3^2$ . Dokładniej, skonstruujemy macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiującą równość  $\check{G}_{\check{\mathbb{A}}_3^2} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$ .

**KROK 1.** Używając algorytmu 4.14, obliczamy specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Obliczone wektory

$$\mathbf{h}_\Delta^{(1)} = [1, 0, 0, 0, 1], \quad \mathbf{h}_\Delta^{(2)} = [0, 1, 0, 0, -1]$$

tworzą (1,2)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Ustalamy wektor

$$\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta^{(1)} - \mathbf{h}_\Delta^{(2)} = [1, -1, 0, 0, 2].$$

**KROK 2.** Używając algorytmu A.30, obliczamy zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  względem wektorów  $\mathbf{h}_\Delta^{(1)}, \mathbf{h}_\Delta^{(2)}$ :

$$\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} = \{e_3, e_4, e_5, e_{45}, e_3 + \hat{e}_5, e_3 + \hat{e}_4 + \hat{e}_5, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5, \hat{e}_{45}, \hat{e}_3 + e_5, \hat{e}_3 + e_4 + e_5\}.$$

**KROK 3.** Obliczamy macierz

$$\text{Cox}_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \text{M}_5(\mathbb{Z})$$

i przyjmujemy

$$\Phi_\Delta^{-1}(w) = w \cdot \text{Cox}_\Delta^{-1}$$

dla dowolnego wektora  $w \in \mathbb{Z}^5$ .

**KROK 4.** Ze zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  wybieramy wektor

$$v = [0, 0, -1, 0, 0] \in \mathcal{R}_\Delta^{red},$$

spełniający relację  $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) \in \mathcal{R}_\Delta$ .

**KROK 5.** Obliczamy wektor

$$h_v = v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) + \Phi_\Delta^{-3}(v) = [-4, -4, 0, 0, 0].$$

**KROK 5.1.** Przyjmujemy  $h_v := \frac{h_v}{4} = [-1, -1, 0, 0, 0]$  oraz

$$v := v - h_v = [1, 1, -1, 0, 0].$$

Tak zmodyfikowany wektor  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  spełnia własność (i') lematu 6.44(b), tj.:

$$\begin{aligned} v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) + \Phi_\Delta^{-3}(v) &= [1, 1, -1, 0, 0] + [0, 0, 1, 0, -1] + \\ &+ [-1, -1, 0, -1, 0] + [0, 0, 0, 1, 1] = 0, \end{aligned}$$

oraz  $v + \Phi_\Delta^{-1}(v) = [1, 1, 0, 0, -1] \in \mathcal{R}_\Delta$ .

**KROK 6.** Tworzymy następującą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^5$ :

**KROK 6.1.**  $e'_2 := v = [1, 1, -1, 0, 0]$ ,

**KROK 6.2.**  $e'_3 := \Phi_\Delta^{-3}(v) = [0, 0, 0, 1, 1]$ ,

**KROK 6.3.**  $e'_1 := \Phi_\Delta^{-1}(v) - \mathbf{h}'_\Delta = [-1, 1, 1, 0, -3]$ ,

**KROK 6.4.**  $e'_4 := \mathbf{h}_\Delta^{(2)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = [-2, -1, 0, -1, -1]$ ,

**KROK 6.5.**  $e'_5 := -\mathbf{h}_\Delta^{(1)} + 2\mathbf{h}_\Delta^{(2)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = [-3, 0, 0, -1, -3]$ .

**KROK 7.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}).$$

**KROK 8.** Sprawdzamy, że

$$B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \check{G}_{\mathbb{A}_3^2}.$$

Zgodnie z krokiem 8. algorytmu 6.52, przechodzimy do kroku 9.

**KROK 9.** Modyfikujemy wektory  $\mathbf{h}_\Delta^{(1)}, \mathbf{h}_\Delta^{(2)}$  w następujący sposób:

$$\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(1)} = -\mathbf{h}_\Delta^{(2)} = [0, -1, 0, 0, 1], \quad \tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(2)} = -\mathbf{h}_\Delta^{(1)} = [-1, 0, 0, 0, -1]$$

i obliczamy wektory  $e'_4, e'_5$ :

$$e'_4 := \tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(2)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = [-2, -1, 0, -1, -1],$$

$$e'_5 := -\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(1)} + 2\tilde{\mathbf{h}}_\Delta^{(2)} - v - \Phi_\Delta^{-1}(v) - \Phi_\Delta^{-3}(v) = [-3, 0, 0, -1, -3].$$

**KROK 10.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}).$$

**KROK 11.** Macierz  $B' := B^{tr}$  jest równa:

$$B^{tr} = [e_1^{tr}, e_2^{tr}, e_3^{tr}, e_4^{tr}, e_5^{tr}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z}).$$

Łatwo sprawdzić, że prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , tj. obliczona macierz  $B' := B^{tr}$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^{B'} \tilde{\mathbb{A}}_3^2$ .

Oszacujemy teraz pesymistyczną złożoność obliczeniową algorytmu 6.52.

**Fakt 6.54.** (a) *Krok 2 algorytmu 6.52 ma wykładniczą złożoność obliczeniową.*

(b) *Kroki 1 oraz 3 – 11 algorytmu 6.52 można wykonać w czasie wielomianowym.*

*Dowód.* Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\tilde{\mathbb{A}}_3^2$ , tzn.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{A}}_3^2$ , oraz ustalmy  $n + 2 = 5$ . Aby uzasadnić złożoność obliczeniową algorytmu 6.52 zauważmy, że

- na podstawie faktu 4.16 krok 1 ma wielomianową złożoność obliczeniową względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych,
- na podstawie faktu A.31 złożoność obliczeniowa kroku 2 jest wykładnicza,
- w kroku 3 macierz  $\text{Cox}_\Delta^{-1} = -\check{G}_\Delta^{tr} \cdot \check{G}_\Delta^{-1} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z})$  obliczamy w czasie wielomianowym  $O(n^3)$ ,
- w kroku 4 znalezienie w 12-elementowym zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  takiego wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$ , dla którego prawdziwa jest równość  $(v + \Phi_\Delta^{-1}(v)) \cdot \check{G}_\Delta \cdot (v + \Phi_\Delta^{-1}(v))^{tr} = 1$ , wymaga przeprowadzenia  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych dla co najwyżej  $12 = |\mathcal{R}_\Delta^{red}|$  wektorów, stąd krok ten ma wielomianową złożoność obliczeniową,
- krok 5: dla wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  wybranego w kroku 4, obliczenie wektora  $h_v = v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) + \Phi_\Delta^{-3}(v) \in \text{Ker } q_\Delta$  wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych, a operacja  $h_v := \frac{h_v}{4}$  wymaga  $n + 2$  całkowitoliczbowych dzielení,
- krok 6: obliczenie wektorów  $e'_1, \dots, e'_5 = e'_{n+2}$  wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych,
- krok 7 nie wymaga przeprowadzania operacji arytmetycznych,
- krok 8: sprawdzenie, czy prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , wymaga przeprowadzenia  $O(n^3)$  operacji arytmetycznych,
- krok 9: przeliczenie wektorów  $\mathbf{h}_\Delta^{(i)}, \mathbf{h}_\Delta^{(j)}, e'_4, e'_5$  można zrealizować w czasie liniowym  $O(n)$ ,
- krok 10 nie wymaga przeprowadzania operacji arytmetycznych,
- krok 11: sprawdzenie, czy prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_3^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , wymaga przeprowadzenia  $O(n^3)$  operacji arytmetycznych.

W konsekwencji otrzymujemy tezę. □

Macierz  $B \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  konstruujemy używając własności (i')–(iv') pierwiastków  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6 \in \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^6$  będących wierzchołkami kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$ . Własności te przedstawiamy w następującym lemacie.

**Lemat 6.55.** *Niech  $\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2 \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie bigrafem przedstawionym w tabeli 6.5,  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} : \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}^6$  transformacją Coxetera, oraz  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(2)} \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(6)}$ , gdzie wektory  $\mathbf{h}^{(2)} = [1, 1, 1, 1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{h}^{(6)} = [1, 0, 1, 1, 1, 1]$  tworzą (2, 6)-specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ .*

(a) *Wektory  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \subset \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \subseteq \mathbb{Z}^6$  tworzące  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$  mają następujące własności*

$$(i) \quad e_3 + \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{-1}(e_3) + \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{-2}(e_3) = \mathbf{h}^{(2)},$$



- (ii)  $e_4 = \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}(e_3)$ ,
- (iii)  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{-1}(e_1) - e_1 - e_3 - e_4 = -\mathbf{h}^{(2)} - \mathbf{h}^{(6)}$ ,
- (iv)  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{-1}(e_5) - e_5 - e_4 = \mathbf{h}^{(2)} - \mathbf{h}^{(6)}$ ,
- (v)  $e_2 = \mathbf{h}^{(2)} - e_1 - e_3 - e_4 - e_5$ ,
- (vi)  $e_6 = \mathbf{h}^{(6)} - e_1 - e_3 - e_4 - e_5$ .

Ponadto dla dowolnego pierwiastka  $v \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$  takiego, że  $\tilde{\mathbf{h}} := \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^{-1}(v) - v \in \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ , prawdziwa jest równość  $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^{(2)} - 2 \cdot \mathbf{h}^{(6)}$ .

(b) Jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  jest grafem krawędziowo-dwudzielnym silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z  $\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , to istnieją wektory  $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^6$  tworzące  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$ , które posiadają następujące własności

- (i')  $e'_3 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_3) + \Phi_\Delta^{-2}(e'_3) = \mathbf{h}_\Delta$ , gdzie  $\mathbf{h}_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$ ,
- (ii')  $e'_4 = \Phi_\Delta(e'_3)$ ,
- (iii')  $\Phi_\Delta^{-1}(e'_1) - e'_1 - e'_3 - e'_4 = -\mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta$ , gdzie  $\mathbf{h}_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  zdefiniowany jest w punkcie (i'), a wektor  $\mathbf{h}'_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  obliczamy następująco: dla takiego pierwiastka  $v \in \mathcal{R}_\Delta$ , że  $\tilde{\mathbf{h}}_\Delta := \Phi_\Delta^{-1}(v) - v \in \text{Ker } q_\Delta$ , stosujemy wzór
 
$$\mathbf{h}'_\Delta := \frac{\mathbf{h}_\Delta - \tilde{\mathbf{h}}_\Delta}{2}, \quad (6.56)$$
- (iv')  $\Phi_\Delta^{-1}(e'_5) - e'_5 - e'_4 = \mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta$ , gdzie  $\mathbf{h}_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  wyznaczony jest w punkcie (i'), a wektor  $\mathbf{h}'_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  ma postać (6.56),
- (v')  $e'_2 = \mathbf{h}_\Delta - e'_1 - e'_3 - e'_4 - e'_5$ , gdzie  $\mathbf{h}_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  wyznaczony jest w punkcie (i'),
- (vi')  $e'_6 = \mathbf{h}'_\Delta - e'_1 - e'_3 - e'_4 - e'_5$ , gdzie  $\mathbf{h}'_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  ma postać (6.56).

*Dowód.* (a) Własności (i)–(vi) łatwo sprawdzić analizując strukturę geometrii  $\Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -sietciowej przedstawionej w dowodzie lematu 6.36.

(b) Załóżmy, że  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  jest bigrafem silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z  $\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ . Dowód dzielimy na dwa etapy i używamy argumentów analogicznych do użytych w dowodzie lematu 6.44. W pierwszym etapie konstruujemy wektory  $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^6$ , a w drugim etapie dowodzimy, że tworzą one  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$ .

*Etap 1.* Pokażemy najpierw, że w skończonym zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} \subset \mathcal{R}_\Delta$  istnieje wektor  $e'_3 \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  spełniający własność (i'), tzn.

$$e'_3 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_3) + \Phi_\Delta^{-2}(e'_3) \in \text{Ker } q_\Delta. \quad (6.57)$$

Ponieważ bigrafy  $\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2, \Delta$  są silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne, więc na podstawie twierdzenia 3.53  $\mathbf{c}_\Delta = \mathbf{c}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = \infty$  oraz  $\tilde{\mathbf{c}}_\Delta = \tilde{\mathbf{c}}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = 3$ . Ponadto na podstawie twierdzenia 6.30(b) oraz lematu 6.36 istnieje  $\Phi_\Delta$ -oczkowy kołczan

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}) \quad (6.58)$$

izomorficzny z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$ . W konsekwencji dowolny wektor  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  spełniający równość

$$\Phi_\Delta^{-3}(v) = v \quad (6.59)$$

jest wierzchołkiem kołczanu  $\mathbf{t}_h \Gamma(\mathcal{R}_\Delta^1, \Phi_\Delta)$ , gdzie  $h \in \text{Ker } q_\Delta$  oraz

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^1, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}^1, \Phi_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}). \quad (6.60)$$

Z przedstawienia  $\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} + \text{Ker } q_\Delta$  (zobacz (A.28), [79, Theorem 3.2]) wynika, że

$$v = u + h, \quad \text{gdzie } u \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} \text{ oraz } h \in \text{Ker } q_\Delta.$$

Z równości (6.59) otrzymujemy:  $u + h = v = \Phi_\Delta^{-3}(v) = \Phi_\Delta^{-3}(u) + h$ , a stąd  $u = \Phi_\Delta^{-3}(u)$  i  $\Phi_\Delta(u) = \Phi_\Delta^{-2}(u)$ . Ustalmy wektor  $w := u + \Phi_\Delta^{-1}(u) + \Phi_\Delta^{-2}(u) \in \mathbb{Z}^6$ . Ponieważ zachodzi równość

$$\Phi_\Delta(w) = \Phi_\Delta(u) + u + \Phi_\Delta^{-1}(u) = u + \Phi_\Delta^{-1}(u) + \Phi_\Delta^{-2}(u) = w,$$

która jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy  $w \in \text{Ker } q_\Delta$  (zobacz lemat 3.40(c)), więc  $w \in \text{Ker } q_\Delta$ , co dowodzi, że w redukcje  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  istnieje pierwiastek  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  spełniający własność (i'). Przyjmujemy

$$e'_3 := v, e'_4 := \Phi_\Delta(e'_3) \text{ oraz } \mathbf{h}_\Delta := e'_3 + \Phi_\Delta^{-1}(e'_3) + \Phi_\Delta^{-2}(e'_3). \quad (6.61)$$

Z izomorfizmu (6.58) wynika, że istnieje kołczan

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^2, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}), \quad (6.62)$$

taki, że dla dowolnego pierwiastka  $v' \in \mathcal{R}_\Delta$ , który jest wierzchołkiem kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^2, \Phi_\Delta)$  lub  $\Gamma(\widetilde{\mathcal{R}}_\Delta^2, \Phi_\Delta)$ , prawdziwa jest własność:  $\tilde{\mathbf{h}}_\Delta := \Phi_\Delta^{-1}(v') - v' \in \text{Ker } q_\Delta$ . Jeśli  $\tilde{\mathbf{h}}_\Delta = \mathbf{h}_\Delta - 2 \cdot h$  dla pewnego  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ , to przyjmujemy

$$\mathbf{h}'_\Delta := \frac{\mathbf{h}_\Delta - \tilde{\mathbf{h}}_\Delta}{2} \in \text{Ker } q_\Delta. \quad (6.63)$$

Z izomorfizmu (6.58) wynika, że istnieją kołczany

$$\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^3, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^3}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^3}) \text{ oraz } \Gamma(\mathcal{R}_\Delta^4, \Phi_\Delta) \cong \Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^4}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^4}). \quad (6.64)$$

W konsekwencji istnieją pierwiastki  $e'_1, e'_5 \in \mathcal{R}_\Delta$ , które są wierzchołkami kołczanów  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^3, \Phi_\Delta)$  lub  $\Gamma(\widetilde{\mathcal{R}}_\Delta^3, \Phi_\Delta)$  oraz  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^4, \Phi_\Delta)$  lub  $\Gamma(\widetilde{\mathcal{R}}_\Delta^4, \Phi_\Delta)$ , odpowiednio, oraz spełniają własności (iii') i (iv'). Następnie wektory  $e'_2, e'_6 \in \mathbb{Z}^6$  konstruujemy następująco

$$\begin{aligned} e'_2 &:= \mathbf{h}_\Delta - e'_1 - e'_3 - e'_4 - e'_5, \\ e'_6 &:= \mathbf{h}'_\Delta - e'_1 - e'_3 - e'_4 - e'_5. \end{aligned}$$

*Etap 2.* Aby pokazać, że wektory  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6$  tworzą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$ , korzystamy z własności przedstawionych kołczanów  $\Phi_\Delta$ -oczkowych. Ten fragment dowodu jest żmudny i technicznie skomplikowany, więc go tu pomijamy.  $\square$

Korzystając z własności przedstawionych w lemacie 6.55, konstruujemy macierz  $B \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ . Metodę konstrukcji macierzy definiującej  $\mathbb{Z}$ -kongruencję  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  opisuje następujący lemat.

**Lemat 6.65.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie spójnym bigrafem korangi dwa. Jeśli

$$\mathbf{CDtype}_\Delta = (t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \mathbb{A}_4) = \mathbf{CDtype}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2},$$

to istnieją takie pierwiastki  $u^*, v^*, w^* \in \mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^6$  oraz wektory  $\mathbf{h}_\Delta, \mathbf{h}'_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^6$ , że macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_3^2$ , gdzie

$$B = \begin{bmatrix} u^* \\ \mathbf{h}_\Delta - u^* - v^* - \Phi_\Delta(v^*) - w^* \\ v^* \\ \Phi_\Delta(v^*) \\ w^* \\ \mathbf{h}'_\Delta - u^* - v^* - \Phi_\Delta(v^*) - w^* \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}).$$

*Dowód.* Załóżmy, że  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ . Z lematu 6.55(b) oraz jego dowodu wynika, że zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta$  posiada strukturę  $\Phi_\Delta$ -sieciovie geometrii  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta, \Phi_\Delta)$  pierwiastków bigrafu  $\Delta$  izomorficzną z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} \cup \text{Ker } q_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$  oraz zawierającą  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^6$  grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$ . Zatem macierz  $B = [e_k^{tr}] \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  wyznaczona przez własności (i')–(vi') jest  $\mathbb{Z}$ -odwracalna. Pokażemy, że w zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  istnieją pierwiastki, które umożliwiają wyznaczenie macierzy  $B = [e_k^{tr}] \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  definiującej silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ .

Pokażemy najpierw, że zbiór

$$\mathcal{R}_\Delta^* := \{u \in \mathcal{R}_\Delta^{red}, \Phi_\Delta^{-3}(u) = u\} \subset \mathcal{R}_\Delta^{red} \quad (6.66)$$

ma dokładnie sześć elementów. W dowodzie lematu 6.55(b) pokazujemy, że zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^*$  (6.66) jest niepusty. Ustalmy pierwiastek  $v \in \mathcal{R}_\Delta^*$ . Zauważmy, że pierwiastki  $v$  oraz  $-v \in \mathcal{R}_\Delta^*$  są wierzchołkami  $\Phi_\Delta$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^1, \Phi_\Delta)$  izomorficznego z kołczanem  $\Gamma(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^1}, \Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2})$ . Stąd wynika, że nie istnieją  $h, h' \in \text{Ker } q_\Delta$ , dla których  $\Phi_\Delta^{-1}(v) = v + h$  oraz  $\Phi_\Delta^{-2}(v) = v + h'$ . W konsekwencji istnieją wektory  $v', v'' \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}, v \neq \pm v' \neq \pm v'' \neq v$ , oraz  $h', h'' \in \text{Ker } q_\Delta$  takie, że

$$\Phi_\Delta^{-1}(v) = v' + h' \quad \text{oraz} \quad \Phi_\Delta^{-2}(v) = v'' + h'',$$

a stąd  $v', v'', \hat{v}', \hat{v}'' \in \mathcal{R}_\Delta^* \subset \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ . Aby uzasadnić zawieranie

$$\mathcal{R}_\Delta^* = \{v, v', v'', \hat{v}, \hat{v}', \hat{v}''\} \subset \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$$

załóżmy przez sprzeczność, że istnieje taki pierwiastek  $w \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ , że  $\Phi_\Delta^{-3}(w) = w$  oraz  $w \notin \{v, v', v'', \hat{v}, \hat{v}', \hat{v}''\}$ . Ponieważ pierwiastki  $w, \hat{w} \in \mathcal{R}_\Delta^*$  są wierzchołkami  $\Phi_\Delta$ -oczkowego kołczanu  $\Gamma(\mathcal{R}_\Delta^1, \Phi_\Delta)$ , więc  $w \in \text{Orb}(v + a \cdot h)$  lub  $w \in \text{Orb}(\hat{v} + a \cdot h)$  dla pewnych  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $h \in \text{Ker } q_\Delta$ . W konsekwencji

$$\begin{aligned} w &= v + a' \cdot h' \quad \text{lub} \quad w = v' + a' \cdot h' \quad \text{lub} \quad w = v'' + a' \cdot h' \\ (w &= \hat{v} + a' \cdot h' \quad \text{lub} \quad w = \hat{v}' + a' \cdot h' \quad \text{lub} \quad w = \hat{v}'' + a' \cdot h', \text{ odpowiednio}) \end{aligned} \quad (6.67)$$

dla pewnych  $a' \in \mathbb{Z}$  oraz  $h' \in \text{Ker } q_\Delta$ . Jeśli  $a' = 0$  lub  $h' = 0$ , to  $w \in \{v, v', v'', \hat{v}, \hat{v}', \hat{v}''\}$ , co jest sprzeczne z założeniem. Jeśli  $a' \neq 0$  oraz  $h' \neq 0$ , to równości (6.67) są sprzeczne z konstrukcją reduktu (6.28), więc  $w \notin \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ , co jest sprzeczne z założeniem. Otrzymane sprzeczności dowodzą, że  $\mathcal{R}_\Delta^* = \{v, v', v'', \hat{v}, \hat{v}', \hat{v}''\}$ , co należało pokazać.

W konsekwencji, do sześcioelementowego zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^* \subset \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  należy pierwiastek  $e'_3 \in \mathcal{R}_\Delta^* \subset \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ , który spełnia własność (i') z lematu 6.55 i wyznacza macierz  $B' = [e'_1, \dots, e'_6] \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , gdzie pierwiastki  $e'_1, e'_2, e'_4, e'_5, e'_6 \in \mathcal{R}_\Delta$  spełniają własności (ii')–(vi').

Podsumowując, macierz  $B' = [e_1^{\text{tr}}, \dots, e_6^{\text{tr}}] \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiująca silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^{B'} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  jest równa  $B' = B^{\text{tr}}$ , gdzie

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \\ e'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* \\ \mathbf{h}_\Delta - u^* - v^* - \Phi_\Delta(v^*) - w^* \\ v^* \\ \Phi_\Delta(v^*) \\ w^* \\ \mathbf{h}'_\Delta - u^* - v^* - \Phi_\Delta(v^*) - w^* \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}),$$

oraz  $e'_3 := v^*$  jest jednym z pierwiastków należących do zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^* \subset \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  (6.66), a wybór pierwiastków  $u^*, w^* \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  spełniających własności (iii')–(iv') zależy od wyboru  $e'_3 := v^*$ .

Zgodnie z przedstawionym opisem konstruujemy algorytm 6.68, wyznaczający macierz  $B \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  i na podstawie przeprowadzonych obliczeń komputerowych otrzymujemy tezę.  $\square$

Przedstawione dowody lematu 6.55 oraz lematu 6.65 uzasadniają prawdziwość następującego algorytmu, który wyznacza macierz definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ .

**Algorytm 6.68.** DANE Niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  korangi dwa bez pętli, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnego z rozszerzonym bigrafem Euklidesa  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , tzn.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ .

WYNIK Macierz  $B \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}); \det A = \pm 1\}$  definiująca silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  pomiędzy bigrafami  $\Delta$  oraz  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , tzn.  $\check{G}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = B^{\text{tr}} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B$ .

**KROK 1.** Obliczamy skończony 20-elementowy (na podstawie lematu 3.51(c), twierdzenia 3.64 oraz twierdzenia 3.35(a)) zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \in \mathbb{Z}^6$  (6.28), zobacz algorytm A.30.

**KROK 2.** Obliczamy macierze  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ ,  $\text{Cox}_\Delta^{-1} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  oraz przyjmujemy

$$\Phi_\Delta(w) = w \cdot \text{Cox}_\Delta, \quad \Phi_\Delta^{-1}(w) = w \cdot \text{Cox}_\Delta^{-1}$$

dla dowolnego wektora  $w \in \mathbb{Z}^6$ .

**KROK 3.** Inicjalizujemy puste zbiory  $\text{lista}_h = \emptyset$  oraz  $\text{lista}_{34} = \emptyset$ .

**KROK 4.** Dla wektorów z reduktu  $v' \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$

**KROK 4.1.** jeśli  $\Phi_\Delta^{-1}(v') - v' \in \text{Ker } q_\Delta$ , to

**KROK 4.1.1.** dodajemy wektor  $\tilde{h}_\Delta := \Phi_\Delta^{-1}(v') - v' \in \text{Ker } q_\Delta$  do zbioru  $\text{lista}_h$ .

Z geometrii  $\Phi_{\tilde{A}_{4,2}}$ -sieciovych przedstawionych w lemacie 6.36 oraz z dowodu lematu 6.55(b) wynika, że w zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  istnieją dokładnie dwa pierwiastki o takiej własności, a zatem  $|\text{lista}_h| = 2$ .

**KROK 5.** Dla wektorów  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$

**KROK 5.1.** jeśli  $\Phi_\Delta^{-3}(v) = v$ , to

**KROK 5.1.1.** dodajemy wektor  $v$  do zbioru  $\text{lista}_{34}$ .

Na podstawie dowodu lematu 6.65, w skończonym zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  istnieje dokładnie sześć pierwiastków o takiej własności, a zatem  $|\text{lista}_{34}| = 6$ .

**KROK 6.** Dla każdej pary wektorów  $(\tilde{h}_\Delta, v) \in \text{lista}_h \times \text{lista}_{34}$ :

**KROK 6.1.** obliczamy  $\mathbf{h}_\Delta := v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) \in \text{Ker } q_\Delta$  (zobacz dowód lematu 6.55(b)),

**KROK 6.2.** obliczamy  $\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta - \tilde{h}_\Delta \in \text{Ker } q_\Delta$  (na podstawie lematu 3.21(b) zbiór  $\text{Ker } q_\Delta$  jest podgrupą grupy wolnej  $\mathbb{Z}^6$ ),

**KROK 6.3.** jeśli  $\text{NWD}(\mathbf{h}'_\Delta) \neq 2$ , to kontynuujemy od kroku 6, zobacz dowód lematu 6.55;

**KROK 6.4.** przyjmujemy  $\mathbf{h}'_\Delta := \frac{\mathbf{h}'_\Delta}{2} \in \text{Ker } q_\Delta$ ,

**KROK 6.5.** ze zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  wybieramy wektor  $u \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$ ,  $u \neq \pm v$ , który spełnia następującą własność (iii') lematu 6.55(b):

$$\Phi_\Delta^{-1}(u) - u - v - \Phi_\Delta(v) = -\mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta$$

oraz wektor  $w \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$ ,  $w \neq \pm v \neq v$  spełniający następującą własność (iv') lematu 6.55(b):

$$\Phi_\Delta^{-1}(w) - w - \Phi_\Delta(v) = \mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta.$$

Na podstawie lematu 6.55(b), takie wektory  $u, w \in \mathbb{Z}^6$  istnieją w zbiorze  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$ .

