

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Kamila Łyczek

Różniczkowalność rozwiązań zaburzonego równania
transportu
rozprawa doktorska

Promotor rozprawy:
dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda prof. UW
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Listopad 2019

Oświadczenie autora rozprawy:
w pełni świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza rozprawa została
napisana przeze mnie samodzielnie.

7 listopada 2019

data

.....

mgr inż. Kamila Łyczek

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

7 listopada 2019

data

.....

dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda prof. UW

Streszczenie

Niniejsza rozprawa dotyczy równania transportu w przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Oznacza to, że zarówno warunek początkowy μ_0 , jak i rozwiązanie μ_t przyjmują wartości w tej właśnie przestrzeni. Rozważane jest zaburzenie współczynników (równania liniowego jak i nieliniowego) i badana różniczkowalność rozwiązań względem parametru zaburzającego. Okazuje się, że różniczkowalności nie można uzyskać przy założeniach dotychczas stosowanych w literaturze. Jednakże wzmacniając założenia na współczynniki równania, można wykazać, że pochodna takiego rozwiązania jest elementem pewnej przestrzeni Banacha – przestrzeni predualnej do przestrzeni Höldera $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ (funkcje ograniczone, których pierwsze pochodne są ograniczone i hölderowsko ciągłe z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$). Wynik dotyczący różniczkowalności rozwiązań względem parametru jest szczególnie ważny z punktu widzenia teorii optymalizacji i modeli populacji ze strukturą – oba zastosowania są również omówione w rozprawie.

Słowa kluczowe: równanie transportu w przestrzeniach miar
miary Radona
istnienie i jednoznaczność rozwiązań
zaburzenie współczynników
różniczkowalność rozwiązań
modele populacji ze strukturą

Klasyfikacja tematyczna AMS: 35Q93 PDEs in connection
with control and optimization
28A33 Spaces of measures, convergence of measures

English title:

Differentiability of solutions to perturbed transport equation

Abstract

This dissertation concerns the transport equation in the space of bounded Radon measures, denoted by $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. This means that both the initial condition μ_0 and the solution $t \mapsto \mu_t$ range over this space. A perturbation of the coefficients (in linear and non-linear equation) and the derivative of solutions with respect to the perturbing parameter are considered. It turns out that employing assumptions previously used in the literature, the differentiability cannot be obtained. However, when assumptions on coefficients are strengthened, it can be shown that the derivative of such a solution is an element of a proper Banach space – the space predual to the Hölder $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ space (bounded functions whose first derivatives are bounded and Hölder continuous with the power $\alpha \in (0, 1]$). This result is particularly important from the optimization theory point of view and in structured population models – both applications are discussed in the dissertation.

Keywords: transport equation in the space of measures
Radon measures
existence and uniqueness
perturbation in coefficients
differentiability of solution
structured population model

AMS Subject Classification: 35Q93 PDEs in connection
with control and optimization
28A33 Spaces of measures, convergence of measures

Spis treści

1	Wstęp	7
2	Wprowadzenie	14
2.1	Równania różniczkowe zwyczajne	14
2.2	Potok pola wektorowego	21
2.3	Równanie transportu, słabe rozwiązania	24
2.4	Metoda charakterystyk	27
2.5	Miary	31
2.6	Wprowadzenie do słabych i dystrybucyjnych rozwiązań	45
3	Równanie transportu w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$	49
3.1	Formuła reprezentacyjna równania liniowego	49
3.2	Zależność rozwiązań od parametrów równania	55
3.3	Kilka słów o zastosowaniu potoków gradientowych	59
4	Różniczkowalność rozwiązań równania liniowego	61
4.1	Przestrzeń predualna do $\mathcal{C}^{1+\alpha}$	61
4.2	Równanie liniowe	67
5	Różniczkowalność rozwiązań równania nieliniowego	73
5.1	Szkic dowodu	75
5.2	Liniowe równanie raz jeszcze	77
5.3	Operator superpozycji	79
5.4	Istnienie rozwiązań nieliniowego równania	85
5.5	Ciasna ciągłość i jednoznaczność rozwiązań	95
5.6	Schemat aproksymacyjny dla zaburzonego równania	99
5.7	Dowód Twierdzenia 2	101
6	Zastosowania	112
7	Dalsze perspektywy	116
A	Notacja	117

Rozdział 1

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest badanie równania transportu w przestrzeniach skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Będziemy rozważać zaburzenie zarówno liniowego jak i nieliniowego równania. Pokazana zostanie różniczkowalność rozwiązań względem parametru zaburzającego współczynniki równania, czyli pole wektorowe oraz prawą stronę równania.

Motywacja. Jeden z pierwszych modeli populacji ze strukturą był wprowadzony przez McKendricka w pracy [McK26] w 1926 roku. Zadany jest on następującym układem równań różniczkowym cząstkowych

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = -w(x)u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u(t, 0) = \int_0^\infty \beta(x)u(t, x)dx. \end{cases} \quad (1.1)$$

W tym modelu funkcja $u(t, x)$ oznacza liczebność osobników w wieku x w chwili czasu t . Funkcja $w(x)$ opisuje śmiertelność a $\beta(x)$ rozrodczość tej populacji – obie zależne od wieku osobników. Mając wartości współczynników w , β oraz warunek u_0 chcielibyśmy wyznaczyć liczebność $u(t, x)$. Rozszerzenie tego modelu w taki sposób, że w oraz β zależą nie tylko od wieku, ale także od liczebności całej populacji wprowadzono w pracy [GM79]. Taki nieliniowy model pozwala uwzględnić dodatkowo oddziaływanie populacji ze środowiskiem lub wzajemne oddziaływanie osobników ze sobą.

Dane statystyczne dotyczące populacji mają zwykle zagregowaną postać. Na przykład wiemy ile osób urodziło się w danym roku, miesiącu, dniu, być może w ciągu konkretnej godziny czy minuty, ale nie istnieją dane z dokładnie określoną chwilą urodzenia czy śmierci. Nie ma możliwości dysponowania takimi informacjami, na przykład ze względu na ograniczoną dokładność przyrządów pomiarowych. Właśnie ze względu na zagregowaną postać danych statystycznych, do opisu populacji bardziej adekwatne od funkcji są **miary**. Skończone miary Radona w modelowaniu populacji ze strukturą pierwszy raz zostały użyte w pracy [MD86]. Od tamtej pory podejście do modelowania populacji z użyciem miar stało się powszechne [GLM10, Uli12, CCGU12, EHM16, BGMC16, PR14].

Z punktu widzenia modelowania, badanie wrażliwości równań na zaburzenia jest istotną kwestią. Ze względu na ograniczoną dokładność współczynników modelu (na przykład gdy

funkcja $w(x)$ różni się być może nieznacznie od faktycznej śmiertelności populacji) oczekujemy, że rozwiązania będą odporne na niewielkie zmiany tych współczynników. Innymi słowy: chcemy, żeby rozwiązanie modelu można było *rozsądnie* szacować w stosunku do błędów. Za takie *rozsądne* szacowanie uznaje się zazwyczaj lipschitzowską zależność rozwiązań od niedokładności współczynników. Podejście takie było szeroko stosowane w odniesieniu do wielu modeli, na przykład w modelach *populacji ze strukturą* [CnCC13, GLM10, GM10, CCGU12, CGR18], *dynamiki systemów* [CnCR11, BGSW13, DHL14, FLOS18, AFM18], czy *dynamiki tłumy* [BDDR08, EHM16, GS16, GR17]. Gdyby rozwiązania danego równania były różniczkowalne względem zaburzeń, a nie tylko lipschitzowskie, to można by stosować *efektywniejsze*¹ algorytmy rozwiązujące dane zagadnienie, a także w przypadku zagadnień optymalizacyjnych *lepsze* metody.

Można powiedzieć, że niniejsza rozprawa dotyczy uproszczonego modelu (1.1). Uproszczonego, to znaczy nie uwzględniającego warunku brzegowego $u(t, 0)$ – zagadnienie w tym wariacie sprowadza się właśnie do równania transportu. Dotychczas nie rozważano różniczkowalności rozwiązań równania transportu względem zaburzenia współczynników tego równania w przestrzeniach miar² [AGS08, Thi03, PR14, Pic17]. Co więcej, jak pokazuje Przykład 1 ze strony 10, przy stosowanych w literaturze założeniach, rozwiązania nie są różniczkowalne.

Równanie transportu w $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Rozważmy zagadnienie liniowego równania transportu w postaci zachowawczej

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (b(t, x) \mu_t) = w(t, x) \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (1.2)$$

gdzie przez $(\cdot)^*$ oznaczana jest przestrzeń dualna do (\cdot) wyposażona w naturalnie dziedziczoną topologię; \mathcal{C}_c^∞ jest przestrzenią funkcji gładkich o zwartym nośniku³. Rozwiązania zagadnienia (1.2) rozpatrujemy w słabym sensie⁴, to znaczy równość

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(t, x) + b(t, x) \nabla_x \cdot \varphi(t, x)) d\mu_t(x) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0, \cdot) d\mu_0(x) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x) \varphi(t, x) d\mu_t(x) dt, \end{aligned} \quad (1.3)$$

ma zachodzić dla dowolnej funkcji testującej $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$. W literaturze znaleźć można różne warianty zagadnienia (1.2): jednorodny (z zerową prawą stroną) i niejednorodny; równanie liniowe, równanie z nieliniowym polem wektorowym $b(t, x, \mu_t)$ i całkowie

¹*Efektywniejszy i lepszy* w tym kontekście oznacza mniej więcej tyle, że im rozwiązanie równania jest bardziej regularne, tym *szybsze* algorytmy mogą to rozwiązanie wyznaczyć.

²Takie rozwiązania będziemy w skrócie nazywali *miarowymi rozwiązaniami*.

³De facto będziemy potrzebowali słabszej klasy funkcji testujących. Nie wchodząc jednak w szczegóły, w tym miejscu przyjmijmy, że $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$.

⁴Mówiąc o słabych rozwiązaniach, tak naprawdę będziemy zawsze mieli na myśli więcej niż tylko fakt, że formuła (1.3) jest spełniona; patrz Definicja 2.52 na stronie 47.

nieliniowe (czyli również w zależy od μ_t). Równanie rozważane jest także w różnych przestrzeniach: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (miar probabilistycznych), $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ (nieujemne skończone miary Radona), czy $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$; z różnymi metrykami (które za chwilę pokrótce przedstawimy). Do tej pory skupiano się jednak na istnieniu, jednoznaczności, ciągłej i lipschitzowskiej zależności rozwiązań od warunków początkowych oraz współczynników równania. W zależności od pożądanej regularności rozwiązań stosowano różne metryki, których niektóre przykłady omówimy.

Metryki w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Po pierwsze, zauważmy, że norma wahania całkowitego $\|\cdot\|_{TV}$ nie wystarcza do tego, żeby uzyskać chociaż ciągłość rozwiązań. Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x b \mu_t = 0 & \text{dla } t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \\ \mu_0 = \delta_0, \end{cases}$$

gdzie δ_x jest deltą Diraca skoncentrowaną w x (tu zerze), a pole wektorowe b jest stałe i dodatnie. Można sprawdzić, że słabym rozwiązaniem tego zagadnienia jest $\mu_t = \delta_{bt}$. Jednak to rozwiązanie nie jest ciągłe. Otóż, jeżeli $a \neq b$, to

$$\begin{aligned} \|\delta_a - \delta_b\|_{TV} &= \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\delta_a - \delta_b) : \|\varphi\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)} \{ \varphi(a) - \varphi(b) : \|\varphi\| \leq 1 \}, \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{C}_0 to przestrzeń funkcji znikających w nieskończoności. W tym przypadku supremum jest realizowane przez $\varphi \equiv 1$. Ostatecznie dla $a \neq b$ mamy $\|\delta_a - \delta_b\|_{TV} = 2$.

Metryka Wassersteina, odpowiednia do analizowania ciągłej zależności rozwiązań względem warunków początkowych, zdefiniowana jest przez

$$W_1(\mu, \nu) := \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\mu - \nu)(x) : \text{Lip}(\varphi) \leq 1 \right\},$$

gdzie za φ możemy przyjąć dowolną funkcję lipschitzowską, której stała Lipschitza $\text{Lip}(\varphi)$ jest mniejsza niż 1. Istnienie, jednoznaczność i ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych wykazano dla jednorodnego, liniowego zagadnienia w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ z metryką Wassersteina (na przykład [AGS08, PR14]). Metryka W_1 nie nadaje się jednak do analizowania stabilności rozwiązań zagadnienia niejednorodnego. Dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mu(\mathbb{R}^d) \neq \nu(\mathbb{R}^d)$ mamy $W_1(\mu, \nu) = \infty$. Równanie niejednorodne nie zachowuje masy, to znaczy może prowadzić właśnie do sytuacji, gdy $\mu_t(\mathbb{R}^d) \neq \mu_s(\mathbb{R}^d)$. Żeby uzyskać ciągłą zależność rozwiązań równania niejednorodnego potrzebna jest inna metryka.

Żeby uporać się z tym problemem wprowadzono *uogólnioną metrykę Wassersteina* i w niej wykazano istnienie, jednoznaczność i ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych. Wykazano to zarówno dla wariantu liniowego w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ jak i nieliniowego w nieujemnym stożku przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ [PR14, PR16].

Między innymi w pracy [PR16, Twierdzenie 2] wykazano, że *uogólniona metryka Wassersteina* jest równoważna metryce dualnej *bounded Lipschitz* (nazywanej także *flat metric*) zdefiniowanej następująco

$$\rho_F(\mu, \nu) := \sup_{\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\mu - \nu)(x) : \|\varphi\|_{W^{1,\infty}} \leq 1 \right\}.$$

Jak się okazuje, przestrzeń dualna do $W^{1,\infty}$ nadaje się dość naturalnie do analizy równania transportu w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. W tej metryce pokazana została lipschitzowska zależność rozwiązań od współczynników modelu, patrz [GM10]. Wynik ten został rozszerzony także na nieliniowy model populacji ze strukturą, zbliżony do modelu (1.1). Konstruktywny dowód tego, że rozwiązanie μ_t modelu jest lipschitzowskie względem współczynników, dostarczył narzędzi ułatwiających badanie zbieżności schematów numerycznych dla tego typu zagadnień [GJMU14].

Naturalnym kolejnym krokiem w badaniu regularności rozwiązań równań różniczkowych, po uzyskaniu lipschitzowskiej zależności, jest **różniczkowalność rozwiązań względem zaburzenia**. I jak już zostało wspomniane, różniczkowalność nie była dotychczas rozważana dla tego typu równania. Okazuje się, że wcześniejsze założenia nie zapewniają różniczkowalności rozwiązań, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 1. *Rozważmy jednowymiarowe ($x \in \mathbb{R}$) zagadnienie zaburzonego równania transportu*

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \partial_x((1+h)\mu_t^h) = 0 \\ \mu_0^h = \delta_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Parametr h traktujemy jak zaburzenie pola wektorowego $b \equiv 1$. Rozwiązaniem tego zagadnienia jest $\mu_t^h = \delta_{(1+h)t}$. Zauważmy, że odwzorowanie $h \mapsto \mu_t^h$ jest lipschitzowskie w metryce ρ_F

$$\rho_F(\mu_t^h, \mu_t^{\bar{h}}) = \rho_F(\delta_{(1+h)t}, \delta_{(1+\bar{h})t}) \leq |h - \bar{h}|t.$$

Jednakże nie jest ono różniczkowalne. Jeżeli pochodna istnieje, to jest granicą $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$. Jeżeli natomiast $\frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$ jest zbieżny, to jest ciągiem Cauchy'ego w metryce ρ_F . Obliczamy

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d \left(\frac{\mu_t^{h_1} - \mu_t^0}{h_1} - \frac{\mu_t^{h_2} - \mu_t^0}{h_2} \right) (x) = \frac{\varphi((1+h_1)t) - \varphi(t)}{h_1} - \frac{\varphi((1+h_2)t) - \varphi(t)}{h_2}. \quad (1.5)$$

Weźmy następującą funkcję $\varphi(x)$ klasy $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x - t| - 1 & \text{dla } |x - t| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |x - t| > 1. \end{cases}$$

Jeżeli wybierzemy $h_1 > 0$ oraz $h_2 < 0$, otrzymamy $\rho_F \left(\frac{\mu_t^{h_1} - \mu_t^0}{h_1}, \frac{\mu_t^{h_2} - \mu_t^0}{h_2} \right) \geq 2t$. W takim razie $\frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$ nie jest zbieżny.

Przykład ten pokazuje, że funkcje testujące powinny być bardziej regularne niż $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Przestrzeń bardziej regularna niż $W^{1,\infty}$. Wystarczającą regularnością funkcji testujących są funkcje klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ – przestrzeń funkcji ograniczonych, których pierwsza pochodna jest ograniczona i hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$. Jest to przestrzeń Banacha wyposażona w normę

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla_x \cdot f(x)| + \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \frac{|\nabla_x \cdot f(x_1) - \nabla_x \cdot f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}. \quad (1.6)$$

Przestrzeń $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dziedziczy normę przestrzeni $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$. Wreszcie przestrzeń, w której spodziewamy się istnienia pochodnych rozwiązań jest

$$\mathcal{Z} := \overline{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}^{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*},$$

czyli przestrzeń Banacha wyposażona w normę $\|\cdot\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}$. Przestrzeń \mathcal{Z} jest przestrzenią preduálną do $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, to znaczy przestrzeń \mathcal{Z}^* jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Własności przestrzeni \mathcal{Z} mogą stanowić obiekt niezależnych, od rozwiązań równania transportu, zainteresowań.

Główny wynik: równanie liniowe. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (1.2), gdy warunek początkowy jest miarą probabilistyczną został pokazany w [Man07]. Wprowadźmy następujące zaburzenia

$$b^h(t, x) := b_0(t, x) + h \cdot b_1(t, x) \quad \text{oraz} \quad w^h(t, x) := w_0(t, x) + h \cdot w_1(t, x), \quad (1.7)$$

gdzie $h \in \mathbb{R}$ jest bliskie zeru. Zaburzone zagadnienie, odpowiadające (1.2), ma postać

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot (b^h(t, x) \mu_t^h) = w^h(t, x) \mu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (1.8)$$

Poniższe twierdzenie jest jednym z dwóch głównych wyników rozprawy.

Twierdzenie 1.1. *Niech pole wektorowe $(t \mapsto b_i(t, \cdot))$ będzie klasy $\mathcal{C}^b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ oraz funkcja skalarna $w_i(t, x)$ będzie $\mathcal{C}^{1+\alpha}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ dla $i = 0, 1$. Niech μ_t^h spełnia (1.8) w słabym sensie, ze współczynnikami zdefiniowanymi przez (1.7). Wtedy odwzorowanie*

$$(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \ni h \mapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

jest różniczkowalne w \mathcal{Z} , innymi słowy pochodna $\partial_h \mu_t^h$ należy do przestrzeni \mathcal{Z} .

Dowód sprowadza się do wykazania, że granica odpowiednich ilorazów różnicowych jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} . W dowodzie Twierdzenia 1.1 podajemy pewne nowe własności przestrzeni preduálnej do $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, które mogą być obiektem niezależnych badań.

Powyższy wynik ukazał się w [GHŁŚ19] w nieco słabszej wersji. W [GHŁŚ19] rozważane było zaburzenie tylko pola wektorowego, natomiast funkcja w nie była zaburzona.

Główny wynik: równanie nieliniowe. Publikacja przedstawiająca poniższy wynik jest obecnie w trakcie przygotowań [GHŁ]. Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (v(\mu_t) \mu_t) = m(\mu_t) \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

gdzie pole wektorowe ma postać $v(\mu_t) := v(\int_{\mathbb{R}^d} K_v(y, x) d\mu_t(y))$ i analogicznie prawa strona $m(\mu_t) := m(\int_{\mathbb{R}^d} K_m(y, x) d\mu_t(y))$. Jądro operatora $K_u(\cdot, x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ oraz dla $u \in \{v, m\}$. Podobna forma pola wektorowego jest używana w kontekście modelowania *procesu dostaw* (ang. supply chain). W pracach [ADR06, AMR⁺06] rozważano jednorodne, nieliniowe równanie transportu z polem wektorowym postaci $v(u) := \int_0^1 u(x) dx$.

W pracy [CPT11] wykorzystano jednorodne, nieliniowe równanie transportu na miarach do modelowania *dynamiki tłumy* (ang. crowd dynamics). Autorzy pracy przyjęli następującą postać pola wektorowego

$$v(\mu_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}} K(|y-x|) g(\alpha_{xy}) \frac{y-x}{|y-x|} d\mu_t(y),$$

gdzie o funkcji $K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ założono, że ma zwarty nośnik i opisuje w jaki sposób jednostka w punkcie x reaguje na swoich sąsiadów, którzy znajdują się w punkcie y . Wartość α_{xy} to kąt pomiędzy wektorem $y-x$ oraz wektorem opisującym kierunek, w którym dotychczas zmierzała jednostka w x . Fakt, że człowiek przemieszczając się nie ma oczu dookoła głowy i reaguje na otoczenie tylko w obrębie określonego kąta widzenia, opisuje funkcja $g : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$.

Rozważmy następujące zaburzenia

$$\begin{aligned} v^h(\mu_t) &:= v_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, x) d\mu_t(y) \right) + h \cdot v_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_1}(y, x), d\mu_t(y) \right), \\ m^h(\mu_t) &:= m_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, x) d\mu_t(y) \right) + h \cdot m_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_1}(y, x), d\mu_t(y) \right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Gdy uwzględnimy powyższe zaburzenia, zagadnienie nieliniowe przyjmuje postać

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot (v^h(\mu_t^h) \mu_t^h) = m^h(\mu_t^h) \mu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{1.10}$$

Następujący rezultat jest drugim głównym wynikiem niniejszej rozprawy i stanowi naturalne rozszerzenie Twierdzenia 1.1.

Twierdzenie 1.2. *Założmy, że dla $i = 0, 1$ zachodzi*

A1. $v_i(\cdot) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$,

A2. $m_i(\cdot) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$,

A3. $(x \mapsto K_{v_i}(\cdot, x)), (x \mapsto K_{m_i}(\cdot, x)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$.

Niech μ_t^h będzie rozwiązaniem w słabym sensie zagadnienia (1.10) ze współczynnikami zadanymi przez (1.9). Wtedy odwzorowanie

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ni h \mapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

jest różniczkowalne w \mathcal{Z} , to znaczy $\partial_h \mu_t^h \in \mathcal{Z}$.

Struktura pracy. W Rozdziale 2 wprowadzamy narzędzia niezbędne do tego, żeby móc analizować miarowe równania transportu. Na początek przytaczamy klasyczne twierdzenia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych, jak twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności. Następnie definiujemy pojęcie potoku pola wektorowego oraz metodę charakterystyk, za pomocą której można rozwiązywać równania transportu w *klasycznym* sensie. Omawiamy własności klasycznych rozwiązań i wprowadzamy pojęcie *słabego* rozwiązania. W Rozdziale 2.5 poświęconym teorii miary, poza omówieniem własności przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, przedstawiamy narzędzia potrzebne do tego, żeby omówić wcześniejsze wyniki dotyczące miarowego równania transportu. Tymi narzędziami są w szczególności metryki W_1 , ρ_F oraz uogólniona metryka Wassersteina, które omawiamy wraz z licznymi przykładami. Wreszcie na końcu tego rozdziału pada formalna definicja rozwiązania transportu w przestrzeni skończonych miar Radona.

Rozdział 3 jest przeglądem literatury i znanych wyników. Część z nich zostanie wykorzystana w dowodach głównych twierdzeń tej rozprawy. Przedstawiamy formułę reprezentacyjną zagadnienia liniowego; lipschitzowską zależność rozwiązań od warunków początkowych dla równania liniowego oraz nieliniowego. W ostatniej części tego rozdziału omawiamy pokrótce nieco inne od przyjętego w rozprawie podejście do badania regularności rozwiązań. Podejście to pozwala, by przy pewnych dodatkowych założeniach co do struktury pola wektorowego, osłabić założenia o jego regularności i wtedy badać regularność rozwiązań (za pomocą potoków gradientowych).

Rozdział 4 przedstawia pierwszy główny wynik tej rozprawy, a mianowicie dowód Twierdzenia 1.1. Dodatkowo w Rozdziale 4.1 znajduje się, nieco szersze niż to konieczne do dowodu twierdzenia, przedstawienie przestrzeni \mathcal{Z} . W Rozdziale 5 przedstawiony jest dowód Twierdzenia 1.2.

W Rozdziale 6 omawiamy szerzej możliwe zastosowania głównych wyników. Dokładniej: modele populacji ze strukturą oraz zagadnienia optymalizacyjne. W krótkim Rozdziale 7 wskazane są możliwe dalsze perspektywy badań.

W Dodatku A znajduje się spis notacji używanej w rozprawie, a w Dodatku B pewne dodatkowe fakty i twierdzenia pomocne w lekturze rozprawy.

Rozdział 2

Wprowadzenie

2.1 Równania różniczkowe zwyczajne

Zacznijmy od przypomnienia pewnych faktów z teorii równań różniczkowych zwyczajnych – będą one istotne z punktu widzenia przedstawionych w dalszej części rezultatów. Omówimy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Dowody przedstawionych twierdzeń można znaleźć w podręcznikach takich jak [Har02, DL89, Bob15].

Przyjmijmy, że funkcja $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ określa położenie poruszającego się obiektu i zależy od czasu t . Niech prędkość $b(t, x)$ tego obiektu zależy od czasu oraz położenia, czyli $b : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest zależnym od czasu polem wektorowym, gdzie U jest zbiorem otwartym. Związek między położeniem obiektu i jego prędkością opisuje równanie

$$\dot{x}(t) = b(t, x(t)),$$

gdzie $\dot{x}(t)$ oznacza klasyczną pochodną¹ funkcji x względem zmiennej t . Przez **klasyczne rozwiązanie** tego równania, określone dla $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, rozumiemy taką funkcję x klasy $\mathcal{C}^1([t_1, t_2]; \mathbb{R}^d)$, która spełnia to równanie dla każdego $t \in [t_1, t_2]$. To w szczególności implikuje, że $(t, x(t)) \in U$ dla każdego $t \in [t_1, t_2]$.

Ustalmy warunek początkowy $(t_0, y_0) \in U$ i rozważmy zagadnienie Cauchy’ego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t)) & (2.1) \\ x(t_0) = y_0. & (2.2) \end{cases}$$

Całkując równanie (2.1) i uwzględniając warunek początkowy natychmiast otrzymujemy, że jeżeli funkcja $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - r, t_0 + r]; \mathbb{R}^d)$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia, to spełnia również tożsamość całkową

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^t b(s, x(s)) ds \quad \text{dla każdego } t \in [t_0 - r, t_0 + r]. \quad (2.3)$$

¹Termin *pochodna* jest autorstwa Jana Śniadeckiego. Natomiast polskie terminy: *różniczka*, *całka*, *rachunek różniczkowy*, *rachunek całkowy* pochodzą od Józefa Jakubowskiego [Pel99].

Po prawej stronie występuje całka z funkcji wektorowej i powinna być rozumiana jako wektor, którego składowymi są całki z jej współrzędnych. Funkcję x rozwiązującą to zagadnienie nazywamy **krzywą całkową** pola wektorowego b . Jeżeli $b \in C^\infty(U; \mathbb{R}^d)$, to wtedy każda krzywa całkowa pola b również jest klasy $C^\infty([t_1, t_2]; \mathbb{R}^d)$. Naturalnym pytaniem jest: czy powyższe zagadnienie ma jednoznaczne rozwiązanie? Następujący podręcznikowy przykład pokazuje, że sytuacja nie jest wcale taka oczywista.

Przykład 2. Niech $b(t, x) = \sqrt{|x|}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

posiada następujące rozwiązania

$$x^c(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq c, \\ \frac{1}{4}(t - c)^2 & \text{dla } t > c, \end{cases}$$

gdzie c może przyjmować dowolną wartość z przedziału $[0, \infty]$.

Powyższy przykład pokazuje, że założenie o ciągłości pola wektorowego b nie wystarcza do tego, żeby zagadnienie miało dokładnie jedno rozwiązanie. Twierdzenie Picarda-Lindelöfa podaje warunki na istnienie i jednoznaczność rozwiązania oraz definiuje minimalny przedział, na którym to rozwiązanie jest określone.

Twierdzenie 2.1 (Picarda-Lindelöfa o lokalnym istnieniu jednoznacznego rozwiązania). Niech $b(t, x)$ będzie ciągłym polem wektorowym zdefiniowanym na otwartym zbiorze zawierającym prostokąt

$$U = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leq \alpha, |x - y_0| \leq \beta\}. \quad (2.4)$$

Załóżmy, że b jest lipschitzowskie względem zmiennej x ze stałą K na całym obszarze U , to znaczy

$$|b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad \text{dla każdego } (t, x_1), (t, x_2) \in U,$$

i niech $M = \sup_{(t,x) \in U} |b(t, x)|$. Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (2.1) z warunkiem początkowym (2.2) $x \in C^1([t_0 - r, t_0 + r]; \mathbb{R}^d)$, gdzie

$$r = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{2K} \right\}. \quad (2.5)$$

Przez moduł wektora d -wymiarowego rozumiemy tu $|(\xi_1, \dots, \xi_d)| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2}$.

Dowód. [Bob15, strona 32-33] Przestrzeń funkcji ciągłych $\mathcal{C}[t_0 - r, t_0 + r]$ z metryką supremum jest przestrzenią zupełną. Jej podzbiór \mathcal{X} złożony z funkcji o wartościach w

$[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ jest zbiorem domkniętym – mamy do czynienia z przestrzenią metryczną zupełną.

Korzystając z całkowej postaci rozważanego zagadnienia, to znaczy z (2.3), sprowadzimy problem istnienia rozwiązania do problemu istnienia punktu stałego pewnego odwzorowania. Rozważmy odwzorowanie $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dane wzorem $x \mapsto \mathcal{T}x$,

$$(\mathcal{T}x)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t b(s, x(s))ds, \quad t \in [t_0 - r, t_0 + r]. \quad (2.6)$$

Całka ta jest dobrze zdefiniowana – z założenia $x \in \mathcal{X}$ wynika, że $(s, x(s))$ należy do U . Odwzorowanie \mathcal{T} rzeczywiście przekształca \mathcal{X} w siebie: po pierwsze $\mathcal{T}x$ jest funkcją ciągłą, po drugie

$$|(\mathcal{T}x)(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t b(s, x(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |b(s, x(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq Mr \leq \beta.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} d(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) &= \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \left| \int_{t_0}^t (b(s, x_1(s)) - b(s, x_2(s))) ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \int_{t_0}^t |b(s, x_1(s)) - b(s, x_2(s))| ds \\ &\leq K \cdot \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds \\ &\leq K \cdot \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \int_{t_0}^t d(x_1, x_2) ds \\ &\leq K \cdot d(x_1, x_2) \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} |t - t_0| \\ &= K \cdot rd(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{1}{2}d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Z powyższego rachunku wynika, że odwzorowanie \mathcal{T} spełnia założenia twierdzenia Banacha o kontrakcji. Oznacza to, że istnieje dokładnie jedna funkcja x , będąca punktem stałym odwzorowania \mathcal{T} . A tym samym istnieje dokładnie jedna taka funkcja $x(t)$, że równość (2.3) zachodzi dla wszystkich t z przedziału $[t_0 - r, t_0 + r]$. Z tego wynika, że $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (2.1) z zadanym warunkiem początkowym. Z drugiej strony każde rozwiązanie tego zagadnienia spełnia też równość (2.3). ■

Dokładna analiza wcześniejszego dowodu pokaże, że założenia Twierdzenia 2.1 można osłabić – w równaniu (2.5), określającym długość przedziału, zamiast $\frac{1}{2K}$ można wziąć $\frac{q}{K}$, gdzie $q \in (0, 1)$, i rozumowanie nadal będzie poprawne. Co więcej, stała Lipschitza w ogóle nie ma wpływu na długość przedziału, na których określone jest jednoznaczne rozwiązanie. „Optymalne” r jest następujące

$$r = \min \left(\alpha, \frac{\beta}{M} \right). \quad (2.7)$$

Twierdzenie 2.2 (Picarda o lokalnym istnieniu jednoznacznego rozwiązania). *Przy założeniach Twierdzenia 2.1 istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (2.1) z warunkiem początkowym $x(t_0) = y_0$, określone na przedziale $|t - t_0| < r$, gdzie r dane jest przez (2.7).*

Zanim udowodnimy powyższe twierdzenie wprowadźmy odpowiednią metrykę. Jest ona istotna nie tylko ze względu na dowód powyższego twierdzenia, ale również dlatego, że będzie stosowana w dowodzie głównego Twierdzenia 1, w Rozdziale 4.2.