**KROK 6.5.1.** Tworzymy następującą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^6$  (lemat 6.55(b)):

**KROK 6.5.1.1.**  $e'_1 := u$ ,

**KROK 6.5.1.2.**  $e'_2 := \mathbf{h}_\Delta - e'_1 - e'_3 - e'_4 - e'_5 = \mathbf{h}_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w$ ,

**KROK 6.5.1.3.**  $e'_3 := v$ ,

**KROK 6.5.1.4.**  $e'_4 := \Phi_\Delta(e'_3) = \Phi_\Delta(v)$ ,

**KROK 6.5.1.5.**  $e'_5 := w$ ,

**KROK 6.5.1.6.**  $e'_6 := \mathbf{h}'_\Delta - e'_1 - e'_3 - e'_4 - e'_5 = \mathbf{h}'_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w$ .

**KROK 6.5.2.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \\ e'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \mathbf{h}_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w \\ v \\ \Phi_\Delta(v) \\ w \\ \mathbf{h}'_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}).$$

**KROK 6.5.3.** Jeśli prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , to przerywamy przeszukiwanie i zwracamy macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  jako wynik. Na podstawie lematu 6.65, macierz definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$  można wyznaczyć w ten sposób przy pomocy co najwyżej  $|\text{lista}_h| \cdot |\text{lista}_{34}| = 12$  sprawdzeń.

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu 6.68 do znalezienia macierzy definiującej silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^B \tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , gdzie  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ .

**Przykład 6.69.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym korangi dwa

$$\Delta: \begin{array}{ccc} 2 & \text{---} & 5 \\ & \diagdown & \diagup \\ & 3 & \text{---} & 4 \\ & \diagup & \diagdown \\ 1 & \text{---} & 6 \end{array}, \text{ gdzie } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Cox}_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy typ Dynkina  $\text{Dyn}_\Delta = \mathbb{A}_4$  (zobacz algorytm 5.48), liczbę Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta = \infty$ , zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{\mathbf{c}}_\Delta = 3$  (zobacz algorytm A.55), oraz wielomian Coxetera  $\text{cox}_\Delta(t) = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 3t + 1$ . Korzystając z algorytmu 6.68 pokażemy, że bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  jest silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentny z bigrafem  $\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , tj. skonstruujemy macierz  $B \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiującą równość

$$\check{G}_{\tilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2} = B^{tr} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B.$$

**KROK 1.** Używając algorytmu A.30, obliczamy zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} = & \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_{34}, e_{345}, e_{34} + \hat{e}_6, e_{45}, e_4 + \hat{e}_6, e_{56}\} \cup \\ & \cup \{\hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5, \hat{e}_6, \hat{e}_{34}, \hat{e}_{345}, \hat{e}_{34} + e_6, \hat{e}_{45}, \hat{e}_4 + e_6, \hat{e}_{56}\}. \end{aligned}$$

**KROK 2.** Obliczamy macierze  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \text{M}_6(\mathbb{Z})$ ,  $\text{Cox}_\Delta^{-1} \in \text{M}_6(\mathbb{Z})$ , gdzie

$$\text{Cox}_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \text{M}_6(\mathbb{Z}),$$

oraz przyjmujemy

$$\Phi_\Delta(w) = w \cdot \text{Cox}_\Delta, \quad \Phi_\Delta^{-1}(w) = w \cdot \text{Cox}_\Delta^{-1}$$

dla dowolnego wektora  $w \in \mathbb{Z}^6$ .

**KROK 3.** Inicjalizujemy puste zbiory  $\text{lista}_h = \emptyset$  oraz  $\text{lista}_{34} = \emptyset$ .

**KROK 4.** Konstruujemy zbiór  $\text{lista}_h$  następująco: dla wektorów z reduktu  $v' \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$

**KROK 4.1.** jeśli  $\Phi_\Delta^{-1}(v') - v' \in \text{Ker } q_\Delta$ , to

**KROK 4.1.1.** dodajemy wektor  $\tilde{\mathbf{h}}_\Delta := \Phi_\Delta^{-1}(v') - v' \in \text{Ker } q_\Delta$  do zbioru  $\text{lista}_h$ .

Otrzymujemy dwuelementowy zbiór

$$\text{lista}_h = \{[-1, 2, 1, 1, 2, 1], [1, -2, -1, -1, -2, -1]\},$$

zobacz dowodu lematu 6.55(b).

**KROK 5.** Konstruujemy zbiór  $\text{lista}_{34}$  następująco: dla wektorów z reduktu  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$

**KROK 5.1.** jeśli  $\Phi_\Delta^{-3}(v) = v$ , to

**KROK 5.1.1.** dodajemy wektor  $v$  do zbioru  $\text{lista}_{34}$  (zobacz dowodu lematu 6.55(b)).

Otrzymujemy sześcieelementowy zbiór  $\text{lista}_{34} = \{e_3, e_4, e_{34}, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_{34}\}$ .

**KROK 6.** Dla następujących wektorów

$$\tilde{\mathbf{h}}_\Delta = [-1, 2, 1, 1, 2, 1] \in \text{lista}_h \text{ oraz } v = [0, 0, 1, 0, 0, 0] \in \text{lista}_{34}$$

**KROK 6.1.** obliczamy następujący wektor z jądra funkcjonału Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\mathbf{h}_\Delta := v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) = [1, 0, 1, 1, 0, -1] \in \text{Ker } q_\Delta,$$

**KROK 6.2.** obliczamy  $\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta - \tilde{\mathbf{h}}_\Delta = [2, -2, 0, 0, -2, -2] \in \text{Ker } q_\Delta,$

**KROK 6.3.** sprawdzamy, że  $\text{NWD}(\mathbf{h}'_\Delta) = 2,$

**KROK 6.4.** przyjmujemy  $\mathbf{h}'_\Delta := \frac{\mathbf{h}'_\Delta}{2} = [1, -1, 0, 0, -1, -1] \in \text{Ker } q_\Delta,$

**KROK 6.5.** ze zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  wybieramy wektor  $u = [0, 0, -1, -1, 0, 1] \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ , który spełnia własność (iii') lematu 6.55(b), tj.:

$$\Phi_\Delta^{-1}(u) - u - v - \Phi_\Delta(v) = -\mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta = [-2, 1, -1, -1, 1, 2]$$

oraz wektor  $w = [0, 0, 0, 0, 1, 0] \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}, u \neq \pm w \neq v$ , który spełnia własność (iv') lematu 6.55(b):

$$\Phi_\Delta^{-1}(w) - w - \Phi_\Delta(v) = \mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta = [0, 1, 1, 1, 1, 0],$$

zobacz lemat 6.55(b),

**KROK 6.5.1.** tworzymy następującą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^6$ :

**KROK 6.5.1.1.**  $e'_1 := u = [0, 0, -1, -1, 0, 1],$

**KROK 6.5.1.2.**  $e'_2 := \mathbf{h}_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w = [1, 0, 1, 1, -1, -2],$

**KROK 6.5.1.3.**  $e'_3 := v = [0, 0, 1, 0, 0, 0],$

**KROK 6.5.1.4.**  $e'_4 := \Phi_\Delta(v) = [0, 0, 0, 1, 0, 0],$

**KROK 6.5.1.5.**  $e'_5 := w = [0, 0, 0, 0, 1, 0],$

**KROK 6.5.1.6.**  $e'_6 := \mathbf{h}'_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w = [1, -1, 0, 0, -2, -2].$

**KROK 6.5.2.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \\ e'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}).$$

**KROK 6.5.3.** Sprawdzamy, że

$$B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{\text{tr}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \check{G}_{\mathbb{A}_{4,2}^2},$$

więc kontynuujemy przeszukiwanie.

**KROK 7.** Dla następujących wektorów

$$\tilde{\mathbf{h}}_\Delta = [-1, 2, 1, 1, 2, 1] \in \text{lista}_h \text{ oraz } v = [0, 0, 0, 1, 0, 0] \in \text{lista}_{34}$$

**KROK 7.1.** obliczamy następujący wektor z jądra funkcjonału Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\mathbf{h}_\Delta := v + \Phi_\Delta^{-1}(v) + \Phi_\Delta^{-2}(v) = [1, 0, 1, 1, 0, -1] \in \text{Ker } q_\Delta,$$

**KROK 7.2.** obliczamy  $\mathbf{h}'_\Delta := \mathbf{h}_\Delta - \tilde{\mathbf{h}}_\Delta = [2, -2, 0, 0, -2, -2] \in \text{Ker } q_\Delta,$

**KROK 7.3.** sprawdzamy, że  $\text{NWD}(\mathbf{h}'_\Delta) = 2,$

**KROK 7.4.** przyjmujemy  $\mathbf{h}'_\Delta := \frac{\mathbf{h}'_\Delta}{2} = [1, -1, 0, 0, -1, -1] \in \text{Ker } q_\Delta,$

**KROK 7.5.** ze zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  wybieramy wektor  $u = [0, 0, 0, -1, 0, 1] \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$ , który spełnia własność (iii') lematu 6.55(b), tj.:

$$\Phi_\Delta^{-1}(u) - u - v - \Phi_\Delta(v) = -\mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta = [-2, 1, -1, -1, 1, 2]$$

oraz wektor  $w = [0, 0, 1, 1, 1, 0] \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}, u \neq \pm w \neq v$ , który spełnia własność (iv') lematu 6.55(b):

$$\Phi_\Delta^{-1}(w) - w - \Phi_\Delta(v) = \mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta = [0, 1, 1, 1, 1, 0],$$

zobacz lemat 6.55(b),



**KROK 7.5.1.** tworzymy następującą  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\mathbb{Z}^6$ :

**KROK 7.5.1.1.**  $e'_1 := u = [0, 0, 0, -1, 0, 1],$

**KROK 7.5.1.2.**  $e'_2 := \mathbf{h}_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w = [0, 0, 0, 0, -1, -1],$

**KROK 7.5.1.3.**  $e'_3 := v = [0, 0, 0, 1, 0, 0],$

**KROK 7.5.1.4.**  $e'_4 := \Phi_\Delta(v) = [1, 0, 0, 0, 0, -1],$

**KROK 7.5.1.5.**  $e'_5 := w = [0, 0, 1, 1, 1, 0],$

**KROK 7.5.1.6.**  $e'_6 := \mathbf{h}'_\Delta - u - v - \Phi_\Delta(v) - w = [0, -1, -1, -1, -2, -1].$

**KROK 7.5.2.** Konstruujemy macierz

$$B = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \\ e'_5 \\ e'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z}).$$

**KROK 7.5.3.** Sprawdzamy, że  $B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr} = \check{G}_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ , więc przerywamy przeszukiwanie, ponieważ macierz  $B^{tr} \in \text{Gl}(6, \mathbb{Z})$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^{B^{tr}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ .

Oszacujemy teraz pesymistyczną złożoność obliczeniową algorytmu 6.68.

**Fakt 6.70.** (a) *Krok 1 algorytmu 6.68 ma wykładniczą złożoność obliczeniową względem wykonywanych operacji arytmetycznych.*

(b) *Kroki 2 – 6 algorytmu 6.68 można wykonać w czasie wielomianowym.*

*Dowód.* Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli, silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentnym z bigrafem  $\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , tzn.  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2$ , oraz ustalmy  $n + 2 = 6$ . Aby uzasadnić złożoność obliczeniową algorytmu 6.68 zauważmy, że

- na podstawie faktu A.31, krok 1 algorytmu 6.68 ma wykładniczą złożoność obliczeniową względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych,
- w kroku 2 macierze  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ ,  $\text{Cox}_\Delta^{-1} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  obliczamy w czasie wielomianowym  $O(n^3)$ ,
- krok 3 nie wymaga przeprowadzania operacji arytmetycznych,
- w kroku 4 dla każdego wektora  $v' \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  sprawdzenie równości  $(\Phi_\Delta^{-1}(v') - v') \cdot \check{G}_\Delta \cdot (\Phi_\Delta^{-1}(v') - v')^{tr} = 0$ , wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych dla co najwyżej  $20 = |\mathcal{R}_\Delta^{red}|$  wektorów, stąd krok ten ma wielomianową złożoność obliczeniową,
- w kroku 5 dla każdego wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  sprawdzenie równości  $\Phi_\Delta^{-3}(v) = v$ , wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych dla co najwyżej  $20 = |\mathcal{R}_\Delta^{red}|$  wektorów, stąd krok ten ma wielomianową złożoność obliczeniową,
- krok 6: z geometrii  $\Phi_{\widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2}$ -sieniowych przedstawionych w lemacie 6.36 i z dowodu lematu 6.55(b) wynika, że  $|\text{lista}_h| = 2$ ; na podstawie dowodu lematu 6.65  $|\text{lista}_{34}| = 6$ , a stąd kroki 6.1 – 6.5 powtarzane są co najwyżej  $2 \cdot 6 = 12$  razy,
- krok 6.1 wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych,
- krok 6.2 wymaga przeprowadzenia  $O(n)$  odejmowań,
- krok 6.3: sprawdzenie, czy  $\text{NWD}(\mathbf{h}'_\Delta) \neq 2$  ma złożoność wielomianową,
- krok 6.2 wymaga przeprowadzenia  $O(n)$  dzieleni,
- krok 6.5: wybór dwóch wektorów  $u, w \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$ ,  $u \neq \pm v$ , dla których  $\Phi_\Delta^{-1}(u) - u - v - \Phi_\Delta(v) = -\mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta$ , oraz  $\Phi_\Delta^{-1}(w) - w - \Phi_\Delta(v) = \mathbf{h}_\Delta - \mathbf{h}'_\Delta$ , wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(n^2)$  operacji arytmetycznych, dla co najwyżej  $|\mathcal{R}_\Delta^{red}|^2 = O(n^4)$  wektorów, stąd krok ten ma wielomianową złożoność obliczeniową,

- krok 6.5.1: obliczenie wektorów  $e'_1, \dots, e'_6 = e'_{n+2}$  ma złożoność obliczeniową rzędu  $O(n)$ ,
- krok 6.5.2 nie wymaga przeprowadzania operacji arytmetycznych,
- krok 6.5.3: sprawdzenie, czy prawdziwa jest równość  $\check{G}_{\mathbb{A}_3} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ , wymaga przeprowadzenia  $O(n^3)$  operacji arytmetycznych.

W konsekwencji otrzymujemy tezę. □

## 6.5. Weryfikacja poprawności algorytmów kombinatoryczno-graficznych

Celem niniejszego podrozdziału jest analiza zaproponowanych przez nas algorytmów kombinatoryczno-graficznych pod kątem ich wydajności oraz poprawności.

Przypominamy, że w dowodzie twierdzenia 6.30 podajemy argumenty uzasadniające, że proponowane przez nas algorytmy kombinatoryczno-graficzne mają własność stopu.

**Fakt 6.71.** *Algorytmy kombinatoryczno-graficzne rozważane w rozprawie mają własność stopu.*

*Dowód.* Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$ ,  $n \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa. Załóżmy, że zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta$  ma strukturę geometrii  $\Phi_\Delta$ -oczkowej. Ponieważ wyznaczone macierze  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$  konstruujemy na podstawie skończonego zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  (6.28), więc rozważane przez nas algorytmy kombinatoryczno-graficzne mają własność stopu. □

Omówimy teraz złożoność obliczeniową zaproponowanych przez nas algorytmów kombinatoryczno-graficznych (czasy wykonywania naszych implementacji przedstawiamy w tabeli 6.7). Przedstawione algorytmy są zaprojektowane dla bigrafów o co najwyżej 6 wierzchołkach, niemniej, celem naszych dalszych badań jest konstrukcja algorytmów kombinatoryczno-graficznych również dla spójnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o  $m \geq 7$  wierzchołkach. Dlatego przeprowadzamy teraz ogólną analizę asymptotycznej pesymistycznej złożoności obliczeniowej algorytmów kombinatoryczno-graficznych dla bigrafów o dowolnej liczbie wierzchołków.

**Fakt 6.72.** *Algorytmy kombinatoryczno-graficzne rozważane w rozprawie można tak zaimplementować, aby ich pesymistyczna złożoność obliczeniowa była wielomianowa względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.*

*Dowód.* Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$ ,  $n \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa. Załóżmy, że zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \cup \text{Ker } q_\Delta$  ma strukturę geometrii  $\Phi_\Delta$ -oczkowej. W algorytmach kombinatoryczno-graficznych rozważane w rozprawie wykonujemy jednokrotnie następujące operacje:

- obliczenie specjalnej  $\mathbb{Z}$ -bazy grupy  $\text{Ker } q_\Delta$  (algorytm 4.14),
- wyznaczenie reduktu  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  (algorytm A.30),
- obliczenie macierzy  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ ,  $\text{Cox}_\Delta^{-1} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$ ,
- w niektórych przypadkach: modyfikacja wszystkich pierwiastków z reduktu  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{red}$  przy pomocy operacji:  $v := \eta \cdot (v + a_1 \Phi_\Delta^k(v) + \dots + a_s \Phi_\Delta^\ell(v) + b_1 \cdot u^{(1)} + \dots + b_p \cdot u^{(p)})$  dla pewnych liczb  $\eta, a_1, a_s, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$ ,  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  oraz wektorów  $u^{(1)}, \dots, u^{(p)} \in \mathbb{Z}^{n+2}$ ,

oraz wielokrotnie następujące operacje:

- obliczanie  $a_1 \Phi_\Delta^k(v) + \dots + a_s \Phi_\Delta^\ell(v)$  dla pewnych  $a_1, a_s, k, \ell \in \mathbb{Z}$  oraz wektora  $v \in \mathbb{Z}^{n+2}$ ,
- obliczanie  $\check{G}_{\mathbb{D}_{n,k}^2} = B \cdot \check{G}_\Delta \cdot B^{tr}$ .

Ponieważ liczba kanonicznych geometrii  $\Phi_\Delta$ -oczkowych jest skończona (w szczególności, jeśli geometrie  $\Phi_\Delta$ -oczkowe mają kształt cylindrów, to liczba ta jest równa 2), więc liczba macierzy  $B \in \text{Gl}(n+2, \mathbb{Z})$ , które konstruujemy na ich podstawie również jest skończona. W konsekwencji, wielokrotnie powtarzane operacje wykonujemy skończoną i ustaloną liczbę razy.

Wszystkie z wymienionych operacji, z wyjątkiem obliczania reduktu, mają wielomianową złożoność obliczeniową względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych. Przypominamy, że bigrafy korangi dwa konstruujemy z bigrafów dodatnich  $\Delta' \in \mathcal{UBigr}_n$  oraz zbioru pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  (zobacz podrozdział 5.4). Zauważmy, że jeśli mamy dany zbiór  $\mathcal{R}_{\Delta'}$  oraz  $\Delta = \Delta'[[u, w]]$ , to redukt  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  wyznaczamy bez użycia operacji arytmetycznych (zobacz kroki 3 – 5 algorytmu A.30).

Stąd, jeśli na etapie konstrukcji bigrafów korangi dwa (algorytm 5.22) zapamiętamy dodatkowo zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta'}$ , na potrzeby dalszych analiz, to obliczanie reduktu można usunąć z kroków algorytmów kombinatoryczno-graficznych i korzystać z danych już wcześniej obliczonych na etapie konstrukcji bigrafu korangi dwa. Przy tych założeniach asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmów kombinatoryczno-graficznych jest wielomianowa.

Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe wykazują, że w prezentowanych algorytmach kombinatoryczno-graficznych redukt można zastąpić zbiorem wektorów jednostkowych:  $\{\pm e_1, \dots, \pm e_{n+2}\}$ . Stąd krok, w którym obliczamy redukt,  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  można pominąć i w to miejsce korzystać z pierwiastków ze zbioru  $\{\pm e_1, \dots, \pm e_{n+2}\}$ . Niestety, nie mamy innego dowodu niż przeprowadzone eksperymenty z użyciem obliczeń komputerowych, że można dokonać takiej zamiany.  $\square$

Ponieważ w każdym złożonym systemie informatycznym istnieje prawdopodobieństwo pojawienia się błędów na etapie implementacji, stosujemy dodatkową weryfikację wyników obliczeniowych uzyskanych przy pomocy algorytmów kombinatoryczno-graficznych prezentowanych w tym rozdziale. W tym celu używamy następującego algorytmu.

**Algorytm 6.73.** **DANE** Zbiory  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$  oraz **Macierze**  $\tilde{D}_{n,j}^2$ , zawierające odpowiednio: spójne nieujemne bigrafy  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$  korangi dwa bez pętli silnie  $\mathbb{Z}$ -kongruentne z  $\tilde{D}_{n,j}^2$ , oraz macierze  $B_\Delta \in \mathbf{Macierze}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$  definiujące silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \approx_{\mathbb{Z}}^{B_\Delta} \tilde{D}_{n,j}^2$  obliczone przy użyciu jednego z algorytmów kombinatoryczno-graficznych.

**WYNIK** Weryfikacja poprawności klasyfikacji spójnych nieujemnych grafów krawędziowo-dwudzielnych korangi dwa bez pętli o co najwyżej sześciu wierzchołkach, względem silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama, uzyskanej przy pomocy obliczeń komputerowych.

**KROK 1.** Dla każdego bigrafu  $\tilde{D}_{n,j}^2 \in \{\tilde{A}_{2,1}^2, \tilde{A}_{2,2}^2, \tilde{A}_{3,1}^2, \tilde{A}_{3,2}^2, \tilde{A}_{4,1}^2, \tilde{A}_{4,2}^2, \tilde{A}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,1}^2, \tilde{D}_{4,2}^2, \tilde{D}_{4,3}^2, \tilde{D}_{4,4}^2, \tilde{D}_{4,5}^2\}$ :

**KROK 1.1.** dla każdej klasy  $\mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ :

**KROK 1.1.1.** dla każdego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ :

**KROK 1.1.1.1.** dla macierzy  $B_\Delta \in \mathbf{Macierze}_{\tilde{D}_{n,j}^2}$ :

**KROK 1.1.1.1.1.** jeśli następująca równość

$$B_\Delta^{\text{tr}} \cdot \check{G}_\Delta \cdot B_\Delta = \check{G}_{\tilde{D}_{n,j}^2},$$

jest prawdziwa, to macierz  $B_\Delta$  definiuje silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama i obliczenia nie zawierają błędów; w przeciwnym wypadku kończymy obliczenia z komunikatem: „Macierz  $B_\Delta$  nie definiuje silnej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji pomiędzy bigrafem  $\Delta$  a  $\tilde{D}_{n,j}^2$ ”.

Zastosowanie algorytmu 6.73 potwierdza poprawność przeprowadzonej przez nas klasyfikacji opisanej w twierdzeniu 6.4. Ponadto, analizowany zbiór wszystkich spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli o co najwyżej 6 wierzchołkach obliczyliśmy na trzy różne i niezależne sposoby, stosując:

- (i) algorytm 5.22 używający konstrukcji 5.5 ze spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta'$  bez pętli oraz pary jego pierwiastków  $u, w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ ,
- (ii) algorytm opisany w dowodzie [98, Theorem 3.9], korzystający z wyczerpującego przeszukiwania wszystkich możliwych niesymetrycznych macierzy Grama spójnych nieujemnych bigrafów korangi dwa bez pętli,
- (iii) algorytm [37, Algorithm 5.2], korzystający z jednowierzchołkowego rozszerzania nieujemnych bigrafów korangi  $r \in \{0, 1, 2\}$  bez pętli,

i za każdym razem otrzymując ten sam zbiór wynikowy. Stąd wynika, że dane użyte przez nas w klasyfikacji są poprawne.

## Dodatek A

# Wybrane algorytmy kombinatoryczne i ich złożoność obliczeniowa

W klasyfikacji Grama spójnych nieujemnych bigrafów bez pętli korzystamy z opracowanych przez nas algorytmów kombinatorycznych i graficznych wykonujących obliczenia symboliczne i numeryczne. Są to algorytmy [A.3](#), [A.7](#), [A.21](#), [A.30](#), [A.39](#), [A.55](#), [A.59](#), [A.66](#) przedstawione w tym dodatku oraz algorytmy [4.14](#), [5.22](#), [5.48](#), [6.52](#), [6.68](#).

Implementacja wszystkich omówionych w niniejszej dysertacji algorytmów wraz z ich dokumentacją zawierającą przykłady użycia, została przygotowana w postaci autorskiego pakietu algorytmów do kombinatoryczno-obliczeniowej analizy bigrafów przy użyciu narzędzi komputerowych. Pakiet ten umieszczamy na płycie dołączonej do rozprawy, oraz na stronie internetowej [99].

W konsekwencji poszerzamy dostępne narzędzia obliczeniowe do spektralnej analizy bigrafów o kolejne algorytmy gotowe do przeprowadzania takiej analizy. Ponadto przygotowane implementacje mogą zostać zastosowane do dalszych eksperymentalnych badań, weryfikowania trudnych hipotez, dla których nie są znane dowody teoretyczne, oraz przeprowadzania dowodów wspomaganym komputerowo.

Wszystkie algorytmy prezentowane w rozprawie zostały zaimplementowane w języku Python 2.7 ([www.python.org](http://www.python.org)) z wykorzystaniem biblioteki SymPy ([www.sympy.org](http://www.sympy.org)) do obliczeń symbolicznych. Wybrane przez nas środowisko obliczeniowe umożliwia korzystanie z elementów systemu algebry komputerowej (w tym: dostęp do operacji macierzowych, obliczeń algebraicznych i symbolicznych) z poziomu języka programowania wysokiego poziomu. Otrzymane wyniki obliczeniowe nie zawierają błędów numerycznych, gdyż obliczenia wykonywane są w arytmetyce liczb całkowitych dowolnej precyzji.

Ponieważ rozważane przez nas algorytmy przetwarzają duże zbiory danych (zobacz tabela [A.63](#) oraz [6.6](#)), więc jako środowisko uruchomieniowe stosujemy interpreter PyPy ([www.pypy.org](http://www.pypy.org)), który wykorzystuje technikę JIT (ang. *just-in-time compilation*): często powtarzane fragmenty kodu są kompilowane do wydajnego kodu maszynowego. Pozwala to na przyspieszenie obliczeń. Przykładowo, w tabeli [A.1](#) przedstawiamy czasy obliczeń algorytmu [A.59](#) zaimplementowanego w Pythonie i uruchomionego przy pomocy interpreterów PyPy oraz CPython. Obliczenia zostały wykonane na komputerze z procesorem AMD taktowany zegarem 3,6 GHz z 32 GB pamięci RAM.

TABELA A.1. CZASY WYKONYWANIA ALGORYTMU [A.59](#)

|         | $n = 1$               | $n = 2$               | $n = 3$               | $n = 4$ | $n = 5$ | $n = 6$ |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|---------|---------|
| PyPy    | $3,2 \cdot 10^{-4}s$  | $3,71 \cdot 10^{-4}s$ | $2,18 \cdot 10^{-3}s$ | 0,08s   | 0,37s   | 12,77s  |
| CPython | $7,31 \cdot 10^{-4}s$ | $8,03 \cdot 10^{-4}s$ | $1,02 \cdot 10^{-3}s$ | 0,02s   | 1,1s    | 89,13s  |

## A.1. Spójność i nieujemność bigrafów

W niniejszej dysertacji analizujemy wyłącznie bigrafy nieujemne (definicja 3.12(b)) oraz spójne w sensie następującej definicji pochodzącej z [81, Definition 2.1(c)].

**Definicja A.2.** Bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  nazywamy spójnym, jeśli graf  $\bar{\Delta}$  powstały z  $\Delta$  po zamianie wszystkich krawędzi przerywanych na ciągłe, jest spójny.

Do sprawdzenia spójności bigrafu używamy następującego algorytmu, który korzysta ze standardowego algorytmu przeszukiwania grafu w głąb (ang. *Depth First Search*) zaimplementowanego zgodnie z opisem przedstawionym w [62, str. 24].

**Algorytm A.3.** **DANE** Liczba całkowita  $m \geq 1$  oraz niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ .

**WYNIK** Wartość logiczna: *True*, jeśli bigraf  $\Delta$  jest spójny; w przeciwnym wypadku *False*.

**KROK 1.** Obliczamy listę sąsiedztwa  $ls$  grafu  $\bar{\Delta}$  (zakodowaną w postaci tablicy asocjacyjnej) następująco:

**KROK 1.1.** inicjalizujemy tablicę  $ls$  indeksowaną wartościami  $1, \dots, m$  i przechowującą dla każdego wierzchołka  $v \in \{1, \dots, m\}$  listę jego sąsiadów obliczaną w kroku 1.2,

**KROK 1.2.** dla  $i = 1, \dots, m$ :

**KROK 1.2.1.** dla  $k = 1, \dots, i - 1$ :

**KROK 1.2.1.1.** jeśli  $\check{G}_\Delta[k][i] \neq 0$ , to do listy  $ls[i]$  dodajemy element  $k$ ,

**KROK 1.2.1.** dla  $k = i + 1, \dots, m$ :

**KROK 1.2.1.1.** jeśli  $\check{G}_\Delta[i][k] \neq 0$ , to do listy  $ls[i]$  dodajemy element  $k$ .

**KROK 2.** Dla wierzchołka  $v = 1$ :

### Algorytm DFS

**KROK 2.1.** Inicjalizujemy pusty stos  $S = \emptyset$  oraz  $m$ -elementową tablicę *visited* z wartościami *False*.

**KROK 2.2.** Do stosu  $S$  dodajemy wierzchołek  $v$  oraz przyjmujemy  $visited[v] = True$ .

**KROK 2.3.** Dopóki  $S \neq \emptyset$ :

**KROK 2.3.1.** przyjmujemy  $u = top(S)$ , tj. element ze szczytu stosu  $S$ ,

**KROK 2.3.2.** przyjmujemy  $odwiedzony = True$ ,

**KROK 2.3.3.** dla wszystkich  $w \in ls[u]$ , tj. sąsiadów  $w$  wierzchołka  $u$ :

**KROK 2.3.3.1.** jeśli  $visited[w] = False$ , to:

**KROK 2.3.3.1.1.** dodajemy do stosu  $S$  wierzchołek  $w$ ,

**KROK 2.3.3.1.2.** przyjmujemy  $visited[w] = True$ ,

**KROK 2.3.3.1.3.** przyjmujemy  $odwiedzony = False$ ,

**KROK 2.3.4.** jeśli  $odwiedzony = True$ , to usuwamy element ze szczytu stosu  $S$ .

**KROK 3.** Jeśli dla któregoś wierzchołka  $w$  wartość  $visited[w]$  jest równa *False*, to jako wynik zwracamy wartość *False*; w przeciwnym wypadku zwracamy *True*.

**Fakt A.4.** Niech  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1) \in \mathcal{UBigr}_m$ ,  $m \geq 1$ , będzie grafem krawędziowo-dwudzielnym. Pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.3



## A.1. Spójność i nieujemność bigrafów

- jest rzędu  $O(m + |\Delta_1|)$  względem liczby wykonywanych operacji na stosie,
- jest rzędu  $O(m^2)$  względem liczby wykonywanych operacji porównań liczb,
- jest stała, tj. rzędu  $O(1)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Aby uzasadnić złożoność obliczeniową algorytmu A.3 zauważmy, że

- krok 1 wymaga wykonania  $m \cdot (m - 1)$  porównań liczb oraz dodawań liczb do listy,
- w kroku 2 wykonujemy co najwyżej  $O(|\Delta_0| + |\Delta_1|) = O(m + |\Delta_1|)$  przeszukiwań listy (porównań liczb) oraz operacji na stosie, zobacz [62, str. 25],
- krok 3 wymaga wykonania co najwyżej  $m$  porównań liczb.

W konsekwencji otrzymujemy tezę. □

Użycie algorytmu A.3 ilustrujemy w następującym przykładzie.

**Przykład A.5.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie następującym spójnym bigrafem bez pętli

$$\Delta : \begin{array}{c} 2 \quad 3 \text{ --- } 4 \\ | \quad \diagdown \\ 1 \text{ --- } 5 \end{array}, \text{ oraz } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

**KROK 1.** Obliczamy listę sąsiedztwa  $ls$  grafu  $\bar{\Delta}$  (zakodowaną w postaci tablicy asocjacyjnej):

$$ls = [1 : [2, 5], 2 : [1, 5], 3 : [4], 4 : [3], 5 : [1, 2]].$$

**KROK 2.** Dla wierzchołka  $v = 1$  wykonujemy algorytm DFS w następujący sposób.

**KROK 2.1.** Inicjalizujemy pusty stos  $S = \emptyset$  oraz tablicę  $visited = [False, False, False, False, False]$ .

**KROK 2.2.** Do stosu  $S$  dodajemy wierzchołek  $v$  oraz przyjmujemy  $visited[v] = True$ , tj.  $S = [1]$  oraz  $visited = [True, False, False, False, False]$ .

**KROK 2.3.** Dopóki  $S \neq \emptyset$ :

**KROK 2.3.1.** przyjmujemy  $u = top(S)$ , tj.  $u = 1$ ,

**KROK 2.3.2.** przyjmujemy  $odwiedzony = True$ ,

**KROK 2.3.3.** dla wszystkich  $w \in ls[1] = [2, 5]$ :

**KROK 2.3.3.1.** ponieważ  $visited[2] = False$ , więc:

**KROK 2.3.3.1.1.** przyjmujemy  $S = [1, 2]$ ,

**KROK 2.3.3.1.2.** przyjmujemy  $visited[2] = True$ ,

**KROK 2.3.3.1.3.** przyjmujemy  $odwiedzony = False$ ,

**KROK 2.3.3.1.** ponieważ  $visited[5] = False$ , więc:

**KROK 2.3.3.1.1.** przyjmujemy  $S = [1, 2, 5]$ ,

**KROK 2.3.3.1.2.** przyjmujemy  $visited[5] = True$ ,

**KROK 2.3.3.1.3.** przyjmujemy  $odwiedzony = False$ .

Otrzymujemy  $visited = [True, True, False, False, True]$ .

**KROK 2.3.4.** Sprawdzamy, że  $odwiedzony \neq True$ .

**KROK 2.3.1.** Przyjmujemy  $u = top(S)$ , tj.  $u = 5$ ,

**KROK 2.3.2.** przyjmujemy  $odwiedzony = True$ ,

**KROK 2.3.3.** dla wszystkich  $w \in ls[5] = [1, 2]$ :

**KROK 2.3.3.1.** sprawdzamy, że  $visited[1] = True$ ,

**KROK 2.3.3.1.** sprawdzamy, że  $visited[2] = True$ ,

**KROK 2.3.4.** Ponieważ  $odwiedzony = True$ , więc usuwamy element ze szczytu stosu  $S$ . Otrzymujemy:  $S = [1, 2]$ .

**KROK 2.3.1.** Przyjmujemy  $u = \text{top}(S)$ , tj.  $u = 2$ ,

**KROK 2.3.2.** przyjmujemy  $\text{odwiedzony} = \text{True}$ ,

**KROK 2.3.3.** dla wszystkich  $w \in \text{ls}[2] = [1, 5]$ :

**KROK 2.3.3.1.** sprawdzamy, że  $\text{visited}[1] = \text{True}$ ,

**KROK 2.3.3.1.** sprawdzamy, że  $\text{visited}[5] = \text{True}$ ,

**KROK 2.3.4.** Ponieważ  $\text{odwiedzony} = \text{True}$ , więc usuwamy element ze szczytu stosu  $S$ . Otrzymujemy:  $S = [1]$ .

**KROK 2.3.1.** Przyjmujemy  $u = \text{top}(S)$ , tj.  $u = 1$ ,

**KROK 2.3.2.** przyjmujemy  $\text{odwiedzony} = \text{True}$ ,

**KROK 2.3.3.** dla wszystkich  $w \in \text{ls}[1] = [2, 5]$ :

**KROK 2.3.3.1.** sprawdzamy, że  $\text{visited}[2] = \text{True}$ ,

**KROK 2.3.3.1.** sprawdzamy, że  $\text{visited}[5] = \text{True}$ ,

**KROK 2.3.4.** Ponieważ  $\text{odwiedzony} = \text{True}$ , więc usuwamy element ze szczytu stosu  $S$ . Otrzymujemy:  $S = \emptyset$  i kończymy działanie algorytmu DFS.

**KROK 3.** Ponieważ  $\text{visited} = [\text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{False}, \text{True}]$ , więc dla wierzchołka  $w = 3$  wartość  $\text{visited}[w]$  jest równa  $\text{False}$ . Stąd jako wynik zwracamy wartość  $\text{False}$ .

Sprawdziliśmy algorytmicznie, że bigraf  $\Delta$  nie jest spójny.

Do sprawdzenia nieujemności bigrafu (definicja 3.12) korzystamy z następującego twierdzenia, które wynika z reguły znaków Kartezjusza [66, Twierdzenie VII.2.3.6].

**Twierdzenie A.6.** Bigraf  $\Delta \in \mathcal{Bigr}_m$ ,  $m \geq 1$ , jest nieujemny korangi  $1 \leq r \leq m - 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$F_{\widehat{G}_\Delta}(t) := \det(t \cdot E - \widehat{G}_\Delta) = f_m t^m + f_{m-1} t^{m-1} + \dots + f_2 t^2 + f_1 t + f_0 \in \mathbb{Z}[t]$$

podwojonej symetrycznej macierzy Grama  $\widehat{G}_\Delta := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta$  spełniają warunki:

- $f_i \cdot f_{i+1} < 0$  dla  $r \leq i \leq m - 1$ , oraz
- $f_i = 0$  dla  $i < r \leq m - 1$ .

*Dowód.* Ponieważ spektrum  $\text{spec}_{\widehat{G}_\Delta} := \{\lambda \in \mathbb{R}; F_{\widehat{G}_\Delta}(\lambda) = 0\} \subset \mathbb{R}$  podwojonej symetrycznej macierzy Grama  $\widehat{G}_\Delta := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta$  jest rzeczywiste, więc na podstawie [66, Twierdzenie VII.2.3.6] liczba pierwiastków dodatnich wielomianu  $F_{\widehat{G}_\Delta}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  jest równa liczbie zmian znaków w ciągu współczynników  $(f_m, \dots, f_0)$  oraz na podstawie [66, Twierdzenie XI.4.3.10] liczba różnych od 0 pierwiastków wielomianu  $F_{\widehat{G}_\Delta}(t) \in \mathbb{Z}[t]$  jest równa rzędowi macierzy  $\widehat{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ .

Na podstawie faktu 3.17 bigraf  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest nieujemny korangi  $r \leq m - 1$ , wtedy i tylko wtedy, gdy symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subset \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - r$  nad  $\mathbb{R}$ . Na podstawie [49, Theorem 7.2.1] macierz  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subset \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wartości własne (równoważnie: pierwiastki wielomianu  $\det(t \cdot E - G_\Delta) \in \mathbb{Z}[t]$ ) są nieujemne. Do zakończenia dowodu zauważmy, że macierz  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - r$  nad  $\mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $\widehat{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest dodatnio półokreślona rzędu  $m - r$  nad  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Następujący algorytm, będący realizacją kryterium przedstawionego w twierdzeniu A.6, weryfikuje nieujemność danego bigrafu oraz oblicza jego korangę (definicja 3.12).

**Algorytm A.7.** **DANE** Liczba całkowita  $m \geq 1$  oraz podwojona symetryczna macierz Grama  $\widehat{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$ .

**WYNIK** Wartość logiczna *True* oraz liczba  $0 \leq r \leq m - 1$ , jeśli bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi  $r$ ; w przeciwnym wypadku wartość logiczna *False* oraz liczba  $-1$ .

**KROK 1.** Przyjmujemy  $zmiany\_znakow := 0$ .

**KROK 2.** Obliczamy wielomian

$$F_{\widehat{G}_\Delta}(t) := \det(t \cdot E - \widehat{G}_\Delta) = f_m t^m + f_{m-1} t^{m-1} + \dots + f_2 t^2 + f_1 t + f_0 \in \mathbb{Z}[t].$$

**KROK 3.** Dla  $0 \leq i \leq m - 1$ :

**KROK 3.1.** jeśli  $f_i \cdot f_{i+1} < 0$ , to przyjmujemy  $zmiany\_znakow = zmiany\_znakow + 1$ .

**KROK 4.** Dla  $0 \leq j \leq m$ :

**KROK 4.1.** jeśli  $f_j \neq 0$ , to przechodzimy do kroku 5.

**KROK 5.** Jeśli  $zmiany\_znakow + j = m$ , to jako wynik zwracamy parę:  $(True, j)$ ; w przeciwnym wypadku zwracamy parę:  $(False, -1)$ .

**Fakt A.8.** Pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.7 jest wielomianowa względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Aby uzasadnić złożoność obliczeniową algorytmu A.7 zauważmy, że

- krok 3 wymaga wykonania  $m$  mnożeń oraz porównań liczb,
- krok 4 wymaga użycia co najwyżej  $m + 1$  operacji porównania liczb.

Złożoność obliczeniowa kroku 2 zależy od użytego algorytmu obliczania wielomianu charakterystycznego. W naszej implementacji do obliczenia wielomianu charakterystycznego korzystamy z metody charpoly z biblioteki SymPy (dostępnej na stronie: [sympy.org](http://sympy.org)), implementującej algorytm Berkowitza [4] o złożoności obliczeniowej rzędu  $O(m^4)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych (zobacz [4]).  $\square$

Algorytm A.7 ilustrujemy w następującym przykładzie.

**Przykład A.9.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$  będzie następującym spójnym bigrafem bez pętli

$$\Delta : \begin{array}{ccc} & 3 & \\ & / \quad \backslash & \\ 1 & \text{---} & 2 \end{array}, \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}), \text{ oraz } \widehat{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}).$$

**KROK 1.** Przyjmujemy  $zmiany\_znakow := 0$ .

**KROK 2.** Obliczamy wielomian  $F_{\widehat{G}_\Delta}(t) := \det(t \cdot E - \widehat{G}_\Delta) = t^3 - 6t^2 + 9t \in \mathbb{Z}[t]$ .

**KROK 3.** Dla  $i = 0$  sprawdzamy, że wartość  $f_0 \cdot f_1 = 0 \cdot 9 = 0$  nie jest ujemna.

**KROK 3.** Dla  $i = 1$  sprawdzamy, że wartość  $f_1 \cdot f_2 = 9 \cdot (-6) = -54$  jest ujemna, więc przyjmujemy:  $zmiany\_znakow = 1$ .

**KROK 3.** Dla  $i = 2$  sprawdzamy, że wartość  $f_2 \cdot f_3 = (-6) \cdot 1 = -6$  jest ujemna, więc przyjmujemy:  $zmiany\_znakow = 2$ .

**KROK 4.** Dla  $j = 0$  sprawdzamy, że  $f_0 = 0$ .

**KROK 4.** Dla  $j = 1$  sprawdzamy, że  $f_1 = 9 \neq 0$ , więc przechodzimy do kroku 5.

**KROK 5.** Sprawdzamy, że prawdziwa jest równość  $zmiany\_znakow + j = 2 + 1 = 3 = m$ , więc jako wynik zwracamy parę:  $(True, 1)$ .

Obliczyliśmy, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi jeden (tj. główny).

**Uwaga A.10.** Przypominamy, że w niniejszej dysertacji analizujemy wyłącznie bigrafy spójne i nieujemne. Ponieważ pesymistyczna złożoność obliczeniowa omawianych w dysertacji algorytmów (za wyjątkiem algorytmu A.3 oraz A.7) jest co najmniej rzędu  $O(m^4)$  względem wykonywanych operacji arytmetycznych, to dodanie do każdego z tych algorytmów kroku zerowego, w którym

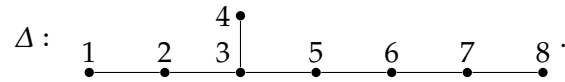
- sprawdzamy spójność bigrafu (algorytm A.3), oraz
- sprawdzamy nieujemność bigrafu (algorytm A.7),

nie zmieni pesymistycznej złożoności obliczeniowej względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych żadnego z nich.

## A.2. Obliczanie pierwiastków bigrafów dodatnich

Na podstawie uwagi 3.30, do konstrukcji algorytmu wyczerpującego przeszukiwania umożliwiającego wyznaczenie zbioru pierwiastków spójnych dodatnich bigrafów bez pętli, można wykorzystać ograniczenia (3.24) przedstawione w dowodzie lematu 3.21(a). Na tej podstawie zbudowano tzw. algorytm ograniczonego zliczania (ang. *restrictively counting algorithm*) przedstawiony w [80, Algorithm 4.2]. Metodę tę przybliżamy w następującym przykładzie.

**Przykład A.11.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_8$  będzie jednorodnym diagramem Dynkina  $\mathbb{E}_8$ , którego wierzchołki ponumerowane są następująco



Funkcjonał Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  (3.10) jest równy

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_5x_6 - x_6x_7 - x_7x_8.$$

Na podstawie twierdzenia 3.35, bigraf  $\Delta = \mathbb{E}_8$  jest dodatni. Z lematu 3.21 wynika, że zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^8; q_\Delta(v) = 1\}$  bigrafu  $\Delta$  jest skończony oraz ograniczenia na poszczególne współrzędne  $v_i$  pierwiastków  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  mają postać

$$-\left\lceil \sqrt{\frac{1}{q_\Delta(v_0)}} \right\rceil \leq v_i \leq \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{q_\Delta(v_0)}} \right\rfloor,$$

gdzie wartość

$$q_\Delta(v_0) := \inf q_\Delta(S^7) = 0.005478$$

dla  $S^7 := \{u \in \mathbb{R}^8; \|u\| = 1\}$  obliczamy korzystając z funkcji `scipy.optimize.minimize` z biblioteki SciPy (dostępnej na stronie: [scipy.org](http://scipy.org)). Stąd otrzymujemy wartości

$$\left\lfloor \sqrt{\frac{1}{q_\Delta(v_0)}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{0.005478}} \right\rfloor = \lfloor 13,5110464 \rfloor = 13,$$

więc ograniczenie na wartości współrzędnych pierwiastków  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  ma postać:

$$-13 \leq v_i \leq 13. \tag{A.12}$$

W konsekwencji, aby wyznaczyć zbiór  $\mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^8$ , wystarczy sprawdzić, które z  $27^8 = 282\,429\,536\,481$  wektorów ze zbioru  $\{-13, \dots, 13\}^8$  spełniają równość  $q_\Delta(v) = 1$ .

**Uwaga A.13.** Zauważmy, że globalne ograniczenie na wartości wszystkich współrzędnych pierwiastków  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  (A.12) bigrafu  $\Delta = \mathbb{E}_8$  podane w przykładzie jest gorsze od ograniczenia globalnego równego 6 uzyskanego w twierdzeniu 3.28 (przy tym ograniczeniu wystarczy sprawdzić, które z  $13^8 = 815\,730\,721$  wektorów ze zbioru  $\{-6, \dots, 6\}^8$  spełniają równość  $q_\Delta(v) = 1$ ). W używanym przez nas algorytmie A.21 obliczania pierwiastków, wyznaczamy oddzielnie ograniczenia na poszczególne współrzędne.

## A.2. Obliczanie pierwiastków bigrafów dodatnich

Istotną rolę w używanym przez nas algorytmie wyznaczania zbioru pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta = \{v \in \mathbb{Z}^m; q_\Delta(v) = 1\} \subset \mathbb{Z}^m$  dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli pełni przedstawienie funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  (3.10) w postaci kanonicznej (A.16).

Przedstawimy teraz metodę sprowadzania dodatniej formy kwadratowej do postaci kanonicznej, tzw. algorytm Lagrange'a (wersja twierdzenia Lagrange'a o uzupełnieniu do pełnych kwadratów, zobacz [66, XI, str. 341-344]) pochodzącą z [33, Theorem 5.3].

**Twierdzenie A.14.** Niech  $m \geq 1$  oraz  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie dodatnim funkcjonałem kwadratowym zdefiniowanym formą kwadratową  $q(x) = q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  postaci

$$q(x) = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{mm}x_m^2 + \sum_{i < j} q_{ij}x_i x_j, \quad \text{gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.15})$$

Dla dowolnej permutacji  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$  zbioru  $\{1, \dots, m\}$ , formę kwadratową  $q(x) = q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  można przedstawić w następującej postaci kanonicznej

$$q(x) = \lambda_1 y_{j_1}^2 + \dots + \lambda_{m-1} y_{j_{m-1}}^2 + \lambda_m x_{j_m}^2, \quad \text{gdzie } y_{j_i} = c_{j_i i} x_{j_i} + \dots + c_{j_i m} x_{j_m}, \quad (\text{A.16})$$

oraz  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Q}$  są dodatnie i  $c_{ji} \in \mathbb{Q}$ .

*Dowód.* Przytoczony dowód pochodzi z [33, Theorem 5.3]. Zauważmy, że współczynniki  $q_{11}, \dots, q_{mm}$  są dodatnie, ponieważ funkcjonał kwadratowy  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  jest dodatni określony. Dowód przeprowadzamy metodą indukcji względem  $m \geq 1$ . Dla  $m = 1$  forma  $q(x) \in \mathbb{Z}[x_1]$  ma z definicji (A.15) postać kanoniczną:  $q(x) = q_{11}x_1^2$ .

Niech  $m \geq 2$ . Zauważmy, że formę kwadratową  $q(x) = q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  (A.15) można przedstawić następująco

$$q(x_1, \dots, x_m) = q_{j_1 j_1} y_{j_1}^2 + \check{q}(x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad \text{dla } y_{j_1} := x_{j_1} + \frac{1}{2q_{j_1 j_1}} (q_{j_1 j_2} x_{j_2} + \dots + q_{j_1 j_m} x_{j_m}),$$

gdzie forma kwadratowa

$$\check{q}(x_{j_2}, \dots, x_{j_m}) := q(x_1, \dots, x_m) - q_{j_1 j_1} y_{j_1}^2 \quad (\text{A.17})$$

zależy wyłącznie od zmiennych  $x_{j_2, \dots, j_m}$  oraz przyjmujemy  $q_{ij} = q_{ji}$  dla  $j < i$ . Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że funkcjonał kwadratowy  $\check{q}: \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany formą kwadratową (A.17) jest dodatnio określony.

Założmy przez sprzeczność, że istnieje taki wektor  $0 \neq u = [u_{j_2}, \dots, u_{j_m}] \in \mathbb{Z}^{m-1}$ , że  $\check{q}(u) \leq 0$ . Dla wektora

$$\hat{u} = [\hat{u}_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_m}] \in \mathbb{Z}^m, \quad \text{gdzie } \hat{u}_{j_1} := -\frac{1}{2q_{j_1 j_1}} (q_{j_1 j_2} u_{j_2} + \dots + q_{j_1 j_m} u_{j_m}),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 < q(\hat{u}_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_m}) &= q_{j_1 j_1} \left( \hat{u}_{j_1} + \frac{1}{2q_{j_1 j_1}} (q_{j_1 j_2} u_{j_2} + \dots + q_{j_1 j_m} u_{j_m}) \right)^2 + \check{q}(u_{j_2}, \dots, u_{j_m}) = \\ &= \check{q}(u_{j_2}, \dots, u_{j_m}) \leq 0. \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że funkcjonał kwadratowy  $\check{q}: \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany formą kwadratową (A.17) jest dodatnio określony i można do niego zastosować założenie indukcyjne, co kończy dowód.  $\square$

**Przykład A.18.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_8$  będzie jednorodnym diagramem Dynkina  $\mathbb{E}_8$ , którego wierzchołki ponumerowane są następująco

$$\Delta: \begin{array}{cccccccc} & & & 4 \bullet & & & & \\ & & & | & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Funkcjonał Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  (3.10) jest równy

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_4 - x_3 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_7 - x_7 x_8.$$

Na podstawie twierdzenia 3.35, bigraf  $\Delta = \mathbb{E}_8$  jest dodatni. Stąd, korzystając z metody



przedstawionej w dowodzie twierdzenia A.14, funkcjonal  $q_\Delta: \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$  można przedstawić w następującej postaci kanonicznej

$$q_\Delta(x) = \frac{1}{4} (2x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{12} (3x_2 - 2x_3)^2 + \frac{1}{24} (4x_3 - 3x_4 - 3x_5)^2 + \frac{1}{40} (5x_4 - 3x_5)^2 + \frac{1}{40} (4x_5 - 5x_6)^2 + \frac{1}{24} (3x_6 - 4x_7)^2 + \frac{1}{12} (2x_7 - 3x_8)^2 + \frac{1}{4} x_8^2.$$

**Uwaga A.19.** Ograniczenia na poszczególne współrzędne pierwiastków dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli (dodatnio określonego funkcjonau  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ) możemy otrzymać jako wniosek z twierdzenia A.14, zobacz [33, Theorem 5.3] oraz [79, Remark 3.8] następująco.