Niech ω będzie dowolną funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, przyjmującą wartości dodatnie. Dla funkcji $x, y \in \mathcal{C}[a, b]$ zdefiniujemy

$$d_\omega(x, y) := \sup_{t \in [a, b]} \omega(t) |x(t) - y(t)|. \quad (2.8)$$

Gdy $\omega(t) = e^{-\lambda t}$ oraz $\lambda > 0$, to odległość d_ω nazywamy **metryką Bieleckiego**².

Dowód. [Bob15, strona 33-34] Ustalmy $\lambda > 0$ i niech $\omega(t) = e^{-\lambda|t-t_0|}$ dla $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$. Funkcja ω jest ciągła i przyjmuje wartości dodatnie. Metryka

$$d_\omega(x, y) = \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} e^{-\lambda|t-t_0|} |x(t) - y(t)|$$

jest równoważna metryce supremum. W szczególności przestrzeń $\mathcal{C}[a, b]$, a także jej podzbiór \mathcal{X} (opisany w dowodzie Twierdzenia 2.1) z metryką d_ω są przestrzeniami zupełnymi.

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1, przestrzeń \mathcal{X} definiujemy jako zbiór tych funkcji, które przyjmują wartości w przedziale $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$, a odwzorowanie \mathcal{T} definiujemy przez (2.6). Wiemy już, że odwzorowanie \mathcal{T} przekształca \mathcal{X} w \mathcal{X} . Zauważmy ponadto, że

$$\begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) &= \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} e^{-\lambda|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^t (b(s, x_1(s)) - b(s, x_2(s))) ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} e^{-\lambda|t-t_0|} \int_{t_0}^t |b(s, x_1(s)) - b(s, x_2(s))| ds \\ &\leq K \cdot \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \left| \int_{t_0}^t e^{-\lambda(|t-t_0| - |t_0-s|)} [e^{-\lambda|t_0-s|} |x_1(s) - x_2(s)|] ds \right|. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $|t - t_0| - |t_0 - s| = |t - s|$ ze względu na to, że punkt s leży pomiędzy t oraz t_0 (niezależnie od tego czy $t_0 < t$, czy $t_0 > t$). Dodatkowo wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ograniczone przez $d_\omega(x_1, x_2)$, stąd

$$\begin{aligned} d_\omega(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) &\leq K \cdot \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \left| \int_{t_0}^t e^{-\lambda|t-s|} d_\omega(x_1, x_2) ds \right| \\ &\leq K \cdot d_\omega(x_1, x_2) \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \int_0^{|t-t_0|} e^{-\lambda u} du \\ &\leq K \cdot d_\omega(x_1, x_2) \int_0^r e^{-\lambda u} du < \frac{K}{\lambda} d_\omega(x_1, x_2). \end{aligned}$$

²Od nazwiska jej pomysłodawcy Adama Bieleckiego, jednego z założycieli Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie.

Jeśli wybierzemy $\lambda > K$, to odwzorowanie \mathcal{T} w metryce d_ω będzie zwężające w \mathcal{X} i można zastosować twierdzenie Banacha o kontrakcji. Dalszy tok rozumowania pozostaje taki sam jak w dowodzie Twierdzenia 2.1. ■

Naturalnie chcielibyśmy, żeby rozwiązanie było określone na możliwie największym przedziale czasowym i o tym mówi kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 2.3. *Niech $b : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie ciągłym i ograniczonym polem wektorowym. Załóżmy, że b jest lipschitzowskie względem x i jednostajnie ciągle względem t na każdym ograniczonym prostokącie zawartym w U . Ustalmy punkt $(t_0, y_0) \in U$. Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (2.1) i jest ono określone na całym przedziale czasu zawartym w U .*

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek.

Wniosek 2.4. *Niech $b : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie ciągłym i ograniczonym polem wektorowym i niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Załóżmy, że b jest lokalnie lipschitzowskie względem zmiennej x i jednostajnie ciągle względem t . Wtedy dla każdego $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (2.1), które jest zdefiniowane dla wszystkich $t \in I$.*

Jeżeli opuścimy założenie o lipschitzowskości, to utracimy gwarancję jednoznaczności rozwiązań – ale przy założeniu ciągłości wciąż zapewnione jest istnienie rozwiązania (przynajmniej jednego).

Twierdzenie 2.5 (Peano o lokalnym istnieniu rozwiązania). *Niech b będzie ciągłym i ograniczonym polem wektorowym określonym na otwartym zbiorze zawierającym prostokąt (2.4). Wtedy istnieje lokalne rozwiązanie równania (2.1) z warunkiem początkowym (2.2).*

Rozwiązanie lokalne, czyli spełniające równanie dla pewnego niezdegenerowanego przedziału czasu. Dowód twierdzenia można znaleźć w [Har02, Twierdzenie 2.1, strona 10].

Przedstawimy jeszcze jeden wynik dotyczący równań różniczkowych zwyczajnych, dotyczyć on będzie istnienia rozwiązań na całej półosi. Podobnie jak dowód Twierdzenia 2.2 będzie on wykorzystywał metrykę Bieleckiego. „Trik” z użyciem tej metryki (a raczej odpowiadającej jej normy, którą wprowadzamy na stronie 86), który pojawi się w poniższym dowodzie, (i który oznaczymy przez ♠) będzie powtórzony właśnie w dowodzie Twierdzenia 2; patrz strona 93.

Twierdzenie 2.6 (Picarda o globalnym istnieniu jednoznacznego rozwiązania). *Założmy, że b jest ciągle i spełnia globalny warunek Lipschitza oraz że istnieją takie stałe M_0 oraz λ_0 , że*

$$\left| \int_0^t b(s, 0) ds \right| \leq M_0 e^{\lambda_0 t}. \quad (2.9)$$

Dla dowolnego warunku początkowego $y_0 \in \mathbb{R}^d$ zagadnienie (2.1) ma wtedy dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunek $x(0) = y_0$. Rozwiązanie to zdefiniowane jest dla wszystkich $t \geq 0$ i rośnie co najwyżej wykładniczo.

Przed przystąpieniem do dowodu przedstawimy przestrzeń, w której będziemy szukali rozwiązań.

Definicja 2.7. Dla zadanej liczby $\lambda > 0$ przez $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$ oznaczmy przestrzeń takich funkcji ciągłych $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$, że istnieje stała $M = M(x)$ spełniająca warunek

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\lambda t} |x(t)| \leq M.$$

Oznacza to, że elementami przestrzeni $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$ są funkcje ciągłe o wzroście co najwyżej wykładniczym z wykładnikiem λ . Warunek (2.9) jest konieczny w Twierdzeniu 2.6 do tego, żeby rozwiązanie rosło co najwyżej wykładniczo.

Dowód Twierdzenia 2.6. [Bob15, strony 35-37] Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do twierdzenia dotyczącego lokalnych rozwiązań, których jednak będziemy szukać w innej przestrzeni.

Najpierw pokażemy, że przestrzeń $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$ z metryką Bieleckiego

$$d_\omega(x_1, x_2) = \sup_{t \geq 0} e^{-\lambda t} |x_1(t) - x_2(t)|$$

jest przestrzenią metryczną zupełną. Można łatwo sprawdzić, że d_ω jest dobrze zdefiniowana i spełnia warunki metryki. Pozostaje udowodnić zupełność przestrzeni $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$.

Niech $\{x_n\}_{n \geq 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$. Nierówność

$$\sup_{t \in [0, T]} |x_n(t) - x_m(t)| \leq e^{\lambda T} d_\omega(x_n, x_m),$$

jest prawdziwa dla dowolnego $T > 0$. Wynika z niej, że dla każdego $t \geq 0$ istnieje granica $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. A także, że x_n dążą do granicznej funkcji x jednostajnie na każdym przedziale $[0, T]$ – czyli, że funkcje x_n , ($n \geq 0$) obcięte do przedziału $[0, T]$ tworzą w przestrzeni $\mathcal{C}[0, T]$ ciąg Cauchy'ego. W szczególności x jest ciągła na każdym przedziale $[0, T]$, a więc ciągła na całym \mathbb{R}^+ .

Musimy jeszcze wykazać, że ciąg $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dąży do x w metryce d_ω i że ta granica x należy do $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$. Wiemy, że dla każdego ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0 , że dla wszystkich $n, m \geq n_0$ oraz $t \geq 0$ zachodzi $e^{-\lambda t} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$. Przechodząc z m do nieskończoności, otrzymujemy, że dla każdego $t > 0$

$$e^{-\lambda t} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon. \tag{2.10}$$

Wybierając M tak, żeby $|x_{n_0}(t)| \leq M e^{\lambda t}$ mamy $|x(t)| \leq \varepsilon e^{\lambda t} + M e^{\lambda t} \leq (M + \varepsilon) e^{\lambda t}$, co znaczy, że x nie rośnie szybciej niż wykładniczo z wykładnikiem λ – czyli jest elementem przestrzeni $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$.

Nierówność (2.10) implikuje również, że $d_\omega(x_n, x) \leq \varepsilon$ o ile $n \geq n_0$ (ze względu na dowolność ε). To dowodzi zbieżności ciągu $\{x_n\}_{n \geq 1}$ do x .

Teraz, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.2, chcemy wskazać odpowiednie odwzorowanie zwięzające. Niech $\lambda > K$ (stała Lipschitza) i będzie większe niż λ_0 z warunku (2.9). W przestrzeni $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$ definiujemy odwzorowanie $x \mapsto \mathcal{T}x$ dane wzorem

$$(\mathcal{T}x)(t) = y_0 + \int_0^t b(s, x(s))ds. \quad (2.11)$$

Funkcja $\mathcal{T}x$ jest oczywiście ciągła, należy sprawdzić, czy należy do przestrzeni $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$. Rozważmy funkcje $x_1, x_2 \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$ i dla ustalonego $t \geq 0$ oszacujmy wyrażenie

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |(\mathcal{T}x_1)(t) - (\mathcal{T}x_2)(t)| &= e^{-\lambda t} \left| \int_0^t b(s, x_1(s))ds - \int_0^t b(s, x_2(s))ds \right| \\ &\leq e^{-\lambda t} \int_0^t |b(s, x_1(s)) - b(s, x_2(s))| ds \\ &\leq e^{-\lambda t} \int_0^t K|x_1(s) - x_2(s)|ds \\ &\leq \int_0^t K e^{-\lambda(t-s)} e^{-\lambda s} |x_1(s) - x_2(s)|ds \quad (\spadesuit) \\ &\leq K d_\omega(x_1(s), x_2(s)) \int_0^t e^{-\lambda s} ds \\ &\leq \frac{K}{\lambda} d_\omega(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Jeśli w szczególności $x_2 \equiv 0$, to z założenia (2.9) wynika, że $\mathcal{T}x_2$ należy do $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$, a to z kolei wraz z powyższym oszacowaniem implikuje, że $\mathcal{T}x_1$ również należy do $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$.

Powyższa nierówność dowodzi także, że odwzorowanie \mathcal{T} spełnia założenia twierdzenia Banacha o kontrakcji ze stałą $\frac{K}{\lambda} < 1$. A zatem istnieje tylko jeden element przestrzeni $\mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}^+)$, który jest punktem stałym odwzorowania \mathcal{T} – to on jest szukanym rozwiązaniem równania różniczkowego. Rzeczywiście, ten punkt stały spełnia warunek (2.3) i odwrotnie: rozwiązanie równania (2.1) musi spełniać warunek (2.3), a to znaczy, że musi być punktem stałym odwzorowania \mathcal{T} .

Dzięki lokalnemu twierdzeniu Picarda wiemy także, że nie mogą istnieć rozwiązania równania (2.1) różniące się od siebie lokalnie. ■

2.2 Potok pola wektorowego

Porównajmy dwa rozwiązania x i \hat{x} równania (2.1), które w czasie t_0 przyjmują odpowiednio wartości y_0 i \hat{y}_0

$$\begin{aligned} x(t) - \hat{x}(t) &= y_0 - \hat{y}_0 + \int_{t_0}^t b(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t b(s, \hat{x}(s)) ds \\ &= y_0 - \hat{y}_0 + \int_{t_0}^t \left(b(s, x(s)) - b(s, \hat{x}(s)) \right) ds. \end{aligned} \quad (2.12)$$

O ile pole wektorowe b jest lipschitzowskie względem zmiennej x , to dostajemy

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq |y_0 - \hat{y}_0| + Lip(b) \int_{t_0}^t |x(s) - \hat{x}(s)| ds,$$

gdzie przez $Lip(b)$ oznaczamy stałą Lipschitza funkcji b . Stosując Lemat Gronwalla (patrz Lemat B.7), otrzymujemy

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|y_0 - \hat{y}_0\| \cdot \exp(Lip(b)|t - t_0|),$$

a to oznacza, że rozwiązanie równania (2.1) jest lipschitzowskie względem warunków początkowych.

Analogiczny argument zadziała, gdy badać będziemy zależność rozwiązań od pola wektorowego b . To znaczy, gdy weźmiemy dwa rozwiązania x oraz \hat{x} zadane dla takiego samego warunku początkowego y_0 , ale dla różnych pól wektorowych b i \hat{b} . Jeżeli b jest lipschitzowskie względem x , to zachodzi następujące oszacowanie

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq |t - t_0| \cdot \|b - \hat{b}\|_\infty \cdot \exp(Lip(b)|t - t_0|). \quad (2.13)$$

Powyżej traktowaliśmy rozwiązania zagadnienia (2.1) jak funkcje zależne nie tylko od czasu, ale także od warunku początkowego y_0 (jak gdyby to była nowa zmienna w równaniu) – to prowadzi do następującej definicji.

Definicja 2.8 (Potok pola wektorowego (ang. flow of a vector field)). *Rozważmy ciągle i ograniczone pole wektorowe $b : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, oraz niech czas początkowy $t_0 \in I$. Potokiem pola wektorowego b o czasie początkowym t_0 jest odwzorowanie*

$$X(t, x) : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

które spełnia zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t X(t, x) = b(t, X(t, x)) \\ X(t_0, x) = y_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Jeżeli pole wektorowe b jest ograniczone i lipschitzowskie względem drugiej zmiennej, to natychmiast otrzymujemy, że rozwiązanie $X(t, x)$ powyższego zagadnienia istnieje i jest jednoznaczne (z Wniosku 2.4).

Czasami, żeby podkreślić zależność potoku $X(t, x)$ od pola wektorowego b , będziemy stosować notację $X_b(t, x)$.

Wniosek 2.9 (Z Twierdzenia 2.3). Niech $b : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie ciągłym i ograniczonym polem wektorowym, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem. Załóżmy, że b jest lokalnie lipschitzowskie względem zmiennej x i jednostajnie ciągłe względem t . Wtedy dla każdego $t_0 \in I$ istnieje jednoznaczne $X_b(t, x)$ o czasie początkowym t_0 . Ponadto, ten potok jest lipschitzowski względem t oraz x .

Okazuje się, że dodatkowa regularność pola b implikuje wyższą regularność X_b .

Lemat 2.10. Niech $b : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie ciągłym i ograniczonym polem wektorowym oraz niech b będzie lokalnie lipschitzowskie względem zmiennej x i jednostajnie ciągłe względem t . Jeżeli dodatkowo b jest klasy \mathcal{C}^1 względem zmiennej x , wtedy potok $X_b(t, x)$, będący rozwiązaniem zagadnienia (2.14), jest różniczkowalny względem drugiej zmiennej.

Dowód. [Cri07, strony 17-18] Rozważmy różniczkowalność w kierunku $e \in \mathbb{R}^d$, gdzie przez e oznaczamy wektor jednostkowy. Chcemy porównać $X(t, x)$ oraz $X(t, x + he)$ dla małej wartości parametru $h \in \mathbb{R}$. Przez $\nabla_x X(t, x)$ oznaczamy wektor $(X(t, x), \partial_{x_1} X(t, x), \dots, \partial_{x_d} X(t, x))$. Zauważmy, że różniczkowalność rozwiązań (2.14) względem drugiej zmiennej w kierunku wektora e oznacza, że $\nabla_x X(t, x)$ spełnia następujące równanie różniczkowe

$$\partial_t \nabla_x X(t, x)e = \nabla_x b(t, X(t, x)) \cdot \nabla_x X(t, x)e.$$

Niech $w_e(t, x)$ będzie rozwiązaniem powyższego równania z warunkiem początkowym e , czyli

$$\begin{cases} \partial_t w_e(t, x) = \nabla_x b(t, X(t, x)) \cdot w_e(t, x) \\ w_e(t_0, x) = e. \end{cases} \quad (2.15)$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe zwyczajne zależne od parametru $x \in \mathbb{R}^d$. Można sprawdzić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^d$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $w_e(t, x)$ zdefiniowane dla wszystkich $t \in I$. Ponadto $w_e(t, x)$ zależy w sposób ciągły od parametru $x \in \mathbb{R}^d$, co za chwilę pokażemy.

Na razie postawmy hipotezę, że

$$\frac{X(t, x + he) - X(t, x)}{h} \rightarrow w_e(t, x) \quad \text{dla } h \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

co oznaczałoby, że $\nabla_x X(t, x)e = w_e(t, x)$. Ponieważ $w_e(t, x)$ jest ciągłe względem x to z tego wynikałoby, że $X(t, x)$ jest różniczkowalny względem x i że ta pochodna jest ciągła. Teraz pokażemy, że (2.16) faktycznie zachodzi. Zdefiniujmy

$$z_{e,h}(t, x) := \frac{X(t, x + he) - X(t, x)}{h}$$

i zauważmy, że $z_{e,h}(0, x) = e$ oraz

$$\begin{aligned} \partial_t z_{e,h}(t, x) &= \frac{1}{h} (\partial_t X(t, x + he) - \partial_t X(t, x)) = \frac{1}{h} (b(t, X(t, x + he)) - b(t, X(t, x))) \\ &= \left(\int_0^1 \nabla_x b(t, \tau X(t, x + he) + (1 - \tau)X(t, x)) d\tau \right) z_{e,h}(t, x) \\ &= \nabla_x b(t, X(t, x)) z_{e,h}(t, x) + \Psi_{e,h}(t, x) z_{e,h}(t, x), \end{aligned}$$

gdzie

$$\Psi_{e,h}(t, x) = \int_0^1 \left(\nabla_x b(t, \tau X(t, x + he) + (1 - \tau)X(t, x)) - \nabla_x b(t, X(t, x)) \right) d\tau.$$

Ponieważ założyliśmy, że b jest \mathcal{C}^1 względem x to $\Psi_{e,h}(t, x) \rightarrow 0$ jednostajnie względem t oraz y dla $h \rightarrow 0$. Przyjmijmy $\phi_{e,h}(t, x) := z_{e,h}(t, x) - w_e(t, x)$ i zauważmy, że $\phi_{e,h}$ spełnia równanie

$$\begin{cases} \partial_t \phi_{e,h}(t, x) = \nabla_x b(t, X(t, x)) \phi_{e,h}(t, x) + \Psi_{e,h}(t, x) z_{e,h}(t, x) \\ \phi_{e,h}(0, x) = 0. \end{cases}$$

Korzystając z oszacowania (2.13) oraz tego, że $|\Psi_{e,h}(t, x)| = o(1)$ oraz $|z_{e,h}(t, x)| = \mathcal{O}(1)$ otrzymujemy, że $|\phi_{e,h}(t, x)| = o(1)$ (definicje symboli o oraz \mathcal{O} można znaleźć w Dodatku B na stronie 123). Definicje $\phi_{e,h}$ oraz $z_{e,h}$ sprowadzają się dokładnie do postawionej hipotezy (2.16). ■

Jeżeli zwiększymy regularność pola wektorowego, na przykład $b \in \mathcal{C}^k$ względem x , to wtedy potok X_b również jest klasy \mathcal{C}^k względem drugiej zmiennej; patrz [Har02, Rozdział 4, strona 100]. Gdy pole wektorowe b jest klasy \mathcal{C}^∞ , zachodzi następujący fakt.

Lemat 2.11. *Niech $b : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie gładkim i ograniczonym polem wektorowym. Wtedy dla każdego $t_0 \in I$ istnieje jednoznaczny potok $X_b(t, x)$ startujący z t_0 , który jest gładki względem t i zmiennej x .*

W dowodzie głównego Twierdzenia 1 (patrz strona 67) będziemy wykorzystywali fakt podobny do Lematów 2.10 oraz 2.11 – mówiący o tym, że X_b „przejmuje” regularność pola wektorowego b (patrz Stwierdzenie 4.7 na stronie 68).

Zauważmy, że $X(t, x)$ jest zdefiniowane jednoznacznie dla każdego $t \in I$ i odwzorowanie $x \mapsto X(t, x)$ jest jednoparametrową rodziną dyfeomorfizmów. Jakobian przekształcenia $J(t, x) = \det(\nabla_x X(t, x))$ spełnia równanie

$$\partial_t J(t, x) = \nabla \cdot b(t, X(t, x)) \cdot J(t, x), \quad (2.17)$$

co implikuje także, że $J(t, x) > 0$ dla każdego $t \in I$. Wprowadźmy następującą notację: $X(t, t_0, x)$ jest potokiem pola b dla czasu początkowego $t_0 \in I$. Jako konsekwencja jednoznaczności potoku X , zachodzi następująca **własność półgrupy**

$$X(t_2, t_0, x) = X(t_2, t_1, X(t_1, t_0, x)) \quad \text{dla dowolnych } t_0, t_1, t_2 \in I. \quad (2.18)$$

Własności potoków będziemy używać przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych. Formuły reprezentacyjne rozwiązań będą zależały od potoków pól wektorowych tych równań.

2.3 Równanie transportu, słabe rozwiązania

Czas przybliżyć równanie transportu, którego dotyczy ta rozprawa. Tak samo jak w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych, na początku chcemy określić warunki na istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Celem tego podrozdziału jest przedstawienie różnych sformułowań równania transportu oraz przybliżenie koncepcji słabych rozwiązań.

Poniżej wymienione są różne sformułowania równania transportu.

(i) Równanie liniowe w **silnej** postaci

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla_x u(t, x) = w(t, x)u(t, x) & \text{gdzie } t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.19)$$

gdzie $b(t, x), w(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ są zadanymi borelowsko mierzalnymi funkcjami³, a $u(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest szukanym rozwiązaniem tego równania. Gdy $w \equiv 0$ mówimy, że równanie jest **jednorodne**.

(ii) Równanie liniowe w postaci **zachowawczej**

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \nabla_x (b(t, x)u(t, x)) = w(t, x)u(t, x) & \text{gdzie } t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.21)$$

Tak jak wcześniej $b(t, x), w(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ są zadanymi borelowsko mierzalnymi funkcjami.

(iii) **Nieliniowe** równanie w postaci zachowawczej – czyli takie, gdzie pole wektorowe v lub/i funkcja m zależy również od samego rozwiązania

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \nabla_x (v(t, x, u)u(t, x)) = m(t, x, u) & \text{gdzie } t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Poniżej przedstawiamy interpretację jednego z powyższych sformułowań.

Przykład 3 (Interpretacja liniowego jednorodnego równania transportu). *Rozważmy pojazdy (cząsteczki, punkty) poruszające się wzdłuż prostej w jednym kierunku. Niech $u(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ będzie gęstością pojazdów w punkcie x oraz chwili czasu t (zakładamy, że jest ona ciągła, co jest pewnym uproszczeniem). Liczba pojazdów znajdujących się w przedziale (x_1, x_2) w chwili t wynosi*

$$\int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx.$$

Przez $b(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczmy prędkość pojazdów znajdujących się w punkcie x w chwili t . Zauważmy, że to, że prędkość zależy od położenia x jest dość naturalne – jeżeli nawierzchnia na jakimś odcinku jest w nie najlepszym stanie, to pojazdy będą tam poruszać

³Wyjaśnienie czym są funkcje borelowsko mierzalne znajduje się Dodatku B; patrz Definicja B.1.

się wolniej. Nasuwa się jednak oczekiwanie, że prędkość powinna zależeć także od gęstości pojazdów (w danym punkcie lub jego okolicy), czyli rozwiązania równania (im większe natężenie ruchu, tym prędkość powinna być mniejsza). Takim przypadkiem (nieliniowym) zajmiemy się w dalszej części pracy, teraz będziemy jednak rozważać prostsze podejście, przypadek liniowy, to znaczy, prędkość b zależy jedynie od t i x .

Liczba pojazdów przejeżdżających przez ustalony punkt x w chwili t wynosi $b(t, x)u(t, x)$. Zakładając, że liczba pojazdów jest stała (nie ulegają zniszczeniu, ani do ruchu nie włączają się nowe) dla ustalonego przedziału (x_1, x_2) , zachodzi następująca równość

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = u(t, x_1)b(t, x_1) - u(t, x_2)b(t, x_2).$$

Powyższa zależność opisuje jak liczba pojazdów na odcinku (x_1, x_2) zmienia się w czasie: ta zmiana to nic innego niż różnica tych, które wjechały w przedział (x_1, x_2) i tych, które z niego wyjechały.

Przy założeniu, że funkcje $u(t, x)$ oraz $b(t, x)$ są **odpowiednio regularne**, wcześniejszą równość można obustronnie scałkować względem czasu, otrzymując

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t u(t, x) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} (u(t, x_1)b(t, x_1) - u(t, x_2)b(t, x_2)) dt,$$

czyli

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t u(t, x) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_x (u(t, x)b(t, x)) dx dt,$$

co zapisujemy

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t u(t, x) + \partial_x (u(t, x)b(t, x)) dx dt = 0.$$

Te zależności są prawdziwe dla dowolnego przedziału czasu (t_1, t_2) oraz dla dowolnego odcinka (x_1, x_2) . A w takim razie wartość podcałkowa musi być równa zero prawie wszędzie

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x (b(t, x)u(t, x)) = 0. \quad (2.23)$$

Otrzymaliśmy jednorodne równanie transportu w postaci zachowawczej.

Równanie (2.23) jest przykładem **skalarnego prawa zachowania**⁴. To znaczy opisuje takie własności układu, które nie ulegają zmianie, są zachowywane (ang. conserved) – w tym przypadku jest to liczba pojazdów. Do pełnego obrazu sytuacji, opis należy uzupełnić o warunek początkowy, rozkład pojazdów w chwili $t = 0$

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (b(t, x)u(t, x)) = 0 & \text{gdzie } t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}, \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.24)$$

⁴Ogólna postać skalarnych praw zachowania to $\partial_t u(t, x) + \partial_x (b(u(t, x))) = 0$, gdzie $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a zadana funkcja $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Przykładem są zasada zachowania pędu, czy zasada zachowania energii. Szerszy opis skalarnych praw zachowania można znaleźć na przykład w [Smo94, Rozdział 15].

W ten sposób otrzymaliśmy zagadnienie jednowymiarowego jednorodnego równania transportu w postaci zachowawczej.

Zauważmy, że w powyższym opisie pojawiło się niepokojące określenie dotyczące rozwiązania – „odpowiednio regularne”. Do tej pory nie określiliśmy, jakie funkcje będziemy uważać za rozwiązania. Naturalnym oczekiwaniem jest żądać, żeby rozwiązanie równania różniczkowego k -tego rzędu, było przynajmniej k -krotnie różniczkowalne w sposób ciągły. Wtedy wszystkie występujące w równaniu pochodne będą istnieć, a nawet będą funkcjami ciągłymi – takie rozwiązania nazywamy **klasycznymi**. Jednak za rozwiązania można uznać także takie funkcje, które tej własności nie mają. Zamiast rozważać równanie różniczkowe, można patrzeć na odpowiednie tożsamości całkowe, co w świetle powyższych argumentów jest zasadne. Funkcje spełniające te tożsamości całkowe to **słabe rozwiązania**.

Rozważmy równanie (2.21) dla czasu $t \in [0, \infty)$. Przemnożmy je przez funkcję ψ różniczkowalną w sposób ciągły i dodatkowo o zwartym nośniku, czyli $\psi \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$, a następnie obustronnie scałkujemy

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, x) \partial_t u(t, x) + \psi(t, x) \nabla_x \cdot (b(t, x) u(t, x)) \, dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t, x) w(t, x) u(t, x) \, dx dt.$$

Całkując przez części i uwzględniając warunek początkowy otrzymamy tożsamość

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \left(\partial_t \psi(t, x) + b(t, x) \nabla_x \cdot \psi(t, x) \right) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(0, x) u_0(x) \, dx \\ = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x) \psi(t, x) u(t, x) \, dx dt, \end{aligned} \quad (2.25)$$

która zachodzi dla każdego ψ , o ile tylko $u(t, x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (2.21). Zauważmy jednak, że w powyższym sformułowaniu w ogóle nie występuje pochodna u . To znaczy, że mogą istnieć nieróżniczkowalne funkcje u , które spełniają równanie (2.25), a zagadnienie (2.21) już nie. Równanie (2.25) nazywamy słabym sformułowaniem zagadnienia (2.21), a spełniające je $u(t, x)$ **słabym rozwiązaniem**.

Żeby przedstawić formułę na rozwiązanie (2.21), czy też (2.25), musimy wprowadzić metodę charakterystyk.

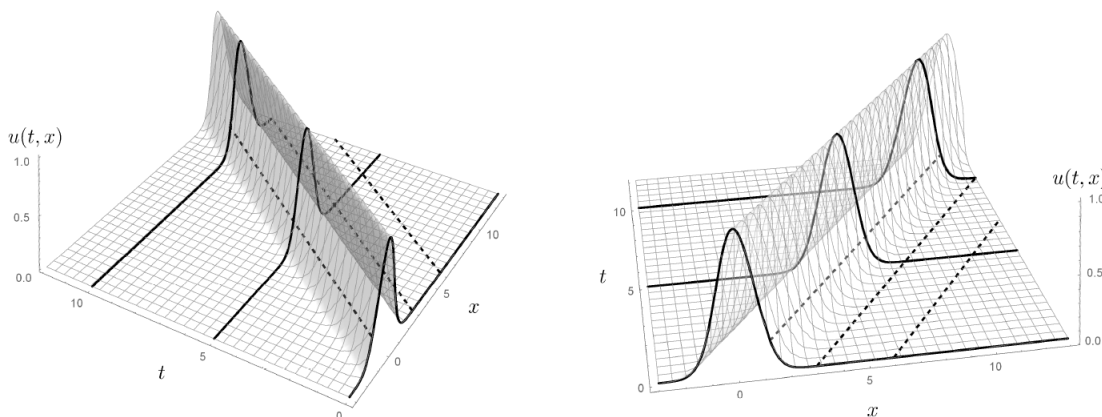
2.4 Metoda charakterystyk

W tym rozdziale przedstawiona zostanie, metoda rozwiązywania równania transportu. Rozpatrzmy na początek następujący przykład

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = 0 & \text{gdzie } t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

czyli pole wektorowe $b \equiv 1$, a $w \equiv 0$. Posługując się interpretacją z Przykładu 3: początkowy układ pojazdów $u_0(x)$ przesuwa się w czasie, ale jego profil się nie zmienia (patrz Rysunek 2.1).

Zauważmy, że rozwiązanie jest stałe nie tylko wzdłuż przerywanych linii, ale również wzdłuż każdej prostej do nich równoległej i stycznej do wykresu. W ogólności rozwiązania równania transportu zachowują podobną własność nie tylko, gdy pole wektorowe jest stałe, lecz również, gdy prawa strona równania jest niezerowa. **Metoda charakterystyk**, za pomocą której można rozwiązać równanie transportu⁵, realizuje następujący pomysł.



Rysunek 2.1: Rozwiązanie równania transportu dla $b = \text{const}$.

Chcemy wyznaczyć wartość funkcji u w konkretnym punkcie (\bar{t}, \bar{x}) . W tym celu znajdujemy w zbiorze U krzywą, która łączy punkt (\bar{t}, \bar{x}) z brzegiem (gdzie wartości funkcji są określone). Krzywa ta ma mieć taką własność, żeby łatwo można było obliczać wartości funkcji $u(t, x)$ w punktach tej krzywej. Takie krzywe, nazywane **charakterystykami**, wyznacza się, sprowadzając równanie różniczkowe cząstkowe do odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych. W ten sposób wykres rozwiązania $u(t, x)$ zostaje jakby utkany z nitki, to jest z wartości funkcji u na poszczególnych krzywych.

⁵Metoda charakterystyk służy do rozwiązywania szerszej klasy równań różniczkowych niż tylko równanie transportu. Można ją stosować do równań postaci $F(y, u, \nabla \cdot u) = 0$, gdzie $y \in \mathbb{R}^d$ oraz funkcja F jest liniowa lub quasilinearna. Jeżeli F jest całkowicie nieliniowa, wtedy jawne rozwiązanie istnieje tylko w wyjątkowych przypadkach. W tym rozdziale przedstawiamy jedynie minimum niezbędne do tego, żeby rozwiązać równanie transportu. Szersze omówienie można znaleźć na przykład w [Eva99, Rozdział 3.2] lub [BCM⁺10, Rozdział 14].

Wyznamy dokładne rozwiązanie jednowymiarowego równania w postaci zachowawczej za pomocą metody charakterystyk. Napiszmy jeszcze raz zagadnienie, które rozważamy

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (b(t, x)u(t, x)) = w(t, x)u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

gdzie $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Przyjmijmy, że w i b są borelowsko mierzalnymi funkcjami klasy \mathcal{C}^1 i mają ograniczone pierwsze pochodne. Powyższe równanie można zapisać następująco

$$\partial_t u(t, x) + b(t, x)\partial_x u(t, x) + (-w(t, x) + \partial_x b(t, x))u(t, x) = 0, \quad (2.28)$$

co można zapisać w ogólniejszej postaci

$$F(t, x, u) := a_1(t, x)\partial_t u(t, x) + a_2(t, x)\partial_x u(t, x) + a_3(t, x)u(t, x) = 0. \quad (2.29)$$

Przyjmijmy na moment, że u jest znane i rozważmy powierzchnię $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^3$. Wektory normalne tej powierzchni to $(\partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x), -1)$. Równanie (2.29) jest geometrycznie równoważne temu, że wektor $(a_1(t, x), a_2(t, x), a_3(t, x)u)$ jest styczny do powierzchni $u(t, x)$ w każdym jej punkcie – czyli iloczyn skalarny tego wektora oraz wektora normalnego wynosi zero. Innymi słowy, wykres rozwiązania $u(t, x)$ tworzą krzywe pola wektorowego, które zadane są przez układ równań

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = a_1(t, x) \\ \frac{dx}{ds} = a_2(t, x) \\ \frac{du}{ds} = a_3(t, x)u. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu nazywamy **charakterystykami**. Wracając do równania (2.28), charakterystyki są zadane przez układ

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = b(t, x) \\ \frac{du}{ds} = (-w(t, x) + \partial_x b(t, x))u. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy, że $t = t_0 + s$. Z drugiego równania otrzymujemy (2.30). Jeżeli zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t X(s, x) = b(s, X(t, x)) \\ X(s = 0, x) = y_0 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

ma jednoznaczne rozwiązanie dla każdego $y_0 \in \mathbb{R}$ (patrz Twierdzenie 2.6), to możemy wyznaczyć ogólną postać rozwiązań. Z trzeciego równania otrzymujemy **formułę reprezentacyjną**

$$u(t, x) = u_0(X(0, x)) \exp \left(\int_0^t -w(s, X(s, X(0, x))) + \partial_x b(s, X(s, X(0, x))) ds \right) \quad (2.32)$$

równania (2.26) z warunkiem początkowym (2.27).

Uwaga 2.12. Równanie (2.30) jest nazywane **równaniem charakterystycznym** równania (2.26). Dla określonego warunku początkowego y_0 odwzorowanie $t \mapsto X(t, y_0)$ będące rozwiązaniem równania (2.30) jest nazywane **charakterystyką** równania (2.26). Wartość $X(0, x)$ jest punktem początkowym (dla $t = 0$) jednoznacznej charakterystyki.

Uwaga 2.13. Formuła (2.32) opisuje rozwiązanie równania transportu (2.26) z warunkiem początkowym (2.27). Mamy pewność, że funkcja $X(t, x)$ istnieje oraz jest jednoznaczna – oczywiście o ile $b(t, x)$ spełnia założenia Twierdzenia 2.6. W innym wypadku funkcja $X(t, x)$ może nie być dobrze określona, to znaczy:

- charakterystyki mogą nie być jednoznaczne;
- charakterystyki mogą nie istnieć;
- charakterystyki mogą się przecinać.

Zanim przedstawimy rozwiązanie wielowymiarowego równania transportu przedstawimy zagadnienie, dla którego metoda charakterystyk zawodzi. Dane początkowe będą gładkie, natomiast pole wektorowe nieciągłe.

Przykład 4 (Nieciągłe pole wektorowe b). Rozważmy następujące zagadnienie Cauchy’ego

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x(b(x)u(t, x)) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad b(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 1 \\ 0 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

oraz dane początkowe $u_0(x) \in C_c^\infty((-\infty, 1))$. Ze względu na nieciągłość pola wektorowego b , wyrażenie $\partial_x(b(x)u(t, x))$ może nie być dobrze określone. Mimo to spróbujmy użyć metody charakterystyk. Otrzymujemy następujące równania charakterystyk

$$\text{dla } x \geq 1 \quad X(t, y_0) = y_0 \quad \text{oraz dla } x < 1 \quad X(t, y_0) = \begin{cases} t + y_0 & \text{dla } t \in [0, 1 - y_0) \\ 0 & \text{dla } t \geq 1 - y_0 \end{cases},$$

które przecinają się w punkcie $x = 1$. Interpretację tego zagadnienia przedstawimy w Przykładzie 6 na stronie 31. Okazuje się ona dobrą motywacją do rozważania równań w przestrzeni miar.

Podobnie jak w przypadku równań zwyczajnych, odpowiednia regularność pola wektorowego oraz danych początkowych gwarantuje istnienie jednoznacznych rozwiązań, a nawet za pomocą metody charakterystyk można uzyskać jawne formuły rozwiązań.

Mówimy, że pole wektorowe $b \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ spełnia warunek Cauchy’ego-Lipschitza, jeżeli dla dowolnych $T > 0$, $R > 0$ istnieją takie stałe $K(T, R)$ oraz $M(T)$, że spełnione są warunki

$$\begin{cases} |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y| & \text{dla } |t| < T, |x|, |y| \leq R, \\ |b(t, x)| \leq M(1 + |x|) & \text{dla } |t| \leq T, x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.33)$$

Lemat 2.14 (Formuła reprezentacyjna **jednorodnego** równania transportu w postaci **zachowawczej**). [Per07, Twierdzenie 6.3, strona 154] Jeżeli spełnione są założenia (2.33), $b, \nabla_x \cdot b \in \mathcal{C}^1$ oraz $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \nabla_x \cdot (b(t, x)u(t, x)) = 0 & \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.34)$$

To rozwiązanie jest klasy \mathcal{C}^1 i spełnia formułę

$$u(t, X(t, x)) \exp\left(\int_0^t \nabla_x \cdot b(s, X(s, x)) ds\right) = u_0(x) \quad \text{dla wszystkich } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Dowód można znaleźć w [Per07, strona 154]. Przedstawimy własności rozwiązań, które z tej formuły reprezentacyjnej bezpośrednio wynikają.

Stwierdzenie 2.15. [Per07, Wniosek 6.2] Przy założeniach Lematu 2.14 rozwiązanie zagadnienia (2.34) ma następujące własności:

- (i) *Skończona prędkość propagacji:* wartości rozwiązania $u(t, y)$ zależą tylko od wartości początkowych $u_0(x)$ dla $|x - y| \leq |t| \sup |b|$.
- (ii) *Propagacja osobliwości:* rozwiązanie $u(t, \cdot)$ ma taką samą regularność (i nie wyższą) jak u_0 .
- (iii) *Zachowanie masy:* dla $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx$.
- (iv) *Dla $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)| dx$.*

Uogólnijmy Lemat 2.14 na zagadnienie niejednorodne.

Lemat 2.16 (Formuła reprezentacyjna **niejednorodnego** równania transportu w postaci **zachowawczej**). Jeżeli b oraz w spełniają założenia (2.33), oraz dodatkowo $w, b, \nabla_x \cdot b \in \mathcal{C}^1$ oraz $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \nabla_x \cdot (b(t, x)u(t, x)) = w(t, x)u(t, x) & \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.35)$$

Rozwiązanie jest klasy \mathcal{C}^1 i dla wszystkich $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ spełnia formułę

$$u(t, X(t, x)) \cdot \exp\left(\int_0^t \nabla_x \cdot b(s, X(s, x)) - w(s, X(s, x)) ds\right) = u_0(x).$$

W pracy [DL89, Rozdział IV, strony 540–543] znaleźć można pouczające przykłady zagadnień z równaniem transportu, których rozwiązania nie są jednoznaczne. Skonstruowany jest między innymi przykład zagadnienia, które ma nieskończenie wiele rozwiązań, podczas gdy pole wektorowe $b \in W^{1,p}$ (patrz Definicja B.2), ale jego dywergencja jest nieograniczona.

2.5 Miary

Równania transportu, którego dotyczą główne wyniki tej rozprawy, mają zadany warunek początkowy w pewnej przestrzeni miar. W tym rozdziale scharakteryzujemy przestrzeń, którą będziemy się posługiwać oraz wprowadzimy metryki używane w literaturze do analizy zagadnień w tej właśnie przestrzeni.

Zanim przejdziemy do definicji spróbujemy odpowiedzieć na pytanie: po co w ogóle do modelowania czegokolwiek używać miar?

Przykład 5 (Model jednopłciowej populacji ze strukturą). *Niech $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ jest gęstością osobników danej populacji, którzy w chwili t są w wieku x . Poniższy model⁶ opisuje strukturę takiej populacji*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x u(t, x) = -w(x)u(t, x) \\ u(t, 0) = \int_0^\infty \beta(x)u(t, x)dx \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.36)$$

Funkcja $w(x) \leq 0$ opisuje śmiertelność osobników w wieku x – liczba zgonów osobników w wieku x jest proporcjonalna do ich liczby, stąd $w(x)u(t, x)$. Dodatkowy warunek brzegowy $u(t, 0)$ to współczynnik urodzeń. Współczynnik $\beta(x)$ może być interpretowany jako zależna od wieku płodność.

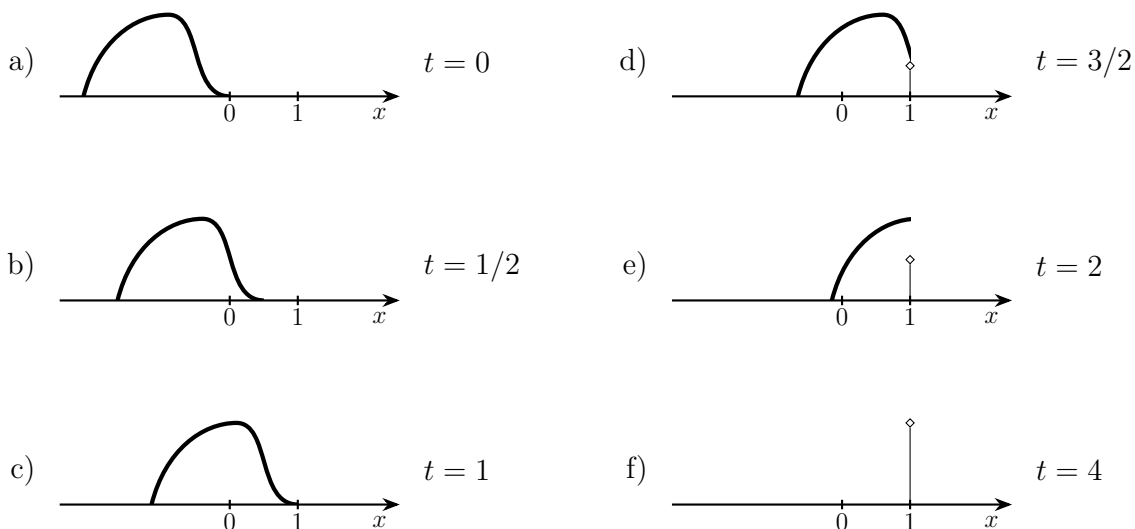
*Jak zauważyliśmy we wstępie rozprawy (patrz strona 7) wszelkie dane statystyczne dotyczące populacji mają zagregowaną postać. To znaczy wiemy, ile osób urodziło się w danym roku, miesiącu, dniu, być może w ciągu konkretnej godziny czy minuty, ale nie istnieją dane z precyzyjnie określonym momentem urodzenia czy zgonu. Nie sposób takich danych zebrać, na przykład ze względu na ograniczenia dokładności przyrządów pomiarowych. Z tego właśnie względu dużo właściwsze do opisu populacji są **miary**⁷.*

W powyższym przykładzie naturalnym jest założenie, że miara opisująca liczebność populacji powinna być skończona – takie też będzie nasze założenie na warunek początkowy i oczekiwanie wobec rozwiązania. Innym naturalnym oczekiwaniem jest, żeby ta miara przyjmowała tylko wartości nieujemne – i faktycznie do modelowania populacji używa się miar, które mają taką własność.

Przykład 6 (Piasek, interpretacja zagadnienia z Przykładu 4). *Funkcja $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ opisuje ilość piasku na stosie w punkcie x i chwili czasu t . Piach jest przesypywany przez wiatr wiejący w prawo ze stałą prędkością $b = 1$ aż do momentu, gdy znajdzie się w punkcie $x = 1$ – tam stoi ściana i piasek nie może przemieszczać się dalej. W takiej sytuacji ilość piasku w punkcie $x = 1$ będzie rosłać dopóki cały piasek nie znajdzie się w tym właśnie punkcie – gdy cała masa będzie skoncentrowana w punkcie $x = 1$ (patrz Rysunek 2.2).*

⁶Został zaproponowany w 1926 roku przez Andersona McKendricka w pracy [McK26], który uznawany jest za pioniera stosowania matematycznych metod w epidemiologii. Ten model jest punktem wyjścia do wielu innych modeli, również leżących w bieżącym kręgu zainteresowań wielu badaczy – czego szersze omówienie można znaleźć w Rozdziale 6.

⁷Obszerniejszą dyskusję na ten temat można znaleźć w [GM10, Rozdział 5].



Rysunek 2.2: Piasek przesypywany przez wiatr w prawą stronę aż do punktu $x = 1$.

Powyższa sytuacja jest opisana przez zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x(b(x)u(t, x)) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad b(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 1 \\ 0 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}. \quad (2.37)$$

Warunek początkowy u_0 jest gładką funkcją o zwartym nośniku, będącym podzbiorem $(-\infty, 1)$. Wiemy już, że charakterystyki przecinają się w punkcie $x = 1$.

Zwróćmy uwagę, że powyższy scenariusz nie może być modelowany za pomocą klasycznych funkcji. Dla pewnych dużych t i $x = 1$ zachodzi

$$\int_{\{1\}} u(t, x) dx > 0.$$

Całka z funkcji na zdegenerowanym, jednopunktowym przedziale nie może przyjmować innej wartości niż 0. Odpowiednim narzędziem do modelowania tego typu sytuacji są **miary** i, jak można podejrzewać, sytuację przedstawioną na Rysunku 2.2 w części f) opisuje delta Diraca skoncentrowana w punkcie $x = 1$.

Miary Radona

Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ będziemy oznaczać borelowską σ -algebrę na \mathbb{R}^d . Jeżeli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, wtedy A nazywamy zbiorem **borelowskim** lub **borelowsko mierzalnym**. Mówimy, że $b : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ jest *borelowsko mierzalną funkcją*, lub krócej funkcją borelowską, jeżeli $b^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$.

Zacznijmy od definicji **miary probabilistycznej**. Niech \mathcal{F} będzie σ -ciałem określonym na danym zbiorze Ω . Miarę $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ nazywa się miarą probabilistyczną, jeżeli

$P(\Omega) = 1$. W naszym przypadku zbiorem Ω będą \mathbb{R}^d, \mathbb{R} lub \mathbb{R}^+ , a \mathcal{F} zawsze będzie borelowskim σ -ciałem odpowiedniego zbioru. Przestrzeń miar probabilistycznych na tych zbiorach będziemy oznaczać przez $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \mathcal{P}(\mathbb{R})$ oraz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$.

Miary, którymi będziemy się posługiwać, to miary Radona. Przedstawimy fakty niezbędne do tego, żeby móc się z nimi właściwie obchodzić w kontekście równania transportu.

Definicja 2.17. *Nieujemną miarą Radona na \mathbb{R}^d nazywamy miarę $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ spełniającą następujące warunki:*

1. **wewnętrzna regularność**, czyli $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ oraz } K \text{ jest zwarty}\}$;
2. **zewnętrzna regularność**, czyli $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V \text{ oraz } V \text{ jest otwarty}\}$;
3. **lokalna skończoność**, czyli $\mu(K) < \infty$ dla każdego zwartego zbioru $K \subset \mathbb{R}^d$.

Skończoną⁸ nieujemną miarą Radona nazywamy nieujemną miarę Radona spełniającą warunek $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Powiemy, że dwie nieujemne miary μ oraz ν mają taką samą masę, jeżeli $\mu(\mathbb{R}^d) = \nu(\mathbb{R}^d)$. **Nośnikiem** miary μ , oznaczanym przez $\text{supp}(\mu)$, nazywamy najmniejszy domknięty podzbiór \mathbb{R}^d , taki że $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$. Zbiór wszystkich skończonych nieujemnych miar Radona na \mathbb{R}^d oznaczamy przez $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Analogicznie definiujemy przestrzeń niedodatnich skończonych miar Radona, którą oznaczamy przez $\mathcal{M}^-(\mathbb{R}^d)$.

Przykład 7. *Przykłady miar Radona:*

1. *Standardowa miara Lebesgue'a określona na \mathbb{R}^d .*
2. *Delta Diraca skoncentrowana w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ w zwykłej przestrzeni euklidesowej zdefiniowana jako*

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{dla } x_0 \in A, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

3. *Miara z gęstością ϱ , oznaczana przez ϱdx i zdefiniowana jako $\varrho dx(A) := \int_A \varrho(x) dx$, gdzie $\varrho : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ jest nieujemną lokalnie całkowalną funkcją. W szczególności dla $\varrho(x) \equiv 1$ otrzymujemy miarę Lebesgue'a.*

Przykład 8. *Przykłady miar, które nie są miarami Radona:*

1. *Miara licząca zdefiniowana przez*

$$\mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{jeżeli } A \text{ jest zbiorem skończonym,} \\ +\infty & \text{jeżeli } A \text{ jest zbiorem nieskończonym,} \end{cases}$$

gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A . Miara μ nie jest miarą Radona, ponieważ nie jest lokalnie skończona.

⁸Czasem w literaturze określa się taką miarę również jako *ograniczoną* lub *miarę o skończonej masie*.

2. Niech I będzie przedziałem $[0, 1)$ z topologią generowaną przez następujące zbiory $\{[a, b) : 0 \leq a < b \leq 1\}$ (nazywaną topologią strzałki). W tej przestrzeni topologicznej standardowa miara Lebesgue'a nie jest miarą Radona, ponieważ nie jest wewnętrznie regularna.

Dla nieujemnej (analogicznie dla niedodatniej) miary Radona μ oraz funkcji borelowsko mierzalnej $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ można zdefiniować $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x)$. Jeżeli $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x)$ istnieje i jest skończona, to mówimy, że φ jest **całkowalna względem miary μ** . Zbiór wszystkich funkcji określonych na \mathbb{R}^d i całkowalnych względem miary μ oznaczamy przez $L^1(\mathbb{R}^d, \mu)$. Zbiór ten wraz z normą $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu(x)$ jest przestrzenią Banacha. Mówimy, że φ jest **lokalnie całkowalna**, jeżeli $\int_K \varphi(x) d\mu(x)$ istnieje i jest skończona dla każdego zwartego zbioru $K \subset \mathbb{R}^d$.

Uwaga 2.18. Wyrażenie $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x)$ istnieje dla każdej borelowsko mierzalnej, nieujemnej funkcji φ . Ta całka istnieje również, jeżeli φ jest ograniczona i ma zwarty nośnik.

Definicja 2.19. Miarą ze znakiem (ang. signed measure) określoną na \mathbb{R}^d jest funkcja $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ lub $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [-\infty, +\infty)$ spełniająca następujące warunki:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- dla każdej przeliczalnej rodziny parami rozłącznych zbiorów borelowskich $\{E_1, E_2, \dots\}$ zachodzi tożsamość $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Przykład 9. Przykłady miar ze znakiem:

1. Skończona miara Radona nieujemna lub niedodatnia.
2. Dowolna kombinacja liniowa $\sigma = \sum_{k=1}^K a_k \mu_k$, gdzie μ_k są skończonymi nieujemnymi miarami Radona oraz $a_k \in \mathbb{R}$.
3. Miara $\sigma = f\mu$ zdefiniowana przez $\sigma(A) := \int_A f d\mu$, gdzie μ jest nieujemną miarą Radona oraz funkcja f jest borelowsko mierzalna i jest całkowalna względem μ , to znaczy $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\mu(x) < \infty$.

Miarę ze znakiem można rozumieć jako różnicę dwóch nieujemnych miar. Dokładniej opisuje to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.20 (Hahna-Jordana o rozkładzie). Niech μ będzie miarą ze znakiem na \mathbb{R}^d . Istnieją dwa rozłączne zbiory borelowskie P oraz N , takie że:

- $P \cup N = \mathbb{R}^d$;
- dla każdego $A \subset P$ zachodzi $\mu(A) \geq 0$;
- dla każdego $A \subset N$ zachodzi $\mu(A) \leq 0$;
- miara μ może być rozłożona na dwie rozłączne składowe $\mu = \mu^+ - \mu^-$, gdzie μ^+, μ^- są nieujemnymi miarami, takimi że $\mu^+(N) = \mu^-(P) = 0$, oraz przynajmniej jedna z tych miar jest skończona.

Dowód można znaleźć w [Coh80, Twierdzenie 4.1.4 oraz Wniosek 4.1.5].

Definicja 2.21. Miarą Radona ze znakiem nazywamy taką miarę ze znakiem μ , która może zostać rozłożona na dwie rozłączne składowe $\mu = \mu^+ - \mu^-$, z których każda jest skończoną nieujemną miarą Radona.

Definicja 2.22.

1. **Wahaniem** miary Radona μ ze znakiem jest miara $|\mu|$ zdefiniowana następująco $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$.
2. **Wahaniem całkowitym** miary Radona μ ze znakiem jest nieujemna liczba rzeczywista zdefiniowana przez $\|\mu\|_{TV} := \int_{\mathbb{R}^d} d|\mu|$. W szczególności, jeżeli μ jest nieujemną miarą Radona, wtedy $\|\mu\|_{TV} = \mu(\mathbb{R}^d)$.
3. Całka funkcji borelowskiej f względem miary Radona ze znakiem $\sigma = \mu - \nu$ jest zdefiniowana następująco

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\sigma := \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu,$$

gdzie μ oraz ν są dodatnimi miarami Radona.

Miara Radona ze znakiem jest **skończona**, jeżeli $\|\mu\|_{TV} < \infty$. Przestrzeń skończonych miar Radona ze znakiem będziemy oznaczać przez $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ i mówić w skrócie *skończone miary Radona*. Przy użyciu normy $\|\cdot\|_{TV}$ można przestrzeń skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ zdefiniować w inny sposób, niż w Definicji 2.17. Ta alternatywna definicja dodatkowo opisuje strukturę przestrzeni. Normę $\|\cdot\|_{TV}$ będziemy czasem zapisywać jako moduł z miary.

Twierdzenie 2.23 (Riesza o reprezentacji). *Zachodzi następujące utożsamienie*

$$(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{TV}) \cong (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)^*,$$

gdzie $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią funkcji ciągłych znikających w nieskończoności, wyposażoną w normę supremum.

Powyższe twierdzenie orzeka, że każda miara $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ może być utożsamiana z ograniczonym funkcjonałem liniowym L określonym na $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$, w taki sposób, że $\|\cdot\|_{TV} = \|L\|_{(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))^*}$. Przez $\|\cdot\|_{(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))^*}$ rozumiemy tutaj standardową normę w przestrzeni dualnej, czyli

$$\|L\|_{(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))^*} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x) : \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \text{ oraz } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Ponieważ przestrzeń ograniczonych liniowych funkcjonałów na unormowanej przestrzeni jest przestrzenią Banacha (wyposażoną w normę dualną), w takim razie $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{TV})$ również jest przestrzenią Banacha. Dowód Twierdzenia 2.23 można znaleźć na przykład w [AE08, Twierdzenie 2.14, strona 159].

Zbieżność w przestrzeniach miar

Definicja 2.24. Niech μ_n dla $n = 1, 2, \dots$ oraz μ będą elementami przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Mówimy, że:

- $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do μ w normie $\|\cdot\|_{TV}$, jeśli $\|\mu_n - \mu\|_{TV} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do μ **słabo z ***, co zapisujemy $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$, jeśli dla każdej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x)$.

Przykład 10. Rozważmy ciąg delt Diraca $\mu_n := \delta_{x_n}$, gdzie $\{x_n\}_{n \geq 1}$ jest zadany ciąg liczb rzeczywistych. Ciąg miar $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$ przy $n \rightarrow \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Wynika to z faktu, że $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\delta_{x_n} = \varphi(x_n)$. Z drugiej strony $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n - \mu\|_{TV} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x_n\}$ jest ciągiem stałym od pewnego momentu. Jest to konsekwencją tego, że $\|\delta_{x_n} - \delta_x\|_{TV} = 2$ dla $x_n \neq x$.

Analogicznie do definicji słabej z * zbieżności definiujemy pojęcie odpowiadającej jej ciągłości.

Definicja 2.25. Mówimy, że odwzorowanie $t \mapsto \mu_t : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ jest **słabo z *** **ciągłe** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ funkcja

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t(x)$$

jest ciągła.

Definicja 2.26. Mówimy, że ciąg miar $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **zbiega ciasno** (ang. *narrowly converges*) do miary $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\mu^n - \mu)(x) = 0 \quad \text{dla każdego } \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d).$$

Analogicznie mówimy, że odwzorowanie $t \mapsto \mu_t : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ jest **ciasno ciągłe**, jeżeli dla każdego $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ funkcja

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t(x)$$

jest ciągła.

Powyższa definicja posłuży nam w sformułowaniu rozwiązania równania transportu w słabszym sensie niż do tej pory rozumieliśmy (patrz Definicja 2.52 na stronie 47).

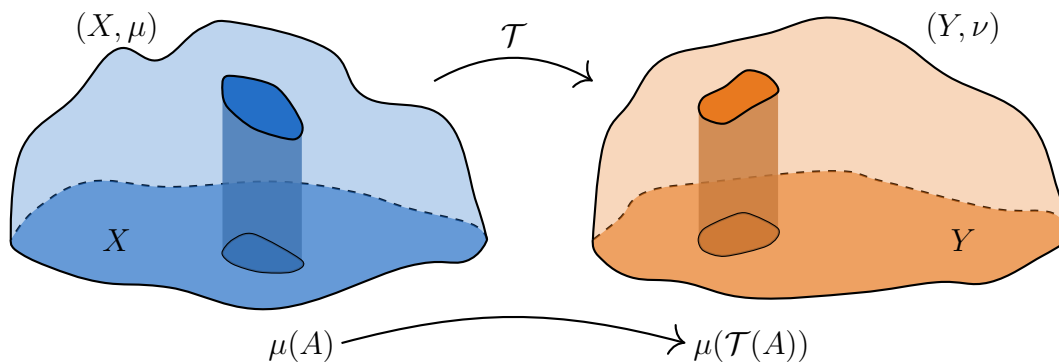
Na zakończenie tej części jeszcze jedna definicja

Definicja 2.27. Niech $\xi^n \in \mathcal{X}$ dla każdego n . Mówiąc, że ciąg ξ^n zbiega do ξ w przestrzeni \mathcal{X} będzie to oznaczać, że istnieje $\xi \in \mathcal{X}$ takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi - \xi^n\|_{\mathcal{X}} = 0$.

Metryki w przestrzeniach miar

Jak już wspomnieliśmy, będzie nas interesowało równanie transportu z warunkiem początkowym w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Okaze się, że przy odpowiednich założeniach na pole wektorowe, będzie istniało tylko jedno rozwiązanie takiego zagadnienia i również będzie ono elementem przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Do analizowania ciągłości czy lipschitzowskości takich rozwiązań nie wystarczy $\|\cdot\|_{TV}$, konieczne jest wprowadzenie odpowiednich metryk. Jak się okazuje (Przykład 1 na stronie 10) stosowane dotychczas w literaturze metryki, które zapewniają jednoznaczność, ciągłość, czy lipschitzowskość rozwiązań (względem warunku początkowego i współczynników) nie pozwalają na uzyskanie różniczkowalności rozwiązań. Konieczne więc będzie wprowadzenie nowego podejścia, to jednak nastąpi dopiero w Rozdziale 4. Lektura obecnego rozdziału jest potrzebna do przestudiowania wcześniejszych wyników dotyczących równania transportu o wartościach w $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ (Rozdział 3) oraz zastosowań głównych wyników rozprawy przedstawionych w Rozdziale 6. Ich znajomość nie jest jednak konieczna do prześledzenia głównych wyników rozprawy.

Wprowadzenie do różnych metryk w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ przeprowadzimy podobnie, do tego jak zrobiono to w artykule [Ver13]⁹. Zaczniemy od przybliżenia problemu optymalnego transportu. Postawiony przez Gasparda Monge'a w 1781 roku problem polegał na przeniesieniu przy minimalnym wysiłku (czy też koszcie) piasku z miejsca wydobywania do miejsca, gdzie miał być użyty do budowy¹⁰.