Stosując metodę przedstawioną w dowodzie twierdzenia A.14, dodatnią formę kwadratową  $q(x) = q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  (A.15) można przedstawić w następującej postaci kanonicznej

$$q(x) = \lambda_1 (c_{j_1 i} x_{j_1} + \dots + c_{j_1 m} x_{j_m})^2 + \dots + \lambda_{m-1} (c_{j_{m-1} m-1} x_{j_{m-1}} + \dots + c_{j_{m-1} m} x_{j_m})^2 + \lambda_m x_{j_m}^2,$$

gdzie  $\lambda_i \in \mathbb{Q}^+$ ,  $c_{ji} \in \mathbb{Q}$  oraz  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$  jest permutacją zbioru  $\{1, \dots, m\}$ . Stąd, jeśli  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  jest pierwiastkiem  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ , tj.  $q(v) = 1$ , to

$$\lambda_m v_{j_m}^2 \leq 1 \text{ i w konsekwencji: } |v_{j_m}| \leq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \right\rfloor,$$

gdzie  $[a] \in \mathbb{Z}$  jest częścią całkowitą liczby  $a \in \mathbb{R}$ . Powtarzając tę procedurę dla wszystkich  $1 \leq j_m \leq m$ , otrzymujemy ograniczenia na wartość każdej współrzędnej  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , pierwiastka  $v = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  funkcjonau  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Ponadto na podstawie twierdzenia 3.28 otrzymujemy nierówności  $-6 \leq v_i \leq 6$  dla  $1 \leq i \leq m$ . Stąd wartość każdej współrzędnej pierwiastka można ograniczyć następująco

$$|v_{j_m}| \leq \min \left\{ 6, \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \right\rfloor \right\}, \text{ dla } 1 \leq j_m \leq m. \quad (\text{A.20})$$

Następujący algorytm wyznacza zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  (dodatniego funkcjonau  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ) dla  $m \geq 1$ . Stosujemy w nim metodę wyczerpującego przeszukiwania, gdzie ograniczenia na poszczególne współrzędne pierwiastków otrzymujemy zgodnie z metodą opisaną w uwadze A.19, por. [33, Algorithm 5.5] oraz [79, Algorithm 3.7], [80, Algorithm 4.2]. Dlatego algorytm ten nazywany jest w literaturze algorytmem ograniczonego zliczania (ang. *restrictively counting algorithm*, zobacz [79, 80]).

**Algorytm A.21.** **DANE** Liczba całkowita  $m \geq 1$  oraz dodatni funkcjonal kwadratowy  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowany formą kwadratową  $q(x) = q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$  postaci

$$q(x) = q_{11} x_1^2 + \dots + q_{mm} x_m^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j, \text{ gdzie } q_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q_{ii} \neq 0.$$

**WYNIK** Skończony zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_q := \{v \in \mathbb{Z}^m; q(v) = 1\}$  funkcjonau  $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**KROK 1.** Inicjalizujemy pusty zbiór  $\mathcal{R}_q = \{\}$  oraz  $m$ -elementową tablicę **ograniczenia**.

**KROK 2.** Dla liczb  $i = 1, \dots, m$ :

### Algorytm Lagrange'a

**KROK 2.1.** przyjmujemy  $\tilde{q}(x) := q(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ ,

**KROK 2.2.** dla takich liczb  $k = 1, \dots, m$ , że  $k \neq i$ :

**KROK 2.2.1.** obliczamy  $\tilde{q}(x) = \tilde{q}(x) - \tilde{q}_{kk} \left( x_k + \frac{1}{2\tilde{q}_{kk}} \sum_{\substack{j=1, \dots, m \\ j \neq k}} \tilde{q}_{kj} x_j \right)^2$ ,

**KROK 2.3.** przyjmujemy **ograniczenia** $[i] := \min \left\{ 6, \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right\rfloor \right\} \in \mathbb{Z}$ , gdzie  $\lambda_i := \frac{\tilde{q}(x)}{x_i^2} \in \mathbb{Q}$ , zobacz (A.20).

Krok 2 jest realizacją metody opisaną w twierdzeniu A.14, zobacz uwaga A.19.



## A.2. Obliczanie pierwiastków bigrafów dodatnich

**KROK 3.** Dla każdego wektora  $v = [v_1, \dots, v_m]$  spełniającego **ograniczenia** $[i] \leq v_i \leq$  **ograniczenia** $[i]$ , gdzie  $1 \leq i \leq m$ :

**KROK 3.1.** jeśli zachodzi równość  $q(v) = 1$ , to dodajemy wektor  $v$  do zbioru  $\mathcal{R}_q$ .

**KROK 4.** Zwracamy zbiór  $\mathcal{R}_q$  jako wynik.

Przeprowadzimy teraz analizę złożoności obliczeniowej algorytmu A.21.

**Fakt A.22.** Algorytm A.21 ma pesymistyczną wykładniczą złożoność obliczeniową rzędu  $O(13^m \cdot m^2)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Zauważmy, że w algorytmie A.21

- w kroku 2.2.1 wartość  $\tilde{q}(x)$  obliczamy  $m \cdot (m - 1)$  razy,
- w kroku 3 wartość  $q(v)$  obliczamy co najmniej  $3^m$  razy (w przypadku następującego ograniczenia:  $v \in \{-1, 0, 1\}^m$ ) i co najwyżej  $13^m$  razy (w przypadku gdy  $v \in \{-6, \dots, 6\}^m$ ).

Formę kwadratową

$$\tilde{q}(x) = \tilde{q}(x) - \tilde{q}_{kk} \left( x_k + \frac{1}{2\tilde{q}_{kk}} \sum_{\substack{j=1, \dots, m \\ j \neq k}} \tilde{q}_{kj} x_j \right)^2$$

wyznaczamy przy użyciu  $O(m^2)$  operacji arytmetycznych, więc krok 2 ma złożoność obliczeniową rzędu co najwyżej  $O(m^4)$ .

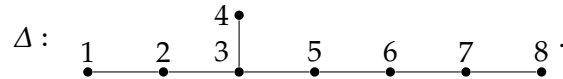
Ponieważ wartość funkcjonału na wektorze  $q(v)$  obliczamy przy użyciu  $O(m^2)$  operacji arytmetycznych, więc krok 3 ma złożoność obliczeniową rzędu co najwyżej  $O(13^m \cdot m^2)$ . W konsekwencji pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.21 jest rzędu

$$O(13^m \cdot m^2)$$

względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych. □

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu A.21.

**Przykład A.23.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_8$  będzie jednorodnym diagramem Dynkina  $\mathbb{E}_8$ , którego wierzchołki ponumerowane są następująco



Funkcjonał Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^8 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  (3.10) jest równy

$$q_\Delta(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_5x_6 - x_6x_7 - x_7x_8.$$

**KROK 1.** Inicjalizujemy pusty zbiór  $\mathcal{R}_{q_\Delta} = \{\}$  oraz 8-elementową tablicę **ograniczenia**.

**KROK 2.** Dla kolejnych liczb  $i = 1, \dots, 8$  wykonujemy krok 2 algorytmu A.21, tj. korzystając z algorytmu Lagrange'a obliczamy ograniczenia  $\min \left\{ 6, \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right\rceil \right\} \in \mathbb{Z}$  na wartości poszczególnych współrzędnych  $v_i$  wektora  $v \in \mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^8$ :

- dla  $i = 1$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{8}x_1^2$ , a stąd  $\lambda_1 = \frac{1}{8}$  oraz  $\min \left\{ 6, \left\lceil \sqrt{8} \right\rceil \right\} = 2$ ,
- dla  $i = 2$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{28}x_2^2$ , a stąd  $\lambda_2 = \frac{1}{28}$  oraz  $\min \left\{ 6, \left\lceil \sqrt{28} \right\rceil \right\} = 5$ ,
- dla  $i = 3$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{60}x_3^2$ , a stąd  $\lambda_3 = \frac{1}{60}$  oraz  $\min \left\{ 6, \left\lceil \sqrt{60} \right\rceil \right\} = 6$ ,
- dla  $i = 4$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{16}x_4^2$ , a stąd  $\lambda_4 = \frac{1}{16}$  oraz  $\min \left\{ 6, \left\lceil \sqrt{16} \right\rceil \right\} = 4$ ,
- dla  $i = 5$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{40}x_5^2$ , a stąd  $\lambda_5 = \frac{1}{40}$  oraz  $\min \left\{ 6, \left\lceil \sqrt{40} \right\rceil \right\} = 6$ ,
- dla  $i = 6$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{24}x_6^2$ , a stąd  $\lambda_6 = \frac{1}{24}$  oraz  $\min \left\{ 6, \left\lceil \sqrt{24} \right\rceil \right\} = 4$ ,

- dla  $i = 7$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{12}x_7^2$ , a stąd  $\lambda_7 = \frac{1}{12}$  oraz  $\min\left\{6, \left\lceil \sqrt{12} \right\rceil\right\} = 3$ ,
- dla  $i = 8$ , otrzymujemy  $\tilde{q}(x) = \frac{1}{4}x_8^2$ , a stąd  $\lambda_8 = \frac{1}{4}$  oraz  $\min\left\{6, \left\lceil \sqrt{4} \right\rceil\right\} = 2$ .

W konsekwencji otrzymujemy **ograniczenia** = [2, 5, 6, 4, 6, 4, 3, 2].

**KROK 3.** Dla każdego z  $5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 26\,351\,325$  wektorów całkowitych  $v = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8]$ , których ograniczenia na poszczególne współrzędne są następujące:

$$\begin{aligned} -2 \leq v_1 \leq 2, \quad -5 \leq v_2 \leq 5, \quad -6 \leq v_3 \leq 6, \quad -4 \leq v_4 \leq 4, \\ -6 \leq v_5 \leq 6, \quad -4 \leq v_6 \leq 4, \quad -3 \leq v_7 \leq 3, \quad -2 \leq v_8 \leq 2, \end{aligned}$$

**KROK 3.1.** jeśli zachodzi równość  $q_\Delta(v) = 1$ , to dodajemy wektor  $v$  do zbioru  $\mathcal{R}_{q_\Delta}$ .

**KROK 4.** Obliczony zbiór  $\mathcal{R}_{q_\Delta} = \mathcal{R}_{q_\Delta}^+ \cup \mathcal{R}_{q_\Delta}^-$  składa się z 240 wektorów, gdzie  $\mathcal{R}_{q_\Delta}^+$  składa się z następujących 120 wektorów

[0,0,0,0,0,0,0,1], [0,0,0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,0,1,1], [0,0,0,0,0,1,0,0], [0,0,0,0,0,1,1,0],  
 [0,0,0,0,0,1,1,1], [0,0,0,0,1,0,0,0], [0,0,0,0,1,1,0,0], [0,0,0,0,1,1,1,0], [0,0,0,0,1,1,1,1],  
 [0,0,0,1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0,0,0], [0,0,1,0,1,0,0,0], [0,0,1,0,1,1,0,0], [0,0,1,0,1,1,1,0],  
 [0,0,1,0,1,1,1,1], [0,0,1,1,0,0,0,0], [0,0,1,1,1,0,0,0], [0,0,1,1,1,1,0,0], [0,0,1,1,1,1,1,0],  
 [0,0,1,1,1,1,1,1], [0,1,0,0,0,0,0,0], [0,1,1,0,0,0,0,0], [0,1,1,0,1,0,0,0], [0,1,1,0,1,1,0,0],  
 [0,1,1,0,1,1,1,0], [0,1,1,0,1,1,1,1], [0,1,1,1,0,0,0,0], [0,1,1,1,1,0,0,0], [0,1,1,1,1,1,0,0],  
 [0,1,1,1,1,1,1,0], [0,1,1,1,1,1,1,1], [0,1,2,1,1,0,0,0], [0,1,2,1,1,1,0,0], [0,1,2,1,1,1,1,0],  
 [0,1,2,1,1,1,1,1], [0,1,2,1,2,1,0,0], [0,1,2,1,2,1,1,0], [0,1,2,1,2,1,1,1], [0,1,2,1,2,2,1,0],  
 [0,1,2,1,2,2,1,1], [0,1,2,1,2,2,2,1], [1,0,0,0,0,0,0,0], [1,1,0,0,0,0,0,0], [1,1,1,0,0,0,0,0],  
 [1,1,1,0,1,0,0,0], [1,1,1,0,1,1,0,0], [1,1,1,0,1,1,1,0], [1,1,1,0,1,1,1,1], [1,1,1,1,0,0,0,0],  
 [1,1,1,1,1,0,0,0], [1,1,1,1,1,1,0,0], [1,1,1,1,1,1,1,0], [1,1,1,1,1,1,1,1], [1,1,2,1,1,0,0,0],  
 [1,1,2,1,1,1,0,0], [1,1,2,1,1,1,1,0], [1,1,2,1,1,1,1,1], [1,1,2,1,2,1,0,0], [1,1,2,1,2,1,1,0],  
 [1,1,2,1,2,1,1,1], [1,1,2,1,2,2,1,0], [1,1,2,1,2,2,1,1], [1,1,2,1,2,2,2,1], [1,2,2,1,1,0,0,0],  
 [1,2,2,1,1,1,0,0], [1,2,2,1,1,1,1,0], [1,2,2,1,1,1,1,1], [1,2,2,1,2,1,0,0], [1,2,2,1,2,1,1,0],  
 [1,2,2,1,2,1,1,1], [1,2,2,1,2,2,1,0], [1,2,2,1,2,2,1,1], [1,2,2,1,2,2,2,1], [1,2,3,1,2,1,0,0],  
 [1,2,3,1,2,1,1,0], [1,2,3,1,2,1,1,1], [1,2,3,1,2,2,1,0], [1,2,3,1,2,2,1,1], [1,2,3,1,2,2,2,1],  
 [1,2,3,1,3,2,1,0], [1,2,3,1,3,2,1,1], [1,2,3,1,3,2,2,1], [1,2,3,1,3,3,2,1], [1,2,3,2,2,1,0,0],  
 [1,2,3,2,2,1,1,0], [1,2,3,2,2,1,1,1], [1,2,3,2,2,2,1,0], [1,2,3,2,2,2,1,1], [1,2,3,2,2,2,2,1],  
 [1,2,3,2,3,2,1,0], [1,2,3,2,3,2,1,1], [1,2,3,2,3,2,2,1], [1,2,3,2,3,3,2,1], [1,2,4,2,3,2,1,0],  
 [1,2,4,2,3,2,1,1], [1,2,4,2,3,2,2,1], [1,2,4,2,3,3,2,1], [1,2,4,2,4,3,2,1], [1,3,4,2,3,2,1,0],  
 [1,3,4,2,3,2,1,1], [1,3,4,2,3,2,2,1], [1,3,4,2,3,3,2,1], [1,3,4,2,4,3,2,1], [1,3,5,2,4,3,2,1],  
 [1,3,5,3,4,3,2,1], [2,3,4,2,3,2,1,0], [2,3,4,2,3,2,1,1], [2,3,4,2,3,2,2,1], [2,3,4,2,3,3,2,1],  
 [2,3,4,2,4,3,2,1], [2,3,5,2,4,3,2,1], [2,3,5,3,4,3,2,1], [2,4,5,2,4,3,2,1], [2,4,5,3,4,3,2,1],  
 [2,4,6,3,4,3,2,1], [2,4,6,3,5,3,2,1], [2,4,6,3,5,4,2,1], [2,4,6,3,5,4,3,1], [2,4,6,3,5,4,3,2],

a zbiór  $\mathcal{R}_{q_\Delta}^-$  jest równy  $\mathcal{R}_{q_\Delta}^- := -\mathcal{R}_{q_\Delta}^+$ , tj.  $\mathcal{R}_{q_\Delta}^- = \{-v; v \in \mathcal{R}_{q_\Delta}^+\}$ .

**Uwaga A.24.** Zauważmy, że w przykładzie A.23 ograniczenie na współrzędną o indeksie 3 obliczone na podstawie algorytmu Lagrange'a równe  $\left\lceil \sqrt{60} \right\rceil = 7$  jest gorsze od ograniczenia globalnego równego 6 uzyskanego z twierdzenia 3.28, co uzasadnia konieczność wyboru mniejszej z liczb  $6, \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right\rceil$  w kroku 2.3 algorytmu A.21.

### A.3. Obliczanie reduktu nieujemnego bigrafu korangi dwa

W niniejszym podrozdziale podajemy algorytm A.30 wyznaczający skończony podzbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  (A.26) nieskończonego zbioru pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  (zobacz lemat 3.21(b)) dla spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli.

Algorytm A.30 pełni istotną rolę w konstruowanych przez nas w rozdziale 6 algorytmów kombinatoryczno-graficznych wyznaczających macierz definiującą silną  $\mathbb{Z}$ -kongru-

encję Grama dla spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli o  $3 \leq n+2 \leq 6$  wierzchołkach.

Dla spójnych nieujemnych bigrafów  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  korangi dwa bez pętli redukt  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathcal{R}_\Delta$  definiujemy za [79, Definition 3.6, (3.10)].

**Definicja A.25.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli, oraz niech wektory  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \text{Ker } q_\Delta$  tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa. Skończony podzbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  zbioru  $\mathcal{R}_\Delta$  zdefiniowany wzorem

$$\mathcal{R}_\Delta^{red} := \{v \in \mathcal{R}_\Delta; v_{j_1} = v_{j_2} = 0\} \subset \mathbb{Z}^{n+2} \quad (\text{A.26})$$

nazywamy reduktem  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  bigrafu  $\Delta$ .

**Uwaga A.27.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi dwa bez pętli, oraz niech wektory  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \text{Ker } q_\Delta$  tworzą  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa.

- (a) Na podstawie twierdzenia 4.8, podgraf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta^{(j_1, j_2)} \in \mathcal{UBigr}_n$  bigrafu  $\Delta$  otrzymany z  $\Delta$  przez opuszczenie wierzchołków  $j_1$  oraz  $j_2$  jest spójny i dodatni. Stąd zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathcal{R}_\Delta$  jest skończony, gdyż funkcja

$$\mathcal{R}_\Delta^{red} \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}_{\Delta^{(j_1, j_2)}}, \quad v \mapsto v|_{v_{j_1}=v_{j_2}=0}$$

jest bijekcją, a zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta^{(j_1, j_2)}} \subset \mathbb{Z}^n$  dodatniego bigrafu  $\Delta^{(j_1, j_2)} \in \mathcal{UBigr}_n$  jest skończony (lemat 3.21(a)).

- (b) Na podstawie [79, (3.3)] istnieje rozkład

$$\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^{red} + \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2} \quad (\text{A.28})$$

i dowolny pierwiastek  $v \in \mathcal{R}_\Delta$  posiada jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$v = \check{v} + \bar{v}, \quad \text{gdzie } \check{v} \in \mathcal{R}_\Delta^{red} \text{ oraz } \bar{v} \in \text{Ker } q_\Delta. \quad (\text{A.29})$$

Następujący algorytm wyznacza zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  (6.28) dla spójnego nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  korangi dwa bez pętli.

**Algorytm A.30.** **DANE** Liczba całkowita  $n \geq 1$  oraz spójny nieujemny graf krawędziowo-dwudzielny  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$  bez pętli korangi dwa o  $n+2 \geq 3$  wierzchołkach.

**WYNIK** Skończony zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathcal{R}_\Delta \subseteq \mathbb{Z}^{n+2}$  (6.28) spełniający równość

$$\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^{red} + \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^{n+2}.$$

**KROK 1.** Korzystając z algorytmu 4.14 obliczamy  $(j_1, j_2)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę  $\mathbf{h}^{(j_1)}, \mathbf{h}^{(j_2)} \in \text{Ker } q_\Delta$  grupy wolnej  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa, gdzie  $1 \leq j_1 < j_2 \leq n+2$ .

**KROK 2.** Korzystając z algorytmu A.21 obliczamy skończony zbiór  $\mathcal{R}_{\check{\Delta}} \subset \mathbb{Z}^n$  pierwiastków funkcjonału Grama  $q_{\check{\Delta}}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  dodatniego bigrafu  $\check{\Delta} \in \mathcal{UBigr}_n$ , który powstaje z dodatniego bigrafu  $\Delta^{(j_1, j_2)}$  po naturalnym przenumerowaniu zbioru wierzchołków  $\Delta_0^{(j_1, j_2)} = \{1, \dots, n+2\} \setminus \{j_1, j_2\}$  na  $\check{\Delta}_0 = \{1, \dots, n\}$  (realizujemy je poprzez usunięcie wiersza i kolumny o indeksie  $j_2$  oraz usunięcie wiersza i kolumny o indeksie  $j_1$  z macierzy Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{n+2}$ ), tj. macierz Grama  $\check{G}_{\check{\Delta}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\check{\Delta}$  jest równa  $\check{G}_{\check{\Delta}} := \check{G}_\Delta^{(j_1, j_2)} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ .

**KROK 3.** Inicjalizujemy pusty zbiór  $\mathcal{R}_{\check{\Delta}}^{red} = \emptyset$ .

**KROK 4.** Dla każdego wektora  $v = [v_1, \dots, v_n]$  ze zbioru  $\mathcal{R}_{\check{\Delta}} \subset \mathbb{Z}^n$ :

**KROK 4.1.** dodajemy do zbioru  $\mathcal{R}_{\check{\Delta}}^{red}$  wektor

$$\check{v} := [v_1, \dots, v_{j_1-1}, 0, v_{j_1}, \dots, v_{j_2-2}, 0, v_{j_2-1}, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^{n+2}.$$

**KROK 5.** Zwracamy zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  jako wynik.

**Fakt A.31.** *Pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.30 jest rzędu  $O(13^n \cdot n^2)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.*

*Dowód.* Algorytm A.30 ma wykładniczą złożoność obliczeniową względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych, ponieważ

- algorytm A.21 zastosowany w kroku 1 jest rzędu  $O(m^4)$ , zobacz fakt 4.16,
- na podstawie faktu A.22, algorytm A.21 zastosowany w kroku 2 ma wykładniczą pesymistyczną złożoność obliczeniową rzędu  $O(13^n \cdot n^2)$ ,

co sumarycznie daje pesymistyczną złożoność obliczeniową rzędu  $O(13^n \cdot n^2)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.  $\square$

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu A.30.

**Przykład A.32.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_4$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwudzielnym

$$\Delta : \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \quad , \text{ oraz } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}), G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Ponieważ rząd macierzy  $G_\Delta$  jest równy  $\text{rz}_{\mathbb{Q}}(G_\Delta) = 2$ , oraz funkcjonal Grama  $q_\Delta : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  można przedstawić w następującej postaci

$$q_\Delta(x) = \frac{3}{4}(x_2 - x_3 + x_4)^2 + \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2,$$

więc łatwo sprawdzić, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny korangi dwa (zobacz fakt 3.17).

**KROK 1.** Korzystając z algorytmu 4.14 wyznaczamy specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy  $\text{Ker } q_\Delta$ . Obliczone wektory  $\mathbf{h}^{(2)} = [0, 1, 0, -1]$ ,  $\mathbf{h}^{(3)} = [0, 0, 1, 1] \in \text{Ker } q_\Delta$  tworzą  $(2, 3)$ -specjalną  $\mathbb{Z}$ -bazę grupy wolnej  $\text{Ker } q_\Delta$  rangi dwa.

**KROK 2.** Dodatni graf krawędziowo-dwudzielnym  $\check{\Delta} \in \mathcal{UBigr}_2$  bez pętli, który powstaje z dodatniego bigrafu  $\Delta^{(2,3)} : 1 \text{ --- } 4$  po naturalnym przenumerowaniu zbioru wierzchołków ma następującą postać

$$\check{\Delta} : 1 \text{ --- } 2, \text{ a stąd } q_{\check{\Delta}}(x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2.$$

Korzystając z algorytmu A.21 obliczamy skończony zbiór  $\mathcal{R}_{\check{\Delta}} := \mathcal{R}_{q_{\check{\Delta}}} \subset \mathbb{Z}^2$  pierwiastków funkcjonalu Grama  $q_{\check{\Delta}} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\check{\Delta} \in \mathcal{UBigr}_2$ . Otrzymujemy zbiór równy

$$\mathcal{R}_{\check{\Delta}} = \{[1, 0], [0, 1], [1, -1], [-1, 0], [0, -1], [-1, 1]\}.$$

**KROK 3.** Inicjalizujemy pusty zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} = \emptyset$ .

**KROK 4.** Dla każdego wektora  $v = [v_1, v_2]$  ze zbioru  $\mathcal{R}_{\check{\Delta}} \subset \mathbb{Z}^2$ :

**KROK 4.1.** dodajemy do zbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  wektor  $\tilde{v} := [v_1, 0, 0, v_2] \in \mathbb{Z}^4$ .

Otrzymujemy zbiór równy

$$\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} = \{[1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [1, 0, 0, -1], [-1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, -1], [-1, 0, 0, 1]\}.$$

**KROK 5.** Obliczony zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} \subset \mathbb{Z}^4$  jest reduktem bigrafu  $\Delta$ . Oznacza to, że spełniona jest równość  $\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} + \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^4$ .

## A.4. Obliczanie liczby Coxetera i zredukowanej liczby Coxetera

W niniejszym podrozdziale prezentujemy algorytm A.39 obliczający liczbę Coxetera  $c_\Delta$  dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , zgodnie ze złożonością przedstawioną w twierdzeniu A.34. Prezentujemy również algorytm A.55 obliczający zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{c}_\Delta$  oraz liczbę Coxetera  $c_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli. W przygotowaniu tych algorytmów najtrudniejsza była taka ich konstrukcja, aby ich pesymistyczna złożoność obliczeniowa była jak najniższa.

W oszacowaniu złożoności obliczeniowej algorytmu obliczającego liczbę Coxetera  $c_\Delta$  dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , bez pętli korzystamy z argumentów użytych w dowodzie lematu 3.43(a) oraz z następującego lematu.

**Lemat A.33.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie spójnym, dodatnim bigrafem bez pętli,  $[v_1 \dots v_m] \in \mathbb{Z}^m$  ustalonym wektorem oraz  $s \geq 1$  minimalną liczbą taką, że  $\Phi_\Delta^s(v) = v$ . Ustalmy również wektor  $w := \Phi_\Delta^k(v)$ , gdzie  $1 \leq k < s$ . Jeśli  $p \geq 1$  jest minimalną liczbą, dla której  $\Phi_\Delta^p(w) = w$ , to  $p = s$ .

*Dowód.* Niech  $m \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie spójnym, dodatnim bigrafem bez pętli. Ustalmy wektor  $[v_1 \dots v_m] \in \mathbb{Z}^m$  oraz  $s \geq 1$  minimalną liczbą taką, że  $\Phi_\Delta^s(v) = v$ . Niech  $1 \leq k < s$  oraz ustalmy wektor  $w = \Phi_\Delta^k(v)$  i minimalną liczbę  $p \geq 1$ , dla której zachodzi równość  $\Phi_\Delta^p(w) = w$ .