Rysunek 2.3: T oznacza transport miary z μ na ν .

Pod koniec lat 30. XX wieku Leonid Kantorowicz¹¹ sformułował to zagadnienie w języku teorii miary i od tamtej pory w literaturze można je znaleźć pod hasłem *problemu Monge'a-Kantorowicza*. Wyobraźmy sobie, że mamy stos piachu i otwór w ziemi, który ma dokładnie taką samą objętość jak stos. Koszt przetransportowania piachu z jednego punktu

⁹Artykuł został napisany z okazji setnej rocznicy urodzin Kantorowicza. Poza wartością matematyką, w artykule można znaleźć również ciekawy opis tła historycznego.

¹⁰Obrazek na następnej stronie jest modyfikacją rysunku z prezentacji *Optimal Transport: A Crash Course* [KR].

¹¹Za swój wkład w teorię optymalnego transportu Leonid Kantorowicz otrzymał w 1975 roku nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla z dziedziny ekonomii (uwaga: to nie TA Nagroda Nobla). Cytat z uzasadnienia „for their contributions to the theory of optimum allocation of resources”.

do drugiego jest zależny od odległości między tymi punktami oraz oczywiście transportowanej masy. Niech

$$c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$$

opisuje koszt przetransportowania jednostki masy z punktu x do y . Celem jest zaplanowanie takiego transportu, który zminimalizuje całkowity koszt. Jest to równoważne znalezieniu odpowiedniej miary probabilistycznej określonej na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, takiej że $d\pi(x, y)$ mierzy masę przetransportowaną z x do y .

Definicja 2.28. Niech $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, wtedy przez $\Pi(\mu, \nu)$ oznaczamy zbiór miar probabilistycznych określonych na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ z brzegowym rozkładem μ oraz ν , to znaczy

$$\Pi(\mu, \nu) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) : \pi(A \times \mathbb{R}^d) = \mu(A), \pi(\mathbb{R}^d \times A) = \nu(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Elementy zbioru $\Pi(\mu, \nu)$ nazywany **planem transportowym** (ang. *transport plan*).

Koncepcja planu transportowego w naturalny sposób może być rozszerzona na nieujemne skończone miary Radona o tej samej masie. Mając funkcję kosztu c i zbiór planów transportowych $\Pi(\mu, \nu)$, rozważmy minimalizację następującego funkcjonału

$$\mathcal{T}^c(\pi) = \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c(x, y) d\pi(x, y) \right|. \quad (2.38)$$

Chcemy wybrać takie $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, żeby funkcjonał \mathcal{T}^c miał możliwie najmniejszą wartość.

Poniższe twierdzenie mówi o tym, że problem minimalizacji funkcjonału (2.38) jest równoważny maksymalizacji innego, wygodniejszego funkcjonału.

Twierdzenie 2.29 (Kantorowicza-Rubensteina). Niech d będzie półciągłą z dołu metryką, $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$. Zdefiniujmy \mathcal{T}^d jako koszt optymalnego transportu dla $c(x, y) = d(x, y)$

$$\mathcal{T}^d(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d(x, y) d\pi(x, y) \right| \right\}, \quad (2.39)$$

wtedy

$$\mathcal{T}^d(\mu, \nu) = \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\mu - \nu)(x) \right| : \text{Lip}(\varphi) \leq 1 \right\}. \quad (2.40)$$

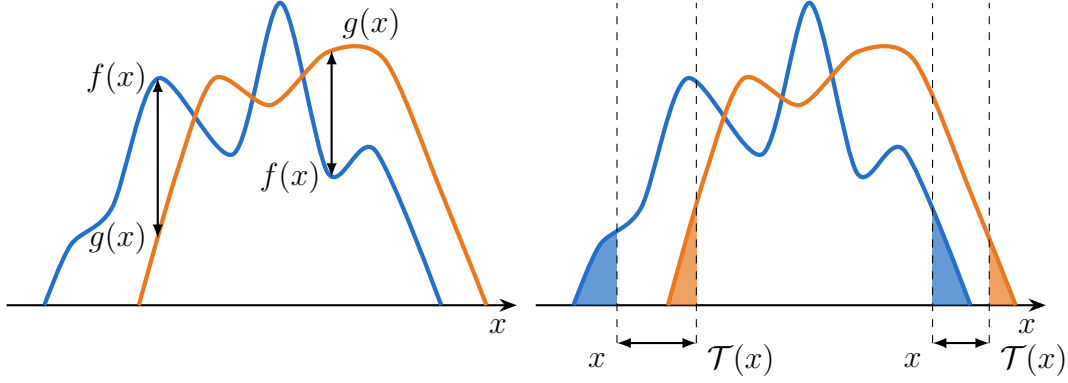
Jeżeli $d(x, y) = |x - y|$, wtedy piszemy \mathcal{T} zamiast \mathcal{T}^d .

Definicja 2.30. Niech $d(x, y) = |x - y|$, wtedy odwzorowanie

$$W_1 : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty], \quad W_1(\mu, \nu) := \mathcal{T}(\mu, \nu) \quad (2.41)$$

definiuje **metrykę 1-Wassersteina** (ang. *1-Wasserstein distance*).

Przykład 11. Niech f i g będą rozkładami prawdopodobieństwa na odcinku $[0, 1]$ i niech $g_h(x) := g(x - h)$. Zauważmy, że dla $|h| > 1$ odległość między f i g_h w metryce L^1 nie zależy od h i wynosi $\|f - g_h\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} + \|g_h\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$. Natomiast ta odległość w metryce W_1 jest rzędu $|h|$, dla $W_1(g, g_h) = |h|$. Można to interpretować w taki sposób, że metryka W_1 jest dużo bardziej wrażliwa na poziome przesunięcie, niż na kształt rozkładów f i g .



Rysunek 2.4: Z lewej strony przedstawiona jest interpretacja odległości między rozkładami prawdopodobieństwa f i g w metryce L_1 , którą nieformalnie można rozumieć jak *pionową odległość*. Z prawej strony $W_1(f, g)$, którą można interpretować jak *poziomą odległość*. W przypadku jednowymiarowym, $x \in \mathbb{R}$, transport \mathcal{T} jest wyznaczany w taki sposób, żeby móc postawić równość między niebieskimi i pomarańczowymi polami pod wykresami.

Uogólnieniem metryki W_1 jest następująca definicja.

Definicja 2.31. Niech $d(x, y) = |x - y|$ oraz \mathcal{T} będzie takie jak w Twierdzeniu 2.29. Wtedy odwzorowanie

$$W_p : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty], \quad W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^p d\pi(x, y) \right| \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.42)$$

definiuje **p-metrykę Wassersteina**.

Uwaga 2.32. Zauważmy, że dla miar $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ odległość $W_1(\mu, \nu)$ może przyjmować nieskończoną wartość, czyli nie jest to metryka. Jednym ze sposobów uniknięcia tej wady jest dodanie ograniczenia do rozważanej przestrzeni miar. Dokładniej: ograniczenie się do miar ze skończonym pierwszym momentem (patrz Definicja B.3), oznaczmy tę przestrzeń przez $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$. Analogicznie przez $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ oznaczmy przestrzeń skończonych miar Radona ze skończonym pierwszym momentem. Dla $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ oraz $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ zachodzi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y| d\pi(x, y) &\leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x| d\pi(x, y) + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |y| d\pi(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |x| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^d} |y| d\nu(y) < \infty. \end{aligned}$$

Oznacza to, że zagwarantowane jest, że $W_1(\mu, \nu) < \infty$ dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$. Analogiczne oszacowania zachodzą również dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$.

Stwierdzenie 2.33. Przestrzeń metryczna $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d), W_1)$ jest zupełna i ośrodkowa.

Dowód można znaleźć w [Vil09, Twierdzenie 6.16]¹².

Uwaga 2.34. *Odległość $W_1(\mu, \nu)$ jest dobrze zdefiniowana dla skończonych miar Radona o tej samej masie. Jednak gdy $\mu(\mathbb{R}^d) \neq \nu(\mathbb{R}^d)$, to pojawia się pewien problem. Zachodzi oszacowanie*

$$W_1(\mu, \nu) = \mathcal{T}(\mu, \nu) \geq \sup_{\varphi(x)=a} \int_{\mathbb{R}^d} a d(\mu - \nu)(x) = a(\mu(\mathbb{R}^d) - \nu(\mathbb{R}^d)),$$

gdzie a jest stałą.

Funkcje testujące to funkcje Lipschitzowskie ze stałą Lipschitza mniejszą niż 1. W szczególności mogą to być funkcje stałe $\varphi(x) = a$. Ponieważ bierzemy supremum po tych funkcjach, to z tego wynika, że wartość $W_1(\mu, \nu)$ może być dowolnie duża.

Żeby poradzić sobie z tym problemem, wprowadza się pojęcie **uogólnionej metryki Wassersteina** (ang. generalized Wasserstein distance).

Definicja 2.35. *Niech $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, stałe $a, b \in (0, \infty)$ będą zadane oraz $p \geq 1$. Uogólnioną metrykę Wassersteina definiujemy przez*

$$W_p^{a,b}(\mu, \nu) := \inf_{\substack{\hat{\mu}, \hat{\nu} \in \mathcal{M}_p \\ |\hat{\mu}| = |\hat{\nu}|}} (a|\mu - \hat{\mu}| + a|\nu - \hat{\nu}| + bW_p(\hat{\mu}, \hat{\nu})), \quad (2.43)$$

gdzie $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ jest przestrzenią skończonych miar Radona sumowalnych z p -tym momentem.

Interpretacja uogólnionej metryki Wassersteina jest następująca:

- Chcemy masą μ wypełnić otwór ν .
- Masę μ możemy „przerzucić” bezpośrednio do ν (opłacalne kiedy są one *niedaleko* od siebie). „Przerzucenie” jednostki masy kosztuje b . Odpowiada za to składnik $bW_p(\mu, \nu)$.
- Zamiast „przerzucać” masę μ do ν można oddać masę μ do najbliższego magazynu, a odpowiednią masę ν również wziąć z najbliższego mu magazynu (opłacalne, gdy μ i ν są *daleko* od siebie). Zabranie/oddanie jednostki masy z/do magazynu to koszt a .
- Można również mieszać strategię „przerzucania” i korzystania z magazynu.

Metryka $W_p^{a,b}(\mu, \nu)$ to nic innego niż minimalny koszt, uwzględniający kombinację powyższych opcji transportowych. Zauważmy, że jeżeli $\mu(\mathbb{R}^d) \neq \nu(\mathbb{R}^d)$, wtedy nie unikniemy skorzystania z magazynu¹³.

¹²Autorem tej pracy jest Cédric Villani, laureat Medalu Fieldsa z 2010 roku za prace nad tłumieniem Landaua oraz równaniem Boltzmanna. Warto sięgnąć do jego książki *Birth of a Theorem: A Mathematical Adventure*, która jest swojego rodzaju pamiętnikiem, opisującym jego pracę naukową. Książka doczekała się także polskiego wydania [Vil18].

¹³Taka interpretacja metryki $W_p^{a,b}$ jest często używana podczas wykładów dotyczących optymalnego transportu. Cédric Villani nieraz rozpoczyna swoje wykłady rysując na tablicy stos piasku oraz zamek, który trzeba z niego zbudować np. w nagraniu „Optimal Transport Theory”.

Stwierdzenie 2.36. Operator $W_p^{a,b}$ faktycznie jest metryką.

Dowód tego faktu można znaleźć w [PR14, strona 5]. Seria prac [PR13, PR14, PR16] stanowi szeroki i ciekawy przegląd własności uogólnionej metryki Wassersteina $W_p^{a,b}$.

Przykład 12. Wyznamy odległość między δ_0 i δ_x w W_1 oraz $W_1^{a,b}$. Zauważmy, że

$$W_1(\delta_0, \delta_x) = \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d(\delta_0 - \delta_x)(x) : \text{Lip}(\varphi) \leq 1 \right),$$

gdzie supremum jest realizowane przez $\varphi(x) = x$ i stąd $W_1(\delta_0, \delta_x) = \varphi(x) - \varphi(0) = x$. Weźmy teraz metrykę $W_1^{a,b}$. Jeżeli $2a < bx$ oznacza to, że dystans między miarami jest na tyle duży, że optymalnie jest w całości skorzystać z magazynu (dla każdej z miar), w innym przypadku optymalnie jest przerzucić/przesunąć δ_0 do δ_x .

Definicja 2.37. Niech ρ będzie metryką określoną na $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Definiujemy:

- przestrzeń $\mathcal{C}([0, T]; (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho))$ to zbiór funkcji $t \mapsto \mu_t : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, które są ciągłe. To oznacza, że dla każdego ciągu t_1, t_2, \dots takiego, że $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$ zachodzi $\rho(\mu_{t_n}, \mu_t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- przestrzeń $\mathcal{C}([0, \infty); (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho))$ to zbiór funkcji $t \mapsto \mu_t : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, takich że $(t \mapsto \mu_t) \in \mathcal{C}([0, T]; (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho))$ dla każdego $T > 0$;
- przestrzeń $\text{Lip}([0, T]; (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho))$ to zbiór funkcji $t \mapsto \mu_t : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, które są lipschitzowskie. To oznacza, że istnieje nieujemna stała K , taka że dla każdego $t_1, t_2 \in [0, T]$ zachodzi $\rho(\mu_{t_1}, \mu_{t_2}) \leq K|t_1 - t_2|$;

Poniższa definicja przedstawia kolejne dwie metryki w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Definicja 2.38. Niech $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Zdefiniujemy

$$\rho(\mu_1, \mu_2) := \sup_{\varphi \in FT} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d(\mu_1 - \mu_2)(x) \right|, \quad (2.44)$$

gdzie FT jest przestrzenią funkcji testujących.

- Dla $FT := \{\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : \sup |\varphi| \leq 1\}$ metrykę (2.44) oznaczmy przez ρ_S ;
- Dla $FT := \{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d) : \text{Lip}(\varphi) \leq 1, \sup |\varphi| \leq 1\}$ metryka (2.44) nazywana jest **Bounded Lipschitz**¹⁴. Będziemy ją oznaczać przez ρ_F .

¹⁴W literaturze można również spotkać nazewnictwo: *metryka dualna do Bounded Lipschitz*, *flat metric* lub *metryka Fortet-Mouriera*. Czasami rozróżnia się metrykę Bounded Lipschitz $\|\cdot\|_{BL}$ od Fortet-Mouriera $\|\cdot\|_{FM}$:

$$\|f\|_{BL} := \|f\|_{\infty} + \sup_{x \neq y; x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}, \quad \|f\|_{FM} = \max \left\{ \|f\|_{\infty}, \sup_{x \neq y; x, y \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \right\}.$$

Te metryki są jednak równoważne.

Zauważmy, że metrykę W_1 można zdefiniować przez (2.44), gdzie funkcje testujące są brane ze zbioru $FT := \{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d) : \text{Lip}(\varphi) \leq 1\}$ (patrz Definicja 2.30 oraz Twierdzenie 2.29). We wszystkich dotychczasowych definicjach metryk zamiast przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ można wziąć analogiczne przestrzenie skończonych miar borelowskich.

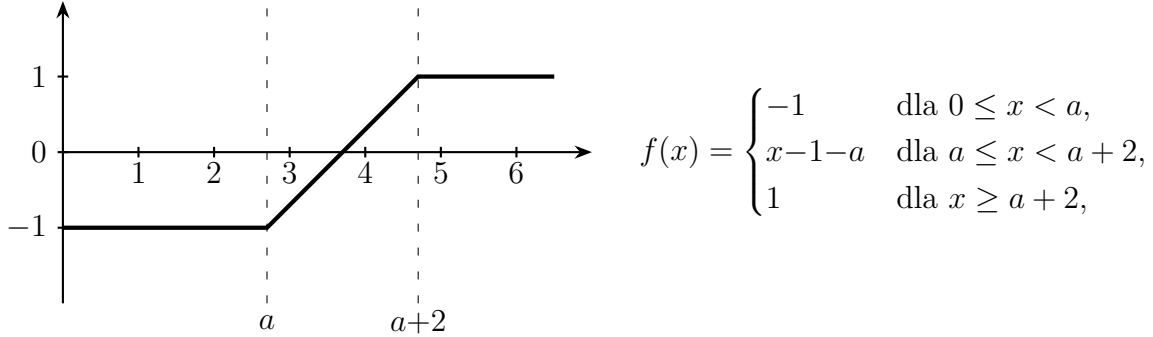
Przykład 13. Niech δ_a, δ_b będą deltami Diraca na zbiorze \mathbb{R}^+ , gdzie $a, b \geq 0$, $a \neq b$. Bez straty ogólności założmy, że $a < b$. Obliczmy odległość między tymi miarami w trzech metrykach ρ_S, W_1 oraz ρ_F . Najpierw rozważmy ρ_S . Supremum będzie realizowane przez funkcję, która przyjmuje wartość 1 dla $0 \leq x \leq a$ oraz wartość -1 dla $x \geq a$.

$$\rho_S(\delta_a, \delta_b) = \|\delta_a - \delta_b\|_{TV} = \left| \int_{\mathbb{R}^+} 1d(\delta_a + \delta_b) \right| = 2.$$

W metryce W_1 supremum jest realizowane przez funkcję $\varphi(x) = x$ ($x \geq 0$), stąd

$$W_1(\delta_a, \delta_b) = \left| \int_{\mathbb{R}^+} xd(\delta_a - \delta_b) \right| = |a - b|.$$

Rozważmy teraz $\rho_F(\delta_a, \delta_b)$ – ta wartość na pewno nie będzie większa niż $\rho_S(\delta_a, \delta_b)$ ani $W_1(\delta_a, \delta_b)$. Funkcją realizującą to supremum będzie następująca funkcja kawałkami liniowa (patrz Rysunek 2.5)



Rysunek 2.5: Funkcja, która realizuje $\sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)d(\delta_a - \delta_b)(x) \right| : \text{Lip}(\varphi) \leq 1, \sup |\varphi| \leq 1 \right\}$.

czyli $\rho_F(\delta_a, \delta_b) = \min\{|a - b|, 2\}$.

Stwierdzenie 2.39. Niech ciąg miar $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ oraz μ będą skończonymi miarami Radona o nośniku zawartym w pewnej kuli wewnątrz ograniczonego przedziału $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i niech $\sup_n \mu_n([a, b]) < \infty$. Zauważmy, że zbieżność $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho_F(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dowód przebiega analogicznie do [MO04, Stwierdzenie 3.2]. Teraz przedstawimy zależność między metrykami ρ_F oraz W_1 .

Stwierdzenie 2.40. Niech $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ będą takie, że $\text{supp}(\mu), \text{supp}(\nu) \subseteq K$ dla pewnego zwartego zbioru $K \subset \mathbb{R}^d$. Wtedy

$$C_K W_1(\mu, \nu) \leq \rho_F(\mu, \nu) \leq W_1(\mu, \nu),$$

gdzie $C_K = \min\{1, \frac{1}{\text{diam}(K)}\}$.

Przez $\text{diam}(K)$ oznaczamy średnicę zbioru K . Dowód powyższego stwierdzenia można znaleźć w [Uli13, strony 15–16].

Struktura przestrzeni

Na zakończenie tego rozdziału przytoczymy różne fakty z analizy funkcjonalnej dotyczące przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Wprowadzamy je z dwóch powodów. Po pierwsze dlatego, że dobrze uzupełniają obraz przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, w której rozważać będziemy rozwiązania równania transportu. Po drugie dlatego, że stanowią tło do wspomnianych we wstępie rozważań nad przestrzenią predualną do $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, o której piszemy szerzej w Rozdziale 4.1.

Rozważmy następujące przestrzenie funkcyjne:

- $C_b(\mathbb{R}^d)$ – funkcje ciągłe i ograniczone;
- $U_b(\mathbb{R}^d)$ – funkcje jednostajnie ciągłe i ograniczone;
- $BL(\mathbb{R}^d)$ – funkcje ograniczone i lipschitzowskie.

Stwierdzenie 2.41. *Przestrzenie $C_b(\mathbb{R}^d)$ oraz $U_b(\mathbb{R}^d)$ wraz z normą $\|\cdot\|_\infty$ są przestrzeniami Banacha.*

Stwierdzenie 2.42. *Przestrzeń $BL(\mathbb{R}^d)$ jest gęsta w $U_b(\mathbb{R}^d)$.*

Dowód można znaleźć w [Dud66a, Lemat 8].

Stwierdzenie 2.43. *Niech V będzie dowolną z przestrzeni $C_b(\mathbb{R}^d)$, $U_b(\mathbb{R}^d)$, $BL(\mathbb{R}^d)$. Dla każdej z tych przestrzeni odwzorowanie*

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \rightarrow V^* : \mu \mapsto \varphi_\mu(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x) \quad \text{jest injekcją.}$$

Dowód tego faktu w przypadku przestrzeni BL można znaleźć w [Dud66a, Lemat 5].

Stwierdzenie 2.44. *Następujące definicje normy $\|\mu\|_{TV}$ są równoważne*

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{TV} &:= |\mu|(\mathbb{R}^d) = \mu^+(\mathbb{R}^d) - \mu^-(\mathbb{R}^d) \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x) \right| : f \in C_b(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x) \right| : f \in U_b(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 2.45. *Dla każdego $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ zachodzi $\|\mu\|_{(BL)^*} = \|\mu\|_{TV}$.*

Używając wcześniejszej notacji, norma $\|\cdot\|_{BL^*}$ indukuje metrykę ρ_F .

Stwierdzenie 2.46. *Przestrzeń $(\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d), \rho_F)$ jest podprzestrzenią przestrzeni dualnej do $(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))^*$.*

Stwierdzenie 2.47. *Przestrzeń $(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^d), \rho_F)$ nie jest zupełna. W szczególności*

$$(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho_F) \not\cong (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))^*.$$

Przez $W^{1,\infty}$ rozumiemy tu przestrzeń Sobolewa (patrz Definicja B.2).

Dowód. Przestrzeń $(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^d), \|\cdot\|_{TV})$ jest przestrzenią Banacha. Zauważmy, że można skonstruować przykłady ciągów, które nie są ograniczone w normie wahania całkowitego, ale są ciągami Cauchy'ego w ρ_F . ■

Zupełna jest natomiast przestrzeń nieujemnych miar Radona z metryką ρ_F .

Stwierdzenie 2.48. *Przestrzeń $(\mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+^d), \rho_F)$ jest zupełna i ośrodkowa.*

Dowód można znaleźć w [GM10, Twierdzenie 2.6]. W każdym z wymienionych powyżej stwierdzeń zamiast \mathbb{R}^d można było wziąć dowolną inną przestrzeń polską – to znaczy ośrodkową przestrzeń topologiczną, metryzowalną w sposób zupełny – stwierdzenia nadal pozostałyby prawdziwe. Tego typu rozważania nad abstrakcyjnymi przestrzeniami miar są bieżącym tematem zainteresowań [GMCT18, HSWZ17, Pac13, HW09, Kra06].

2.6 Wprowadzenie do słabych i dystrybucyjnych rozwiązań

W Przykładzie 4 na stronie 29 pokazaliśmy, że metoda charakterystyk zawodzi, gdy pole wektorowe nie ma odpowiedniej regularności. Podobnie, gdy dane początkowe nie są wystarczająco regularne. Docelowo będziemy zmuszeni uznać za „rozwiązanie” obiekt, który nie jest nawet ciągły, w szczególności nie jest różniczkowalny – jest to koncepcja **słabych rozwiązań**, którą przedstawimy w tym rozdziale.

W tym momencie należy wspomnieć pracę R. J. DiPerny i P. L. Lionsa [DL89], którzy jako pierwsi zajęli się istnieniem i jednoznacznością rozwiązań równania transportu dla przypadku, gdy współczynniki równania są elementami odpowiedniej przestrzeni Sobolewa. Obszerne omówienie teorii słabych rozwiązań można znaleźć w podręcznikach [EG92, Coh80, Fed69].

Zacznijmy od definicji słabej pochodnej.

Definicja 2.49 (Słaba pochodna). *Niech U oznacza podzbiór otwarty \mathbb{R}^d oraz niech funkcje $f, g \in L^1_{loc}(U)$. Mówimy, że g jest słabą pochodną funkcji f w U , jeśli dla każdego $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ zachodzi równość*

$$\int_U g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U f(x)D^\alpha\varphi(x)dx.$$

Stosujemy oznaczenie $g := D^\alpha f$.

Niech E będzie przestrzenią Banacha nad \mathcal{X} oraz niech $E^* := \mathcal{L}(E; \mathcal{X})$ będzie przestrzenią dualną (sprzężoną) do E , gdzie \mathcal{L} to przestrzeń funkcjonałów liniowych z E w \mathcal{X} . Odwzorowanie

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (e^*, e) \mapsto \langle e^*, e \rangle := e^*(e),$$

przyporządkowuje każdej parze $(e^*, e) \in E^* \times E$ wartość e^* w punkcie e i nazywane jest parą dualną pomiędzy E^* a E .

Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni \mathbb{R}^d . W przestrzeni $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ zdefiniujemy pojęcie zbieżności w trochę mocniejszy sposób niż standardowo, to znaczy przyjmijmy, że ciąg $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ jest zbieżny do funkcji granicznej $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ jeśli:

- istnieje zwarty podzbiór $K \subset U$ taki, że $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ dla każdego n oraz;
- dla dowolnego wielowskaźnika¹⁵ α zachodzi $\sup_{x \in K} |D^\alpha(\varphi_n)(x) - D^\alpha(\varphi)(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

W tym kontekście przestrzenią funkcji testujących będziemy nazywać przestrzeń liniową $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ z topologią wyznaczaną przez zdefiniowane powyżej pojęcie zbieżności. Oznaczamy ją przez \mathcal{D} lub $\mathcal{D}(U)$.

Definicja 2.50. **Dystrybucją** nazywamy funkcjonał liniowy ciągły na \mathcal{D} . *Przestrzeń dystrybucji oznaczamy przez \mathcal{D}' . Działanie dystrybucji na funkcję próbną oznaczamy przez $w(\varphi) = \langle w, \varphi \rangle$ dla $w \in \mathcal{D}'$ oraz $\varphi \in \mathcal{D}$.*

¹⁵Wyjaśnienie notacji można znaleźć w Dodatku A.

Zauważmy, że każda funkcja lokalnie całkowalna $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ zadaje na przestrzeni funkcji próbnych następujący funkcjonal $\langle g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\varphi(x)dx$ dla $\varphi \in \mathcal{D}$.

Na przestrzeni \mathcal{D}' możemy zdefiniować operator różniczkowania $D^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ w następujący sposób

$$\langle D^\alpha w, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle w, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{dla } w \in \mathcal{D}' \text{ oraz } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Naturalnym jest pytanie o związek słabej pochodnej z pochodną dystrybucyjną. Gdy pochodna dystrybucyjna jest regularna (czyli reprezentowana przez funkcję lokalnie całkowalną), wtedy te pojęcia są równoważne. Jednak pojęcie pochodnej dystrybucyjnej jest ogólniejsze – jeśli φ jest funkcją lokalnie całkowalną, to zawsze posiada pochodną dystrybucyjną, jednak słaba pochodna φ może nie istnieć. W szczególności, jeżeli rozszerzymy funkcje $\varphi \in L^1_{loc}(U)$ na całe \mathbb{R}^d w ten sposób, że położymy $\varphi \equiv 0$ na $\mathbb{R}^d \setminus U$, to słaba pochodna funkcji φ na całym \mathbb{R}^d zazwyczaj nie istnieje.

Miara μ może być utożsamiana z funkcjonalem liniowym określonym na funkcjach $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ jako

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu \equiv \langle \mu, \varphi \rangle. \quad (2.45)$$

Pochodna dystrybucyjna miary μ względem zmiennej x_j jest zdefiniowana jako funkcjonal liniowy $\partial_{x_j} \mu : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ za pomocą formuły

$$\varphi \mapsto - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} \varphi d\mu. \quad (2.46)$$

Łagodne wprowadzenie do teorii dystrybucji, w tym liczne przykłady wyznaczania pochodnych dystrybucyjnych można znaleźć w opracowaniu [BCM⁺10].

Następujące twierdzenie dotyczące dystrybucji, posłuży do scharakteryzowania schematu aproksymującego rozwiązania nieliniowego równania transportu; patrz Stwierdzenie 4.5, Uwaga 5.13.

Twierdzenie 2.51. *Jeżeli dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ jest nieujemna, to znaczy $\langle T, \varphi \rangle > 0$ dla każdej nieujemnej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, wtedy T jest nieujemną miarą Radona.*

Dowód można znaleźć na przykład w [Tar07, Lemat 37.2, strona 174]. Niech odwzorowanie $t \mapsto \mu_t \in \mathcal{C}([0, \infty); (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho))$ będzie funkcją o wartościach w miarach. Pochodne cząstkowe μ należy rozumieć następująco:

- $\nabla_x \cdot \mu_t$ – funkcjonal liniowy określony na $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ zdefiniowany przez

$$\varphi \mapsto - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \varphi(t, x) d\mu_t(x), \quad \text{dla każdego } t \in [0, \infty);$$

- $\nabla_x \cdot \mu$ – funkcjonal liniowy określony na $\mathcal{C}_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ zdefiniowany przez

$$\varphi \mapsto \int_0^\infty \langle \nabla_x \cdot \mu_t, \varphi(t, \cdot) \rangle dt = - \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \varphi(t, x) d\mu_t(x) \right) dt;$$

- $\partial_t \mu$ – funkcjonal liniowy określony na $\mathcal{C}_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ zdefiniowany przez

$$\varphi \mapsto - \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(t, x) d\mu_t(x) \right) dt - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0, x) d\mu_0(x).$$

Wreszcie możemy formalnie sformułować czym jest **słabe rozwiązanie** równania transportu. Rozważmy zagadnienie liniowego równania transportu, którego warunek początkowy jest skończoną miarą Radona

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (b(t, x) \mu_t) = w(t, x) \mu_t & \text{gdzie } t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^d, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (2.47)$$

Definicja 2.52 (Słabe rozwiązanie liniowego równania transportu). *Słabym rozwiązaniem zagadnienia (2.47) nazywamy ciasno ciągle¹⁶ odwzorowanie $t \mapsto \mu_t : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$,¹⁷ takie że równość*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(t, x) + b(t, x) \nabla_x \cdot \varphi(t, x)) d\mu_t(x) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0, \cdot) d\mu_0(x) \\ = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x) \varphi(t, x) d\mu_t(x) dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

zachodzi dla każdej funkcji testującej $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$.

Jeżeli b i w nie są całkowalne względem miary μ , to znaczy $b, w \notin L_{loc}^1$, wtedy powyższe całki nie są dobrze zdefiniowane i zamiast (2.48) należałoby zapisać

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(t, x) d\mu_t(x) dt + \int_0^\infty \langle \mu_t, b(t, x) \nabla_x \cdot \varphi(t, x) \rangle dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0, \cdot) d\mu_0(x) \\ = \int_0^\infty \langle \mu_t, w(t, x) \varphi(t, x) \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Przyjmujemy analogiczną definicję słabych rozwiązań dla nieliniowego równania; patrz Definicja 5.1. Dla wygody będziemy jednak używali zapisu (2.48), nawet jeżeli b, w nie będą całkowalne względem μ .

Poniższy przykład uzasadnia dlaczego do analizowania równania transportu nie wystarcza metryka ρ_S , pokażemy to dla jednowymiarowego przypadku.

Przykład 14 (Dlaczego nie wystarcza metryka ρ_S). *Rozważmy następujące zagadnienie*

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x b \mu_t = 0 & \text{dla } t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \\ \mu_0 = \delta_0, \end{cases}$$

gdzie δ_0 jest deltą Diraca skoncentrowaną w $x = 0$, a pole wektorowe $b = \text{const.} > 0$. Słabym rozwiązaniem tego zagadnienia jest miara $\mu_t = \delta_{bt}$.

¹⁶Patrz Definicja 2.26 na stronie 36.

¹⁷Mówiąc o słabych rozwiązaniach, czasem zamiast $t \mapsto \mu_t$ będziemy pisać krócej μ_t . W kontekście słabych rozwiązań zawsze będzie nam jednak chodzić o odwzorowanie $t \mapsto \mu_t$.

Z Przykładu 13, gdzie obliczana była wartość $\rho_S(\delta_a, \delta_b)$ w różnych metrykach, wynika, że $t \mapsto \mu_t$ nie jest ciągłym odwzorowaniem $[0, T]$ w przestrzeń $(\mathcal{M}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{TV})$

$$\|\mu_t - \mu_s\|_{TV} = 2.$$

Natomiast jest to ciągle odwzorowanie zarówno w metryce W_1 , jak i ρ_F .

Przykład 1 pokazał jednak, że metryka ρ_F nie wystarcza do uzyskania interesującego nas wyniku, czyli różniczkowalności rozwiązań. Innymi słowy: w Przykładzie 1 pokazaliśmy, że rozwiązania miarowego równania transportu (omówione dokładnie w kolejnym rozdziale) nie są różniczkowalne względem nawet bardzo prostego zaburzenia pole wektorowego w przestrzeni $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \rho_F)$.

Rozdział 3

Równanie transportu w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

Główne rezultaty tej rozprawy dotyczą liniowego równania transportu o wartościach w przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ (to znaczy, że $|\mu|(\mathbb{R}^d) < \infty$)

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (b(t, x) \mu_t) = w(t, x) \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (3.1)$$

oraz wariantu nieliniowego

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (v(t, x, \mu_t) \mu_t) = m(t, x, \mu_t) \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (3.2)$$

Notacja $(\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*$ oznacza, że rozważamy rozwiązania zagadnień w dystrybucyjnym sensie i wskazuje przestrzeń funkcji testujących, $\psi \in \mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$. W tym rozdziale przedstawimy następujące wyniki: formułę reprezentacyjną zagadnienia (3.1), gdy $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$; Lipschitzowskość rozwiązań zagadnienia liniowego względem warunku początkowego oraz względem współczynników równania (to znaczy względem b i w). Wspomnimy również o pewnej własności nieliniowego zagadnienia.

Oczywiście regularność rozwiązań będzie zależeć od regularności w i b (czy v i m). Założenia, które tu przyjmujemy ostatecznie okażą się zbyt słabe, żeby uzyskać różniczkowalność rozwiązań względem parametru zaburzającego.

3.1 Formuła reprezentacyjna równania liniowego

Poniższy rozdział będzie przedstawiał podsumowanie części wyników pracy [Man07], przede wszystkim formułę reprezentacyjną rozwiązania zagadnienia (3.1). Rozważać będziemy skończony przedział czasu $t \in [0, T]$.

Założymy, że $\{\mu_t\}_{t \in (0, T)}$ jest borelowską rodziną nieujemnych skończonych miar określonych na \mathbb{R}^d oraz niech funkcja $w : (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ będzie borelowska i ograniczona,

a pole wektorowe $b : (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie borelowskie i skończone względem miary μ , to znaczy

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |b(t, x)| d\mu_t(x) dt < \infty. \quad (3.3)$$

Rozważamy rozwiązanie równania (3.1) w słabym sensie (patrz Definicja 2.52).

Lemat 3.1 (Ciasno ciągła reprezentacja). *Niech μ_t będzie borelowską rodziną skończonych miar nieujemnych, spełniających równanie (3.1) w sensie Definicji 2.52. Jeżeli pole $b(t, x)$ jest borelowskie i spełnia warunek (3.3) oraz funkcja $w : (0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest borelowska i ograniczona, to istnieje ciasno ciągła krzywa $[0, T] \ni t \mapsto \bar{\mu}_t \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, taka że $\mu_t = \bar{\mu}_t$ dla prawie każdego $t \in (0, T)$. Ponadto, jeżeli $\varphi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ oraz $t_1 \leq t_2 \in [0, T]$ to zachodzi*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t_2, x) d\bar{\mu}_{t_2}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t_1, x) d\bar{\mu}_{t_1}(x) &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t \varphi(t, x) + b(t, x) \nabla_x \cdot \varphi(t, x) + w(t, x) \varphi(t, x) \right) d\mu_t(x) dt. \end{aligned}$$

Żeby skonstruować słabe rozwiązanie zagadnienia, użyjemy **problemu dualnego**.

W rozwiązaniu równania (3.1) kluczową rolę odgrywa metoda charakterystyk (patrz Rozdział 2.4). Żeby móc ją zastosować do słabych rozwiązań musimy jednak nieco rozszerzyć przytoczoną wcześniej teorię równań różniczkowych. Dokładnie tak jak wcześniej rozwiązujemy równanie $\dot{x}(t) = b(t, x(t))$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = y$. Przez $X(t, t_0, y)$ oznaczmy charakterystykę takiego rozwiązania.

Definicja 3.2. *Powiemy, że funkcja $X(t, s, x)$ jest krzywą całkową pola wektorowego b , jeżeli jest absolutnie ciągła względem t na przedziale $(0, T) \subset \mathbb{R}$, przyjmuje wartości w \mathbb{R}^d oraz jest rozwiązaniem zagadnienia*

$$X(s, s, x) = x, \quad \frac{d}{dt} X(t, s, x) = b(t, X(t, s, x)), \quad (3.4)$$

to znaczy zachodzi

$$X(t, s, x) = x + \int_s^t b(\tau, X(\tau, s, x)) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Z teorii równań zwyczajnych wiemy, że jeżeli $(t \mapsto b(t, \cdot)) \in L^1([0, T]; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$, to znaczy

$$S := \int_0^T \left(\sup_{\mathbb{R}^d} |b(t, \cdot)| + Lip(b, \mathbb{R}^d) \right) dt < \infty,$$

wtedy rozwiązanie zagadnienia z równaniem zwyczajnym (3.4) jest jednoznaczne oraz stabilne. Ponadto zachodzą następujące oszacowania $X(t, s, x)$

$$\sup_{s \in [0, T]} \int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_t X(t, s, x)| dt \leq S, \quad \sup_{t, s \in [0, T]} Lip(X(t, s, \cdot), \mathbb{R}^d) \leq e^S.$$

Jeżeli b jest lokalnie ograniczonym i lipschitzowskim polem wektorowym, wtedy dla każdego $t \in [0, T]$ charakterystyki $X(t, s, x)$ są rozwiązaniami następującego równania transportu

$$\partial_s X(t, s, x) + b(t, s) \nabla_x \cdot X(t, s, x) = 0, \quad (3.5)$$

co zaraz uzasadnimy. Z definicji potoku X oraz z jednoznaczności rozwiązań (3.4) dostajemy, że dla dowolnych $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

Co oznacza, że potok X spełnia własność *półgrupy*, patrz Definicja B.8. Różniczkując to równanie względem t_2 otrzymujemy

$$\partial_s X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \nabla_x \cdot X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \partial_t X(t_2, t_1, x) = 0.$$

Korzystając z tego, że $\partial_t X(t, s, x) = b(t, X(t, s, x))$, dostajemy (3.5) – w tym celu należy zamienić zmienne, co jest możliwe ponieważ $t, s \in [0, T]$ oraz $x \mapsto X(t, s, x)$ jest dyfeomorfizmem na \mathbb{R}^d , którego odwrotność to $X(s, t, \cdot)$.

Przed podaniem formuły reprezentacyjnej zdefiniujemy jeszcze następujący operator.

Definicja 3.3 (Przesunięcie miary (ang. push-forward of measure)). *Niech Y_1, Y_2 będą zupełnymi przestrzeniami metrycznymi, niech $\mu \in \mathcal{P}(Y_1)$ oraz $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ niech będzie borelowsko mierzalna względem μ . Przesunięciem¹ μ przez f nazywamy miarę $f\#\mu$, taką że*

$$f\#\mu(B) := \mu(f^{-1}(B)), \quad \text{dla każdego } B \in \mathcal{B}(Y_2).$$

Dla każdej ograniczonej (lub $f\#\mu$ mierzalnej) borelowskiej funkcji $\varphi : Y_2 \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi następująca reguła

$$\int_{Y_1} \varphi(f(y_1)) d\mu(y_1) = \int_{Y_2} \varphi(y_2) d(f\#\mu)(y_2).$$

Kiedy regularność pola wektorowego b gwarantuje istnienie jednoznacznych rozwiązań równania (3.1), wtedy za pomocą metody charakterystyk oraz przesunięcia miary można otrzymać jawną postać na to rozwiązanie, o czym mówi następujący lemat.

Lemat 3.4 (Formuła reprezentacyjna rozwiązań liniowego równania transportu [Man07]). *Niech $t \mapsto b(t, \cdot)$ będzie borelowskim polem wektorowym klasy $L^1([0, T]; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ oraz $w(t, x)$ będzie skalarną funkcją borelowską, ograniczoną i lokalnie lipschitzowską względem x . Dla każdego warunku początkowego $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, istnieje ciasno ciągle odwzorowanie $t \mapsto \mu_t$, takie że μ_t jest jednoznacznym rozwiązaniem (w słabym sensie) zagadnienia (3.1) dla każdego $t \in [0, T]$. Rozwiązanie μ_t jest zadane przez formułę*

$$\mu_t = X(t, 0, \cdot) \# (\mu_0 e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, \cdot)) ds}) \quad \text{dla każdego } t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

Co więcej, rozwiązanie μ_t można również wyrazić niejawnym wzorem

$$\mu_t = X(t, 0, \cdot) \# \mu_0 + \int_0^t X(t, s, \cdot) \# (w(s, \cdot) \mu_s) ds \quad \text{dla każdego } t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

¹Można również spotkać takie określenia jak *miara obrazowa* lub *przepchnięcie miary*.

Dowód. [Man07] Istnienie i jednoznaczność rozwiązań (3.1) wynika bezpośrednio z teorii równań zwyczajnych. Dlatego pozostaje pokazać, że przedstawione formuły faktycznie spełniają równanie (3.1) oraz że odwzorowanie $t \mapsto \mu_t$ jest ciasno ciągłe.

Jednak najpierw zauważmy, że w przypadku obu formuł, (3.6) oraz (3.7), wystarczy sprawdzić, że zadają one rozwiązanie dla funkcji testujących postaci $\psi(t, x) = \varphi(t)\varphi(x)$, to znaczy

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) \langle \mu_t, \varphi(x) \rangle dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}^d} b \nabla_x \cdot \varphi(x) + w \varphi(x) d\mu_t(x) \right) dt = 0. \quad (3.8)$$

Wystarczy wykazać, że odwzorowanie $t \mapsto \langle \mu_t, \varphi \rangle$ jest klasy $W^{1,1}(0, T)$ dla dowolnego $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ i że pochodna po czasie wynosi $\int_{\mathbb{R}^d} (b \nabla_x \cdot \varphi + w \varphi) d\mu_t(x)$.

Krok 1 (*Formuła (3.6) – jawna postać rozwiązania*). Pokażemy, że odwzorowanie

$$t \mapsto \mu_t := X(t, 0, \cdot) \# \left(\mu_0 e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, \cdot)) ds} \right)$$

jest absolutnie ciągłe i tym samym, że jest klasy $W^{1,1}(0, T)$. Dla dowolnych, skończenie wielu, parami rozłącznych przedziałów $(m_i, n_i) \subset (0, T)$ zachodzi

$$\begin{aligned} \langle \mu_{n_i} - \mu_{m_i}, \varphi \rangle &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(n_i, 0, x)) e^{\int_0^{n_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} d\mu_0(x) - \varphi(X(m_i, 0, x)) e^{\int_0^{m_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(X(n_i, 0, x)) e^{\int_{m_i}^{n_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} - \varphi(X(m_i, 0, x)) \right) e^{\int_0^{m_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} d\mu_0(x). \end{aligned}$$

Chcemy oszacować moduł $\langle \mu_{n_i} - \mu_{m_i}, \varphi \rangle$, który następnie będziemy sumować po wszystkich przedziałach. Przez $\|w\|$ oznaczymy taką stałą, że $-\|w\| \leq w \leq \|w\|$ i oszacujemy

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left| \varphi(X(n_i, 0, x)) e^{\int_{m_i}^{n_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} - \varphi(X(m_i, 0, x)) \right| \leq \\ &\leq e^{T\|w\|} \|\nabla_x \cdot \varphi\|_\infty \int_{\bigcup_i (m_i, n_i)} |\dot{X}(t, 0, x)| dt + \|w\| \|\varphi\|_\infty \sum_{i=1}^n (n_i - m_i) \\ &\leq e^{T\|w\|} \|\nabla_x \cdot \varphi\|_\infty \int_{\bigcup_i (m_i, n_i)} \|b(t, \cdot)\|_\infty dt + \|w\| \|\varphi\|_\infty \sum_{i=1}^n (n_i - m_i). \end{aligned}$$

Pierwsza nierówność wynika z tego, że... Ostatnia nierówność wynika z tego, że $\dot{X} = b(t, X)$. Całkując względem $\mu_0 e^{\int_0^{m_i} w(s, X(s, 0, x)) ds}$ dostajemy

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n \left| \varphi(X(n_i, 0, x)) e^{\int_{m_i}^{n_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} - \varphi(X(m_i, 0, x)) \right| e^{\int_0^{m_i} w(s, X(s, 0, x)) ds} d\mu_0(x) \leq \\ &\leq e^{2T\|w\|} \|\nabla_x \cdot \varphi\|_\infty \int_{\bigcup_i (m_i, n_i)} \|b(t, \cdot)\|_\infty dt + \|w\| e^{T\|w\|} \|\varphi\|_\infty \sum_{i=1}^n (n_i - m_i). \end{aligned}$$

Prawa strona nierówności może przyjmować dowolnie małą wartość – wystarczy przyjąć odpowiednio małe $\sum_{i=1}^n (n_i - m_i)$. Tym samym pokazaliśmy absolutną ciągłość odwzorowania $t \mapsto \mu_t$, a więc również ciągłość. Teraz należy sprawdzić, czy formuła (3.6) faktycznie zadaje rozwiązanie (3.1) w słabym sensie. Ze względu na ciągłość odwzorowania, wystarczy sprawdzić, że równanie jest spełnione punktowo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_t(x) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d \left(X(t, 0, x) \# (\mu_0 e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds}) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds} \frac{d}{dt} \varphi(X(t, 0, x)) d\mu_0(x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, 0, x)) \frac{d}{dt} e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds} d\mu_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds} \nabla_x \cdot \varphi(X(t, 0, x)) \dot{X}(t, 0, x) d\mu_0(x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, 0, x)) e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds} w(t, X(t, 0, x)) d\mu_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \varphi(x) b(t, x) d\mu_t(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) w(t, x) d\mu_t(x).
\end{aligned}$$

Krok 2 (Formuła (3.7) – niejawna postać rozwiązania). Pokażemy, że miara μ_t zadana przez (3.6) spełnia formułę (3.7). Wystarczy pokazać, że dla dowolnej funkcji testującej $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, 0, x)) e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds} d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, 0, x)) d\mu_0(x) &= \\
= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \varphi(X(t, s, X(s, 0, x))) w(s, X(s, 0, x)) e^{\int_0^s w(\tau, X(\tau, 0, x)) d\tau} ds d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

Ze względu na to, że $X(t, s, X(s, 0, x)) = X(t, 0, x)$ dla dowolnych $0 \leq s \leq t \leq T$, to wcześniejszą równość można uprościć do następującej postaci

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, 0, x)) \left[e^{\int_0^t w(s, X(s, 0, x)) ds} - 1 - \int_0^t w(s, X(s, 0, x)) e^{\int_0^s w(\tau, X(\tau, 0, x)) d\tau} ds \right] d\mu_0(x) = 0.$$

Przyjmijmy, że $F(s) := e^{\int_0^s w(\tau, X(\tau, 0, x)) d\tau}$, czyli $F(0) = 1$. W takim razie wartość w nawiasie kwadratowym to $F(t) - F(0) - \int_0^t \frac{d}{ds} F(s)$, która (z Twierdzenia Leibniza o różniczkowaniu pod znakiem całki) jest równa zero. Tym samym formuła (3.7) została udowodniona. ■

Z powyższego lematu będziemy korzystać w dowodzie Twierdzenia 1 ze strony 67 jak i Twierdzenia 2 ze strony 74.

Wniosek 3.5. *Lemat 3.4 niesie ze sobą pewien dodatkowy fakt. A mianowicie, jeżeli współczynniki równania transportu spełniają założenia Lematu 3.4 i istnieje takie μ_t , które spełnia formułę 3.7, to z tego wynika, że odwzorowanie $t \mapsto \mu_t$ jest ciasno ciągłe.*

Stwierdzenie 3.6. *Formułę reprezentacyjną z Lematu 3.4 można rozszerzyć także na przypadek, gdy warunek początkowy μ_0 jest nieujemną skończoną miarą Radona, jak również miarą Radona ze znakiem.*

Dowód. Z Twierdzenia 2.20 Hahna-Jordana o rozkładzie wiemy, że każdy warunek początkowy $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ może być rozłożony $\mu_0 = \mu_0^+ - \mu_0^-$ tak, że obie składowe μ_0^+, μ_0^- są nieujemnymi miarami. Postać formuły reprezentacyjnej (3.6) zapewnia, że dla każdego warunku początkowego $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ (przestrzeń skończonych miar Radona ze znakiem) rozwiązanie μ_t również jest elementem przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. ■

Głównym wynikiem [Man07] nie była jednak powyższa formuła reprezentacyjna. W tej pracy pokazano, że przy niższej regularności pola wektorowego b (tylko ograniczone i borelowskie) również można rozpatrywać pewnego rodzaju „transport” rozwiązania wzdłuż krzywej całkowej. Przy tej niższej regularności pokazano jednoznaczność rozwiązań dla miar nieujemnych. Przy pewnych dodatkowych założeniach na pole wektorowe pokazano także jednoznaczność ograniczonych rozwiązań jednorodnego równania transportu.

W dalszej części rozprawy, z pracy [Man07] jest nam jednak potrzebna tylko formuła reprezentacyjna (3.6).

3.2 Zależność rozwiązań od parametrów równania

Zacznijmy od pokazania zależności potoku $X_b(t, x)$ od pola wektorowego b – notację X_b , z indeksem na dole, stosujemy, żeby podkreślić, że b traktujemy jak dodatkowy parametr, od którego zależy X . Ta własność będzie nam potrzebna do pokazania lipschitzowskiej zależności rozwiązań równania liniowego od współczynników, której z kolei użyjemy w dowodzie Twierdzenia 2; patrz Lemat 5.20.

Lemat 3.7. *Dla dowolnych $b(t, \cdot), \bar{b}(t, \cdot) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ zachodzi następujące oszacowanie*

$$|X_b(t, x) - X_{\bar{b}}(t, x)| \leq \exp(t \cdot C_t[b, \bar{b}]) \cdot \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds,$$

gdzie

$$C_t[b, \bar{b}] := \min \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla_x \cdot b(s, \cdot)\|_\infty, \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla_x \cdot \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty \right\}. \quad (3.9)$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \left| X_b(t, x) - X_{\bar{b}}(t, x) \right| = \\ & = \left| x + \int_0^t b(s, X_b(s, x)) ds - x - \int_0^t \bar{b}(s, X_{\bar{b}}(s, x)) ds \right| \\ & \leq \int_0^t |b(s, X_b(s, x)) - \bar{b}(s, X_{\bar{b}}(s, x))| ds \\ & \leq \int_0^t |b(s, X_b(s, x)) - \bar{b}(s, X_b(s, x))| ds \\ & \quad + \int_0^t |\bar{b}(s, X_b(s, x)) - \bar{b}(s, X_{\bar{b}}(s, x))| ds \\ & \leq \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds + \int_0^t \|\nabla_x \cdot \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty |X_b(s, x) - X_{\bar{b}}(s, x)| ds \\ & \leq \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds + \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla_x \cdot \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty \int_0^t |X_b(s, x) - X_{\bar{b}}(s, x)| ds. \end{aligned}$$

Zauważmy, że b oraz \bar{b} pełnią w powyższych oszacowaniach identyczne role. To znaczy b oraz \bar{b} można zamienić miejscami. Stosując Lemat Gronwalla (patrz Lemat B.7), kończymy dowód. \blacksquare

Z Lematu 3.4 wiemy przy jakich założeniach zagadnienie liniowego równania transportu ma jednoznaczne rozwiązanie. Przyjmijmy właśnie takie założenie na pole wektorowe b oraz funkcję w i pokażmy, że rozwiązanie jest lipschitzowskie względem warunku początkowego w metryce ρ_F .

Lemat 3.8. *Załóżmy, że $t \mapsto b(t, \cdot) \in L^1([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ oraz że $w(t, x)$ jest skalarną funkcją borelowską, ograniczoną i lokalnie lipschitzowską względem x . Niech μ_t i ν_t będą rozwiązaniami równania (3.1) z warunkiem początkowym odpowiednio $\mu_0, \nu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, wtedy zachodzi oszacowanie*

$$\rho_F(\mu_t, \nu_t) \leq e^{\|w\|t} \rho_F(\mu_0, \nu_0).$$

Dowód. Oszacujmy

$$\begin{aligned}
\rho_F(\mu_t, \nu_t) &= \\
&= \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu_t - \nu_t)(x) \right| : \text{Lip}(\varphi) \leq 1, \sup(\varphi) \leq 1 \right\} \\
&= \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_b(t, x)) e^{\int_0^t w(s, X_b(s, x)) ds} d(\mu_0 - \nu_0)(x) \right| : \text{Lip}(\varphi) \leq 1, \sup(\varphi) \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_b(t, x)) e^{\|w\|t} d(\mu_0 - \nu_0)(x) \right| : \text{Lip}(\varphi) \leq 1, \sup(\varphi) \leq 1 \right\} \\
&= e^{\|w\|t} \sup_{\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_b(t, x)) d(\mu_0 - \nu_0)(x) \right| : \text{Lip}(\varphi) \leq 1, \sup(\varphi) \leq 1 \right\} \\
&\leq e^{\|w\|t} \rho_F(\mu_0, \nu_0),
\end{aligned}$$

gdzie $\|w\|$ jest stałą, taką że $|w| < \|w\|$. ■

W analogiczny sposób można pokazać, że rozwiązanie jest lipschitzowskie względem współczynników równania.

Lemat 3.9. Niech $\mu_t^{(b,w)}$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (3.1) z warunkiem początkowym μ_0 i wartościami współczynników (b, w) , a $\mu_t^{(\bar{b}, \bar{w})}$ niech będzie rozwiązaniem z tym samym warunkiem początkowym, ale współczynnikami (\bar{b}, \bar{w}) . Jeżeli $(t \mapsto b(t, \cdot)), (t \mapsto \bar{b}(t, \cdot)) \in L^1([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ oraz $w(t, x), \bar{w}(t, x)$ są skalarnymi funkcjami borelowskimi, ograniczonymi i lokalnie lipschitzowskimi względem x , wtedy zachodzi oszacowanie

$$\rho_F(\mu_t^{(b,w)}, \mu_t^{(\bar{b}, \bar{w})}) \leq t e^{Ct} \|\mu_0\|_{TV} (\|b - \bar{b}\|_\infty + \|w - \bar{w}\|_\infty), \quad (3.10)$$

gdzie stała C zależy od $\|b\|_{W^{1,\infty}}, \|\bar{b}\|_{W^{1,\infty}}, \|w\|_{W^{1,\infty}}$ oraz $\|\bar{w}\|_{W^{1,\infty}}$.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak w [GM10, Twierdzenie 1.3]. Stosując formułę reprezentacyjną (patrz Lemat 3.4) dla $\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)$, takich że $\text{Lip}(\varphi) \leq 1$ oraz $\sup(\varphi) \leq 1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu_t^{(b,w)} - \mu_t^{(\bar{b}, \bar{w})})(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t^{b,w}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t^{(\bar{b}, \bar{w})}(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_b(t, x)) \exp\left(\int_0^t w(s, X_b(s, x)) ds\right) d\mu_0(x) \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_{\bar{b}}(t, x)) \exp\left(\int_0^t \bar{w}(s, X_{\bar{b}}(s, x)) ds\right) d\mu_0(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[\left(\varphi(X_b(t, x)) - \varphi(X_{\bar{b}}(t, x)) \right) \exp\left(\int_0^t w(s, X_b(s, x)) ds\right) \right. \right. \\
&\quad \left. - \left(\exp\left(\int_0^t \bar{w}(s, X_{\bar{b}}(s, x)) ds\right) - \exp\left(\int_0^t \bar{w}(s, X_b(s, x)) ds\right) \right) \varphi(X_{\bar{b}}(t, x)) \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\exp\left(\int_0^t \bar{w}(s, X_b(s, x)) ds\right) - \exp\left(\int_0^t w(s, X_b(s, x)) ds\right) \right) \varphi(X_{\bar{b}}(t, x)) \right] d\mu_0(x) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\nabla_x \cdot \varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left| X_b(t, x) - X_{\bar{b}}(t, x) \right|}_{I_1} \exp \left(\int_0^t w(s, X_b(s, x)) ds \right) d\mu_0(x) \\
&\quad + \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left| \exp \left(\int_0^t \bar{w}(s, X_{\bar{b}}(s, x)) ds \right) - \exp \left(\int_0^t \bar{w}(s, X_b(s, x)) ds \right) \right|}_{I_2} d\mu_0(x) \\
&\quad + \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left| \exp \left(\int_0^t \bar{w}(s, X_b(s, x)) ds \right) - \exp \left(\int_0^t w(s, X_b(s, x)) ds \right) \right|}_{I_3} d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

Oszacowanie I_1 . Z Lematu 3.7 otrzymujemy natychmiast

$$I_1 \leq \exp(t \cdot C_t[b, \bar{b}]) \cdot \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds,$$

gdzie stała C_t zdefiniowana jest przez (3.9).

Oszacowanie I_2 . Bezpośrednio z założeń na \bar{w} mamy $\left| \int_0^t \bar{w}(s, X_{\bar{b}}(s, x)) ds \right| < t \|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty$ oraz

$$|\bar{w}(s, y)| \leq \|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty, \quad |\bar{w}(s, y) - \bar{w}(s, \bar{y})| \leq \|\nabla_x \cdot \bar{w}(s, \cdot)\|_\infty \cdot \|y - \bar{y}\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Oszacujemy

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq e^{t\|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty} \left| \int_0^t \bar{w}(s, X_{\bar{b}}(s, x)) ds - \int_0^t \bar{w}(s, X_b(s, x)) ds \right| \\
&\leq e^{t\|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty} \cdot \|\nabla_x \cdot \bar{w}\|_{t, \infty} \cdot \int_0^t |X_b(s, x) - X_{\bar{b}}(s, x)| ds.
\end{aligned}$$

Oznaczmy $\|f\|_{t, \infty} := \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s, \cdot)\|_\infty$. Korzystając z Lematu 3.7 otrzymujemy

$$I_2 \leq \exp \left(t \|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \|\nabla_x \cdot \bar{w}\|_{t, \infty} \int_0^t \exp(s \cdot C_s[b, \bar{b}]) \left(\int_0^s \|b(\bar{s}, \cdot) - \bar{b}(\bar{s}, \cdot)\|_\infty d\bar{s} \right) ds.$$

Ze względu na to, że $\|b(\bar{s}, \cdot) - \bar{b}(\bar{s}, \cdot)\|_\infty$ jest funkcją niemalejącą oraz $s \leq t$, to zachodzi $\int_0^s \|b(\bar{s}, \cdot) - \bar{b}(\bar{s}, \cdot)\|_\infty d\bar{s} \leq \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds$ i stąd dostajemy

$$I_2 \leq \exp \left(t \|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \|\nabla_x \cdot \bar{w}\|_{t, \infty} \int_0^t \exp(s \cdot C_s[b, \bar{b}]) ds \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds.$$

Funkcja $C_s[b, \bar{b}]$ jest także niemalejąca, czyli $C_s[b, \bar{b}] \leq C_t[b, \bar{b}]$, zatem

$$I_2 \leq \exp \left(t \|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \|\nabla_x \cdot \bar{w}\|_{t, \infty} t \exp(t \cdot C_t[b, \bar{b}]) \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds.$$

Oszacowanie I_3 . Zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \max \{ e^{t\|w(\cdot, \cdot)\|_\infty}, e^{t\|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty} \} \cdot \int_0^t \left(\bar{w}(s, X_b(s, x)) - w(s, X_b(s, x)) \right) ds \\
&\leq \max \{ e^{t\|w(\cdot, \cdot)\|_\infty}, e^{t\|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty} \} \cdot \int_0^t \|\bar{w}(s, \cdot) - w(s, \cdot)\|_\infty ds.
\end{aligned}$$

Łącząc oszacowania I_1 , I_2 i I_3 oraz biorąc supremum po funkcjach $\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)$, takich że $\text{Lip}(\varphi) \leq 1$ oraz $\sup(\varphi) \leq 1$, dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
\rho_F \left(\mu_t^{(b,w)}, \mu_t^{(\bar{b},\bar{w})} \right) &\leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp(t \cdot (\|w(\cdot, \cdot)\|_\infty + C_t[b, \bar{b}])) \cdot \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds \right) d\mu_0(x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp(t \cdot (\|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty + C_t[b, \bar{b}])) \cdot t \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla_x \cdot \bar{w}\|_\infty \int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds \right) d\mu_0(x) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\max\{\exp(t\|w(\cdot, \cdot)\|_\infty), \exp(t\|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty)\} \cdot \int_0^t \|w(s, \cdot) - \bar{w}(s, \cdot)\|_\infty ds \right) d\mu_0(x) \\
&\leq \exp \left(t \cdot (\max\{\|w\|_\infty, \|\bar{w}\|_\infty\} + C_t[b, \bar{b}]) \right) \cdot \|\mu_0\|_{TV} \\
&\quad \cdot \left(\int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_\infty ds + \int_0^t \|w(s, \cdot) - \bar{w}(s, \cdot)\|_\infty ds \right),
\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

W pracy [GM10] pokazano coś bardzo podobnego. A mianowicie, rozważano następujący model populacji ze strukturą

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x (v(\mu_t) \mu_t) = m(\mu_t) \mu_t \\ v(\mu_t)(0) \mu_t(0) = \int_{\mathbb{R}^+} \beta(\mu_t)(x) d\mu_t(x) \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+). \end{cases}$$

Powyższy model ma dodatkowy warunek brzegowy (w stosunku do naszych rozważań) oraz warunek początkowy z przestrzeni $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+)$, podczas gdy u nas $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. W pracy [GM10] badano istnienie rozwiązań oraz ich zależność od warunku początkowego μ_0 oraz współczynników równania $\beta, b, w : [0, T] \times \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+) \rightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$, gdzie $\beta > 0$ oraz $b > 0$. Główny wynik publikacji to wskazanie, przy jakich założeniach na współczynniki rozwiązanie jest lipschitzowskie względem warunku początkowego oraz względem współczynników. W tej pracy używano właśnie normy ρ_F .