Ponieważ  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  jest automorfizmem, gdzie funkcja  $\Phi_\Delta^{-1}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  zdefiniowana jest wzorem  $\Phi_\Delta^{-1}(v) = v \cdot \text{Cox}_\Delta^{-1}$  dla dowolnego wektora  $v \in \mathbb{Z}^m$ , to  $\Phi_\Delta^{-k}(w) = v$ . Z następujących równości

$$v = \Phi_\Delta^s(v) = \Phi_\Delta^s(\Phi_\Delta^{-k}(w)) = \Phi_\Delta^s(\Phi_\Delta^{-k}(\Phi_\Delta^p(w))) = \Phi_\Delta^s(\Phi_\Delta^{-k}(\Phi_\Delta^p(\Phi_\Delta^k(v)))) = \Phi_\Delta^{p+s}(v) = \Phi_\Delta^p(v)$$

otrzymujemy nierówność  $p \geq s$ , natomiast z równości

$$w = \Phi_\Delta^p(w) = \Phi_\Delta^p(\Phi_\Delta^k(w)) = \Phi_\Delta^p(\Phi_\Delta^k(\Phi_\Delta^s(w))) = \Phi_\Delta^p(\Phi_\Delta^k(\Phi_\Delta^s(\Phi_\Delta^{-k}(w)))) = \Phi_\Delta^{s+p}(w) = \Phi_\Delta^s(w)$$

otrzymujemy nierówność  $p \leq s$ , a zatem  $p = s$ , co należało pokazać.  $\square$

**Twierdzenie A.34.** Niech  $m \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną. Liczbę Coxetera  $c_\Delta$  dowolnego spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli można obliczyć wykonując co najwyżej  $O(m^4)$  operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Ustalmy liczbę  $m \geq 1$ . Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  będzie spójnym, dodatnim bigrafem bez pętli,  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jego macierzą Coxetera oraz  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m, v \mapsto v \cdot \text{Cox}_\Delta$  transformacją Coxetera. Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w dowodzie lematu 3.43(a) obliczamy minimalne liczby całkowite  $s_1, \dots, s_m$  ograniczone przez liczbę  $|\mathcal{R}_\Delta| < \infty$  takie, że

$$\Phi_\Delta^{s_1}(e_1) = e_1, \dots, \Phi_\Delta^{s_m}(e_m) = e_m, \quad (\text{A.35})$$

gdzie  $e_1 \in \mathcal{R}_\Delta, \dots, e_m \in \mathcal{R}_\Delta$  są wektorami jednostkowymi. Udowodnimy, że takie liczby można obliczyć korzystając z co najwyżej  $O(|\mathcal{R}_\Delta| \cdot m^2) = O(m^4)$  operacji arytmetycznych. Na początek zauważmy, że jeśli w ciągu obliczanych wektorów

$$\Phi_\Delta(e_1), \dots, \Phi_\Delta^{s_1}(e_1), \Phi_\Delta(e_2), \dots, \Phi_\Delta^{s_2}(e_2), \dots, \Phi_\Delta(e_m), \dots, \Phi_\Delta^{s_m}(e_m) \quad (\text{A.36})$$

żaden z wektorów się nie powtarza, to ciąg ten zawiera co najwyżej  $|\mathcal{R}_\Delta|$  wektorów. Jeśli jednak w pewnym podciągu

$$\Phi_\Delta(e_i), \dots, \Phi_\Delta^{s_i}(e_i) \quad (\text{A.37})$$

występuje wektor  $e_j, j > i$ , to na podstawie lematu A.33 wiemy, że  $s_j = s_i$ , zatem nie musimy obliczać podciągu

$$\Phi_\Delta(e_j), \dots, \Phi_\Delta^{s_j}(e_j). \quad (\text{A.38})$$

Analogicznie, jeśli w pewnym podciągu (A.37) występuje wektor  $-e_j, j > i$  oraz  $(-e_j)^{s_j} = -e_j$ , to  $e_j^{s_j} = e_j$ , a stąd  $s_j = s_i$ , więc nie musimy obliczać podciągu (A.38).

Pokazaliśmy, że do obliczenia liczb  $s_1, \dots, s_m$  wystarczy  $|\mathcal{R}_\Delta|$ -krotne przemnożenie przez macierz Coxetera  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wektorów wybranych w ciągu (A.36).

Łatwo sprawdzić, że przemnożenie dowolnego wektora  $[v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{Z}^m$  przez macierz  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wymaga przeprowadzenia  $m \cdot (m - 1)$  operacji dodawania liczb oraz  $m^2$  operacji mnożenia liczb. Stąd otrzymujemy złożoność obliczeniową rzędu  $O(m^2)$  względem operacji arytmetycznych.

Ponieważ liczba pierwiastków  $|\mathcal{R}_\Delta|$  spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  bez pętli oraz liczba pierwiastków  $|\mathcal{R}_{D_m}|$  stowarzyszonego z nim jednorodnego diagramu Dynkina  $D_m$  są równe (zobacz lemat 3.51(c) oraz twierdzenie 3.64), więc na podstawie twierdzenia 3.35(a) otrzymujemy równość  $O(|\mathcal{R}_\Delta|) = O(m^2)$ .

Stąd liczby  $s_1, \dots, s_m$  można obliczyć korzystając z co najwyżej  $O(|\mathcal{R}_\Delta| \cdot m^2) = O(m^4)$  operacji arytmetycznych. Na koniec zauważmy, że obliczenie wartości

$$c_\Delta = \text{NWW}(s_1, \dots, s_m) = \frac{s_1 \cdots s_m}{\text{NWD}(s_1, \dots, s_m)}$$

wymaga wykonania co najwyżej  $m - 1$  operacji mnożenia liczb, jedną operację dzielenia liczb, oraz co najwyżej  $m - 1$  razy obliczenia największego wspólnego dzielnika. Do obliczania  $\text{NWD}(s_i, s_k)$  używamy algorytmu Euklidesa wykonującego

$$O(\log(\max(s_i, s_k))) \leq O(\log(|\mathcal{R}_\Delta|)) = O(\log(m^2)) = O(\log(m))$$

operacji modulo. Sumarycznie, do obliczenia  $c_\Delta = \text{NWW}(s_1, \dots, s_m)$  korzystamy z co najwyżej  $O(m - 1) \cdot O(\log(m))$  operacji arytmetycznych, co nie wpływa na asymptotyczną złożoność obliczenia liczby Coxetera, gdyż  $O(m \cdot \log(m)) \leq O(m^4)$ . □

Następujący algorytm wyznacza liczbę Coxetera  $c_\Delta$  dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , zgodnie ze złożonością przedstawioną w twierdzeniu A.34.

**Algorytm A.39.** DANE Niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), m \geq 1$ , dodatniego spójnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli.

WYNIK Liczba Coxetera  $c_\Delta < \infty$  bigrafu  $\Delta$ .

KROK 1. Inicjalizujemy puste zbiory **sprawdzone\_e** = {}, **zbior\_s** = {}.

KROK 2. Obliczamy macierz Coxetera  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta$ .

KROK 3. Dla liczby  $i = 1, \dots, m$ :

KROK 3.1. jeśli  $e_i \notin$  **sprawdzone\_e**:

KROK 3.1.1. przyjmujemy  $s = 1$ , **sprawdzone\_e** = **sprawdzone\_e**  $\cup$   $\{e_i\}$  oraz  $w = e_i \cdot \text{Cox}_\Delta$ ;

KROK 3.1.2. dopóki  $w \neq e_i$  wykonujemy

KROK 3.1.2.1. dla liczb  $k = i + 1, \dots, m$ :

KROK 3.1.2.1.1. jeśli zachodzi równość  $w = \pm e_k$ , to przyjmujemy **sprawdzone\_e** = **sprawdzone\_e**  $\cup$   $\{e_k\}$ ;

KROK 3.1.2.2. przyjmujemy  $s = s + 1$  oraz  $w = w \cdot \text{Cox}_\Delta$ ;

KROK 3.1.3. przyjmujemy **zbior\_s** = **zbior\_s**  $\cup$   $\{s\}$ .

Krok 3 jest realizacją metody przedstawionej w dowodzie lematu 3.43(a), zobacz też dowód twierdzenia A.34.

KROK 4. Obliczamy  $c_\Delta = \text{NWW}(\mathbf{zbior\_s})$ , zobacz lemat 3.43(a).

KROK 5. Zwracamy liczbę  $c_\Delta$  jako wynik.



Twierdzenie A.34 pokazuje, że liczbę Coxetera  $c_\Delta$  spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta$  bez pętli można wyznaczyć przy użyciu co najwyżej  $O(m^4)$  operacji arytmetycznych. Wykażemy teraz, że pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.39 ma złożoność obliczeniową deklarowaną w tym twierdzeniu, tj. rzędu  $O(m^4)$ .

**Fakt A.40.** Algorytm A.39 wyznaczający liczbę Coxetera  $c_\Delta < \infty$  spójnego dodatniego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli ma pesymistyczną złożoność obliczeniową rzędu  $O(m^4)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Aby uzasadnić fakt zauważmy, że:

- w kroku 2 obliczenie macierzy Coxetera wymaga wykonania  $O(m^3)$  operacji arytmetycznych (przy użyciu standardowych algorytmów mnożenia i odwracania macierzy; ze względu na niski wymiar analizowanych macierzy nie stosujemy algorytmów szybkiego mnożenia i odwracania macierzy),
- krok 3 ma złożoność  $O(m^4)$  uzasadnioną w dowodzie twierdzenia A.34; zauważmy, że sprawdzania w krokach 3.1 oraz 3.1.2.1 gwarantują, że nie obliczamy ponownie wartości  $s_k$  jeśli została obliczona na wcześniejszym etapie,
- krok 4 ma złożoność rzędu  $O(m \cdot \log(m))$ .

Stąd pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.39 jest rzędu  $O(m^4)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

Jak już udowodniliśmy, obliczenie wektorów z  $\Phi_\Delta$ -orbity  $Orb(v) := \{\Phi_\Delta^k(v); k \in \mathbb{Z}\}$  ustalonego pierwiastka  $v \in \mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^m$  wymaga przeprowadzenia co najwyżej  $O(m^4)$  operacji arytmetycznych.

Zauważmy, że gdyby nie wykonywać sprawdzeń w krokach 3.1 oraz 3.1.2.1, to w pesymistycznym przypadku, kiedy wszystkie pierwiastki  $\mathcal{R}_\Delta \subset \mathbb{Z}^m$  bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  (w tym wektory jednostkowe:  $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m$ ) leżą w jednej  $\Phi_\Delta$ -orbicie

$$Orb(e_1) := \{\Phi_\Delta^k(e_1); k \in \mathbb{Z}\}$$

długości  $|\mathcal{R}_\Delta| = O(m^2)$ , to  $m$ -krotnie obliczalibyśmy tą samą  $\Phi_\Delta$ -orbitę

$$Orb(e_1) = \dots = Orb(e_m).$$

W konsekwencji, bez tych sprawdzeń, pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.39 byłaby rzędu  $O(m^5)$ .  $\square$

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu A.39 do obliczenia skończonej liczby Coxetera  $c_\Delta < \infty$  dodatniego bigrafu  $\Delta$  bez pętli.

**Przykład A.41.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_7$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym

$$\Delta: \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & 7 & & 5 & & 6 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & 3 & & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 4 & & \\ & & & & & & \end{array} & , \text{ gdzie } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Ponieważ funkcjonal Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  można przedstawić w następującej postaci

$$q_\Delta(x) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 + \frac{3}{4}x_7\right)^2 + \frac{5}{8}\left(x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{1}{5}x_7\right)^2 + \frac{3}{5}\left(x_5 + \frac{1}{6}x_6 + \frac{1}{6}x_7\right)^2 + \frac{7}{12}\left(x_6 + \frac{1}{7}x_7\right)^2 + \frac{4}{7}x_7^2,$$

więc łatwo zweryfikować, że bigraf  $\Delta$  jest dodatni.

**KROK 1.** Inicjalizujemy puste zbiory `sprawdzone_e = {}`, `zbiór_s = {}`.

**KROK 2.** Obliczamy macierz Coxetera bigrafu  $\Delta$

$$\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_7(\mathbb{Z}).$$

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 1$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_1 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektora  $w \in \mathbb{Z}^7$ :

$$[0, 0, -1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0, 0, 0, -1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], \\ [0, 0, 0, 0, 1, -1, 0], [0, 0, 0, 1, -1, 0, 0], [-1, -1, 0, -1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_3, e_6, e_7\}$  oraz  $\text{zbior\_s} = \{8\}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 2$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_2 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektora  $w \in \mathbb{Z}^7$ :

$$[0, 1, 1, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 1, 0, 1, 0, -1], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [-1, -1, 0, 0, 0, -1, 0], \\ [0, -1, 0, 0, -1, 0, 0], [0, -1, -1, -1, 0, 0, 0], [1, 0, -1, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7\}$  oraz  $\text{zbior\_s} = \{8\}$ .

**KROK 3.** Dla liczb  $i = 3, 4$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_i \in \text{sprawdzone\_e}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 5$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_5 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektora  $w \in \mathbb{Z}^7$ :

$$[0, 0, 0, 1, 0, -1, 0], [-1, -1, 0, 0, -1, 0, 0], [0, -1, 0, -1, 0, 0, 0], [1, 0, -1, 0, 0, 0, 0], \\ [0, 0, -1, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 1, -1], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  oraz  $\text{zbior\_s} = \{8\}$ .

**KROK 3.** Dla liczb  $i = 6, 7$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_i \in \text{sprawdzone\_e}$ .

**KROK 4.** Obliczamy  $c_\Delta = \text{NWW}(\text{zbior\_s}) = \text{NWW}(8) = 8$ .

Łatwo sprawdzić, że  $\text{Cox}_\Delta^8 = E$  oraz  $\text{Cox}_\Delta^k \neq E$  dla  $k = 1, \dots, 7$ , a stąd liczba 8 jest liczbą Coxetera bigrafu  $\Delta$  (definicja 3.37(e)).

### Obliczanie zredukowanej liczby Coxetera

W twierdzeniu A.43 pokazujemy, że zredukowana liczba Coxetera  $\check{c}_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli jest skończona i można ją obliczyć po przeprowadzeniu co najwyżej  $O(m^4)$  operacji arytmetycznych.

**Uwaga A.42.** Argumenty zastosowane przez nas w dowodzie twierdzenia A.43 są analogiczne do przedstawionych w [79, Theorem 4.7]. Dowód [79, Theorem 4.7] ma charakter ogólny i abstrakcyjny, a kombinatoryczne argumenty (analogiczne do użytych w dowodzie lematu 3.43(a)) użyte w dowodzie twierdzenia A.43 są niezbędnym elementem do oszacowania złożoności obliczeniowej algorytmu wyznaczającego zredukowaną liczbę Coxetera.

**Twierdzenie A.43.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , będzie spójnym nieujemnym bigrafem korangi  $r \geq 1$  bez pętli.

- (a) Zredukowana liczba Coxetera  $\check{c}_\Delta$  istnieje i jest skończona.
- (b) Zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{c}_\Delta$  oraz liczbę Coxetera  $c_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  można obliczyć po przeprowadzeniu co najwyżej  $O(m^4)$  operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Załóżmy, że  $m \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest spójnym nieujemnym bigrafem bez pętli,  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jego macierzą Coxetera oraz  $\Phi_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m, v \mapsto v \cdot \text{Cox}_\Delta$  transformacją Coxetera. Ponieważ zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  nieujemnego bigrafu korangi  $r \geq 1$  jest nieskończony, więc korzystamy z [79, Theorem 3.2(d)], na podstawie którego istnieje skończony zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} \subset \mathcal{R}_\Delta$  (definicja A.25) taki, że mamy jednoznaczny rozkład

$$\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} + \text{Ker } q_\Delta. \quad (\text{A.44})$$

Weźmy dowolny pierwiastek  $v \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  ze skończonego podzbioru  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  zbioru  $\mathcal{R}_\Delta$  pierwiastków  $\Delta$ . Na podstawie lematu 3.40 dla dowolnej liczby całkowitej  $j \geq 1$  zachodzi  $\Phi_\Delta^j(v) \in \mathcal{R}_\Delta$ , więc istnieje pierwiastek  $v^j \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  oraz wektor z jądra  $h^j \in \text{Ker } q_\Delta$  takie, że

$$\Phi_\Delta^j(v) = v^j + h^j. \quad (\text{A.45})$$

Zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  jest skończony, więc istnieje liczba całkowita  $s_v \geq 1$  taka, że dla wektora  $v^{s_v} = v \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  prawdziwa jest równość

$$\Phi_\Delta^{s_v}(v) = v^{s_v} + h^{s_v} = v + h^{s_v}. \quad (\text{A.46})$$

Ponieważ bigraf  $\Delta$  nie ma pętli, więc wektory  $e_1 \in \mathbb{Z}^m, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m$  są pierwiastkami bigrafu  $\Delta$ , tzn.  $e_1 \in \mathcal{R}_\Delta, \dots, e_m \in \mathcal{R}_\Delta$ , oraz mają następujące przedstawienie

$$e_i = v^{e_i} + h^{e_i}, \text{ dla pewnych } v^{e_i} \in \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} \text{ oraz } h^{e_i} \in \text{Ker } q_\Delta, \text{ gdzie } i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.47})$$

Ponieważ dla dowolnego  $j \geq 1$  zachodzi równość  $\Phi_\Delta^j(e_i) = \Phi_\Delta^j(v^{e_i} + h^{e_i}) = \Phi_\Delta^j(v^{e_i}) + h^{e_i}$  (zobacz lemat 3.40(c)), więc istnieją liczby całkowite  $s_i \geq 1$  oraz wektory z jądra  $h^{s_i}$  takie, że prawdziwe są równości

$$\Phi_\Delta^{s_i}(e_i) = \Phi_\Delta^{s_i}(v^{e_i} + h^{e_i}) = \Phi_\Delta^{s_i}(v^{e_i}) + h^{e_i} = v^{e_i} + h^{s_i} + h^{e_i}, \quad (\text{A.48})$$

dla  $i = 1, \dots, m$ . Niech odpowiednio  $s_1, \dots, s_m$  będą minimalnymi liczbami o tej własności oraz ustalmy  $s = \text{NWW}(s_1, \dots, s_m)$ . Standardowe rachunki pokazują, że

$$\Phi_\Delta^s(e_i) - e_i = v^{e_i} + h^s + h^{e_i} - (v^{e_i} + h^{e_i}) = h^s \in \text{Ker } q_\Delta, \text{ dla } i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.49})$$

Ponieważ dowolny wektor  $v \in \mathbb{Z}^m$  ma przedstawienie

$$v = [v_1, \dots, v_m] = v_1 \cdot e_1 + \dots + v_m \cdot e_m,$$

więc  $\Phi_\Delta^s(v) - v \in \text{Ker } q_\Delta$ , a stąd zredukowana liczba Coxetera jest równa  $\check{c}_\Delta = s$ , co kończy dowód stwierdzenia (a).

Do oszacowania pesymistycznej złożoności obliczeniowej algorytmu A.55 stosujemy argumenty analogiczne do użytych w dowodzie twierdzenie A.34. Ponieważ zbiór pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  korangi  $r \geq 1$  jest nieskończony, więc korzystamy z przedstawienia  $\mathcal{R}_\Delta = \mathcal{R}_\Delta^{\text{red}} + \text{Ker } q_\Delta$  (A.44), gdzie zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}$  jest skończony.

Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w dowodzie stwierdzenia (a) możemy obliczyć minimalne liczby całkowite  $s_1, \dots, s_m$  ograniczone przez liczbę  $|\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}| < \infty$  takie, że

$$\Phi_\Delta^{s_1}(e_1) - e_1 \in \text{Ker } q_\Delta, \dots, \Phi_\Delta^{s_m}(e_m) - e_m \in \text{Ker } q_\Delta, \quad (\text{A.50})$$

gdzie  $e_1 \in \mathcal{R}_\Delta, \dots, e_m \in \mathcal{R}_\Delta$  są wektorami jednostkowymi. Udowodnimy, że takie liczby można obliczyć wykonując co najwyżej  $O(|\mathcal{R}_\Delta^{\text{red}}| \cdot m^2) = O(m^4)$  operacji arytmetycznych. Na początek zauważmy, że jeśli w ciągu

$$\Phi_\Delta(e_1), \dots, \Phi_\Delta^{s_1}(e_1), \dots, \Phi_\Delta(e_m), \dots, \Phi_\Delta^{s_m}(e_m) \quad (\text{A.51})$$

wszystkie wektory są parami różne, to ciąg ten zawiera co najwyżej  $|\mathcal{R}_\Delta^{red}|$  wektorów. Jeśli w pewnym podciągu

$$\Phi_\Delta(e_i), \dots, \Phi_\Delta^{s_i}(e_i)$$

występuje wektor  $\pm e_j, j > i$ , to na podstawie argumentów analogicznych do użytych w dowodzie lematu A.33 otrzymamy równość  $s_j = s_i$ , zatem nie musimy obliczać podciągu

$$\Phi_\Delta(e_j), \dots, \Phi_\Delta^{s_j}(e_j).$$

Pokazaliśmy, że do obliczenia liczb  $s_1, \dots, s_m$  wystarczy  $|\mathcal{R}_\Delta^{red}|$ -krotne przemnożenie przez macierz Coxetera  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wektorów  $\Phi_\Delta^j(e_i) \in \mathbb{Z}^m$  wybranych w ciągu (A.51) oraz sprawdzenie czy  $\Phi_\Delta^j(e_i) - e_i \in \text{Ker } q_\Delta$ .

Przypomnijmy, że przemnożenie dowolnego wektora  $[v_1 \dots v_m] \in \mathbb{Z}^m$  przez macierz  $\text{Cox}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wymaga przeprowadzenia  $m \cdot (m - 1)$  operacji dodawania liczb oraz  $m^2$  operacji mnożenia liczb. Do sprawdzenia warunku  $v \in \text{Ker } q_\Delta$ , gdzie  $v = \Phi_\Delta^j(e_i) - e_i$  wykonujemy operację  $v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr}$  wymagającą przeprowadzenia  $m \cdot (m - 1) + m - 1$  operacji dodawania liczb oraz  $m^2 + m$  operacji mnożenia liczb. Sumarycznie, otrzymujemy złożoność  $O(m^2)$  względem liczby operacji arytmetycznych.

Pokażemy teraz, że zachodzi równość  $O(|\mathcal{R}_\Delta^{red}|) = O(m^2)$ . Ponieważ  $\Delta$  jest nieujemny korangi  $r \geq 1$ , więc na podstawie [79, Theorem 3.2(c)] oraz 4.2 istnieją indeksy  $i_1, \dots, i_r$  oraz wektory  $\mathbf{h}^{(i_1)}, \dots, \mathbf{h}^{(i_r)} \in \text{Ker } q_\Delta$  takie, że  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(i_1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}^{(i_r)}$  oraz dla każdego  $i_s \in \{i_1, \dots, i_r\}$

$$\mathbf{h}_{i_s}^{(i_s)} = 1 \text{ oraz } \mathbf{h}_j^{(i_s)} = 0, \text{ gdzie } j \in \{i_1, \dots, i_r\} \setminus \{i_s\}. \quad (\text{A.52})$$

Ponadto  $\Delta^{(i_1, \dots, i_r)} \in \mathcal{UBigr}_{m-r}$  jest dodatnim spójnym bigrafem powstałym z bigrafu  $\Delta$  przez usunięcie wierzchołków  $i_1, \dots, i_r$ , a zbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subset \mathbb{Z}^m$  jest równy

$$\mathcal{R}_\Delta^{red} = \{v \in \mathcal{R}_\Delta; v_{i_1} = \dots = v_{i_r} = 0\} \subset \mathbb{Z}^m. \quad (\text{A.53})$$

Stąd wynika, że skończony podzbiór  $\mathcal{R}_\Delta^{red}$  zbioru pierwiastków  $\mathcal{R}_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  korangi  $r \geq 1$  jest równoliczny ze skończonym zbiorem pierwiastków  $\mathcal{R}_{\Delta^{(i_1, \dots, i_r)}}$  dodatniego spójnego bigrafu  $\Delta^{(i_1, \dots, i_r)} \in \mathcal{UBigr}_{m-r}$ , tzn.

$$|\mathcal{R}_\Delta^{red}| = |\mathcal{R}_{\Delta^{(i_1, \dots, i_r)}}|. \quad (\text{A.54})$$

Ponieważ  $O(|\mathcal{R}_{\Delta^{(i_1, \dots, i_r)}}|) = O(m^2)$ , więc pokazaliśmy, że  $O(|\mathcal{R}_\Delta^{red}|) = O(m^2)$ .

Zatem pokazaliśmy, że liczby  $s_1, \dots, s_m$  można obliczyć wykonując co najwyżej  $O(|\mathcal{R}_\Delta^{red}| \cdot m^2) = O(m^4)$  operacji arytmetycznych. Na koniec zauważmy, że do obliczenia wartości  $\check{c}_\Delta = \text{NWW}(s_1, \dots, s_m)$  korzystamy z co najwyżej  $O(m \cdot \log(m))$  operacji arytmetycznych. Ponieważ operacje te wykonywane są jednokrotnie, więc pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu obliczającego zredukowaną liczbę Coxetera jest rzędu  $O(m^4)$ .

Korzystając z obliczonej zredukowanej liczby Coxetera  $\check{c}_\Delta$ , liczbę Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  obliczamy bez użycia operacji arytmetycznych, zobacz lemat 3.43(b). □

Przedstawimy teraz kombinatoryczny algorytm obliczający zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{c}_\Delta$  oraz liczbę Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli, który realizuje metodę opisaną w dowodzie twierdzenia A.43.

**Algorytm A.55.** DANE Niesymetryczna macierz Grama  $\check{G}_\Delta \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}), m \geq 1$ , spójnego nieujemnego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli.

WYNIK Liczba Coxetera  $\mathbf{c}_\Delta$  oraz zredukowana liczba Coxetera  $\check{c}_\Delta < \infty$  bigrafu  $\Delta$ .

KROK 1. Inicjalizujemy puste zbiory **sprawdzone\_e** = {}, **zbior\_s** = {} oraz zmienną *skonczone* = True.

KROK 2. Obliczamy macierz Coxetera  $\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  bigrafu  $\Delta$ .