3.3 Kilka słów o zastosowaniu potoków gradientowych

Przedstawimy teraz pokrótce nieco inne podejście do badania regularności rozwiązań. Dla uproszczenia rozważmy jednorodne równanie transportu. Do tej pory strategia była następująca: znaleźć taką regularność pola b , żeby rozwiązanie istniało i było jednoznaczne i żeby miało jeszcze dodatkową regularność. Dotychczasowa analiza była bezpośrednio związana z następującym zagadnieniem (patrz Definicja 2.8 ze strony 21)

$$\begin{cases} \dot{X}(t, x) = b(t, X(t, x)) \\ X(t_0, x) = x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Przedstawimy teraz odmienne podejście, któremu poświęcona jest monografia [AGS08]. Owe podejście polega na założeniu, że pole wektorowe ma dodatkową strukturę $b := -\nabla \cdot F$, czyli rozważamy zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\nabla \cdot F(X(t)) \\ X(t_0) = x. \end{cases} \quad (3.11)$$

Jeżeli \mathcal{X} jest przestrzenią liniową, oraz $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładkie, wtedy **potokiem gradientowym** (zwanym też *krzywą największego spadku*, ang. gradient flow) jest gładka krzywa $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ spełniająca (3.11). Jeżeli $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalne oraz $\nabla \cdot F$ jest lipschitzowskie, to powyższe zagadnienie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Po obustronnym przyłożeniu modułu do równania (3.11) otrzymujemy

$$|\dot{X}|(t) = |\nabla \cdot F(X(t))|, \quad (3.12)$$

k któremu można nadać sens w przestrzeniach metrycznych. Otóż, lewą stronę można rozumieć jako pochodną metryczną (ang. metric derivative)

$$|\dot{X}|(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d(X(t+\lambda), X(t))}{|\lambda|},$$

a prawą stronę jako górny gradient (ang. upper gradient) funkcji F . Wyjaśnijmy to pojęcie. Mówimy, że funkcja $g : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ jest górnym gradientem $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow (-\infty, \infty]$, jeżeli dla każdej absolutnie ciągłej krzywej $X : (a, b) \rightarrow \mathcal{X}$ funkcja $g(X)$ jest borelowska oraz

$$|\varphi(X(t)) - \varphi(X(s))| \leq \int_s^t g(X(r)) |X'(r)| dr, \quad \text{dla dowolnych } a < s \leq t < b.$$

To jest jedno z możliwych sformułowań *górnego gradientu*, w [AGS08, strona 27] znaleźć można również słabszą definicję.

To sformułowanie sprawia, że za rozwiązanie równania (3.12) można uznać takie obiekty, że \mathcal{X} jest przestrzenią metryczną. Taka struktura w niektórych przypadkach ułatwia dowodzenia twierdzeń dotyczących istnienia, jednoznaczności i dodatkowej regularności. Jednak mając uboższą strukturę, tracimy część informacji. To znaczy może się okazać za rozwiązania uznajemy obiekty, które nie spełniały wcześniejszego sformułowania (3.11). Żeby w jakiś

sposób ograniczyć to co należy uznać za rozwiązanie – na przykład nie dopuścić, żeby za rozwiązanie mógł być uznany obiekt, który nie spełnia podstawowych fizycznych własności – do sformułowania dołącza się dodatkowe, naturalne warunki (na przykład *nierówność energetyczna*, ang. energy inequality).

W tej rozprawie nie zakładamy żadnej dodatkowej struktury pola wektorowego b i tym samym podejmujemy pierwszą ze wspomnianych strategii: szukamy takiej regularności pola b , żeby rozwiązanie istniało, było jednoznaczne i żeby miało jeszcze dodatkową regularność (w naszym przypadku różniczkowalność względem parametru zaburzającego).

Rozdział 4

Różniczkowalność rozwiązań równania liniowego

W tym rozdziale przedstawiony zostanie pierwszy główny wynik rozprawy, to znaczy twierdzenie dotyczące różniczkowalności rozwiązań liniowego równania transportu, względem parametru zaburzającego, w przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Jak pokazuje kontrprzykład z Przykładu 1, takiej regularności rozwiązań nie można uzyskać przy dotychczas stosowanych w literaturze założeniach. W Rozdziale 4.1 przedstawimy przestrzeń, której elementami będą pochodne rozwiązań. Następnie w Rozdziale 4.2 wskażemy założenia na współczynniki równania liniowego oraz rodzaj zaburzenia, takie że rozwiązanie jest różniczkowalne względem niego.

4.1 Przestrzeń predualna do $\mathcal{C}^{1+\alpha}$

Okazuje się, że przy dotychczas stosowanych w literaturze założeniach – to znaczy rozważana w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ norma ρ_F (patrz Definicja 2.38) oraz założenia na współczynniki takie jak w Przykładzie 1 na stronie 10 – nie można uzyskać różniczkowalności rozwiązań.

Spójrzmy na formułę (1.5). Funkcje testujące klasy $W^{1,\infty}$ okazały się za mało regularne, żeby uzyskać różniczkowalność rozwiązań równania transportu względem parametru zaburzającego h . Wystarczającą regularnością jest $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, czyli ciągłe funkcje ograniczone, których pierwsza pochodna jest ograniczona oraz hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\alpha \in (0, 1]$. Przestrzeń tych funkcji $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ jest przestrzenią Banacha wyposażoną w normę

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla_x \cdot f(x)| + \underbrace{\sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \frac{|\nabla_x \cdot f(x_1) - \nabla_x \cdot f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}}_{:= |\nabla_x \cdot f|_\alpha}.$$

W tym rozdziale przybliżymy własności przestrzeni predualnej do $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Powtórzmy

jeszcze raz wprowadzoną we wstępie definicję przestrzeni

$$\mathcal{Z} := \overline{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}^{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}, \quad (4.1)$$

która wyposażona jest w normę dualną $\|\cdot\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}$, co dla $\mu \in \mathcal{Z}$ będziemy zapisywać w skrócie jako $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$, czyli

$$\|\mu\|_{\mathcal{Z}} := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu(x) : f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\}.$$

Uwaga 4.1. *Zauważmy, że dla każdej miary $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ zachodzi oszacowanie*

$$\|\mu\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\mu\|_{TV}.$$

Wynika to z tego, że zbiór funkcji testujących w normie $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$ jest podzbiorem funkcji testujących w normie $\|\cdot\|_{TV}$, to znaczy

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\} \subset \left\{ f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Można oczywiście zauważyć, że w definicji $\|\mu\|_{\mathcal{Z}}$ operator całkowy nie jest dobrze zdefiniowany dla tych elementów przestrzeni \mathcal{Z} , które nie są miarami. Jak się jednak okaże, ten operator całkowy może być jednoznacznie rozszerzony na wszystkie $\mu \in \mathcal{Z}$; w konsekwencji Stwierdzenia 4.2 oraz Twierdzenia B.11. Będziemy stosować zapis operatora całkowego dla wszystkich $\mu \in \mathcal{Z}$, nawet tych niebędących miarami.

Przestrzeń \mathcal{Z} to przestrzeń Banacha i, jak już zostało zapowiedziane, to właśnie jej elementami są rozważane w głównych twierdzeniach pochodne rozwiązań równania transportu (oczywiście przy odpowiednich założeniach na współczynniki równania).

Niektóre z poniższych własności przestrzeni \mathcal{Z} nie są potrzebne do prezentacji głównych wyników tej rozprawy. Jednak pomogą lepiej zrozumieć, czym przestrzeń \mathcal{Z} właściwie jest.

Stwierdzenie 4.2. *Zbiór $\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{Q}^d\}$ jest gęsty w \mathcal{Z} względem topologii $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$, czyli*

$$\mathcal{Z} = \overline{\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{Q}^d\}}^{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}.$$

Innymi słowy przestrzeń \mathcal{Z} jest óśrodkowa.

Przez $\text{span}\{X\}$ oznaczamy najmniejszą przestrzeń liniową rozpiętą na zbiorze X . W naszym przypadku X to delty Diraca skoncentrowane w punktach \mathbb{Q}^d , gdzie \mathbb{Q} to liczby wymierne.

Dowód. Chcemy pokazać, że dla dowolnego elementu μ z przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ istnieje ciąg $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{Q}^d\}$, taki że $\|\mu_n - \mu\|_{\mathcal{Z}} \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$.

Ze względu na to, że rozważamy miary **skończone**, to dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ istnieje taki promień R_ε , że $|\mu|(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(0, R_\varepsilon)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Domknięcie kuli $\mathcal{B}(0, R_\varepsilon)$

w \mathbb{R}^d , jako zbiór zwarty, posiada pokrycie skończone $\{\mathcal{B}(g_i, \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|_{TV}})\}_{i=1}^{n(\varepsilon)}$, takie że $g_i \in \mathbb{Q}^d$. Oznaczmy przez $\mathcal{B}_i := \mathcal{B}(g_i, \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|_{TV}})$. Zdefiniujemy

$$U_{i,\varepsilon} := \left(\mathcal{B}(0, R_\varepsilon) \cap \mathcal{B}_i \right) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{B}_j$$

i zauważmy, że są to rozłączne zbiory borelowskie oraz $\bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} U_{i,\varepsilon} = \mathcal{B}(0, R_\varepsilon)$. Środek kuli \mathcal{B}_i , punkt g_i , niekoniecznie musi być zawarty w zbiorze $U_{i,\varepsilon}$. W takim przypadku zamiast g_i będziemy brać dowolny inny punkt z kuli \mathcal{B}_i zawarty w $U_{i,\varepsilon}$. Nie będziemy natomiast rozróżniać tego w zapisie.

Dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ rozważamy $\mu^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \mu(U_{i,\varepsilon}) \cdot \delta_{g_i}$ (liniowa kombinacja delt Diraca skoncentrowanych w punktach $g_i \in \mathbb{Q}^d$). Oznaczmy przez $\hat{\mu} := \mu|_{\mathcal{B}(0, R_\varepsilon)}$ obcięcie miary μ do zbioru $\mathcal{B}(0, R_\varepsilon)$. Zachodzi następujące oszacowanie

$$\|\mu^\varepsilon - \mu\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\mu^\varepsilon - \hat{\mu}\|_{\mathcal{Z}} + \|\hat{\mu} - \mu\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\mu^\varepsilon - \hat{\mu}\|_{\mathcal{Z}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

W takim razie pozostaje oszacować $\|\mu^\varepsilon - \hat{\mu}\|_{\mathcal{Z}}$

$$\begin{aligned} & \|\mu^\varepsilon - \hat{\mu}\|_{\mathcal{Z}} = \\ & = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d(\mu^\varepsilon - \hat{\mu})(x) : f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\} \\ & \leq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d(\mu^\varepsilon - \hat{\mu})(x) : f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty + \|\nabla \cdot f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ & = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d \left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} (\mu(U_{i,\varepsilon}) \delta_{g_i} - \hat{\mu}) \right) (x) : f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty + \|\nabla \cdot f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ & = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \left(\int_{U_{i,\varepsilon}} f(g_i) d\mu(x) - \int_{U_{i,\varepsilon}} f d\mu(x) \right) : f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty + \|\nabla \cdot f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ & = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{U_{i,\varepsilon}} (f(g_i) - f) d\mu(x) : f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty + \|\nabla \cdot f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ & \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{U_{i,\varepsilon}} |g_i - x| d|\mu|(x) : f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty + \|\nabla \cdot f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ & = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{U_{i,\varepsilon}} |g_i - x| d|\mu|(x) \leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{U_{i,\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|_{TV}} d|\mu|(x) \\ & = \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|_{TV}} \int_{\mathcal{B}(0, R_\varepsilon)} d|\mu|(x) = \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|_{TV}} |\mu|(\mathcal{B}(0, R_\varepsilon)) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ istnieje taki element $\mu^\varepsilon \in \text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{Q}^d\}$, że $\|\mu^\varepsilon - \mu\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon$. Stąd $\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{Q}^d\}$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Przeliczalność $\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{Q}^d\}$ wynika wprost z przeliczalności zbioru \mathbb{Q}^d . Ostatecznie pokazaliśmy, że przestrzeń \mathcal{Z} jest ósrodkowa. ■

Żeby opisać przestrzeń dualną do \mathcal{Z} , musimy najpierw wprowadzić niezbędny lemat.

Lemat 4.3. *Odwzorowanie $\bar{\delta}(x) := \delta_x$ jest klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{Z})$.*

Przez $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{Z})$ rozumiemy tu klasę funkcji o regularności $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ określonych na \mathbb{R}^d , o wartościach w przestrzeni \mathcal{Z} (patrz *przestrzeń Bochnerowska*, Definicja B.5).

Dowód. Niech $f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Zdefiniujmy operator $D\bar{\delta}(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathcal{Z})$ następująco

$$\langle D\bar{\delta}(x)\lambda, f \rangle_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} := \lambda \bullet \nabla \cdot f(x),$$

gdzie \bullet oznacza iloczyn skalarny. Działanie $\lambda \bullet \nabla \cdot f(x)$ wyznacza gradient funkcji f w kierunku λ . Wówczas, gdy $\lambda \rightarrow 0$ to $\frac{1}{|\lambda|} [\delta_{x+\lambda} - \delta_x - D\bar{\delta}(x)\lambda] \rightarrow 0$ w przestrzeni \mathcal{Z} . Zatem $D\bar{\delta}(x)$ jest pochodną Fréchetą (patrz Definicja B.6) delty Diraca $\bar{\delta}$ w punkcie x . Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}^d$ oraz $x \neq y$ to

$$\|D\bar{\delta}(x) - D\bar{\delta}(y)\|_{\mathcal{Z}} = \|D\bar{\delta}(x) - D\bar{\delta}(y)\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}$$

ze względu na to, że \mathcal{Z} jest liniową podprzestrzenią $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$. W takim razie oszacujemy

$$\begin{aligned} \|D\bar{\delta}(x) - D\bar{\delta}(y)\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*} &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d, |\lambda| \leq 1} \|D\bar{\delta}(x)\lambda - D\bar{\delta}(y)\lambda\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*} \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d, |\lambda| \leq 1} \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \langle D\bar{\delta}(x)\lambda - D\bar{\delta}(y)\lambda, f \rangle_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \right| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d, |\lambda| \leq 1} \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i (\partial_{x_i} f(x) - \partial_{x_i} f(y)) \right| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d, |\lambda| \leq 1} \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} |\lambda| \cdot \left(\sum_{i=1}^d |\partial_{x_i} f(x) - \partial_{x_i} f(y)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} \frac{|\nabla \cdot f(x) - \nabla \cdot f(y)|}{|x - y|^\alpha} \cdot |x - y|^\alpha \\ &\leq \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} \|f\|_{\mathcal{Z}} \cdot |x - y|^\alpha \leq |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Z tego, że $\|D\bar{\delta}(x) - D\bar{\delta}(y)\|_{\mathcal{Z}} \leq |x - y|^\alpha$ wynika, że $\bar{\delta}$ jest klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{Z})$. ■

Poniższa własność przestrzeni dualnej do \mathcal{Z} jest wynikiem nowym i może być interesująca niezależnie od głównych wyników rozprawy.

Lemat 4.4. *Przestrzeń \mathcal{Z}^* jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ przez odwzorowanie $\varphi \mapsto \mathcal{T}\varphi$, gdzie $\mathcal{T}\varphi(x) := \varphi(\delta_x)$, $\mathcal{T}: \mathcal{Z}^* \rightarrow \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$.*

Dowód. Będziemy postępować analogicznie do [HW09, Twierdzenia 3.6 i 3.7]. Naszym celem jest wykazać, że operator \mathcal{T} jest bijekcją z przestrzeni $(\mathcal{Z}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{Z}^*})$ w przestrzeń

$(C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{C^{1+\alpha}})$, taką że $\mathcal{T}(\lambda_1 z_1^* + \lambda_2 z_2^*) = \lambda_1 \mathcal{T}(z_1^*) + \lambda_2 \mathcal{T}(z_2^*)$ dla $z_1^*, z_2^* \in \mathcal{Z}^*$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^d$, gdzie

$$\|z^*\|_{\mathcal{Z}^*} = \sup_{z \in \mathcal{Z}} \{|z^*(z)| : \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq 1\} = \sup_{z \in \mathcal{Z}} \{z^*(z) : \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq 1\}.$$

Krok 1. Odwzorowanie zadane przez $\mathcal{T}\varphi(x) = \varphi(\delta_x)$ działa ze zbioru \mathcal{Z}^* w \mathbb{R}^d , gdzie przez \mathbb{R}^d oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji z \mathbb{R}^d w \mathbb{R} . Przypomnijmy, że zbiór \mathbb{Q}^d jest gęsty w \mathbb{R}^d , więc ich domknięcia są równe. Najpierw uzasadnimy, że odwzorowanie \mathcal{T} jest iniekcją: jeżeli $z_1^* \neq z_2^*$, to z gęstości zbioru $\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ w przestrzeni \mathcal{Z} (Stwierdzenie 4.2) istnieje takie $x \in \mathbb{R}^d$, że

$$z_1^*(\delta_x) \neq z_2^*(\delta_x) \implies (\mathcal{T}z_1^*)(x) \neq (\mathcal{T}z_2^*)(x).$$

Istotnie,

$$z_1^* \neq z_2^* \implies \exists z \in \mathcal{Z}, z_1^*(z) \neq z_2^*(z).$$

Ze względu na to, że $\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ jest gęsty w \mathcal{Z} , to dla każdego $z \in \mathcal{Z}$ istnieje taki ciąg $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$, że $z_n \rightarrow z$. Funkcjonały z_1^*, z_2^* są ciągłe i dlatego istnieje takie n , że $z_1^*(z_n) \neq z_2^*(z_n)$. Oczywiście $z_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i \delta_{x_i}$ oraz z_1^*, z_2^* są liniowe

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i z_1^*(\delta_{x_i}) \neq \sum_{i=1}^{k(n)} \alpha_i z_2^*(\delta_{x_i}).$$

Żeby pokazać, że odwzorowanie \mathcal{T} jest liniowe musimy uzasadnić, że

$$\mathcal{T}(\lambda_1 z_1^* + \lambda_2 z_2^*) = \lambda_1 \mathcal{T}z_1^* + \lambda_2 \mathcal{T}z_2^*, \quad \text{dla każdego } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^d, z_1^*, z_2^* \in \mathcal{Z}^*.$$

Co oznacza, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi $\mathcal{T}(\lambda_1 z_1^* + \lambda_2 z_2^*)(x) = \lambda_1 \mathcal{T}z_1^*(x) + \lambda_2 \mathcal{T}z_2^*(x)$. Zauważmy, że faktycznie zachodzi

$$\mathcal{T}(\lambda_1 z_1^* + \lambda_2 z_2^*)(x) = (\lambda_1 z_1^* + \lambda_2 z_2^*)(\delta_x) = \lambda_1 z_1^*(\delta_x) + \lambda_2 z_2^*(\delta_x) = \lambda_1 \mathcal{T}(z_1^*)(x) + \lambda_2 \mathcal{T}(z_2^*)(x).$$

Krok 2. Najpierw pokażemy, że $\text{im}(\mathcal{T}(\mathcal{Z}^*)) \subseteq C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Z Lematu 4.3 mamy, że odwzorowanie $(x \mapsto \delta_x)$ jest klasy $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{Z})$ z czego wynika, że $(x \mapsto z^*(\delta_x)) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ – jako złożenie dwóch odwzorowań $(x \mapsto \delta_x) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{Z})$ oraz $z^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathbb{R})$. Zatem $(x \mapsto \mathcal{T}z^*(x))$ jest klasy $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$.

Krok 3. Teraz pokażemy zawieranie w drugą stronę $C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d) \subseteq \text{im}(\mathcal{T}(\mathcal{Z}^*))$ to znaczy, że dla dowolnego $y \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ istnieje z_y^* , takie że $y = \mathcal{T}z_y^*$. Zdefiniujmy funkcjonał $z_y^*(\delta_x) := y(x)$. Musimy wykazać, że $z_y^* \in \mathcal{Z}^*$. Wystarczy jednak rozważyć wyłącznie takie $z \in \text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$, czyli

$$|z_y^*(z)| = \left| z_y^* \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \right) \right|.$$

Funkcjonał z_y^* jest liniowy i w takim razie $|z_y^*(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i})|$ jest równe $|\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot z_y^*(\delta_{x_i})|$. Bezpośrednio z definicji z_y^* wiemy, że

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i z_y^*(\delta_{x_i}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i y(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\mathbb{R}^d} y d\delta_{x_i} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} y d\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \right) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} y dz \right| \leq \|y\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \|z\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned}$$

Zatem $\|z_y^*\|_{\mathcal{Z}^*} = \sup\{z_y^*(z) : \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq 1\} \leq \|y\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$.

Krok 4. Ostatnim krokiem jest pokazanie, że odwzorowanie \mathcal{T} jest ciągłe, co jest oczywiście równoważne ograniczoności. Można zauważyć, że $\mathcal{T}^{-1}y = z_y^*$ jest ograniczone – oszacowania w Kroku 3. pokazują, że $\|\mathcal{T}^{-1}\|_{\mathcal{Z}^*} \leq 1$. Z Twierdzenia Banacha o Izomorfizmie (patrz Twierdzenie B.14) dostajemy, że $\|\mathcal{T}\| \leq C$, co kończy dowód. ■

Poniższą własnością posłużymy się w części dotyczącej nieliniowego równania.

Stwierdzenie 4.5. *Przestrzeń $(\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*})$ jest domkniętą podprzestrzenią $((\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*, \|\cdot\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*})$.*

Dowód. Żeby wykazać tezę, wystarczy pokazać, że przestrzeń $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ jest zupełna z metryką indukowaną przez normę przestrzeni $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$. Weźmy ciąg $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, taki że $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$ w $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$. Wtedy dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, takiej że $f \geq 0$ zachodzi $\langle \mu_n, f \rangle \geq 0$. To z kolei implikuje, że $\langle K, f \rangle \geq 0$. Korzystając z Twierdzenia 2.51 ze strony 46 mamy, że jeżeli dystrybucja K jest nieujemna (czyli $\langle K, f \rangle \geq 0$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ takiej, że $f \geq 0$), wtedy K jest nieujemną miarą Radona, co kończy dowód. ■

4.2 Równanie liniowe

W tej części pracy rozważać będziemy liniowe równanie transportu o wartościach w przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, którego zaburzenie pola wektorowego oraz prawej strony równania ma charakter liniowy.

Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (b(t, x) \mu_t) = w(t, x) \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (4.2)$$

gdzie $(t \mapsto b(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ oraz $w(t, x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Lemat 3.4 zapewnia istnienie i jednoznaczność rozwiązań powyższego zagadnienia.

Pole wektorowe b zaburzamy w następujący liniowy sposób

$$b^h(t, x) := b_0(t, x) + h \cdot b_1(t, x), \quad (4.3)$$

gdzie $(t \mapsto b_0(t, \cdot)), (t \mapsto b_1(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ oraz $h \in \mathbb{R}$. Analogicznie zaburzamy funkcję skalarną w

$$w^h(t, x) := w_0(t, x) + h \cdot w_1(t, x), \quad (4.4)$$

gdzie $w_i(t, x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ dla $i = 0, 1$. Zagadnienie (4.2) zaburzone w powyższy sposób przyjmuje postać

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot (b^h(t, x) \mu_t^h) = w^h(t, x) \mu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (4.5)$$

Zauważmy, że warunki początkowe w zagadnieniach (4.2) i (4.5) są identyczne. Bez straty ogólności, w dalszej części będziemy przyjmować, że parametr zaburzający h należy do przedziału $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Poniższe twierdzenie jest jednym z głównych wyników niniejszej rozprawy. Wynik ten, w nieco słabszej postaci (z zaburzeniem występującym tylko w polu wektorowym b) został opublikowany w [GHŁŚ19].

Twierdzenie 1. *Niech μ_t^h będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (4.5) z polem b^h opisanym przez (4.3) i funkcją skalarną w^h zdefiniowaną przez (4.4), gdzie $(t \mapsto b_i(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ oraz $w_i(t, x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ dla $i = 0, 1$. Odwzorowanie*

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \ni h \mapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

jest różniczkowalne w \mathcal{Z} co oznacza, że pochodna $\partial_h \mu_t^h$ należy do \mathcal{Z} .

Przypomnijmy, że charakterystyki równania (4.2) mają postać

$$\begin{cases} \dot{X}_b(t, x) = b(t, X_b(t, x)) \\ X_b(t_0, x) = x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.6)$$

co przy założeniu, że $(t \mapsto b(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ oznacza, że potoki $X_b(t, x)$ są zdefiniowane dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i stąd $x \mapsto X_b(t, x)$ jest jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów na \mathbb{R}^d (zależnych od b).

Uwaga 4.6. Warunek $(t \mapsto b(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d))$ wystarczy do tego, żeby odwzorowanie $x \mapsto X_b(t, x)$ było dyfeomorfizmem. Wyższa regularność jest potrzebna do uzyskania różniczkowalności rozwiązań. Dokładniej: do szacowania odpowiednich reszt rozwinięcia w szereg Taylora; patrz równanie (4.9).

Układ charakterystyk równania (4.5), gdzie $(t \mapsto b_i(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ dla $i = 0, 1$, ma postać

$$\begin{cases} \dot{X}_h(t, x) = (b_0 + b_1 h)(t, X_h(t, x)) \\ X_h(t_0, x) = x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (4.7)$$

Tak jak wcześniej $x \mapsto X_h(t, x)$ jest dyfeomorfizmem. Żeby podkreślić zależność potoku pola wektorowego od parametru h , będziemy używać notacji $X(t, x; h)$ zamiast $X_h(t, x)$. Zachodzi następująca zależność $X(t, x; h)$ od parametru h .

Stwierdzenie 4.7. Niech $(t \mapsto b_0(t, \cdot)), (t \mapsto b_1(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Wtedy dla dowolnych $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ mamy $(h \mapsto X(t, x; h)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Dowód powyższego stwierdzenia można znaleźć w Dodatku B na stronie 124. W oparciu o powyższe narzędzia możemy wreszcie przedstawić dowód Twierdzenia 1 (patrz strona 67).

Dowód Twierdzenia 1. Ponieważ przestrzeń \mathcal{Z} jest zupełna, to wystarczy pokazać, że odpowiedni ciąg ilorazów różnicowych jest ciągiem Cauchy'ego. Rozważmy słabe rozwiązania równania (4.5) dla różnych wartości parametru h . Przyjmijmy, że μ_t^0 oznacza rozwiązanie dla $h = 0$ oraz że $\mu_t^{h_1}, \mu_t^{h_2}$ są rozwiązaniami dla wartości parametrów $h_1 \neq h_2$ oraz takich że $h_1 \neq 0$ i $h_2 \neq 0$. Rozwiązania $\mu_t^0, \mu_t^{h_1}, \mu_t^{h_2}$ są jednoznaczne dla każdego $t \in [0, +\infty)$; patrz formuła reprezentacyjna (3.6).

Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i ustalonej chwili czasu $t \in [0, +\infty)$ iloraz $\frac{\mu_t^{h+\lambda} - \mu_t^h}{\lambda} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{Z}$. Najpierw pokażemy różniczkowalność dla $h = 0$. Różniczkowalność dla wartości parametru $h \neq 0$ będzie tego bezpośrednią konsekwencją.