#### A.4. Obliczanie liczby Coxetera i zredukowanej liczby Coxetera

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 1, \dots, m$  :

**KROK 3.1.** jeśli  $e_i \notin \text{sprawdzone\_e}$  :

**KROK 3.1.1.** przyjmujemy  $s = 1$ ,  $\text{sprawdzone\_e} = \text{sprawdzone\_e} \cup \{e_i\}$  oraz wektory  $w = e_i \cdot \text{Cox}_\Delta$ ,  $v = w - e_i$

**KROK 3.1.2.** dopóki  $q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} \neq 0$  wykonujemy:

**KROK 3.1.2.1.** dla liczb  $k = i + 1, \dots, m$  :

**KROK 3.1.2.1.1.** jeśli zachodzi równość  $w = \pm e_k$ , to przyjmujemy  $\text{sprawdzone\_e} = \text{sprawdzone\_e} \cup \{e_k\}$ ;

**KROK 3.1.2.2.** przyjmujemy  $s = s + 1$ ,  $w = w \cdot \text{Cox}_\Delta$  oraz  $v = w - e_i$ ;

**KROK 3.1.3.** jeśli  $v \neq 0$ , to przyjmujemy  $\text{skonczone} = \text{False}$ ,

**KROK 3.1.4.** przyjmujemy  $\text{zbior\_s} = \text{zbior\_s} \cup \{s\}$ .

**KROK 4.** Obliczamy  $\check{c}_\Delta = \text{NWW}(\text{zbior\_s})$ .

**KROK 5.** Jeśli  $\text{skonczone} = \text{True}$ , to przyjmujemy  $c_\Delta = \check{c}_\Delta$ ; w przeciwnym wypadku przyjmujemy  $c_\Delta = \infty$ .

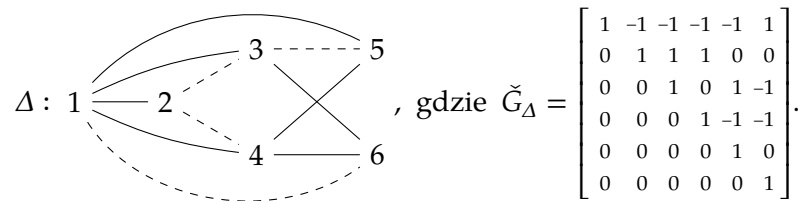
**KROK 6.** Zwracamy liczby  $c_\Delta, \check{c}_\Delta$  jako wynik.

**Fakt A.56.** Algorytm A.55 wyznaczający zredukowaną liczbę Coxetera  $\check{c}_\Delta$  oraz liczbę Coxetera  $c_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli ma pesymistyczną złożoność obliczeniową rzędu  $O(m^4)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych.

*Dowód.* Łatwo sprawdzić, że algorytm A.55 jest realizacją opisu obliczania liczby Coxetera oraz zredukowanej liczby Coxetera przedstawionego w dowodzie twierdzenia A.43. Stąd na podstawie twierdzenia A.43 złożoność obliczeniowa algorytmu A.55 jest rzędu  $O(m^4)$  względem liczby operacji arytmetycznych.  $\square$

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu A.55 do obliczenia zredukowanej liczby Coxetera  $\check{c}_\Delta < \infty$  oraz liczby Coxetera  $c_\Delta$  nieujemnego bigrafu  $\Delta$  bez pętli.

**Przykład A.57.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_6$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym



Ponieważ funkcjonal Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  można przedstawić w następującej postaci

$$q_\Delta(x) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6\right)^2 + \frac{3}{4} \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6\right)^2 + \frac{2}{3} \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6\right)^2 + \frac{1}{2} (x_4 - x_5 - x_6)^2,$$

więc łatwo sprawdzić, że bigraf  $\Delta$  jest nieujemny.

**KROK 1.** Inicjalizujemy puste zbiory  $\text{sprawdzone\_e} = \{\}$ ,  $\text{zbior\_s} = \{\}$  oraz zmienną  $\text{skonczone} = \text{True}$ .

**KROK 2.** Obliczamy macierz Coxetera bigrafu  $\Delta$

$$\text{Cox}_\Delta = -\check{G}_\Delta \cdot \check{G}_\Delta^{-tr} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}).$$

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 1$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_1 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektorów  $w := e_1 \cdot \text{Cox}_\Delta^s$  oraz  $v := w - e_1$ , gdzie  $s = 1, 2, 3$ :

$$w : [2, 1, -1, 1, 1, -1], [3, 1, -2, 2, 3, -1], [5, 2, -2, 2, 4, -2],$$

$$\text{oraz } q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 0 \text{ dla } v = [4, 2, -2, 2, 4, -2] \neq 0,$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{skonczone} = \text{False}$ ,  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1\}$  oraz  $\text{zbior\_s} = \{3\}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 2$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_2 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektorów  $w := e_2 \cdot \text{Cox}_\Delta^s$  oraz  $v := w - e_2$ , gdzie  $s = 1, 2, 3$ :

$$w : [-1, 1, -1, -1, 0, 0], [-1, 2, -1, -3, -1, -1], [-2, 3, -2, -4, -2, -2],$$

$$\text{oraz } q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 0 \text{ dla } v = [-2, 2, -2, -4, -2, -2] \neq 0,$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{skonczone} = \text{False}$ ,  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2\}$ ,  $\text{zbior\_s} = \{3\}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 3$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_3 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektorów  $w := e_3 \cdot \text{Cox}_\Delta^s$  oraz  $v := w - e_3$ , gdzie  $s = 1, 2, 3$ :

$$w : [-2, -1, 1, 0, -1, 1], [-3, -2, 2, -1, -2, 2], [-4, -2, 3, -2, -4, 2],$$

$$\text{oraz } q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 0 \text{ dla } v = [-4, -2, 2, -2, -4, 2] \neq 0,$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{skonczone} = \text{False}$ ,  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\text{zbior\_s} = \{3\}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 4$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_4 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektorów  $w := e_4 \cdot \text{Cox}_\Delta^s$  oraz  $v := w - e_4$ , gdzie  $s = 1, 2, 3$ :

$$w : [0, -1, 0, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0],$$

$$\text{oraz } q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 0 \text{ dla } v = 0,$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $\text{zbior\_s} = \{3\}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 5$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_5 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektorów  $w := e_5 \cdot \text{Cox}_\Delta^s$  oraz  $v := w - e_5$ , gdzie  $s = 1, 2, 3$ :

$$w : [-1, 0, 1, -1, -1, 0], [-3, -1, 1, -1, -2, 1], [-4, -2, 2, -2, -3, 2],$$

$$\text{oraz } q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 0 \text{ dla } v = [-4, -2, 2, -2, -4, 2] \neq 0,$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{skonczone} = \text{False}$ ,  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  oraz  $\text{zbior\_s} = \{3\}$ .

**KROK 3.** Dla liczby  $i = 6$ :

**KROK 3.1.** sprawdzamy, że  $e_6 \notin \text{sprawdzone\_e}$ , a zatem obliczamy kolejne wartości wektorów  $w := e_6 \cdot \text{Cox}_\Delta^s$  oraz  $v := w - e_6$ , gdzie  $s = 1, 2, 3$ :



## A.5. Algorytm inflacyjny dla bigrafów dodatnich oraz głównych

$$w : [1, 2, -1, -1, 0, -1], [1, 3, -3, -1, 1, -2], [2, 4, -4, -2, 2, -3],$$

$$\text{oraz } q_\Delta(v) := v \cdot \check{G}_\Delta \cdot v^{tr} = 0 \text{ dla } v = [2, 4, -4, -2, 2, -4] \neq 0,$$

**KROK 3.2.** przyjmujemy  $\text{skonczone} = \text{False}$ ,  $\text{sprawdzone\_e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  oraz  $\text{zbior\_s} = \{3\}$ .

**KROK 4.** Obliczamy  $\check{c}_\Delta = \text{NWW}(\text{zbior\_s}) = \text{NWW}(3) = 3$ .

**KROK 5.** Ponieważ  $\text{skonczone} = \text{False}$ , więc przyjmujemy  $c_\Delta = \infty$ .

Zauważmy, że dla obliczonej liczby  $\check{c}_\Delta = 3$  macierze  $\text{Cox}_\Delta^3 \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  oraz  $\text{Cox}_\Delta^3 - E \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  mają następujące postaci:

$$\text{Cox}_\Delta^3 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 3 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}), \text{ oraz } \text{Cox}_\Delta^3 - E = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 2 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z}).$$

Łatwo sprawdzić, że wiersze macierzy  $\text{Cox}_\Delta^3 - E \in \mathbb{M}_6(\mathbb{Z})$  należą do jądra  $\text{Ker } q_\Delta$  funkcjonau Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$ , a stąd liczba 3 jest zredukowaną liczbą Coxetera  $\check{c}_\Delta$  bigrafu  $\Delta$  (definicja 3.37(f)). Ponieważ  $\text{Cox}_\Delta^3 \neq E$ , więc na podstawie lematu 3.43(b) liczba Coxetera  $c_\Delta$  jest nieskończona.

## A.5. Algorytm inflacyjny dla bigrafów dodatnich oraz głównych

W tym podrozdziale prezentujemy dwie macierzowe realizacje znanych w literaturze przedmiotu algorytmów inflacyjnych:

- algorytm A.59 dla dodatnich bigrafów bez pętli,
- algorytm A.66 dla głównych bigrafów bez pętli.

Algorytmy te odgrywają istotną rolę w badaniu klas równoważności grafów krawędziowo-dwudzielnych  $\Delta, \Delta' \in \mathcal{UBigr}_m$  względem słabej  $\mathbb{Z}$ -kongruencji Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \Delta'$ .

Głównym celem przypomnienia tych algorytmów jest porównanie ich z algorytmem inflacyjnym dla bigrafów korangi dwa (algorytm 5.48), a także wskazanie problemów z realizacją takiego algorytmu dla bigrafów nieujemnych, które nie są dodatnie.

Przypominamy z twierdzenia 3.62, że jeśli  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m, m \geq 1$ , jest dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli, to istnieje operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_k b_k}^- \circ \dots \circ \mathbf{t}_{a_1 b_1}^-$  będący takim złożeniem skończonej liczby operatorów inflacji, że bigraf  $D\Delta := \mathbf{t}_\bullet^- \Delta$  jest jednym z grafów Dynkina  $\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$  przedstawionych w tabeli 3.32.

W twierdzeniu A.58 dowodzimy wynik silniejszy: jeśli  $\Delta$  jest bigrafem dodatnim, to każdy złożony operator inflacji względem par wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią jest skończony, por. [57, Lemma 4.1] oraz [67, Proposition 4.2, Theorem 4.4], zobacz również [81, Section 3]. Wynik ten został udowodniony w [67, Proposition 4.2, Theorem 4.4] przy użyciu innych metod niż wskazane przez nas. W dowodzie twierdzenia 3.62 wykorzystujemy idee przedstawione w dowodzie twierdzenia 5.28.

**Twierdzenie A.58.** *Załóżmy, że  $m \geq 1$  oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  jest spójnym dodatnim grafem krawędziowo-dwudzielnym bez pętli. Każdy złożony operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^-$  względem par wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią (definicja 3.55(b)) składa się ze skończonej liczby operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i b_i}^-$ , gdzie wierzchołki  $a_i, b_i \in \Delta_0$  połączone są przerywaną krawędzią.*

*Dowód.* Ustalmy liczbę  $m \geq 1$ . Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  będzie spójnym, dodatnim bigrafem bez pętli, oraz  $\mathbf{t}_\bullet^- := \mathbf{t}_{a_1 b_1}^- \circ \mathbf{t}_{a_2 b_2}^- \circ \dots$  dowolnym złożonym operatorem inflacji bigrafu  $\Delta$

względem par wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią. Przyjmujemy  $\tilde{\Delta} := \mathbf{t}_\bullet^- \Delta$ . Pokażemy, że operator inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^-$  jest złożeniem skończonej liczby co najwyżej

$$3 \cdot m \cdot (m - 1)$$

operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i, b_i}^-$ , gdzie wierzchołki  $a_i, b_i \in \Delta_0$  połączone są przerywaną krawędzią.

Niech  $\mathbf{t}_{a_i, b_i}^-$  będzie operatorem inflacji bigrafu  $\Delta$  występującym  $k \geq 0$  razy w złożeniu  $\mathbf{t}_\bullet^-$ , gdzie  $a_i, b_i \in \Delta_0$  jest parą wierzchołków połączonych krawędzią przerywaną  $a_i \text{ --- } b_i$ . Ponieważ bigraf  $\Delta$  nie ma pętli, więc wektory jednostkowe  $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^m$  są jego pierwiastkami, tj.  $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{R}_\Delta$ .

Zauważmy, że po  $k_{a_i, b_i}$ -krotnej inflacji  $\mathbf{t}_{a_i, b_i}^-$  na bigrafie  $\Delta$  (występującej w ciągu  $\mathbf{t}_\bullet^-$ ) oraz odpowiednio  $k_{a_i, b_i}$ -krotnej operacji  $h := \mathbf{t}_{a_i, b_i}^+ : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  (3.60) na nieujemnym wektorze  $v := e_{b_i}$ , gdzie  $v_{a_i} = v_{a_i} + d_{a_i, b_i}^{\tilde{\Delta}} v_{b_i}$  (3.61), współrzędna  $w_{a_i}$  pierwiastka  $w := \mathbf{t}_\bullet^+(v) \in \mathcal{R}_{\tilde{\Delta}}$  jest równa

$$w_{a_i} := w_{a_i} + k \cdot d_{a_i, b_i}^{\tilde{\Delta}} \cdot w_{b_i},$$

dla  $w_{b_i} \geq 1$  oraz  $d_{a_i, b_i}^{\tilde{\Delta}} = 1$  (zobacz uwaga 3.19). Ponieważ wektory  $v, w \in \mathbb{Z}^m$  są nieujemne oraz wartości współrzędnych pierwiastków dodatnich bigrafów są ograniczone przez liczbę 6 (zobacz twierdzenie 3.28), więc otrzymujemy następujące nierówności

$$6 \geq w_{a_i} := w_{a_i} + k_{a_i, b_i} \cdot d_{a_i, b_i}^{\tilde{\Delta}} \cdot w_{b_i} \geq 0 + k_{a_i, b_i} \cdot w_{b_i}.$$

W konsekwencji otrzymujemy następujące ograniczenie

$$6 \geq w_{a_i} \geq \frac{w_{a_i}}{w_{b_i}} \geq k_{a_i, b_i}$$

na liczbę  $k_{a_i, b_i}$  operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i, b_i}^-$  użytych w dowolnym złożeniu operatorów inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^-$  względem par wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią (definicja 3.55(b)).

Stąd wynika, że dla dowolnej krawędzi przerywanej  $a_i \text{ --- } b_i$ , gdzie  $a_i, b_i \in \Delta_0$ , operator inflacji  $\mathbf{t}_{a_i, b_i}^-$  może zostać użyty w złożeniu  $\mathbf{t}_\bullet^-$  co najwyżej  $k_{a_i, b_i} = 6$  razy. Ponieważ wszystkich par  $a_i, b_i$ , gdzie  $a_i, b_i \in \Delta_0$ , jest co najwyżej  $\frac{m(m-1)}{2}$  (w przypadku bigrafu pełnego), więc każde złożenie operatorów inflacji  $\mathbf{t}_\bullet^-$  składa się z co najwyżej  $6 \cdot \frac{m(m-1)}{2} = 3 \cdot m \cdot (m-1)$  operatorów inflacji  $\mathbf{t}_{a_i, b_i}^-$  względem par wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią, co kończy dowód.  $\square$

Przedstawimy teraz macierzową wersję algorytmu inflacyjnego dla dodatnich bigrafów bez pętli. Macierz definiującą słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\sim_{\mathbb{Z}}$  dla dodatnich bigrafów bez pętli budujemy zgodnie z opisem przedstawionym w lemacie 3.65, używając wyłącznie ciągu operatorów inflacji względem pary wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią (zobacz twierdzenie A.58), por. [57, Algorithm 4.3], [67, Algorithm 4.3], [81, Algorithm 3.1] oraz [97, Algorithm 3.18].

**Algorytm A.59.** DANE Liczba całkowita  $m \geq 1$  oraz symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  dodatniego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli.

WYNIK Symetryczna macierz Grama  $G_D \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  grafu  $D \in \{\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ , słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnego z bigrafem  $\Delta$ , oraz macierz  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiująca słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$ , tzn. zachodzi równość  $B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B = G_D$ .

KROK 1. Inicjalizujemy macierze  $G_D = [d_{ij}] := G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz  $B := E \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ .

KROK 2. Dopóki istnieją takie indeksy  $1 \leq i < j \leq m$  w macierzy  $G_D$ , że  $d_{ij} > 0$ :

KROK 2.1. przyjmujemy  $G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_{ij}^- := E - (d_{ij} + d_{ji})e_{ij} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz  $e_{ij} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest macierzą z jedyną niezerową wartością 1 w  $i$ -tym wierszu oraz  $j$ -tej kolumnie, zobacz lemat 3.65.

KROK 3. Zwracamy macierze  $G_D \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  jako wynik.

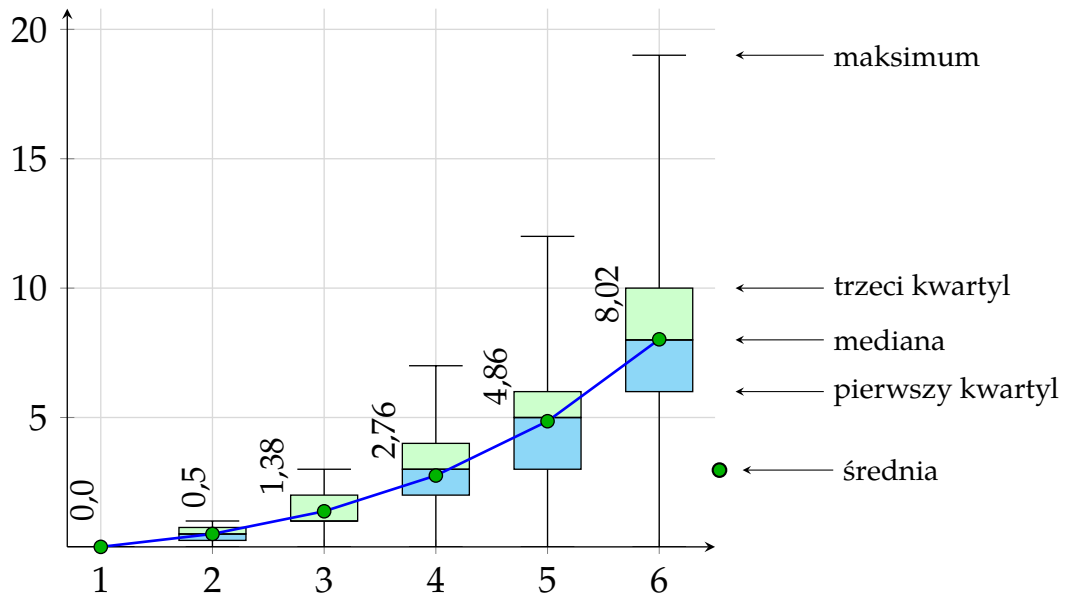
**Fakt A.60.** Niech  $m \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  spójnym dodatnim bigrafem bez pętli. Pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.59

- względem liczby użytych operatorów inflacji (stąd również względem użytych operacji na macierzach kwadratowych) jest rzędu  $O(m^2)$ ,
- względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych jest rzędu  $O(m^5)$ .

*Dowód.* Na podstawie dowodu twierdzenia A.58, krok 2.1. algorytmu A.59 powtarzany jest co najwyżej  $O(m^2)$  razy. Stąd pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.59 jest rzędu  $O(m^2)$  względem liczby użytych operatorów inflacji (równoważnie: względem liczby użytych operacji na macierzach kwadratowych).

Obliczenie w kroku 2.1 macierzy  $G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wymaga wykonania  $O(m^3)$  operacji arytmetycznych (przy użyciu standardowych algorytmów mnożenia macierzy; ze względu na niski wymiar analizowanych macierzy nie stosujemy algorytmów szybkiego mnożenia macierzy). W konsekwencji otrzymujemy pesymistyczną złożoność algorytmu A.59 rzędu  $O(m^5)$  względem liczby użytych prostych operacji arytmetycznych.  $\square$

**Uwaga A.61.** Chociaż pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.59 względem liczby użytych operatorów inflacji jest kwadratowa (twierdzenie A.58), to w praktycznych obliczeniach zastosowana liczba operatorów inflacji jest znacznie niższa. Na wykresie A.62 przedstawiamy liczbę zastosowanych operatorów inflacji podczas obliczeń przez naszą implementację algorytmu A.59, natomiast czasy działania przedstawiamy w tabeli A.1. Obliczenia zostały wykonane na komputerze wyposażonym w procesor AMD taktowany zegarem 3,6 GHz, wyposażonym w 32 GB pamięci RAM.



RYSUNEK A.62. LICZBA OPERATORÓW INFLACJI UŻYTYCH W ALGORYTMIE A.59 DLA SPÓJNYCH DODATNICH BIGRAFACH BEZ PĘTLI O  $n \leq 6$  WIERZCHOŁKACH

W tabeli A.63 przedstawiamy moc poszczególnych zbiorów wynikowych  $\mathcal{UBigr}_{D_n}$ , gdzie przez

$$\mathcal{UBigr}_{D_n} = \{\Delta \in \mathcal{UBigr}_n ; \Delta \text{ jest spójny oraz } \Delta \sim_{\mathbb{Z}} D_n\},$$

oznaczamy zbiór wszystkich dodatnich spójnych bigrafów bez pętli słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z grafem Dynkina  $D_n$ , tj. typu Dynkina  $\mathbf{Dyn}_{\Delta} = D_n$  (definicja 4.20(a)).

Zauważmy, że bigrafy dodatnie bez pętli można obliczyć używając [64, Algorithm 6.1]. Liczba wszystkich takich bigrafów o  $2 \leq n \leq 5$  wierzchołkach podana jest w [64, Table I].

TABELA A.63. LICZBA  $|\mathcal{UBigr}_{D_n}|$  WSZYSTKICH SPÓJNYCH DODATNICH BIGRAFÓW  
BEZ PĘTLI  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_n, n \leq 6$ , TYPU DYNKINA  $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$

| $\mathbf{Dyn}_\Delta = D_n$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $D_4$ | $A_5$ | $D_5$ | $A_6$ | $D_6$  | $E_6$  |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $ \mathcal{UBigr}_{D_n} $   | 1     | 2     | 16    | 200   | 104   | 3456  | 7552  | 76832 | 220800 | 355104 |

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu A.59 do obliczenia macierzy definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$ , gdzie  $D \in \{A_m, m \geq 1, D_m, m \geq 4, E_6, E_7, E_8\}$  jest jednym z diagramów Dynkina przedstawionych w tabeli 3.32.

**Przykład A.64.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_4$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym

$$\Delta : \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \quad \quad 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} \text{ oraz } \check{G}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}), G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Z przedstawienia formy kwadratowej  $q_\Delta(x)$  funkcjonału  $q_\Delta: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$  w postaci kanonicznej

$$q_\Delta(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)^2 + \frac{5}{8}x_4^2$$

wynika, że bigraf  $\Delta$  jest dodatni.

**KROK 1.** Inicjalizujemy macierze

$$G_D := G_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \text{ oraz } B := E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Z}).$$

**KROK 2.** Dopóki istnieją takie indeksy  $1 \leq i < j \leq 4$  w macierzy  $G_D$ , że  $d_{ij} > 0$ :

**KROK 2.1.** Dla  $i = 1, j = 2$  oraz  $d_{12} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy

$$G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 2.1.** Dla  $i = 1, j = 3$  oraz  $d_{12} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy

$$G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 2.1.** Dla  $i = 1, j = 4$  oraz  $d_{12} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy

$$G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 2.1.** Dla  $i = 2, j = 3$  oraz  $d_{12} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy

$$G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A.5. Algorytm inflacyjny dla bigrafów dodatnich oraz głównych

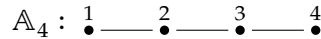
**Krok 2.1.** Dla  $i = 2, j = 4$  oraz  $d_{12} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy

$$G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Krok 2.1.** Dla  $i = 3, j = 4$  oraz  $d_{12} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy

$$G_D := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_D \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że  $G_D \in \mathbb{M}_4(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  jest symetryczną macierzą Grama bigrafu  $D = \mathbb{A}_4$



oraz macierz  $B \in \text{Gl}(4, \mathbb{Z})$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} D$ , tzn. zachodzi równość  $B^{tr} \cdot G_{\Delta} \cdot B = G_D$ .

### Algorytm inflacyjny dla bigrafów głównych

W następującym przykładzie pokazujemy, że w przeciwieństwie do bigrafów dodatnich, dla bigrafów głównych bez pętli można zbudować ciąg  $\mathbf{t}^-$  operatorów inflacji względem pary wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią, który jest dowolnej długości  $|\mathbf{t}^-|$ , w tym nieskończony, tj.  $|\mathbf{t}^-| = \infty$ .

**Przykład A.65.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_3$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym bez pętli

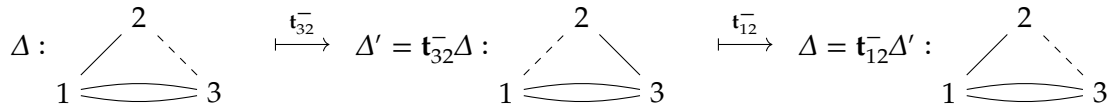
$$\Delta : \begin{array}{c} 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \quad 3 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \backslash \quad / \end{array} \text{ oraz } \check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{Z}), G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Ponieważ funkcjonał Grama  $q_{\Delta} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  można przedstawić w następującej postaci kanonicznej

$$q_{\Delta}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{3}{4}x_2^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2,$$

więc bigraf  $\Delta$  jest główny, a wektor  $\mathbf{h} = [1, 0, 1] \in \mathbb{Z}^3$  jest generatorem  $\text{Ker } q_{\Delta}$ .

Zauważmy, że po zastosowaniu ciągu operatorów inflacji  $\{\mathbf{t}_{32}^-, \mathbf{t}_{12}^-\}$  do bigrafu  $\Delta$  otrzymujemy bigraf  $\Delta$ , tj.  $\mathbf{t}_{12}^- \mathbf{t}_{32}^- \Delta = \Delta$ :



W konsekwencji, dla głównego bigrafu  $\Delta$  bez pętli można zbudować dowolnej długości, w tym nieskończony, ciąg operatorów inflacji względem pary wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią. W przedstawionym przykładzie takim ciągiem jest  $\mathbf{t}^- := \{\mathbf{t}_{32}^-, \mathbf{t}_{12}^-, \mathbf{t}_{32}^-, \mathbf{t}_{12}^-, \dots\}$ .