Dla $h = 0$ wystarczy wykazać, że wartość

$$I_{h_1, h_2} := \left\| \frac{\mu_t^{h_1} - \mu_t^0}{h_1} - \frac{\mu_t^{h_2} - \mu_t^0}{h_2} \right\|_{\mathcal{Z}}$$

może być dowolnie mała – tak będzie, gdy wartości h_1 i h_2 są wystarczająco bliskie 0. Ten warunek jest równoważny temu, że dla każdego $h_n \rightarrow 0$, ciąg ilorazów $\left\{ \frac{\mu_t^{h_n} - \mu_t^0}{h_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego elementów z przestrzeni $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$. Oznacza to, że ma granicę, która będzie taka sama dla wszystkich ciągów $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, takich że $h_n \rightarrow 0$. Rozważmy

$$\begin{aligned} I_{h_1, h_2} &= \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d \left(\frac{\mu_t^{h_1} - \mu_t^0}{h_1} - \frac{\mu_t^{h_2} - \mu_t^0}{h_2} \right) (x) \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \frac{d\mu_t^{h_1}(x)}{h_1} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \frac{d\mu_t^0(x)}{h_1} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \frac{d\mu_t^{h_2}(x)}{h_2} + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \frac{d\mu_t^0(x)}{h_2} \right|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Najpierw zastosujemy formułę reprezentacyjną (Lemat 3.4) oraz skorzystajmy z faktu, że $x \mapsto X(t, x; h)$ jest dyfeomorfizmem

$$\begin{aligned}
I_{h_1, h_2} = & \sup_{\|\varphi\|_{C^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; h_1)) e^{\int_0^t w_0(s, X(s, x; h_1)) + h_1 w_1(s, X(s, x; h_1)) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1} \right. \\
& - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; 0)) e^{\int_0^t w_0(s, X(s, x; 0)) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1} \\
& - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; h_2)) e^{\int_0^t w_0(s, X(s, x; h_2)) + h_2 w_1(s, X(s, x; h_2)) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2} \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; 0)) e^{\int_0^t w_0(s, X(s, x; 0)) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2} \right|.
\end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenie $\bar{w}(s, x; h) := 2 \max \{w_0(s, X_b(s, x; h)), h w_1(s, X_b(s, x; h))\}$ i kontynuujemy

$$\begin{aligned}
I_{h_1, h_2} = & \sup_{\|\varphi\|_{C^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; h_1)) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; 0)) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; 0) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1} \right. \\
& \left. - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; h_2)) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2} + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; 0)) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; 0) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2} \right| \\
= & \sup_{\|\varphi\|_{C^{1+\alpha}} \leq 1} \left| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(X(t, x; h_1)) - \varphi(X(t, x; 0)) \right) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1}}_{I_{h_1}^{(1)}} \right. \\
& - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(X(t, x; h_2)) - \varphi(X(t, x; 0)) \right) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2}}_{I_{h_2}^{(1)}} \\
& - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; 0) ds} - e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} \right) \varphi(X(t, x; 0)) \frac{d\mu_0(x)}{h_1}}_{I_{h_1}^{(2)}} \\
& \left. + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; 0) ds} - e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \right) \varphi(X(t, x; 0)) \frac{d\mu_0(x)}{h_2}}_{I_{h_2}^{(2)}} \right| \\
\leq & \sup_{\|\varphi\|_{C^{1+\alpha}} \leq 1} \left(|I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}| + |I_{h_1}^{(2)} - I_{h_2}^{(2)}| \right).
\end{aligned}$$

Rozważmy $|I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}|$ oraz $|I_{h_1}^{(2)} - I_{h_2}^{(2)}|$ niezależnie. Przez \mathcal{O} będziemy oznaczać symbol Landau'a (patrz strona 123 w Dodatku B). W wyrażeniu $I_{h_1}^{(2)} - I_{h_2}^{(2)}$ rozwińmy $e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds}$

oraz $e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;h_2)ds}$ w szereg Taylora w punkcie $h = 0$

$$\begin{aligned}
|I_{h_1}^{(2)} - I_{h_2}^{(2)}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; 0)) \left[e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} - e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_1 e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} \partial_h \left(\int_0^t \bar{w}(s, x; h) ds \right) \Big|_{h=0} - \mathcal{O}(|h_1|^{1+\alpha}) \right] \frac{d\mu_0(x)}{h_1} \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X(t, x; 0)) \left[e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} - e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_2 e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} \partial_h \left(\int_0^t \bar{w}(s, x; h) ds \right) \Big|_{h=0} - \mathcal{O}(|h_2|^{1+\alpha}) \right] \frac{d\mu_0(x)}{h_2} \right| \\
&= \left| \varphi(X(t, x; 0)) \int_{\mathbb{R}^d} \left[- e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} \partial_h \left(\int_0^t \bar{w}(s, x; h) ds \right) \Big|_{h=0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;0)ds} \partial_h \left(\int_0^t \bar{w}(s, x; h) ds \right) \Big|_{h=0} - \frac{\mathcal{O}(|h_1|^{1+\alpha})}{h_1} + \frac{\mathcal{O}(|h_2|^{1+\alpha})}{h_2} \right] d\mu_0(x) \right| \\
&\leq \left| \varphi(X(t, x; 0)) \int_{\mathbb{R}^d} \left(- \frac{\mathcal{O}(|h_1|^{1+\alpha})}{h_1} + \frac{\mathcal{O}(|h_2|^{1+\alpha})}{h_2} \right) d\mu_0(x) \right| \\
&\leq \left| c \int_{\mathbb{R}^d} \left(- \frac{\mathcal{O}(|h_1|^{1+\alpha})}{h_1} + \frac{\mathcal{O}(|h_2|^{1+\alpha})}{h_2} \right) d\mu_0(x) \right|.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Przejdźmy do $|I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}|$. Ponieważ $\varphi \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, to resztę $R_1[\varphi; x_0](x)$ z rozwinięcia φ w szereg Taylora

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \nabla_x \cdot \varphi(x_0)(x - x_0) + R_1[\varphi; x_0](x), \tag{4.10}$$

można szacować przez $|R_1[\varphi; x_0](x)| \leq C|\nabla_x \cdot \varphi|_\alpha |x - x_0|^{1+\alpha}$; patrz Stwierdzenie B.15. Po rozwinięciu $\varphi(X(t, x; h_1))$ oraz $\varphi(X(t, x; h_2))$ w szereg Taylora w punkcie $X(t, x; 0)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(X(t, x; 0)) + \nabla_x \cdot \varphi(X(t, x; h))|_{h=0} \cdot (X(t, x; h_1) - X(t, x; 0)) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(|X(t, x; h_1) - X(t, x; 0)|^{1+\alpha}) - \varphi(X(t, x; 0)) \right] e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;h_1)ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(X(t, x; 0)) + \nabla_x \cdot \varphi(X(t, x; h))|_{h=0} (X(t, x; h_2) - X(t, x; 0)) \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(|X(t, x; h_2) - X(t, x; 0)|^{1+\alpha}) - \varphi(X(t, x; 0)) \right] e^{\int_0^t \bar{w}(s,x;h_2)ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2} \Big|.
\end{aligned}$$

Rozwijając $X(t, x; h_2)$ oraz $X(t, x; h_1)$ w punkcie $h = 0$ oraz stosując Stwierdzenie 4.7

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& |I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}| = \\
& = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla_x \cdot \varphi(X(t, x; h)) \Big|_{h=0} \left(X(t, x; 0) + h_1 \partial_h X(t, x; h) \Big|_{h=0} + \mathcal{O}(|h_1|^{1+\alpha}) - X(t, x; 0) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathcal{O}(|X(t, x; h_1) - X(t, x; 0)|^{1+\alpha}) \right] e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_1} \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla_x \cdot \varphi(X(t, x; h)) \Big|_{h=0} \left(X(t, x; 0) + h_2 \partial_h X(t, x; h) \Big|_{h=0} + \mathcal{O}(|h_2|^{1+\alpha}) - X(t, x; 0) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathcal{O}(|X(t, x; h_2) - X(t, x; 0)|^{1+\alpha}) \right] e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \frac{d\mu_0(x)}{h_2} \right|.
\end{aligned}$$

Reszta występująca w rozwinięciu może być szacowana w sposób analogiczny do (4.10), czyli $\mathcal{O}(|X(t, x; h) - X(t, x; 0)|^{1+\alpha}) \leq c|h|^{1+\alpha}$, dla każdego $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Kontynuując oszacowania

$$\begin{aligned}
& |I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}| \leq \\
& \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla_x \cdot \varphi(X(t, x; h)) \Big|_{h=0} \left(\partial_h X(t, x; h) \Big|_{h=0} + \mathcal{O}(|h_1|^\alpha) \right) + \mathcal{O}(|h_1|^\alpha) \right] e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} d\mu_0(x) \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla_x \cdot \varphi(X(t, x; h)) \Big|_{h=0} \left(\partial_h X(t, x; h) \Big|_{h=0} + \mathcal{O}(|h_2|^\alpha) \right) + \mathcal{O}(|h_2|^\alpha) \right] e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} d\mu_0(x) \right|.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\|\varphi\|_{C^{1+\alpha}} \leq 1$, to w takim razie $\|\nabla_x \cdot \varphi\|_\infty \leq 1$. Dzięki temu otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}| \leq & \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[\partial_h X(t, x; h) \Big|_{h=0} \left(e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} - e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\mathcal{O}_1(|h_1|^\alpha) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} - \mathcal{O}_1(|h_2|^\alpha) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \right) \right] d\mu_0(x) \right|.
\end{aligned}$$

Podsumowując oszacowania dla wyrażenia $|I_{h_1}^{(1)} - I_{h_2}^{(1)}|$:

- $\partial_h X(t, x; h) \Big|_{h=0} < \infty$ – to jest skończona liczba; patrz Stwierdzenie 4.7,
- $\left(e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} - e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \right) \rightarrow 0$ dla $h_1 \rightarrow 0$ i $h_2 \rightarrow 0$ – tak samo jak w przypadku oszacowań dla $|I_{h_1}^{(2)} - I_{h_2}^{(2)}|$, należy $e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds}$ oraz $e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds}$ rozwinąć w szereg Taylora w punkcie $h = 0$; patrz (4.9),
- $\left(\mathcal{O}(|h_1|^\alpha) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_1) ds} - \mathcal{O}(|h_2|^\alpha) e^{\int_0^t \bar{w}(s, x; h_2) ds} \right) \rightarrow 0$ dla $h_1 \rightarrow 0$ i $h_2 \rightarrow 0$.

Reasumując, I_{h_1, h_2} przyjmuje dowolnie małe wartości, gdy h_1 oraz h_2 są coraz bliższe zeru. Oznacza to, że pokazaliśmy, że ciąg $\left\{ \frac{\mu_t^{h+\lambda_n} - \mu_t^h}{\lambda_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni $(C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$ jest ciągiem Cauchy'ego dla każdego $\lambda_n \rightarrow 0$ oraz dla $h = 0$, a także, że każdy taki ciąg ma

taką samą granicę. Zatem rozwiązanie μ_t^h równania (4.5) jest różniczkowalne względem parametru h w punkcie $h = 0$.

Analogiczna argumentacja zadziała dla $h \neq 0$. Rozważmy ciąg $\left\{ \frac{\mu_t^{h+\lambda_n} - \mu_t^h}{\lambda_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $\lambda_n \rightarrow 0$ oraz $h \neq 0$. Niech $\mu_t^{h+\lambda_n}$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (4.5) z polem wektorowym postaci

$$b^{h+\lambda_n} = b_0 + hb_1 + \lambda_n b_1 =: \widehat{b}_0 + \lambda_n b_1$$

i funkcją skalarną

$$w^{h+\lambda_n} = w_0 + hw_1 + \lambda_n w_1 =: \widehat{w}_0 + \lambda_n w_1$$

i dla warunku początkowego $\mu_0^{h+\lambda_n} = \mu_0$. Innymi słowy rozwiązanie $\mu_t^{h+\lambda_n}$ jest równe rozwiązaniu $\overline{\mu}_t^{\lambda_n}$ zagadnienia, gdy pole wektorowe ma postać $\widehat{b}_0 + \lambda_n b_1$, funkcja skalarna $\widehat{w}_0 + \lambda_n w_1$ i warunek początkowy wynosi μ_0 (patrz Lemat 3.4). Identycznie rzecz się ma dla μ_t^h , czyli jest ono równe rozwiązaniu $\overline{\mu}_t^0$ zagadnienia (4.2) z polem wektorowym \widehat{b} i funkcją skalarną \widehat{w} . Ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{\mu_t^{h+\lambda_n} - \mu_t^h}{\lambda_n} = \frac{\overline{\mu}_t^{\lambda_n} - \mu_0}{\lambda_n}.$$

Prawa strona jest zbieżna w przestrzeni \mathcal{Z} , gdy $n \rightarrow \infty$ (to pokazaliśmy w pierwszej części dowodu). Tym samym pokazaliśmy, że rozwiązanie μ_t^h równania (4.5) jest różniczkowalne dla dowolnego $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ■

Rozdział 5

Różniczkowalność rozwiązań równania nieliniowego

W tym rozdziale przedstawiony zostanie drugi główny wynik niniejszej rozprawy. Otóż pokażemy, że rozwiązanie nieliniowego równania transportu jest różniczkowalne względem parametru zaburzającego współczynniki tego równania. Założenia dotyczące pola wektorowego oraz prawej strony równania będą **silniejsze** niż założenia Twierdzenia 1 ze strony 67. W tym rozdziale kluczowe okaże się Twierdzenie 1.

Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (v(\mu_t) \mu_t) = m(\mu_t) \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (5.1)$$

gdzie pole wektorowe v oraz funkcja skalarna m mają następującą postać

$$\begin{aligned} v(\mu_t) &:= v \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_v(y, x) d\mu_t(y) \right), & v : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ m(\mu_t) &:= m \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_m(y, x) d\mu_t(y) \right), & m : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

i jądra operatorów całkowych $K_v(y, x), K_m(y, x) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Definicja 5.1 (Słabe rozwiązanie nieliniowego równania transportu). *Słabym rozwiązaniem zagadnienia (5.1) nazywamy odwzorowanie ciasno ciągle $t \mapsto \mu_t : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, takie że równość*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi(t, x) + v(\mu_t) \nabla_x \cdot \varphi(t, x) d\mu_t(x) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0, \cdot) d\mu_0(x) = \\ = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} m(\mu_t) \varphi(t, x) d\mu_t(x) dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

jest spełniona dla każdej funkcji testującej $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$.

Rozważać będziemy następujące zaburzenie pola wektorowego v

$$v^h(\mu_t) := v_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, x) d\mu_t(y) \right) + h \cdot v_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_1}(y, x) d\mu_t(y) \right) \quad (5.3)$$

oraz analogiczne zaburzenie funkcji skalarnej m

$$m^h(\mu_t) := m_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, x) d\mu_t(y) \right) + h \cdot m_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_1}(y, x) d\mu_t(y) \right). \quad (5.4)$$

Uwzględniając zaburzenia (5.3) oraz (5.4), równanie transportu przyjmuje postać

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot (v^h(\mu_t^h) \mu_t^h) = m^h(\mu_t^h) \mu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (5.5)$$

Następujące twierdzenie jest drugim głównym wynikiem tej rozprawy.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że dla $i = 0, 1$ zachodzi*

A1. $v_i(\cdot) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d),$

A2. $m_i(\cdot) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}),$

A3. $(x \mapsto K_{v_i}(\cdot, x)), (x \mapsto K_{m_i}(\cdot, x)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)).$

Niech μ_t^h będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (5.5), gdzie pole wektorowe v^h jest zdefiniowane przez (5.3) a funkcja skalarna m^h przez (5.4). Wtedy odwzorowanie

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ni h \mapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

jest różniczkowalne w przestrzeni \mathcal{Z} , innymi słowy $\partial_h \mu_t^h \in \mathcal{Z}$.

Uwaga 5.2. *Powyższe twierdzenie pozostanie prawdziwie, gdy zamiast $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ weźmiemy dowolny inny ograniczony przedział (a, b) zawierający zero. Gdyby parametr h nie był ograniczony w normie supremum, wtedy dla ustalonego h funkcja skalarna $m^h(\mu_t^h)$ owszem byłaby ograniczona (dla m_0, m_1 spełniających założenie **A2**), ale rodzina funkcji (5.4) nie byłaby **jednostajnie ograniczona**, co będzie konieczne w dowodzie Twierdzenia 2.*

Naturalnym oczekiwaniem jest, że powyższe twierdzenie daje się uogólnić na przypadek, gdy pole wektorowe oraz prawa strona równania (5.5) zależą nie tylko od rozwiązania, ale także bezpośrednio od t oraz x – czyli $v(t, x, \mu_t)$ oraz $m(t, x, \mu_t)$. Jednak ze względu na przejrzystość rachunków rozważać będziemy jedynie $v(\mu_t)$ oraz $m(\mu_t)$.

W kolejnym rozdziale przedstawimy szkic dowodu Twierdzenia 2, w którym korzystać będziemy między innymi z własności schematu aproksymującego rozwiązanie μ_t^h . Jak zobaczymy schemat ten wykorzystuje własności liniowego równania. Na początku uogólnimy nieco Twierdzenie 1 ze strony 67. W tej części rozprawy, to znaczy poświęconej nieliniowemu równaniu, przez ν_t będziemy zawsze oznaczać rozwiązania liniowego równania transportu,

a przez μ_t nieliniowego. W Rozdziale 5.2 omówimy następujące zaburzenia równania liniowego

$$b_0(t, x) + hb_1(t, x) + o(|h|), \quad w_0(t, x) + hw_1(t, x) + o(|h|), \quad (5.6)$$

dla których pokazana zostanie różniczkowalność rozwiązań ν_t^h względem parametru h .

W Rozdziale 5.3 zbadamy regularność odwzorowania $\mu \mapsto u\left(\int_{\mathbb{R}^d} K(y, x)d\mu(y)\right)$, gdzie $u \in \{v, m\}$. Pokażemy, że przy założeniach **A1**, **A2**, **A3** Twierdzenia 2 (patrz strona 74) to odwzorowanie jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Taka regularność oraz własności schematu aproksymacyjnego pozwolą spojrzeć na zaburzenie (5.3) oraz (5.4) jak na dużo prostszy przypadek – problem różniczkowalności μ_t^h względem h zostanie sprowadzony do różniczkowalności rozwiązań liniowego równania z zaburzeniem (5.6); patrz równanie (5.55) i (5.57’).

Następnie w Rozdziale 5.4 skonstruujemy schemat przybliżający rozwiązanie nieliniowego równania. Pokazując, że odpowiednie odwzorowanie jest kontrakcją, otrzymamy, że istnieją takie $\mu_t \in \mathcal{Z}$, dla których równość (5.2) jest spełniona. Pokażemy także, że jeżeli warunek początkowy μ_0 jest elementem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, to wtedy μ_t także jest skończoną miarą Radona – ponieważ zbiór $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ nie jest zupełny z normą $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$, to ten wynik nie jest natychmiastowy; patrz Twierdzenie 5.12.

Żeby stwierdzić, że istnieją słabe rozwiązania równania (5.1) należy jeszcze uzasadnić, że $t \mapsto \mu_t$ jest ciasno ciągle, co uzasadnimy w Rozdziale 5.5. Przypomnijmy, że w przypadku równania liniowego ta własność była zagwarantowana przez formułę reprezentacyjną. Dla równania nieliniowego nie dysponujemy taką formułą. W Rozdziale 5.5 zostanie także pokazane, że zagadnienie (5.1) ma tylko jedno rozwiązanie. W Rozdziale 5.6 przedstawimy drobną modyfikację schematu aproksymacyjnego, którą zastosujemy do analizy ilorazów $\frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$.

Ostatecznie, w Rozdziale 5.7 wszystkie składowe rozumowania zostaną zebrane, i przedstawiony zostanie dowód Twierdzenia 2.

5.1 Szkic dowodu

Poniżej przedstawiamy zarys dowodu, który w kolejnych rozdziałach będziemy uzupełniać, dowodząc niezbędnych faktów i własności.

Krok 0. Przy założeniach Twierdzenia 2, nieliniowe równanie transportu (5.5) ma jednoznaczne słabe rozwiązanie.

Żeby to pokazać, użyjemy schematu aproksymującego – rozwiązanie równania nieliniowego uzyskamy z przybliżeń rozwiązaniami równania liniowego. Schemat aproksymacyjny zostanie przedstawiony w Rozdziale 5.4. Dodatkowe fakty z Rozdziału 5.5 pozwolą stwierdzić, że otrzymane rozwiązanie jest jednoznaczne.

Krok 1. Głównym celem Rozdziału 5 jest pokazanie, że granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_t^{h+\lambda} - \mu_t^h}{\lambda}$ istnieje oraz że jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} dla dowolnego $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ oraz dla każdej chwili czasu $t \in [0, +\infty)$. Najpierw pokażemy to dla $h = 0$, czyli rozważymy granicę

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_t^\lambda - \mu_t^0}{\lambda}, \quad (5.7)$$

gdzie μ_t^0 jest rozwiązaniem nieliniowego, niezaburzonego równania transportu (5.1).

Rozwiązanie μ_t^λ zaburzonego nieliniowego zagadnienia można znaleźć przy użyciu, wspomnianego już, schematu aproksymacyjnego (opisanego w Rozdziale 5.4 oraz 5.6). Oznacza to, że μ_t^λ można uzyskać jako granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_t^{\lambda, n}$, gdzie przez $\nu_t^{\lambda, n}$ oznaczamy rozwiązanie przybliżone, uzyskane w n -tym kroku aproksymacji, oraz gdzie parametr zaburzający przyjmuje wartość λ . Zamiast (5.7) można rozważyć następującą granicę

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right). \quad (5.8)$$

Krok 2. Okaże się, że kolejność granic można zamienić (patrz Lemat 5.31)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right).$$

Krok 3. Rozważmy $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda}$. Iloraz $\frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda}$ można zapisać w następującej postaci $\frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda} + \sum_{k=2}^n \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda}$. Wykorzystując konstrukcję schematu aproksymacyjnego, i wstawiając μ_t^0 do współczynników równania, można wtedy rozwiązanie μ_t w pewnym sensie traktować jak rozwiązanie liniowego zagadnienia; patrz Uwaga 5.9. W związku z tym granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda}$ to po prostu pochodna rozwiązania liniowego równania z zaburzeniem $b_0 + \lambda b_1$ oraz $w_0 + \lambda w_1$. Z Twierdzenia 1 ze strony 67 wiemy, że ta pochodna jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} .

Pokażemy, że granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda}$ jest pochodną rozwiązania równania liniowego z zaburzeniem $b_0 + \lambda b_1 + o(|\lambda|)$ oraz $w_0 + \lambda w_1 + o(|\lambda|)$; patrz (5.55) i (5.57'). Z tego wynikać będzie, że $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda}$ również jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} (z Twierdzenia 5.5). A w takim razie $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda}$ istnieje i należy do \mathcal{Z} .

Krok 4. Pokażemy, że wartość $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}}$ jest ograniczona. Co ostatecznie prowadzi do wniosku, że odwzorowanie $h \mapsto \mu_t^h$ jest różniczkowalne w punkcie $h = 0$ dla dowolnego $t \in [0, +\infty)$.

Krok 5. Ostatnim etapem dowodu jest rozszerzenie wyniku dotyczącego różniczkowalności na dowolny punkt $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – patrz koniec Rozdziału 5.7, fragment zaczynający się od równości (5.68). To zakończy dowód Twierdzenia 2.

5.2 Liniowe równanie raz jeszcze

W tym rozdziale przedstawimy pewne użyteczne własności rozwiązań liniowego równania transportu, które dotychczas nie były omawiane, a będą wykorzystywane w dowodzie Twierdzenia 2.

Tak jak w Rozdziale 4.2 rozważmy niejednorodne liniowe równanie transportu w postaci zachowawczej

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t + \nabla_x \cdot (b(t, x) \nu_t) = w(t, x) \nu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \nu_{t=0} = \nu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (5.9)$$

gdzie $b : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ oraz $w : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Zauważmy, że zachodzi następujące oszacowanie rozwiązania ν_t .

Stwierdzenie 5.3. *Niech $\nu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ oraz $(t \mapsto b(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$, oraz niech dana będzie funkcja skalarna $w \in \mathcal{C}_b([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$, wtedy każde rozwiązanie ν_t zagadnienia (5.9) spełnia następującą nierówność*

$$\|\nu_t\|_{TV} \leq e^{t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_\infty} \|\nu_0\|_{TV},$$

gdzie w^+ jest częścią dodatnią funkcji w .

Dowód. Wprost z definicji normy $\|\cdot\|_{TV}$ oraz stosując formułę reprezentacyjną (Lemat 3.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\nu_t\|_{TV} &= \sup_{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu_t(x) : \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &= \exp(\|w^+(\cdot, \cdot)\|_\infty t) \sup_{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(X_b(t, \cdot)) d\nu_0(x) : \|f\|_\infty \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Zbiór funkcji $f(X_b(t, \cdot))$, takich że norma $\|f\|_\infty \leq 1$, stanowi podzbiór wszystkich funkcji $f(x) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, takich że $\|f\|_\infty \leq 1$ i stąd

$$\begin{aligned} \|\nu_t\|_{TV} &\leq \exp(\|w^+(\cdot, \cdot)\|_\infty t) \sup_{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu_0(x) : \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &\leq \exp(\|w^+(\cdot, \cdot)\|_\infty t) \left(\|\nu_0^+\|_{TV} + \|\nu_0^-\|_{TV} \right) \\ &\leq \exp(\|w^+(\cdot, \cdot)\|_\infty t) \|\nu_0\|_{TV}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Uwaga 5.4. *Ponieważ dla dowolnej miary $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ prawdą jest, że $\|\nu\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\nu\|_{TV}$ (patrz Uwaga 4.1), to ze Stwierdzenia 5.3 wynika następująca nierówność*

$$\|\nu_t\|_{\mathcal{Z}} \leq \exp(\|w^+(\cdot, \cdot)\|_\infty t) \|\nu_0\|_{TV}. \quad (5.10)$$

Przedstawimy teraz wynik analogiczny do Twierdzenia 1 ze strony 67. Różnica będzie polegać na tym, że rozważać będziemy inny typ zaburzeń, a mianowicie

$$\bar{b}^h(t, x) := b_0(t, x) + h \cdot b_1(t, x) + o(|h|), \quad (5.11)$$

$$\bar{w}^h(t, x) := w_0(t, x) + h \cdot w_1(t, x) + o(|h|), \quad (5.12)$$

gdzie $f \in o(|h|)$ oznacza, że $f(h)/h \rightarrow 0$. Zaburzone równanie liniowe, odpowiadające (5.9), przyjmuje postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^h + \nabla_x \cdot (\bar{b}^h(t, x) \nu_t^h) = \bar{w}^h(t, x) \nu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \nu_{t=0}^h = \nu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (5.13)$$

Korzystając z powyższej notacji, Twierdzenie 1 ze strony 67 można uogólnić w następujący sposób.

Twierdzenie 5.5. *Załóżmy, że $(t \mapsto b_i(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ oraz $w_i(t, x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ dla $i = 0, 1$. Niech ν_t^h będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia (5.13) z polem wektorowym \bar{b}^h zdefiniowanym przez (5.11) oraz funkcją \bar{w}^h postaci (5.12). Wtedy odwzorowanie $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \ni h \mapsto \nu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ jest różniczkowalne w przestrzeni \mathcal{Z} .*

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 1 ze strony 67; patrz Dodatek B. Twierdzenia 5.5 użyjemy w końcowym kroku dowodu Twierdzenia 2; patrz strona 110.

5.3 Operator superpozycji

Wróćmy do równania nieliniowego (5.1). Celem Rozdziału 5.3 jest pokazanie, że przy założeniach Twierdzenia 2 ze strony 74 odwzorowanie $\mu \mapsto u\left(\int_{\mathbb{R}^d} K(y, x)d\mu(y)\right)$ jest klasy $\mathcal{C}^1\left(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)\right)$, gdzie $u \in \{v_0, v_1, m_0, m_1\}$. Ponieważ założenia na $K_{v_0}, K_{v_1}, K_{m_0}, K_{m_1}$ są takie same, to nie będziemy zapisywać dolnych indeksów przy K .

Zwróćmy uwagę, że operator $\int_{\mathbb{R}^d} K(y, x)d\mu(y)$ jest dobrze określony dla dowolnej miary $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, jako operator całkowy. Zastanówmy się jednak co będzie w przypadku, gdy $\mu \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Ze względu na to, że $\text{span}\{\delta_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ jest gęstym podzbiorem zbioru $\mathcal{Z} = \overline{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}^{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}$ (patrz Stwierdzenie 4.2), to możemy zastosować Twierdzenie B.11 (o rozszerzaniu funkcyjału). Oznacza to, że operator $\int_{\mathbb{R}^d} K(y, x)d\mu(y)$ może być jednoznacznie rozszerzony na wszystkie elementy przestrzeni \mathcal{Z} także te, które nie są miarami.

Będziemy stosowali zapis $\int_{\mathbb{R}^d} K(y, x)d\mu(y)$ zarówno dla $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, jak i dla $\mu \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ – zdając sobie sprawę z nadużywania tej notacji. Powodem, dla którego nie będziemy rozróżniać zapisu jest fakt, że rozwiązania równania (5.1) okażą się ostatecznie być miarami; patrz Twierdzenie 5.12. Wprowadźmy oznaczenie

$$k_\mu(\cdot) := \int_{\mathbb{R}^d} K(y, \cdot)d\mu(y).$$

Stosując notację k_μ nie uwzględniamy w żaden sposób, które jądro operatora całkowego rozważamy, to znaczy $K_{v_0}, K_{v_1}, K_{m_0}$ czy K_{m_1} . Ponieważ jednak założenie na każde z nich jest identyczne (patrz założenia **A3** w Twierdzeniu 2 na stronie 74), to nie będzie to wprowadzać zamieszania.

Lemat 5.6. *Niech $x \mapsto K(\cdot, x)$ będzie klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Wtedy dla dowolnego $\mu \in \mathcal{Z}$ odwzorowanie $\mu \mapsto k_\mu : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ jest dobrze określone. Co więcej, jest to liniowe odwzorowanie ciągłe.*

Dowód. Fakt, że odwzorowanie $\mu \mapsto k_\mu$ jest liniowe jest oczywisty. Skupimy się na pokazaniu, że jest to ograniczone odwzorowanie $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Będziemy szacować $\|k_\mu(\cdot)\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$, gdzie z definicji mamy

$$\|k_\mu(\cdot)\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k_\mu(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla_x \cdot k_\mu(x)| + |\nabla_x \cdot k_\mu(x)|_\alpha. \quad (5.14)$$

Zachodzą oszacowania

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k_\mu(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} K(y, x)d\mu(y) \right| \leq \|K\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))} \cdot \|\mu\|_{\mathcal{Z}}, \quad (5.15)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla_x \cdot k_\mu(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot K(y, x)d\mu(y) \right| \leq \|\nabla_x \cdot K\|_{\mathcal{C}^{0+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))} \cdot \|\mu\|_{\mathcal{Z}}. \quad (5.16)$$

Należy uzasadnić, że $\|\nabla_x \cdot K\|_{\mathcal{C}^{0+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))}$ w oszacowaniu (5.16) faktycznie jest skończone. Otóż, z przyjętego założenia $(x \mapsto K(\cdot, x)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ wiemy, że $\nabla_x \cdot K$

jest klasy $\mathcal{C}^{0+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, czyli w szczególności $\nabla_x \cdot K$ jest ograniczone. Wiemy także, że dla dowolnego x wartość $\|\nabla_x \cdot K(\cdot, x)\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ (gdzie norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}}$ dotyczy zmiennej y) jest skończona.

Ostatni składnik (5.14) można oszacować następująco

$$\begin{aligned} |\nabla_x \cdot k_\mu(x)|_\alpha &= \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_x \cdot K(y, x_1) - \nabla_x \cdot K(y, x_2)) d\mu(y) \right|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \\ &\leq \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \left(\frac{\|\nabla_x \cdot (K(\cdot, x_1) - K(\cdot, x_2))\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}}{|x_1 - x_2|^\alpha} \right) \cdot \|\mu\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ostatnia nierówność, jak poprzednio, wynika z przyjętego założenia, że $(x \mapsto K(\cdot, x)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Z nierówności (5.15)-(5.17) otrzymujemy, że k_μ jest klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ oraz

$$\|k_\mu\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{Z}} \cdot \|K\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))}.$$

W takim razie odwzorowanie $\mu \mapsto k_\mu$ jest ciągłym liniowym odwzorowaniem przestrzeni \mathcal{Z} w przestrzeń $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. \blacksquare

Twierdzenie 5.7. *Odwzorowanie $\mu \mapsto u(k_\mu)(\cdot)$ jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ dla $u \in \{v_0, v_1\}$ oraz klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ dla $u \in \{m_0, m_1\}$, przy założeniach **A1**, **A2**, **A3** Twierdzenia 2 ze strony 74.*

Uwaga 5.8. *Dowód powyższego twierdzenia (który pojawi się na kolejnej stronie) wymaga założenia, że $u \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ (patrz **A1** i **A2**) – to jest jedyne miejsce w całym dowodzie Twierdzenia 2, gdzie tak silne założenie na u jest konieczne.*

Sprawdźmy jaką postać miałyby pochodna Frécheta (patrz Definicja B.6) odwzorowania $\mu \mapsto u(k_\mu)$, gdyby istniała. Przy założeniu, że istnieje musi być równa pochodnej kierunkowej (Gâteaux), to znaczy

$$\partial[u(k_\mu)(x)](\bar{\mu}) = D_{\bar{\mu}}u(k_\mu)(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u(k_\mu + \lambda k_{\bar{\mu}})(x) - u(k_\mu)(x)}{\lambda}$$

(która z kolei okaże się być elementem przestrzeni $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$). Jeżeli powyższa granica istnieje, to w szczególności implikuje to, że istnieje również granica punktowa dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$.