Analogiczny przykład można skonstruować dla nieujemnych bigrafów korangi dwa. Stąd, zbudowanie skończonego złożenia operatorów inflacji, które redukuje bigraf główny (korangi dwa) do grafu Euklidesa (rozszerzonego bigrafu Euklidesa) jest zadaniem nietrywialnym. Dla głównych bigrafów bez pętli algorytm inflacyjny  $\Delta \mapsto \mathbf{t}_{\bullet}^- \Delta$  został zbudowany w artykułach [57, Algorithm 5.4] oraz [81, Algorithm 3.1], zobacz również [67, Remark 4.9]. Algorytm A.66 jest jego macierzową wersją.

**Algorytm A.66.** **DANE** Liczba całkowita  $m \geq 1$ , symetryczna macierz Grama  $G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  głównego grafu krawędziowo-dwudzielnego  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  bez pętli, oraz wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$  generujący jądro  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^m$  funkcjonau Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$ , tj.  $\text{Ker } q_\Delta = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .

**WYNIK** Symetryczna macierz Grama  $G_{\tilde{D}} \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  grafu  $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-1}, m \geq 2, \tilde{D}_{m-1}, m \geq 5, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$ , słabo  $\mathbb{Z}$ -kongruentnego z bigrafem  $\Delta$ , oraz macierz  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  definiująca słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$ , tzn. zachodzi równość  $B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B = G_{\tilde{D}}$ .

**KROK 1.** Inicjalizujemy macierze  $G_{\tilde{D}} = [d_{ij}] := G_\Delta \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z}), B := E \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz wektor  $\tilde{\mathbf{h}} := \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^m$ .

**KROK 2.** Dopóki istnieją takie indeksy  $1 \leq i \neq j \leq m$ , że  $\tilde{\mathbf{h}}_i = 0, \tilde{\mathbf{h}}_j \neq 0$  oraz  $d_{ij} \neq 0$ :

**KROK 2.1.** Jeśli  $d_{ij} > 0$ , to przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j, G_{\tilde{D}} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_{ij}^- := E - (d_{ij} + d_{ji})e_{ij} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  oraz  $e_{ij} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  jest macierzą z jedyną niezerową wartością 1 w  $i$ -tym wierszu oraz  $j$ -tej kolumnie, zobacz lemat 3.65.

**KROK 2.2.** Jeśli  $d_{ij} < 0$ , to przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := -\tilde{\mathbf{h}}_i, G_{\tilde{D}} := (E_i^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_i^-$  oraz  $B := B \cdot E_i^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_i^- := \text{diag}(1, \dots, 1, -1_i, 1, \dots, 1)$  powstaje z macierzy jednostkowej  $E$  przez zamianę  $i$ -tego elementu na  $-1$  (lemat 3.65). Następnie przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j, G_{\tilde{D}} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_{ij}^- := E - (d_{ij} + d_{ji})e_{ij} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  (lemat 3.65).

**KROK 3.** Dopóki istnieje taki indeks  $1 \leq i \leq m$ , że  $\tilde{\mathbf{h}}_i < 0$ :

**KROK 3.1.** przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := -\tilde{\mathbf{h}}_i, G_{\tilde{D}} := (E_i^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_i^-$  oraz  $B := B \cdot E_i^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_i^- := \text{diag}(1, \dots, 1, -1_i, 1, \dots, 1)$  powstaje z macierzy jednostkowej  $E$  przez zamianę  $i$ -tego elementu na  $-1$  (lemat 3.65).

**KROK 4.** Dopóki istnieją takie indeksy  $1 \leq i < j \leq m$  w macierzy  $G_{\tilde{D}}$ , że  $d_{ij} > 0$ :

**KROK 4.1.** przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j, G_{\tilde{D}} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , gdzie  $E_{ij}^- := E - (d_{ij} + d_{ji})e_{ij} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  (lemat 3.65).

**KROK 5.** Zwracamy macierze  $G_{\tilde{D}} \in \mathbb{M}_m(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  oraz  $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{Z})$  jako wynik.

W następującym fakcie pokazujemy, że pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.66 jest wielomianowa.

**Fakt A.67.** Niech  $m \geq 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną oraz  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  spójnym głównym bigrafem bez pętli. Pesymistyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.66

- względem liczby użytych operatorów inflacji (stąd również względem operacji na macierzach kwadratowych) jest rzędu  $O(m^2)$ ,
- względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych jest rzędu  $O(m^5)$ .

*Dowód.* W kroku 2 algorytmu A.66 wektor  $\mathbf{h} \in \text{Ker } q_\Delta$  generujący jądro  $\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^m$  funkcjonau Grama  $q_\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$  bigrafu  $\Delta$  przekształcamy w wektor wierny  $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^m$  (tj.  $\tilde{\mathbf{h}}_k \neq 0$  dla  $1 \leq k \leq m$ ). W tym celu używamy operatorów inflacji względem pary wierzchołków  $i, j \in \Delta_0$  (zobacz twierdzenie 3.59) oraz operatorów inflacji w punkcie  $i \in \Delta_0$  (w kroku 2.2 w przypadku gdy  $d_{ij} < 0$ ). Ponieważ w wektorze z jądra głównego bigrafu  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_m$  wartości co najmniej dwóch współrzędnych są niezerowe, więc w kroku 2 używamy co najwyżej  $2(m-2)$  operatorów inflacji.

W kroku 3 algorytmu A.66 wektor wierny  $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^m$  przekształcamy w dodatni wektor wierny przy użyciu co najwyżej  $m$  operatorów inflacji w punkcie  $i \in \Delta_0$ .



W kroku 4 algorytmu A.66 przekształcamy dodatni wektor wierny  $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{Z}^m$  używając operatorów inflacji względem pary wierzchołków  $i, j \in \Delta_0$  dla dowolnej krawędzi przerywanej  $i \text{-----} j$  w bigrafie  $\Delta$ . Na podstawie twierdzenia 3.59(c), otrzymujemy nierówność  $1 \leq \tilde{\mathbf{h}}_i < \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j$ , a ponieważ  $-6 \leq h_i \leq 6$ , dla dowolnego  $i \in \{1, \dots, m\}$  (twierdzenie 3.63(b)), więc w ciągu operatorów inflacji zastosowanym w kroku 4 algorytmu A.66 można użyć co najwyżej 5 operatorów inflacji  $t_{ij}^-$  względem ustalonej pary wierzchołków  $i, j \in \Delta_0$  połączonych przerywaną krawędzią. Ponieważ wszystkich par  $i, j$ , gdzie  $i, j \in \Delta_0$ , jest co najwyżej  $\frac{m(m-1)}{2}$  (w przypadku bigrafu pełnego), więc ciąg operatorów inflacji  $t^-$  względem pary wierzchołków połączonych przerywaną krawędzią jest długości co najwyżej  $5 \cdot \frac{m(m-1)}{2} = 3 \cdot m \cdot (m-1) = O(m^2)$ .

Stąd pesymistyczna asymptotyczna złożoność obliczeniowa algorytmu A.66 jest rzędu  $O(m^2)$  względem liczby użytych operatorów inflacji (równoważnie: względem liczby użytych operacji na macierzach kwadratowych).

O asymptotycznej złożoności obliczeniowej algorytmu A.66 decyduje krok 4, powtarzany co najwyżej  $O(m^2)$  razy. Obliczenie w kroku 4.1 macierzy  $G_{\tilde{D}} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_{ij}^-$  oraz  $B := B \cdot E_{ij}^- \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$  wymaga wykonania  $O(m^3)$  operacji arytmetycznych (przy użyciu standardowych algorytmów mnożenia macierzy; ze względu na niski wymiar analizowanych macierzy nie stosujemy algorytmów *szybkiego* mnożenia macierzy), natomiast do obliczenia wartości  $\tilde{\mathbf{h}}_i := \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j$  używamy dwóch operacji dodawania oraz jednej mnożenia liczb. W konsekwencji otrzymujemy pesymistyczną złożoność obliczeniową rzędu  $O(m^5)$  względem liczby użytych operacji arytmetycznych.  $\square$

Następujący przykład ilustruje użycie algorytmu A.66 do obliczenia macierzy definiującej słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$ , gdzie  $\tilde{D} \in \{\tilde{A}_{m-1}, m \geq 2, \tilde{D}_{m-1}, m \geq 5, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8\}$  jest jednym z diagramów Euklidesa przedstawionych w tabeli 3.33.

**Przykład A.68.** Niech  $\Delta \in \mathcal{UBigr}_5$  będzie następującym grafem krawędziowo-dwu-dzielnym

$$\Delta : \begin{array}{c} & 5 & \\ & \diagdown & \diagup \\ 1 & \text{---} 2 & \text{---} 4 \\ & \diagup & \diagdown \\ & 3 & \end{array} \text{ oraz } \check{G}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}), G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z}).$$

Z przedstawienia formy kwadratowej  $q_{\Delta}(x)$  funkcjonału  $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{Z}$  w postaci kanonicznej

$$q_{\Delta}(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \frac{3}{4} \left(x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right)^2 + \frac{2}{3} \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5\right)^2 + \frac{1}{2} (x_4 - x_5)^2$$

wnioskujemy, że bigraf  $\Delta$  jest główny, a wektor  $\mathbf{h}_{\Delta} = [1, 0, -1, -1, -1]$  jest generatorem grupy  $\text{Ker } q_{\Delta} \subset \mathbb{Z}^5$ , tj.  $\text{Ker } q_{\Delta} = \mathbb{Z} \cdot \mathbf{h}$ .

**KROK 1.** Inicjalizujemy wektor  $\tilde{\mathbf{h}} := \mathbf{h} = [1, 0, -1, -1, -1] \in \text{Ker } q_{\Delta} \subset \mathbb{Z}^5$  oraz macierze

$$G_{\tilde{D}} := G_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \text{ oraz } B := E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{Z}).$$

**KROK 2.** Dopóki istnieją takie indeksy  $1 \leq i \neq j \leq 5$ , że  $\tilde{\mathbf{h}}_i = 0, \tilde{\mathbf{h}}_j \neq 0$  oraz  $d_{ij} \neq 0$ :

**KROK 2.1.** Dla indeksów  $i = 2, j = 1$  sprawdzamy, że  $\tilde{\mathbf{h}}_i = 0, \tilde{\mathbf{h}}_j = 1 \neq 0$ , oraz  $d_{ij} = \frac{1}{2} > 0$ , więc przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j$ , a stąd  $\tilde{\mathbf{h}} := [1, 1, -1, -1, -1] \in$

$\text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Ponadto przyjmujemy

$$G_{\tilde{D}} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 3.** Dopóki istnieje taki indeks  $1 \leq i \leq 5$ , że  $\tilde{\mathbf{h}}_i < 0$ :

**KROK 3.1.** Dla  $i = 3$  sprawdzamy, że  $\tilde{\mathbf{h}}_3 = -1 < 0$ , więc przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := -\tilde{\mathbf{h}}_i$ , a stąd  $\tilde{\mathbf{h}} := [1, 1, 1, -1, -1] \in \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Ponadto przyjmujemy

$$G_{\tilde{D}} := (E_i^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_i^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_i^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 3.1.** Dla  $i = 4$  sprawdzamy, że  $\tilde{\mathbf{h}}_4 = -1 < 0$ , więc przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := -\tilde{\mathbf{h}}_i$ , a stąd  $\tilde{\mathbf{h}} := [1, 1, 1, 1, -1] \in \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Ponadto przyjmujemy

$$G_{\tilde{D}} := (E_i^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_i^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_i^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 3.1.** Dla  $i = 5$  sprawdzamy, że  $\tilde{\mathbf{h}}_5 = -1 < 0$ , więc przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := -\tilde{\mathbf{h}}_i$ , a stąd  $\tilde{\mathbf{h}} := [1, 1, 1, 1, 1] \in \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Ponadto przyjmujemy

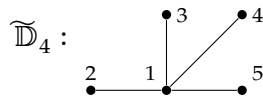
$$G_{\tilde{D}} := (E_i^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_i^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_i^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**KROK 4.** Dopóki istnieją takie indeksy  $1 \leq i < j \leq 5$  w macierzy  $G_{\tilde{D}}$ , że  $d_{ij} > 0$ :

**KROK 4.1.** Dla  $i = 1, j = 4$  oraz  $d_{14} = \frac{1}{2} > 0$  przyjmujemy  $\tilde{\mathbf{h}}_i := \tilde{\mathbf{h}}_i + (d_{ij} + d_{ji}) \cdot \tilde{\mathbf{h}}_j$ , a stąd  $\tilde{\mathbf{h}} := [2, 1, 1, 1, 1] \in \text{Ker } q_\Delta \subset \mathbb{Z}^5$ . Ponadto przyjmujemy

$$G_{\tilde{D}} := (E_{ij}^-)^{tr} \cdot G_{\tilde{D}} \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B := B \cdot E_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że  $G_{\tilde{D}} \in \mathbb{M}_5(\frac{1}{2}\mathbb{Z})$  jest symetryczną macierzą Grama bigrafu  $\tilde{D} = \tilde{D}_4$



oraz macierz  $B \in \text{Gl}(5, \mathbb{Z})$  definiuje słabą  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama  $\Delta \sim_{\mathbb{Z}} \tilde{D}$ , tj.  $B^{tr} \cdot G_\Delta \cdot B = G_{\tilde{D}}$ .

### Złożoność obliczeniowa algorytmów prezentowanych w rozprawie

W niniejszej rozprawie przedstawiamy kombinatoryczne i graficzne algorytmy, które są znane w literaturze (algorytmy [A.3](#), [A.7](#), [A.21](#), [A.30](#), [A.59](#), [A.66](#)), jak i te skonstruowane przez nas (algorytmy [5.48](#), [A.39](#), [A.55](#), [4.14](#), [5.22](#), [6.52](#), [6.68](#)) wraz z analizą ich pesymistycznej złożoności obliczeniowej.

Przy doborze narzędzi algorytmicznych położyliśmy duży nacisk na ich efektywność (co najwyżej wielomianową pesymistyczną złożoność obliczeniową). Przedstawiona analiza złożoności obliczeniowej stosowanych algorytmów (fakty [4.16](#), [5.61](#), [6.72](#), [A.4](#), [A.8](#), [A.40](#), [A.56](#), [A.60](#), [A.67](#)) dowodzi, że cel ten został w dużej mierze osiągnięty.

Jedynie algorytmy o pesymistycznej asymptotycznej złożoności obliczeniowej gorszej niż wielomianowa prezentowane w rozprawie, to:

- algorytm [A.21](#) o pesymistycznej złożoności obliczeniowej rzędu  $O(13^n \cdot n^2)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych, zobacz fakt [A.22](#),
- algorytm [A.30](#) o pesymistycznej złożoności obliczeniowej rzędu  $O(13^n \cdot n^2)$  względem liczby wykonywanych operacji arytmetycznych, zobacz fakt [A.31](#),
- algorytm [5.22](#) realizujący konstrukcję pierwiastkową, zobacz uwaga [5.24](#).

Co prawda są to algorytmy wykładnicze, jednak nie znamy dowodu pokazującego, że problemy, które te algorytmy rozwiązują, są *NP*-trudne.



## Spis symboli

|   |   |
|---|---|
| $\sim_{\mathbb{Z}}; \overset{B}{\sim}_{\mathbb{Z}}$                           | słaba $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama bigrafów, str. 27   |
| $\approx_{\mathbb{Z}}; \overset{B}{\approx}_{\mathbb{Z}}$                     | silna $\mathbb{Z}$ -kongruencja Grama bigrafów, str. 27   |
| $\text{Ad}_{\Delta}$  | macierz sąsiedztwa grafu $\Delta$ , str. 9  |
| $\widetilde{\mathbb{A}}_{m,s}$  | graf $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ z numeracją ustaloną względem $s$ , str. 27   |
| $\widetilde{\mathbb{A}}_{n,s}^2$  | bigraf $\widetilde{\mathbb{A}}_n^2$ z numeracją ustaloną względem $s$ , str. 41   |
| $\tilde{b}_{\Delta}$  | podwojona symetryczna polaryzacja funkcjonału Grama bigrafu $\Delta$ , str. 48  |
| $\text{Bigr}_m$   | zbiór grafów krawędziowo-dwudzielnych $\Delta$ o zbiorze wierzchołków ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, \dots, m$ , str. 16   |
| $\text{bigr}(q)$  | bigraf wyznaczony przez jednolity funkcjonał całkowity $q: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ , str. 17   |
| $\mathbb{C}$  | ciało liczb zespolonych, str. 1   |
| $C_I$   | macierz incydencji zbioru częściowo uporządkowanego $I$ , str. 13   |
| $c_{\Delta}$  | liczba Coxetera bigrafu $\Delta$ , str. 23  |
| $\check{c}_{\Delta}$  | zredukowana liczba Coxetera bigrafu $\Delta$ , str. 23  |
| $C_r^v$   | cylinder rangi $r$ wyznaczony przez wektor $v$ , str. 91  |
| $\text{CDtype}_{\Delta}$  | typ Coxetera-Dynkina bigrafu $\Delta$ , str. 53   |
| $\text{cox}_{\Delta}(t)$  | wielomian Coxetera bigrafu $\Delta$ , str. 23   |
| $\text{Cox}_{\Delta}$   | macierz Coxetera bigrafu $\Delta$ , str. 22   |
| $\mathcal{CPol}_{\widetilde{D}_n^2}$  | zbiór wielomianów Coxetera spójnych bigrafów słabo $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z $\widetilde{D}_n^2$ , str. 84  |
| $\mathcal{CN}_{\widetilde{D}_n^2}$  | zbiór par $(c_{\Delta}, \check{c}_{\Delta})$ liczb Coxetera spójnych bigrafów $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_n^2}$ , str. 84  |
| $\mathcal{CPol}_{\widetilde{D}_n^2} \ominus \mathcal{CN}_{\widetilde{D}_n^2}$ | zbiór trójek $(\text{cox}_{\Delta}(t), c_{\Delta}, \check{c}_{\Delta})$ , gdzie $\text{cox}_{\Delta}(t) \in \mathcal{CPol}_{\widetilde{D}_n^2}$ , $(c_{\Delta}, \check{c}_{\Delta}) \in \mathcal{CN}_{\widetilde{D}_n^2}$ oraz $\Delta \in \mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_n^2}$ , str. 84   |
| $D_m$   | jeden z jednorodnych diagramów Dynkina $D_m \in \{\mathbb{A}_m, m \geq 1, \mathbb{D}_m, m \geq 4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ , str. 21   |
| $\widetilde{D}_m$   | jeden z jednorodnych diagramów Euklidesa $\widetilde{D}_m \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_m, m \geq 1, \widetilde{\mathbb{D}}_m, m \geq 4, \widetilde{\mathbb{E}}_6, \widetilde{\mathbb{E}}_7, \widetilde{\mathbb{E}}_8\}$ , str. 21   |
| $\widetilde{D}_m^2$   | jeden z rozszerzonych bigrafów Euklidesa $\widetilde{D}_m^2 \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_n^2, n \geq 1, \widetilde{\mathbb{D}}_n^2, n \geq 4, \widetilde{\mathbb{E}}_6^2, \widetilde{\mathbb{E}}_7^2, \widetilde{\mathbb{E}}_8^2\}$ , str. 36   |
| $\widetilde{D}_{n,j}^2$   | jeden z bigrafów $\widetilde{D}_{n,j}^2 \in \{\widetilde{\mathbb{A}}_{1,1}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{2,1}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{2,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{3,1}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{3,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,1}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,2}^2, \widetilde{\mathbb{A}}_{4,3}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,1}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,2}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,3}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,4}^2, \widetilde{\mathbb{D}}_{4,5}^2\}$ , str. 85 |
| $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$   | graf krawędziowo-dwudzielny (bigraf), str. 15;<br>graf, graf prosty, str. 9   |
| $\Delta_1(a, b)$  | zbiór krawędzi incydentnych z wierzchołkami $a$ oraz $b$ bigrafu $\Delta$ , str. 16   |
| $\Delta^{(s)}; \Delta^{(s,r)}$  | podgraf krawędziowo-dwudzielny bigrafu $\Delta$ otrzymany przez opuszczenie wierzchołka $a_s$ oraz krawędzi z nim incydentnych (odp. przez opuszczenie wierzchołków $a_s, a_r$ oraz incydentnych z nimi krawędzi), str. 45  |
| $\Delta_1^+; \Delta_1^-$  | zbiór odpowiednio krawędzi przerywanych i ciągłych bigrafu $\Delta$ , str. 16   |

|  |   |
|--|---|
| $\Delta'[[u, w]]$  | spójny bigraf korangi dwa otrzymany w wyniku konstrukcji ze spójnego dodatniego bigrafu $\Delta'$ i pary jego pierwiastków $u, w \in \mathcal{R}_{\Delta'}$ , str. 59                   |
| $\bar{\Delta}$   | graf nieoznakowany otrzymany z grafu oznakowanego $\Delta$ przez opuszczenie oznakowania, str. 11   |
| <b>Dyn<sub>I</sub></b>   | typ Dynkina zbioru częściowo uporządkowanego $I$ , str. 14  |
| <b>Dyn<sub>Δ</sub></b>   | typ Dynkina spójnego bigrafu $\Delta$ , str. 53   |
| $\deg(v)$  | stopień wierzchołka w grafie, str. 11   |
| $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$                                 | macierz diagonalna, str. 2  |
| $d_{ab}^{\Delta}$  | liczba krawędzi przerywanych minus liczba krawędzi ciągłych między wierzchołkami $a, b$ w bigrafie $\Delta$ , str. 16   |
| $e_1, \dots, e_m$  | elementy bazy standardowej grupy $\mathbb{Z}^m$ , str. 25   |
| $e_{1, \dots, k}$  | wektor równy $e_{1, \dots, k} := e_1 + \dots + e_k$ , str. 92   |
| $E$  | macierz jednostkowa, $E = [e_1^{tr}, \dots, e_m^{tr}] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ , str. 32   |
| $E_a^-$  | macierz powstała z macierzy jednostkowej $E$ przez zamianę $a$ -tej współrzędnej na przekątnej na $-1$ , str. 32  |
| $E_{ab}^-$   | macierz powstała z macierzy jednostkowej $E$ przez wstawienie liczby $-d_{ab}^{\Delta}$ w $a$ -tym wierszu oraz $b$ -tej kolumnie, str. 33  |
| $\Phi_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$                     | transformacja Coxetera bigrafu $\Delta$ , str. 22   |
| $\Gamma(\mathcal{R}, \Phi_{\Delta})$                                       | kołczan $\Phi_{\Delta}$ -oczkowy (geometria $\Phi_{\Delta}$ -sieciovą pierwiastków), str. 90  |
| $\Gamma_{\Delta}$  | $\Phi_{\Delta}$ -oczkowy obszar podstawowy, str. 98   |
| $\check{G}_{\Delta}$   | niesymetryczna macierz Grama bigrafu $\Delta$ , str. 16,  |
| $G_{\Delta}$   | symetryczna macierz Grama bigrafu $\Delta$ , str. 17,   |
| $\widehat{G}_{\Delta}$   | podwojona symetryczna macierz Grama $\widehat{G}_{\Delta} := G_{\Delta} + G_{\Delta}^{tr}$ bigrafu $\Delta$ , str. 48,  |
| $\text{Gl}(m; \mathbb{Z})$   | $\text{Gl}(m; \mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z}); \det A = \pm 1\}$ grupa kwadratowych macierzy $\mathbb{Z}$ -odwracalnych stopnia $m$ względem mnożenia macierzy, str. 27 |
| $\mathbf{h}_{\overline{D}_m}$  | wektor generujący grupę $\text{Ker } q_{\overline{D}_m}$ , str. 22  |
| $\mathbf{h}_{\overline{D}_m^{(1)}}, \mathbf{h}_{\overline{D}_m^{(2)}}$     | wektory generujące grupę $\text{Ker } q_{\overline{D}_m^2}$ , str. 37   |
| $\mathbf{h}_{\overline{D}_m^{(j_1)}}, \mathbf{h}_{\overline{D}_m^{(j_2)}}$ | wektory tworzące $(j_1, j_2)$ -specjalną $\mathbb{Z}$ -bazę grupy $\text{Ker } q_{\Delta}$ , str. 45  |
| $I \equiv (I, \leq)$   | zbiór częściowo uporządkowany, str. 13  |
| $\text{Ker } q_{\Delta}$   | jądro funkcjonału $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ , str. 18   |
| $L_{\Delta}$   | symetryczna macierz Laplace'a, str. 11  |
| $\hat{L}_{\Delta}$   | symetryczna znormalizowana macierz Laplace'a, str. 11   |
| $\mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$   | pierścień całkowitoliczbowych macierzy kwadratowych stopnia $m$ , str. 2  |
| $\mathcal{M}_{v, v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}}$                               | $\Phi_{\Delta}$ -oczko szerokości $k \geq 1$ , str. 89  |
| $\widetilde{\mathcal{M}}$  | zbiór $\Phi$ -niezmiennicy, str. 91   |
| $\mathbb{N}$   | zbiór liczb naturalnych, str. 1   |
| $\text{Orb}(v)$  | $\Phi_{\Delta}$ -orbita wektora $v \in \mathcal{R}_{\Delta}(d)$ , str. 89   |
| $\mathcal{O}(v)$   | graficzne przedstawienie $\Phi_{\Delta}$ -orbity wektora $v \in \mathcal{R}_{\Delta}(d)$ w postaci grafu, str. 89   |
| $\mathbb{Q}$   | ciało liczb wymiernych, str. 1  |
| $Q_{\Delta}$   | symetryczna bezznakowa macierz Laplace'a, str. 11   |
| $q_{\Delta}$   | funkcjonał Grama bigrafu $\Delta$ , str. 17,  |
| $\mathbb{R}$   | ciało liczb rzeczywistych, str. 1   |
| $\widetilde{\mathcal{R}}_{\Delta}$   | zbiór $\Phi$ -niezmiennicy posiadający strukturę $\Phi$ -sieciovego systemu pierwiastków, str. 90   |
| $\mathcal{R}_{\Delta}(d), \mathcal{R}_{q_{\Delta}}(d)$                     | zbiór pierwiastków z liczby $d \in \mathbb{Z}$ bigrafu $\Delta$ (funkcjonału kwadratowego $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ), str. 18                                  |
| $\mathcal{R}_{\Delta}, \mathcal{R}_{q_{\Delta}}$                           | zbiór pierwiastków (z jedynki) bigrafu $\Delta$ (funkcjonału kwadratowego $q_{\Delta}: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ), str. 18  |



|   |   |
|---|---|
| $\mathcal{R}_\Delta^{red}$                | redukt: skończony podzbiór zbioru pierwiastków $\mathcal{R}_\Delta^{red} \subseteq \mathcal{R}_\Delta$ , str. 133   |
| $\text{rz}(A)$                            | rzęd macierzy $A$ nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Q}$ , str. 14  |
| $\text{spec}_\Delta$                      | spektrum (widmo) grafu $\Delta$ , str. 9  |
| $\text{specc}_\Delta$                     | spektrum Coxetera bigrafu $\Delta$ , str. 23  |
| $\text{spec}_{\widehat{G}_\Delta}$        | spektrum podwojonej symetrycznej macierzy Grama $\widehat{G}_\Delta := \check{G}_\Delta + \check{G}_\Delta^{tr} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$ bigrafu $\Delta$ , str. 127 |
| $\mathbf{t}_a^-$                          | operator inflacji w punkcie $a$ ( <i>switching</i> ), str. 30   |
| $\mathbf{t}_{ab}^-$                       | operator inflacji względem pary punktów $a, b$ połączonych krawędzią przerywaną, str. 30  |
| $\mathbf{t}_a^+$                          | izomorfizm grup $\mathbf{t}_a^+ := (\mathbf{t}_a^-)^{-1}$ , str. 31   |
| $\mathbf{t}_{ab}^+$                       | izomorfizm grup $\mathbf{t}_{ab}^+ := (\mathbf{t}_{ab}^-)^{-1}$ , str. 31   |
| $\mathcal{T}_r^v$                         | torus rangi $r$ wyznaczony przez wektor $v$ , str. 91;<br>tuba klepsydralna rangi $r$ wyznaczona przez wektor $v$ , str. 95   |
| $\mathcal{UBigr}_m$                       | podzbiór zbioru $\mathcal{Bigr}_m$ złożony z bigrafów bez pętli o $m$ wierzchołkach, str. 16  |
| $\mathcal{UBigr}_{D_n}$                   | zbiór spójnych bigrafów bez pętli słabo $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z grafem Dynkina $D_n$ , str. 145   |
| $\mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_n^2}$     | zbiór spójnych bigrafów bez pętli słabo $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z rozszerzonym bigrafem Euklidesa $\widetilde{D}_n^2$ , str. 84                                       |
| $\mathcal{UBigr}_{\widetilde{D}_{n,j}^2}$ | zbiór spójnych bigrafów bez pętli silnie $\mathbb{Z}$ -kongruentnych z rozszerzonym bigrafem Euklidesa $\widetilde{D}_{n,j}^2$ , str. 84                                  |
| $\mathbf{u}_{D_m}$                        | maksymalny dodatni pierwiastek grafu Dynkina $D_m$ , str. 22  |
| $\hat{v}$                                 | wektor przeciwny do wektora $v \in \mathbb{Z}^m$ , tj. $\hat{v} := -v$ , str. 92  |
| $\mathbb{Z}$                              | grupa liczb całkowitych, str. 1   |
| $\mathbb{Z}^m$                            | produkt kartezjański $m \geq 1$ egzemplarzy grupy $\mathbb{Z}$ traktowany jako przemienne grupa wolna względem dodawania wektorów, str. 1                                 |



## Spis cytowanej literatury

- [1] I. Assem, D. Simson i A. Skowroński, „Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 1. Techniques of Representation Theory”, London Math. Soc. Student Texts, Tom 65, Cambridge-New York: Cambridge Univ. Press, 2006, x+458 str., doi: [10.1017/CB09780511614309](https://doi.org/10.1017/CB09780511614309).
- [2] F. Barahona, *On the computational complexity of Ising spin glass models*, J. Phys. A **15** (1982), 3241–3253, URL: <http://stacks.iop.org/0305-4470/15/3241>.
- [3] M. Barot i J. A. de la Peña, *The Dynkin type of a non-negative unit form*, Exposition. Math. **17** (1999), 339–348.
- [4] S. J. Berkowitz, *On computing the determinant in small parallel time using a small number of processors*, Information Processing Letters **18** (1984), 147–150, doi: [10.1016/0020-0190\(84\)90018-8](https://doi.org/10.1016/0020-0190(84)90018-8).
- [5] I. N. Bernštejn, I. M. Gel'fand i V. A. Ponomarev, *Coxeter functors, and Gabriel's theorem*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), 19–33.
- [6] R. Bocian, M. Felisiak i D. Simson, „On Coxeter type classification of loop-free edge-bipartite graphs and matrix morsifications”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2013, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.]*, 2014, 115–118, doi: [10.1109/SYNASC.2013.22](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2013.22).
- [7] R. Bocian, M. Felisiak i D. Simson, *Numeric and mesh algorithms for the Coxeter spectral study of positive edge-bipartite graphs and their isotropy groups*, J. Comput. Appl. Math. **259** (2014), 815–827, doi: [10.1016/j.cam.2013.07.013](https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.07.013).
- [8] V. M. Bondarenko, V. Futorny, T. Klimchuk, V. V. Sergeichuk i K. Yusenko, *Systems of subspaces of a unitary space*, Linear Algebra Appl. **438** (2013), 2561–2573, doi: [10.1016/j.laa.2012.10.038](https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.10.038).
- [9] V. M. Bondarenko i A. M. Polishchuk, „On finiteness of critical Tits forms of posets”, w: *Symmetry in nonlinear mathematical physics*, Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., Volume 50, Part 3, Kiev: Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 2004, 1061–1063, URL: <http://www.slac.stanford.edu/econf/C0306234/papers/bondarenkoV.pdf>.
- [10] V. M. Bondarenko i M. V. Styopochkina, „(Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса”, w: *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць*. Kiev: Ін-ту математики НАН України, 2005, 18–58, URL: [http://www.imath.kiev.ua/~umzh/Archiv/2008/09/UMZh\\_2008\\_09\\_1157.pdf](http://www.imath.kiev.ua/~umzh/Archiv/2008/09/UMZh_2008_09_1157.pdf).
- [11] V. M. Bondarenko i M. V. Styopochkina, *On posets of width two with positive Tits form*, Algebra Discrete Math. (2005), 20–35, URL: <http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2005/N2/adm-n2-2.pdf>.
- [12] K. Bongartz, *Algebras and quadratic forms*, J. London Math. Soc. (2) **28** (1983), 461–469, doi: [10.1112/jlms/s2-28.3.461](https://doi.org/10.1112/jlms/s2-28.3.461).
- [13] A. I. Borevich i I. R. Shafarevich, „Number Theory”, Pure and Applied Mathematics, Tom 20, Academic Press, New York-London, 1966, x+435 str.,

- [14] N. Bourbaki, „Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines”, Actualités Scientifiques et Industrielles, Tom 1337, Paris: Hermann, 1968, 288 str.
- [15] R. A. Brualdi i D. Cvetković, „A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications”, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2009, xvi+267 str.,
- [16] R. A. Brualdi i H. J. Ryser, „Combinatorial Matrix Theory”, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Tom 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, x+367 str., doi: [10.1017/CB09781107325708](https://doi.org/10.1017/CB09781107325708).
- [17] D. Cvetković, P. Rowlinson i S. Simić, „Eigenspaces of Graphs”, Tom 66, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, xiv+258 str., doi: [10.1017/CB09781139086547](https://doi.org/10.1017/CB09781139086547).
- [18] D. Cvetković, P. Rowlinson i S. Simić, „An Introduction to the Theory of Graph Spectra”, London Math. Soc. Student Texts, Tom 75, Cambridge: Cambridge University Press, 2010, xii+364 str., doi: [10.1017/CB09780511801518](https://doi.org/10.1017/CB09780511801518).
- [19] R. Diestel, „Graph Theory”, Graduate Texts in Mathematics, Tom 173, New York: Springer-Verlag, 1997, xiv+286 str.
- [20] D. Ž. Đoković, F. Szechtman i K. Zhao, *An algorithm that carries a square matrix into its transpose by an involutory congruence transformation*, Electronic Journal of Linear Algebra **10** (2003), 320–340, URL: <http://eudml.org/doc/124203>.
- [21] P. Dräxler, Y. A. Drozd, N. S. Golovachtchuk, S. A. Ovsienko i M. V. Zeldych, *Towards the classification of sincere weakly positive unit forms*, European J. Combin. **16** (1995), 1–16, doi: [10.1016/0195-6698\(95\)90084-5](https://doi.org/10.1016/0195-6698(95)90084-5).
- [22] Y. A. Drozd, *Coxeter transformations and representations of partially ordered sets*, Functional Analysis and Its Applications **8** (1974), 219–225, doi: [10.1007/BF01075695](https://doi.org/10.1007/BF01075695).
- [23] E. B. Dynkin, *Классификация простых групп Ли*, Математический сборник **18** (1946), Российская академия наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, 347–352, URL: <http://eudml.org/doc/65313>.
- [24] M. Felisiak, „Algorytmy numeryczne w spektralnej analizie Coxetera bigrafów”, rozprawa doktorska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 2017.
- [25] M. Felisiak i D. Simson, „Experiences in computing mesh root systems for Dynkin diagrams using Maple and C++”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2011*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2011, 83–86, doi: [10.1109/SYNASC.2011.41](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2011.41).
- [26] M. Felisiak i D. Simson, „On computing mesh root systems and the isotropy group for simply-laced Dynkin diagrams”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2012*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2012, 91–97, doi: [10.1109/SYNASC.2012.16](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2012.16).
- [27] M. Felisiak i D. Simson, *On combinatorial algorithms computing mesh root systems and matrix morsifications for the Dynkin diagram  $A_n$* , Discrete Math. **313** (2013), 1358–1367, doi: [10.1016/j.disc.2013.02.003](https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.02.003).
- [28] M. Felisiak i D. Simson, *Applications of matrix morsifications to Coxeter spectral study of loop-free edge-bipartite graphs*, Discrete Appl. Math. **192** (2015), 49–64, doi: [10.1016/j.dam.2014.05.002](https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.05.002).
- [29] P. Gabriel i A. V. Roĭter, „Representations of Finite-Dimensional Algebras”, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Tom 73, Springer, Berlin, 1992, iv+177 str.,

- [30] A. Garrido, *Graph properties and invariants, by their associate matrices*, Adv. Model. Optim. **11** (2009), 337–348.
- [31] M. Gąsiorek, „Efficient computation of the isotropy group of a finite graph: a combinatorial Approach”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2013*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014, 104–111, doi: [10.1109/SYNASC.2013.21](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2013.21).
- [32] M. Gąsiorek, „Obliczenia symboliczne i algorytmy kombinatoryczne w spektralnej klasyfikacji skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych”, rozprawa doktorska, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, 2018.
- [33] M. Gąsiorek i D. Simson, *A computation of positive one-peak posets that are Tits-sincere*, Colloq. Math. **127** (2012), 83–103, doi: [10.4064/cm127-1-6](https://doi.org/10.4064/cm127-1-6).
- [34] M. Gąsiorek i D. Simson, *One-peak posets with positive quadratic Tits form, their mesh translation quivers of roots, and programming in Maple and Python*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2240–2272, doi: [10.1016/j.laa.2011.10.045](https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.10.045).
- [35] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, „On Coxeter spectral study of posets and a digraph isomorphism problem”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2012*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2012, 369–375, doi: [10.1109/SYNASC.2012.56](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2012.56).
- [36] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *On Coxeter spectral study of finite posets using computer algebra tools*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **40** (2013), 121–127, doi: [10.1016/j.endm.2013.05.023](https://doi.org/10.1016/j.endm.2013.05.023).
- [37] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, „On corank two edge-bipartite graphs and simply extended Euclidean diagrams”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2014*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014, 66–73, doi: [10.1109/SYNASC.2014.17](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2014.17).
- [38] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *Algorithmic computation of principal posets using Maple and Python*, Algebra and Discr. Math. **17** (2014), 33–69, URL: [http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2014/N1/adm-n1\(2014\)-4.pdf](http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2014/N1/adm-n1(2014)-4.pdf).
- [39] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *On Coxeter type study of non-negative posets using matrix morsifications and isotropy groups of Dynkin and Euclidean diagrams*, European J. Combin. **48** (2015), 127–142, doi: [10.1016/j.ejc.2015.02.015](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.02.015).
- [40] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *Structure and a Coxeter-Dynkin type classification of corank two non-negative posets*, Linear Algebra Appl. **469** (2015), 76–113, doi: [10.1016/j.laa.2014.11.003](https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.11.003).
- [41] M. Gąsiorek, D. Simson i K. Zając, *A Gram classification of non-negative corank-two loop-free edge-bipartite graphs*, Linear Algebra Appl. **500** (2016), 88–118, doi: [10.1016/j.laa.2016.03.007](https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.007).
- [42] M. Gąsiorek i K. Zając, *On algorithmic study of non-negative posets of corank at most two and their Coxeter-Dynkin types*, Fundamenta Informaticae **139** (2015), 347–367, doi: [10.3233/FI-2015-1238](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1238).
- [43] T. G. Gerasimova, R. A. Horn i V. V. Sergeichuk, *Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one*, Linear Algebra Appl. **431** (2009), 1620–1632, doi: [10.1016/j.laa.2009.05.034](https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.034).
- [44] C. Godsil i G. Royle, „Algebraic Graph Theory”, Graduate Texts in Mathematics, Tom 207, Springer-Verlag, New York, 2001, xx+439 str., doi: [10.1007/978-1-4613-0163-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9).
- [45] D. Happel, „Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras”, London Mathematical Society Lecture Note Series, Tom 119, Cambridge: Cambridge University Press, 1988, x+208 str.

- [46] F. Harary, *On the notion of balance of a signed graph*, Michigan Math. J **2** (1953), 143–146, doi: [10.1307/mmj/1028989917](https://doi.org/10.1307/mmj/1028989917).
- [47] H. von Höhne i J. A. de la Peña, *Isotropic vectors of non-negative integral quadratic forms*, European J. Combin. **19** (1998), 621–638, doi: [10.1006/eujc.1998.0217](https://doi.org/10.1006/eujc.1998.0217).
- [48] H.-J. von Höhne, *On weakly positive unit forms*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 312–336, doi: [10.1007/BF02566771](https://doi.org/10.1007/BF02566771).
- [49] R. A. Horn i C. R. Johnson, „Matrix Analysis”, 2nd ed., Cambridge University Press, 2013, xviii+643 str.
- [50] R. A. Horn i V. V. Sergeichuk, *Congruences of a square matrix and its transpose*, Linear Algebra Appl. **389** (2004), 347–353, doi: [10.1016/j.laa.2004.03.010](https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.03.010).
- [51] J. E. Humphreys, „Reflection Groups and Coxeter Groups”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Tom 29, Cambridge: Cambridge University Press, 1990, xii+204 str. doi: [10.1017/CB09780511623646](https://doi.org/10.1017/CB09780511623646).
- [52] T. Inohara, *Characterization of clusterability of signed graph in terms of Newcomb’s balance of sentiments*, Appl. Math. Comput. **133** (2002), 93–104, doi: [10.1016/S0096-3003\(01\)00224-7](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00224-7).
- [53] M. Kaniecki, J. Kosakowska, P. Malicki i G. Marczak, *A horizontal mesh algorithm for a class of edge-bipartite graphs and their matrix morsifications*, Fundamenta Informaticae **136** (2015), 345–379.
- [54] S. Kasjan i D. Simson, *Algorithms for isotropy groups of Cox-regular edge-bipartite graphs*, Fundamenta Informaticae **139** (2015), 249–275, doi: [10.3233/FI-2015-1234](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1234).
- [55] S. Kasjan i D. Simson, *Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, I. Mesh root systems*, Fundamenta Informaticae **139** (2015), 153–184, doi: [10.3233/FI-2015-1230](https://doi.org/10.3233/FI-2015-1230).
- [56] S. Kasjan i D. Simson, *Mesh algorithms for Coxeter spectral classification of Cox-regular edge-bipartite graphs with loops, II. Application to Coxeter spectral analysis*, Fundamenta Informaticae **139** (2015), 185–209, doi: [10.3233/FI-2012-1231](https://doi.org/10.3233/FI-2012-1231).
- [57] J. Kosakowska, *Inflation algorithms for positive and principal edge-bipartite graphs and unit quadratic forms*, Fundamenta Informaticae **119** (2012), 149–162, doi: [10.3233/FI-2012-731](https://doi.org/10.3233/FI-2012-731).
- [58] J. Kunegis, S. Schmidt, A. Lommatzsch, J. Lerner, E. W. D. Luca i S. Albayrak, „Spectral analysis of signed graphs for clustering, prediction and visualization”, w: *Proceedings of the SIAM International Conference on Data Mining, SDM 2010, April 29 - May 1, 2010, Columbus, Ohio, USA, 2010*, 559–570, doi: [10.1137/1.9781611972801.49](https://doi.org/10.1137/1.9781611972801.49).
- [59] S. Lang, „Algebra”, wyd. 2 popr., Państwowe Wydaw. Naukowe, 1984, 499 str.
- [60] H. Lenzing i J. A. de la Peña, *A Chebysheff recursion formula for Coxeter polynomials*, Linear Algebra Appl. **430** (2009), 947–956, doi: [10.1016/j.laa.2008.09.038](https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.09.038).
- [61] H. Lenzing i J. A. de la Peña, „Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities”, w: *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, 541–588, doi: [10.4171/062-1/13](https://doi.org/10.4171/062-1/13).
- [62] Z. Lonc, „Wstęp do algorytmicznej teorii grafów”, CAS Lecture Notes, Numer 3, Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2010, 121 str.
- [63] G. Marczak, A. Polak i D. Simson, *P-critical integral quadratic forms and positive unit forms: an algorithmic approach*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 1873–1888, doi: [10.1016/j.laa.2010.06.052](https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.06.052).



- [64] G. Marczak, D. Simson i K. Zając, „On computing non-negative loop-free edge-bipartite graphs”, w: *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2013*, IEEE CPS, Los Alamitos, Calif. [etc.], 2014, 68–75, doi: [10.1109/SYNASC.2013.16](https://doi.org/10.1109/SYNASC.2013.16).
- [65] R. Merris, *Laplacian matrices of graphs: a survey*, Linear Algebra Appl. **197/198** (1994), Second Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS) (Lisbon, 1992), 143–176, doi: [10.1016/0024-3795\(94\)90486-3](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90486-3).
- [66] A. Mostowski i M. Stark, „Elementy algebry wyższej”, wyd. 4, Państwowe Wydaw. Naukowe, 1968, 397 str.
- [67] A. Mróz, *Congruences of edge-bipartite graphs with applications to Grothendieck group recognition I. Inflation algorithm revisited*, Fundamenta Informaticae **146** (2016), 121–144, doi: [10.3233/FI-2016-1377](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1377).
- [68] A. Mróz, *Congruences of edge-bipartite graphs with applications to Grothendieck group recognition II. Coxeter type study*, Fundamenta Informaticae **146** (2016), 145–177, doi: [10.3233/FI-2016-1378](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1378).
- [69] A. Mróz i J. A. de la Peña, *Tubes in derived categories and cyclotomic factors of the Coxeter polynomial of an algebra*, J. Algebra **420** (2014), 242–260, doi: [10.1016/j.jalgebra.2014.08.017](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.08.017).
- [70] A. Mróz i J. A. de la Peña, *Periodicity in bilinear lattices and the Coxeter formalism*, Linear Algebra Appl. **493** (2016), 227–260, doi: [10.1016/j.laa.2015.11.021](https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.11.021).
- [71] S. Ovsienko, „Целые слабо положительные формы”, w: *Шуровские матричные задачи И квадратичные формы*, Институт математики АН УССР, Киев, 1978, 3–17.
- [72] A. Polak i D. Simson, *Algorithms computing  $O(n, \mathbb{Z})$ -orbits of  $P$ -critical edge-bipartite graphs and  $P$ -critical unit forms using Maple and C#*, Algebra and Discr. Math. **16** (2013), 242–286, URL: [http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2013/N4/adm-n4\(2013\)-9.pdf](http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2013/N4/adm-n4(2013)-9.pdf).
- [73] A. Polak i D. Simson, *Coxeter spectral classification of almost TP-critical one-peak posets using symbolic and numeric computations*, Linear Algebra Appl. **445** (2014), 223–255, doi: [10.1016/j.laa.2013.12.018](https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.12.018).
- [74] C. M. Ringel, „Tame Algebras and Integral Quadratic Forms”, Lecture Notes in Mathematics, Tom 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xiii+376 str., doi: [10.1007/BFb0072870](https://doi.org/10.1007/BFb0072870).
- [75] J. J. Seidel, *Strongly regular graphs with  $(-1, 1, 0)$  adjacency matrix having eigenvalue 3*, Linear Algebra Appl. **1** (1968), 281–298.
- [76] D. Simson, „Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories”, Algebra, Logic and Applications, Tom 4, Montreux: Gordon i Breach Science Publishers, 1992, xvi+499 str.
- [77] D. Simson, *Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories*, Colloq. Math. **115** (2009), 259–295, doi: [10.4064/cm115-2-9](https://doi.org/10.4064/cm115-2-9).
- [78] D. Simson, *Integral bilinear forms, Coxeter transformations and Coxeter polynomials of finite posets*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 699–717, doi: [10.1016/j.laa.2010.03.041](https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.03.041).
- [79] D. Simson, *Mesh algorithms for solving principal Diophantine equations, sand-glass tubes and tori of roots*, Fundamenta Informaticae **109** (2011), 425–462, doi: [10.3233/FI-2011-520](https://doi.org/10.3233/FI-2011-520).
- [80] D. Simson, *Mesh geometries of root orbits of integral quadratic forms*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 13–34, doi: [10.1016/j.jpaa.2010.02.029](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2010.02.029).

- [81] D. Simson, *A Coxeter–Gram classification of simply laced edge-bipartite graphs*, SIAM J. Discrete Math. **27** (2013), 827–854, doi: [10.1137/110843721](https://doi.org/10.1137/110843721).
- [82] D. Simson, *Algorithms determining matrix morsifications, Weyl orbits, Coxeter polynomials and mesh geometries of roots for Dynkin diagrams*, Fundamenta Informaticae **123** (2013), 447–490, doi: [10.3233/FI-2013-820](https://doi.org/10.3233/FI-2013-820).
- [83] D. Simson, *A framework for Coxeter spectral analysis of edge-bipartite graphs, their rational morsifications and mesh geometries of root orbits*, Fundamenta Informaticae **124** (2013), 309–338, doi: [10.3233/FI-2013-836](https://doi.org/10.3233/FI-2013-836).
- [84] D. Simson, *Toroidal algorithms for mesh geometries of root orbits of the Dynkin diagram  $\mathbb{D}_4$* , Fundamenta Informaticae **124** (2013), 339–364, doi: [10.3233/FI-2013-837](https://doi.org/10.3233/FI-2013-837).
- [85] D. Simson, *Tame-wild dichotomy of Birkhoff type problems for nilpotent linear operators*, J. Algebra **424** (2015), 254–293, doi: [10.1016/j.jalgebra.2014.11.008](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.11.008).
- [86] D. Simson, *Symbolic algorithms computing Gram congruences in the Coxeter spectral classification of edge-bipartite graphs, I. A Gram classification*, Fundamenta Informaticae **145** (2016), 19–48, doi: [10.3233/FI-2016-1345](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1345).
- [87] D. Simson, *Symbolic algorithms computing Gram congruences in the Coxeter spectral classification of edge-bipartite graphs, II. Isotropy mini-groups*, Fundamenta Informaticae **145** (2016), 49–80, doi: [10.3233/FI-2016-1346](https://doi.org/10.3233/FI-2016-1346).
- [88] D. Simson, *A computational technique in Coxeter spectral study of symmetrizable integer Cartan matrices*, J. Comput. Appl. Math. (2018), w druku, 26 str.
- [89] D. Simson, *A Coxeter spectral classification of positive edge-bipartite graphs I. Dynkin types  $B_n, C_n, F_4, E_6, E_7$  and  $E_8$* , Linear Algebra Appl. (2018), w druku, 18 str.
- [90] D. Simson, *A Coxeter spectral classification of positive edge-bipartite graphs II. Dynkin types  $D_n$*  (2018), preprint, 26 str.
- [91] D. Simson, *Numeric computations of strong Gram congruences for positive edge-bipartite graphs with loops* (2018), preprint, 21 str.
- [92] D. Simson i A. Skowroński, „Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 2. Tubes and Concealed Algebras of Euclidean type”, London Math. Soc. Student Texts, Tom 71, Cambridge-New York: Cambridge Univ. Press, 2007, xii+308 str., doi: [10.1017/CB09780511619212](https://doi.org/10.1017/CB09780511619212).
- [93] D. Simson i A. Skowroński, „Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Volume 3. Representation-Infinite Tilted Algebras”, London Math. Soc. Student Texts, Tom 72, Cambridge-New York: Cambridge Univ. Press, 2007, xii+456 str., doi: [10.1017/CB09780511619403](https://doi.org/10.1017/CB09780511619403).
- [94] D. Simson i M. Wojewódzki, *An algorithmic solution of a Birkhoff type problem*, Fundamenta Informaticae **83** (2008), 389–410.
- [95] D. Simson i K. Zając, *An inflation algorithm and a toroidal mesh algorithm for edge-bipartite graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **40** (2013), 377–383, doi: [10.1016/j.endm.2013.05.066](https://doi.org/10.1016/j.endm.2013.05.066).
- [96] D. Simson i K. Zając, *A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots*, Int. J. Math. Math. Sci. **2013** (2013), Article ID 743734, doi: [10.1155/2013/743734](https://doi.org/10.1155/2013/743734).
- [97] D. Simson i K. Zając, *Inflation algorithm for loop-free non-negative edge-bipartite graphs of corank at least two*, Linear Algebra Appl. **524** (2017), 109–152, doi: [10.1016/j.laa.2017.02.021](https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.02.021).
- [98] K. Zając, *Numeric algorithms for Corank two edge-bipartite graphs and their mesh geometries of roots*, Fundamenta Informaticae **152** (2017), 185–222, doi: [10.3233/FI-2017-1518](https://doi.org/10.3233/FI-2017-1518).

- [99] K. Zając, *Pakiet algorytmów kombinatorycznych i graficznych oraz zbiór macierzy Grama spójnych bigrafów korangi dwa o  $m \leq 6$  wierzchołkach, wraz z typami Coxetera-Dynkina oraz macierzami definiującymi silną  $\mathbb{Z}$ -kongruencję Grama*, URL: <http://mat.umk.pl/~zajac/AlgorytmyObliczenia.zip>, 2018.
- [100] T. Zaslavsky, *The geometry of root systems and signed graphs*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 88–105, doi: [10.2307/2321133](https://doi.org/10.2307/2321133).
- [101] T. Zaslavsky, *Signed graphs*, Discrete Appl. Math. **4** (1982), 47–74, doi: [10.1016/0166-218X\(82\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(82)90033-6).
- [102] Y. B. Zhang, *Eigenvalues of Coxeter transformations and the structure of regular components of an Auslander-Reiten quiver*, Comm. Algebra **17** (1989), 2347–2362, doi: [10.1080/00927878908823853](https://doi.org/10.1080/00927878908823853).
- [103] Y. B. Zhang, *The structure of stable components*, Canad. J. Math. **43** (1991), 652–672, doi: [10.4153/CJM-1991-038-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1991-038-1).