Na moment pominiemy w notacji fakt, że $D_{\bar{\mu}}u(k_\mu)$, k_μ oraz $k_{\bar{\mu}}$ są zależne od zmiennej x . Przez $f \circ g$ oznaczamy złożenie funkcji. Pochodna kierunkowa ma następującą postać

$$\begin{aligned} D_{\bar{\mu}}u(k_\mu) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u \circ (k_\mu + \lambda \cdot k_{\bar{\mu}}) - u \circ k_\mu}{\lambda} \\ &\text{(rozwijając w szereg Taylora)} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u \circ k_\mu + \lambda \cdot (u' \circ k_\mu) \cdot k_{\bar{\mu}} + R_1[u, k_\mu](k_\mu + \lambda \cdot k_{\bar{\mu}}) - u \circ k_\mu}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot (u' \circ k_\mu) \cdot k_{\bar{\mu}} + C|u'|_\alpha \cdot |\lambda|^{1+\alpha} \cdot \|k_\mu\|_\infty^{1+\alpha}}{\lambda} = (u' \circ k_\mu) \cdot k_{\bar{\mu}}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

gdzie $R_n[f, x_0](x)$ jest resztą z rozwinięcia funkcji $x \mapsto f(x)$ w szereg Taylora do n -tego wyrazu, w ustalonym punkcie x_0 . Resztę $R_1[u, k_\mu]$ będziemy szacować w następujący sposób

$$\sup_{x \in \Omega} |R_n[f, x_0](x)| \leq C_{n,\alpha} \cdot \max_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta|=n} |D^\beta f|_\alpha \cdot |x - x_0|^{n+\alpha},$$

gdzie $C_{n,\alpha} := \frac{d^n}{\alpha(\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+n-1)}$, patrz Stwierdzenie B.15. Zanim przejdziemy do dowodu Twierdzenia 5.7 przytoczymy jeszcze pewien użyteczny fakt

$$\text{jeżeli } f, g \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d), \text{ wtedy } |f \cdot g|_\alpha \leq |f|_\alpha \|g\|_\infty + \|f\|_\infty |g|_\alpha. \quad (5.19)$$

Dowód Twierdzenia 5.7. Żeby pokazać różniczkowalność operatora u w punkcie μ_0 , musimy uzasadnić, że istnieje taki operator $\partial u(k_{\mu_0})(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$, że

$$u(k_\mu) = u(k_{\mu_0}) + \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) + o(\|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}).$$

Jeżeli u jest różniczkowalne w μ_0 , wtedy $\partial u(k_{\mu_0})$ będzie niczym innym niż pochodną kierunkową (5.18), to znaczy $\partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) = (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu - \mu_0}$. Wystarczającym warunkiem na to, żeby $D_{\bar{u}} u(k_\mu)$ było elementem przestrzeni $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ jest, żeby $u' \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$, czyli $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha}$. To zagwarantuje, że $x \mapsto (u' \circ k_{\mu_0})(x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. W takim razie oszacujemy

$$\begin{aligned} & \left\| u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) \right\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \\ & = \underbrace{\left\| u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) \right\|_\infty}_{=:II.1} + \underbrace{\left\| \nabla_x \cdot \left(u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) \right) \right\|_\infty}_{=:II.2} \\ & \quad + \underbrace{\left| \nabla_x \cdot \left(u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) \right) \right|_\alpha}_{=:II.3}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Każdym ze składników *II.1*, *II.2* i *II.3* będziemy zajmować się oddzielnie. W *II.1* rozwińmy $u(k_\mu(x))$ w szereg Taylora w punkcie $k_{\mu_0}(x)$

$$\begin{aligned} II.1 &= \left\| u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) \right\|_\infty \\ &= \left\| u \circ k_{\mu_0} + (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu - \mu_0} + R_1[u, k_{\mu_0}](k_\mu) - u \circ k_{\mu_0} - (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu - \mu_0} \right\|_\infty \\ &= \|R_1[u, k_{\mu_0}](k_\mu)\|_\infty. \end{aligned}$$

Ze Stwierdzenia B.15 oraz oszacowania (5.15) dostajemy

$$II.1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |R_1[u, k_{\mu_0}(x)](k_\mu(x))| \leq C_{1,\alpha} |u'|_\alpha \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k_{\mu - \mu_0}(x)|^{1+\alpha} \leq C \cdot |u'|_\alpha \cdot \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha}. \quad (5.21)$$

Przejdźmy do składnika $II.2$ i zauważmy, że $\frac{\partial}{\partial x_j}[u \circ k_\mu] = (u' \circ k_\mu(x)) \cdot \frac{\partial k_\mu(x)}{\partial x_j}$ (pochodna złożenia), czyli dostajemy

$$\begin{aligned}
II.2 &= d \cdot \max_j \left\| \partial_{x_j} \left(u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - \partial u(k_{\mu_0})(\mu - \mu_0) \right) \right\|_\infty \\
&= d \max_j \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} [u \circ k_\mu] - \frac{\partial}{\partial x_j} [u \circ k_{\mu_0}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [(u' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu - \mu_0}] \right\|_\infty \\
&= d \max_j \left\| (u' \circ k_\mu) \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} - (u' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} - (u'' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \cdot k_{\mu - \mu_0} - (u' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty \\
&\text{(rozwijając } u' \text{ w szereg Taylora w punkcie } k_{\mu_0}(x)) \\
&= d \max_j \left\| (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} + (u'' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu - \mu_0} \cdot \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} + R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \cdot \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \left. - (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} - (u'' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \cdot k_{\mu - \mu_0} - (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty \\
&= d \max_j \left\| (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot \left(\frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} - \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \right) - (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + (u'' \circ k_{\mu_0}) k_{\mu - \mu_0} \cdot \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} + R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \cdot \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} \right\|_\infty \\
&= d \max_j \left\| (u'' \circ k_{\mu_0}) k_{\mu - \mu_0} \cdot \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} + R_1[u', k_{\mu_0}](k_{\mu_0}) \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} \right\|_\infty \\
&\leq d \max_j \left\| (u'' \circ k_{\mu_0}) k_{\mu - \mu_0} \cdot \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty + d \max_j \left\| R_1[u', k_{\mu_0}](k_{\mu_0}) \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} \right\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ponieważ $k_\mu \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$, to możemy skorzystać z Faktu B.15 dla $R_1[u', k_{\mu_0}]$ oraz oszacowania (5.15)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| R_1[u', k_{\mu_0}(x)](k_\mu(x)) \right| \leq C_{1,\alpha} |u''|_\alpha \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |k_{\mu - \mu_0}(x)|^{1+\alpha} \leq C \cdot |u''|_\alpha \cdot \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha}.$$

Zachodzą poniższe oszacowania

$$\|u'' \circ k_{\mu_0}\|_\infty \leq \|u''\|_\infty, \quad \|k_{\mu - \mu_0}\|_\infty \leq C \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}} \quad \text{oraz} \quad \left\| \frac{\partial k_{\mu - \mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty \leq C \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$II.2 \leq C_1 \|u''\|_\infty \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^2 + C_2 |u''|_\alpha \cdot \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha}. \tag{5.22}$$

Zajmijmy się ostatnim składnikiem równania (5.20)

II.3 =

$$\begin{aligned}
&= d \max_j \left| \frac{\partial}{\partial x_j} [(u \circ k_\mu)] - \frac{\partial}{\partial x_j} [(u \circ k_{\mu_0})] - \frac{\partial}{\partial x_j} [(u' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu-\mu_0}] \right|_\alpha \\
&= d \max_j \left| (u' \circ k_\mu) \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} - (u' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} - (u'' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \cdot k_{\mu-\mu_0} - (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha \\
&= d \max_j \left| (u' \circ k_\mu) \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} - (u' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_\mu}{\partial x_j} - (u'' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \cdot k_{\mu-\mu_0} \right|_\alpha \\
&= d \max_j \left| (u' \circ k_\mu) \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} + (u' \circ k_\mu) \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} - (u' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \left. - (u' \circ k_{\mu_0}) \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} - (u'' \circ k_{\mu_0}) \cdot \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \cdot k_{\mu-\mu_0} \right|_\alpha \\
&\leq d \max_j \left| \underbrace{[(u' \circ k_\mu) - (u' \circ k_{\mu_0})] \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j}}_{\text{(skorzystamy z (5.19))}} \right|_\alpha + d \max_j \left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \underbrace{[(u' \circ k_\mu) - (u' \circ k_{\mu_0}) - (u'' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu-\mu_0}]}_{=R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu)} \right|_\alpha \\
&\leq d \left| (u' \circ k_\mu) - (u' \circ k_{\mu_0}) \right|_\alpha \max_j \left\| \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty \\
&\quad + d \max_j \|(u' \circ k_\mu) - (u' \circ k_{\mu_0})\|_\infty \left| \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha + d \max_j \left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha.
\end{aligned}$$

Ze względu na to, że u jest klasy $\mathcal{C}^{3+\alpha}$ to funkcja $(u' \circ k_\mu) - (u' \circ k_{\mu_0})$ jest klasy $\mathcal{C}^{2+\alpha}$, stąd wartość $|(u' \circ k_\mu) - (u' \circ k_{\mu_0})|_\alpha$ jest ograniczona. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\leq C \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}} + d \|u'\|_\infty \|k_{\mu-\mu_0}\|_\infty \cdot \max_j \left| \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha + d \max_j \left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha \\
&\leq C_1 \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}} + C_2 \|u'\|_\infty \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}} \max_j \left| \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha + d \max_j \left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Z Lematu 5.6 wiemy, że $k_\mu \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$ i pozostaje do oszacowania $\left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha$. Korzystając z własności (5.19) otrzymujemy

$$\left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha \leq \left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha \cdot \|R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu)\|_\infty + \left\| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty \cdot \left| R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha$$

i stosując Stwierdzenie B.15 dostajemy

$$\|R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu)\|_\infty \leq |u''|_\alpha \cdot C_{1,\alpha} \cdot |k_{\mu-\mu_0}|^{1+\alpha} \leq C |u''|_\alpha \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha}. \tag{5.24}$$

Do oszacowania wciąż pozostało $|R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu)|_\alpha$. W ogólności, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{n+1}$, to dla pewnego $\xi \in [x_0; x]$ zachodzi

$$R_n[f, x_0](x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(f^{(n+1)}(\xi) \right) (x - x_0)^{n+1}.$$

Dowód tego faktu korzysta głównie z Twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej (patrz Twierdzenie B.10). Ten dowód można znaleźć w [Ada03, Twierdzenie 16, strona 139]. W naszym przypadku

$$R_1[u', k_{\mu_0}(x)](k_\mu(x)) = \frac{1}{2} (u''' \circ \xi(x)) \cdot (k_{\mu-\mu_0}(x))^2,$$

gdzie $k_{\mu_0}(x) \leq \xi(x) \leq k_\mu(x)$. Z założenia $u \in \mathcal{C}^{3+\alpha}$ dostajemy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \left| R_1[u', k_{\mu_0}](k_\mu) \right|_\alpha &= \frac{1}{2} \left| (u''' \circ \xi) \cdot (k_{\mu-\mu_0}(x))^2 \right|_\alpha \leq C \|u'''\|_\infty \|k_\mu\|_\infty \left(\|k_{\mu-\mu_0}\|_\infty^\alpha \right)^2 \\ &\leq C \|u'''\|_\infty \|k_\mu\|_\infty \left(\|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^\alpha \right)^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Powyższe oszacowanie jest jedynym powodem, dla którego potrzebujemy aż takiej regularności (trzykrotnej różniczkowości) pola wektorowego v oraz funkcji m . Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| u(k_\mu) - u(k_{\mu_0}) - (u' \circ k_{\mu_0}) \cdot k_{\mu-\mu_0} \right|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq \underbrace{C \cdot |u'|_\alpha \cdot \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha}}_{\text{(korzystając z (5.21))}} + \underbrace{C_1 \|u''\|_\infty \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^2 + C_2 |u'|_\alpha \cdot \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha}}_{\text{(korzystając z (5.22))}} \\ &\quad + \underbrace{C_3 |u'|_\alpha \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha} + C_4 \|u''\|_\infty \left| \frac{\partial k_{\mu-\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}}_{\text{(korzystając z (5.23))}} \\ &\quad + \underbrace{C_5 \left| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \right|_\alpha |u''|_\alpha \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha} + \left\| \frac{\partial k_{\mu_0}}{\partial x_j} \right\|_\infty \cdot C_6 \|u'''\|_\infty \|k_\mu\|_\infty \left(\|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^\alpha \right)^2}_{\text{(korzystając z (5.24) oraz (5.25))}} \\ &\leq c_1 \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}} + c_2 \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{1+\alpha} + c_3 \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^2 + c_4 \|\mu - \mu_0\|_{\mathcal{Z}}^{2\alpha}. \end{aligned}$$

To pokazuje, że odwzorowanie $\mu \mapsto u(k_\mu)$ jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$. ■

5.4 Istnienie rozwiązań nieliniowego równania

W tym rozdziale wskażemy takie μ_t , które spełnia zagadnienie (5.1) w słabym sensie; patrz Definicja 5.1. Dodatkowo pokażemy, że zaproponowane μ_t jest miarą. To rozwiązanie będziemy oznaczać przez μ_t^0 – żeby podkreślić, że $h = 0$. Przedstawiony zostanie schemat aproksymacyjny: przez $\nu_t^{0,n}$ oznaczmy przybliżone rozwiązanie, uzyskane w n -tym kroku aproksymacji. Żeby pokazać istnienie i jednoznaczność słabych rozwiązań zagadnienia (5.1) musimy pokazać, że:

- A.** Schemat aproksymacyjny jest zbieżny w \mathcal{Z} , to znaczy $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_t^{0,n} =: \bar{\nu}_t^0$ dla każdego $t \in [0, +\infty)$. Ponieważ \mathcal{Z} jest zupełna, to o ile tylko $\bar{\nu}_t^0$ istnieje, to jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} . Z konstrukcji schematu otrzymamy natychmiast, że $\bar{\nu}_t^0$ spełnia zagadnienie (5.1), czyli $\bar{\nu}_t^0 = \mu_t^0$;
- B.** Granica $\bar{\nu}_t^0$ jest miarą – zbieżność schematu aproksymacyjnego zostanie pokazana w przestrzeni \mathcal{Z} , a zbiór $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Z}$ nie jest zupełny z normą $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. Dlatego będzie potrzebny dodatkowy argument, żeby stwierdzić, że $\bar{\nu}_t^0$ faktycznie jest elementem przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$;
- C.** Odwzorowanie $t \mapsto \bar{\nu}_t^0$ jest ciasno ciągłe – to znaczy, że $[0, +\infty) \ni t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\bar{\nu}_t^0(x)$ jest ciągle dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ (patrz Definicja 2.26 na stronie 36);
- D.** Rozwiązanie $t \mapsto \bar{\nu}_t^0$ jest jednoznaczne w klasie ciasno ciągłych rozwiązań – czyli nie istnieją żadne inne rozwiązania zagadnienia (5.1) spełniające Definicję 2.52; patrz strona 47.

W tym rozdziale zajmiemy się kwestiami **A** i **B**. Korzystając z notacji wprowadzonej w poprzednim rozdziale, zagadnienie (5.1) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^0 + \nabla_x \cdot \left(v_0(k_{\mu_t^0}) \mu_t^0 \right) = m_0(k_{\mu_t^0}) \mu_t^0 \\ \mu_{t=0}^0 = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (5.26)$$

Rozważmy następujący schemat aproksymacyjny:

Krok 0. Miary $\nu_t^{0,0}$ rozwiązują liniowe zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{0,0} + \nabla_x \cdot \left(v_0(k_{\mu_0}) \nu_t^{0,0} \right) = m_0(k_{\mu_0}) \nu_t^{0,0} \\ \nu_0^{0,0} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Krok 1. Dla $n \geq 1$ miary $\nu_t^{0,n}$ rozwiązują liniowe zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{0,n} + \nabla_x \cdot \left(v_0(k_{\nu_t^{0,n-1}}) \nu_t^{0,n} \right) = m_0(k_{\nu_t^{0,n-1}}) \nu_t^{0,n} \\ \nu_0^{0,n} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Podkreślmy wyraźnie, że w każdym kroku tego schematu miara $\nu_t^{0,n}$ jest rozwiązaniem **liniowego zagadnienia**, współczynniki nie zależą od rozwiązania.

Uwaga 5.9. Rozważmy odwzorowanie $\bar{\mathcal{T}}(\nu_t^{0,n}) := \nu_t^{0,n+1}$. Zauważmy, że punktem stałym odwzorowania $\bar{\mathcal{T}} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ (o ile taki punkt stały istnieje) jest nic innego niż rozwiązanie nieliniowego zagadnienia (5.1). Skoro tak, to μ_t^0 można traktować jak rozwiązanie liniowego zagadnienia (4.2) ze współczynnikami $b(t, x) = v_0(k_{\mu_t^0})(x)$ oraz $w(t, x) = m_0(k_{\mu_t^0})(x)$.

Uwaga 5.10. Oznaczmy odwzorowanie $t \mapsto \nu_t$ przez ν_\bullet . Przy założeniach **A1**, **A2**, **A3** Twierdzenia 2 ze strony 74, Twierdzenie 5.7 można rozszerzyć w następujący sposób: jeżeli $\nu_\bullet \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{Z})$, to $\nu_\bullet \mapsto u(k_{\nu_\bullet})$ jest klasy $\mathcal{C}_b^1(\mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{Z}); \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)))$ dla $u \in \{v, m\}$.

Oznacza to, że gdyby $\nu_\bullet \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{Z})$, to wtedy odwzorowania $(t \mapsto v_0(k_{\nu_t})(\cdot))$ oraz $(t \mapsto m_0(k_{\nu_t})(\cdot)) : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ byłyby ciągłe i ograniczone. Gdyby faktycznie tak było, to z Lematu 3.4 mielibyśmy od razu istnienie i jednoznaczność słabego rozwiązania $\hat{\nu}_t$ zagadnienia

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\nu}_t + \nabla_x \cdot (v_0(k_{\nu_t}) \hat{\nu}_t) = m_0(k_{\nu_t}) \hat{\nu}_t \\ \hat{\nu}_{t=0} = \hat{\nu}_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (5.29)$$

gdzie ν_t jest zadane.

Niestety, $\hat{\nu}_\bullet$ nie musi być elementem przestrzeni $\mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{Z})$. Wiemy jedynie, że wzrost $\hat{\nu}_t$ jest kontrolowany wykładniczo w czasie, to znaczy

$$\|\hat{\nu}_t\|_{\mathcal{Z}} \leq e^{t\|m_0^+\|_\infty} \|\hat{\nu}_0\|_{TV},$$

patrz oszacowanie (5.10). Zauważmy, że ten wzrost jest niezależny od miary ν_t . W takim razie wprowadźmy nową normę, która zagwarantuje, że $\hat{\nu}_t$ będzie globalnie w czasie ograniczone. Ta nowa norma będzie zbliżona do tak zwanej *zwagowanej normy* (ang. weighted norm), której zadaniem jest niwelowanie „za dużego” wzrostu. Dla funkcji $f : [0, +\infty) \rightarrow X$, gdzie $(X, \|\cdot\|_X)$ jest unormowaną przestrzenią wektorową, zwagowaną normę definiujemy następująco

$$\|f\|_{X_\omega} := \sup_{t \geq 0} \omega(t) \|f(t)\|_X, \quad (5.30)$$

gdzie ograniczone funkcja $\omega(t) > 0$ jest nazywana *wagą*. Analogicznie dla skończonego przedziału czasu

$$\|f\|_{X_\omega^T} := \sup_{t \in [0, T]} \omega(t) \|f(t)\|_X. \quad (5.31)$$

Gdy $\omega(t)$ ma postać e^{-gt} oraz stała g jest dodatnia, to norma (5.30) jest nazywana *normą Bieleckiego* [Kwa91]; patrz również (2.8) na stronie 17. Waga, którą będziemy działać na elementy przestrzeni $\mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{Z})$, i którą wykorzystamy w dowodzie Twierdzenia 2 ze

strony 74 ma następującą postać

$$\widehat{\omega}(t) = \begin{cases} e^{-g_1 t} & \text{dla } 0 \leq t < 1, \\ e^{-g_2 t} & \text{dla } 1 \leq t < 2, \\ \dots & \\ e^{-g_N t} & \text{dla } N-1 \leq t < N, \\ \dots & \end{cases} \quad (5.32)$$

gdzie stała g_N jest dodatnia dla każdego $N \in \mathbb{N}$. Zanim jednak pokażemy, że schemat aproksymacyjny jest zbieżny (do czego potrzebna będzie waga (5.32)), to zbadajmy własności samej normy Bieleckiego.

Oznaczmy przez $\mathcal{C}_\omega([0, +\infty); X)$ przestrzeń funkcji ciągłych o wartościach w X i wzroście co najwyżej $\omega(t)$, czyli takich, że $\|f\|_{X_\omega} < \infty$ dla każdego $f \in \mathcal{C}([0, +\infty); X)$. Gdy waga ma postać e^{-gt} oraz stała g jest dodatnia, wtedy przestrzeń $\mathcal{C}_\omega([0, +\infty); X)$ jest zupełna. W naszym przypadku $(X, \|\cdot\|_X)$ to będzie zazwyczaj $(\mathcal{Z}, \|\cdot\|_{\mathcal{Z}})$ lub $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{TV})$. Oznaczmy przez \mathcal{Z}_ω przestrzeń $(\mathcal{C}_\omega([0, +\infty); \mathcal{Z}), \|\cdot\|_{\mathcal{Z}_\omega})$ oraz $\mathcal{Z}_\omega^T := (\mathcal{C}_\omega([0, T]; \mathcal{Z}), \|\cdot\|_{\mathcal{Z}_\omega})$. W przestrzeni \mathcal{Z}_ω zachodzi pewna oczywista analogia do oszacowania (5.10).

Uwaga 5.11. Niech $\nu_t \in \mathcal{Z}$ oraz operatory $v_0(k_{\nu_t}), m_0(k_{\nu_t})$ spełniają założenia Stwierdzenia 5.3 (co jest prawdą zgodnie z Twierdzeniem 5.7). Ustalmy wagę $\omega(t) = e^{-t\|m_0^+\|_\infty}$. Wtedy każde rozwiązanie $t \mapsto \widehat{\nu}_t$ zagadnienia (5.29) spełnia oszacowanie

$$\|\widehat{\nu}_\bullet\|_{\mathcal{Z}_\omega} \leq \|\widehat{\nu}_0\|_{TV}. \quad (5.33)$$

Teraz pokażemy, że o ile schemat aproksymacyjny jest zbieżny, to jego granica $\widehat{\nu}_t^0$ jest elementem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Twierdzenie 5.12. Niech $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ oraz miary $\nu_t^{0,n}$ będą zadane przez zagadnienia (5.27) oraz (5.28). Jeżeli ciąg $\{\nu_t^{0,n}\}_n$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_{TV}$ dla każdego $t \in [0, +\infty)$, wtedy istnieje takie $\widehat{\nu}_t^0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_t^{0,n} - \widehat{\nu}_t^0\|_{TV} = 0$.

Dowód. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ rozwiązanie $\nu_t^{0,n}$ należy do $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ (patrz Lemat 3.4). Jeżeli waga $\omega(t) = e^{-t\|m_0^+\|_\infty}$, wtedy $(\mathcal{C}_\omega([0, +\infty); (\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{TV})))$ jest przestrzenią Banacha. Ze Stwierdzenia 5.3 wynika następujące oszacowanie $\|\nu_\bullet^{0,n}\|_{TV_\omega} \leq \|\nu_0\|_{TV}$. Z założenia na μ_0 wiemy, że wartość $\|\mu_0\|_{TV}$ jest skończona. Zatem na podstawie twierdzenia Banacha-Alaoglu z ciągu $\nu_t^{0,n}$ można wybrać podciąg, którego słaba z* granica będzie skończoną miarą Radona, to znaczy $\nu_t^{0,n_k} \rightharpoonup^* \widehat{\nu}_t^0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Jeżeli tylko ciąg $\{\nu_t^{0,n}\}_n$ jest zbieżny, wtedy granica podciągu $\{\nu_t^{0,n_k}\}_k$ jest równa granicy ciągu $\{\nu_t^{0,n}\}_k$. ■

Uwaga 5.13. Ponieważ $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ jest domkniętą podprzestrzenią $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$ (patrz Stwierdzenie 4.5), to przestrzeń $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ jest również zupełna w \mathcal{Z} . W takim razie jeżeli $\mu_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$, to granica $\widehat{\nu}_t^0$ schematu aproksymacyjnego (to znaczy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_t^{0,n} - \widehat{\nu}_t^0\|_{\mathcal{Z}} = 0$) jest nieujemną skończoną miarą Radona dla każdego t .

Teraz chcemy pokazać, że ciąg miar $\{\nu_t^{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ jest zbieżny. Korzystając z notacji (5.31) zdefiniujmy operator $\mathcal{T} : \mathcal{Z}_\omega^T \rightarrow \mathcal{Z}_\omega^T$ przez $\mathcal{T}(\nu_\bullet) := \hat{\nu}_\bullet$; patrz zagadnienie (5.29). Kontrakcyjność operatora \mathcal{T} pokażemy na zbiorze

$$\mathcal{B}_\omega^{\mu_0} := \{f \in \mathcal{Z}_\omega^T : f(0) = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\}. \quad (5.34)$$

Zauważmy, że $\mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$ jest domkniętą podprzestrzenią afiniczną przestrzeni zupełnej \mathcal{Z}_ω^T . Z tego wynika, że przestrzeń $\mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$ także jest zupełna. Spójrzmy na \mathcal{T} jak na złożenie dwóch operatorów, $\mathcal{T} = B \circ S$:

$$S : (t \mapsto (v_0(k_{\nu_t}), m_0(k_{\nu_t}))) \mapsto (t \mapsto \nu_t), \quad \text{gdzie } S : \mathcal{C}_\omega([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1})) \rightarrow \mathcal{Z}_\omega^T, \quad (5.35)$$

oraz

$$B : (t \mapsto \nu_t) \mapsto (t \mapsto (v_0(k_{\nu_t}), m_0(k_{\nu_t}))), \quad \text{gdzie } B : \mathcal{Z}_\omega^T \rightarrow \mathcal{C}_\omega([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1})). \quad (5.36)$$

Operator S opisuje wpływ pola wektorowego $v_0(k_{\nu_t^{0,n}})$ oraz funkcji skalarnej $m_0(k_{\nu_t^{0,n}})$ na przybliżone rozwiązanie $\nu_t^{0,n+1}$. Natomiast operator B opisuje wpływ rozwiązania $\nu_t^{0,n}$ na współczynniki $v_0(k_{\nu_t^{0,n}})$ oraz $m_0(k_{\nu_t^{0,n}})$. Chcemy pokazać, że operator $\mathcal{T} : \mathcal{Z}_\omega^T \rightarrow \mathcal{Z}_\omega^T$ jest kontrakcją w zbiorze $\mathcal{B}_\omega^{\mu_0} \subset \mathcal{Z}_\omega^T$. Opisuje to następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.14. *Niech waga $\omega(t)$ będzie zadana przez e^{-gt} . Wtedy dla dowolnej skończonej chwili czasu $T > 0$ oraz dowolnej dodatniej stałej $c < 1$, istnieje taka stała g , że operator $\mathcal{T} = B \circ S : \mathcal{B}_\omega^{\mu_0} \rightarrow \mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$, jest kontrakcją na przedziale czasu $[0, T]$ i stała kontrakcji jest mniejsza lub równa c .*

Żeby móc udowodnić powyższe twierdzenie, musimy najpierw pokazać pewne własności operatorów S oraz B . Dowód tego twierdzenia zostanie przeprowadzony dopiero na stronie 92.

Uwaga 5.15. *W każdym kroku aproksymacji przyjmujemy taki sam warunek początkowy μ_0 . Wynika stąd, że jako dziedzinę operatora B nie musimy rozważać całej przestrzeni \mathcal{Z}_ω^T , wystarczy wziąć jest podprzestrzeń $\mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$. Ograniczając dziedzinę możemy również rozważać mniejszy zbiór wartości. W tym przypadku zbiorem wartości będzie podprzestrzeń afiniczna $\mathcal{C}_\omega([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}))$. Podobnie jest dla operatora S .*

Na początek uzasadnijmy, że operatory B oraz S faktycznie działają we wskazanych przestrzeniach.

Lemat 5.16. *Operator B odwzorowuje \mathcal{Z}_ω^T w $\mathcal{C}_\omega([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}))$. Dodatkowo dla każdego $\mu_\bullet \in \mathcal{Z}_\omega^T$ zachodzi następujące oszacowanie*

$$\|B(\mu_\bullet)\|_{\mathcal{C}_\omega([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}))} \leq C(1 + \|\mu_\bullet\|_{\mathcal{Z}_\omega}), \quad (5.37)$$

gdzie C jest stałą.

Zwróćmy uwagę, że w powyższym lemacie niczego nie zakładamy na temat wagi $\omega(t)$. Przypomnijmy jednak, że za wagę możemy uznać dodatnie funkcje ograniczone.

Dowód. Przypomnijmy, że $B(\mu_\bullet)(t) = \left(v_0(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, x) d\mu_t(y)), m_0(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, x) d\mu_t(y)) \right)$. Ze względu na to, że założenia na K_{v_0} i K_{m_0} są takie same (patrz **A3** w Twierdzeniu 2) oraz założenia na v_0, m_0 również są analogiczne (patrz **A1, A2**), to oszacowania przeprowadzimy dla $u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y))$, gdzie $u \in \{v_0, m_0\}$ nie rozróżniając ich.

Wprost z definicji $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ mamy

$$\begin{aligned} \left\| u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} &= \left\| u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right\|_{\infty} \\ &+ \left\| \nabla_x \cdot \left[u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right] \right\|_{\infty} + \left| \nabla_x \cdot \left[u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right] \right|_{\alpha}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że $u \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Dla pierwszego składnika można zauważyć, że

$$\left\| u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty} =: C_1.$$

Dla drugiego składnika, wyznaczając pochodną złożenia, dostajemy

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_x \cdot \left[u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right] \right\|_{\infty} &\leq \left\| \nabla_{\xi} \cdot u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right\|_{\infty} \cdot \left\| \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right\|_{\infty} \\ &\leq \|\nabla_{\xi} u\|_{\infty} \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot K_u(y, x) d\mu_t(y) \right\|_{\infty} \\ &\leq \|\nabla_{\xi} u\|_{\infty} \cdot \|\nabla_x \cdot K_u\|_{\mathcal{C}^{0+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))} \cdot \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}} \leq C_2 \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned}$$

Ostatni składnik można oszacować w następujący sposób

$$\begin{aligned} &\left| \nabla_x \cdot \left[u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right] \right|_{\alpha} = \\ &= \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \frac{|\nabla_x \cdot [u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_1) d\mu_t(y))] - \nabla_x \cdot [u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_2) d\mu_t(y))]|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \\ &\leq \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \frac{|\nabla_x \cdot [u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_1) d\mu_t(y))]| + |\nabla_x \cdot [u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_2) d\mu_t(y))]|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \\ &\leq \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \left\{ \frac{|\nabla_{\xi} u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_1) d\mu_t(y)) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot K_u(y, x_1) d\mu_t(y)|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\nabla_{\xi} u(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_2) d\mu_t(y)) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot K_u(y, x_2) d\mu_t(y)|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \left\{ \frac{\left| [\nabla_{\xi} u (\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_1) d\mu_t(y)) - \nabla_{\xi} u (\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_2) d\mu_t(y))] \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot K_u(y, x_1) d\mu_t(y) \right|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left| [\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot K_u(y, x_2) - \nabla_x \cdot K_u(y, x_1) d\mu_t(y)] \cdot \nabla_{\xi} u (\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x_2) d\mu_t(y)) \right|}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right\} \\
&\leq \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \left\{ \frac{\|\nabla_{\xi}^2 u\|_{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (K(y, x_1) - K(y, x_2)) d\mu_t(y) \right| \cdot \|\nabla_x \cdot K\|_{\mathcal{C}^{0+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\|\nabla_x \cdot (K(\cdot, x_1) - K(\cdot, x_2))\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}} \cdot \|\nabla_{\xi} u\|_{\infty}}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right\} \\
&\leq \sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d}} \left\{ \frac{\|\nabla_{\xi}^2 u\|_{\infty} \|K(\cdot, x_1) - K(\cdot, x_2)\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}} \cdot \|\nabla_x \cdot K\|_{\mathcal{C}^{0+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\|\nabla_x \cdot (K(\cdot, x_1) - K(\cdot, x_2))\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}} \cdot \|\nabla_{\xi} u\|_{\infty}}{|x_1 - x_2|^{\alpha}} \right\} \\
&\leq C_3 \cdot \left(\|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}^2 + \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}} \right).
\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że norma $\|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}$ jest ograniczona dla dowolnego t (z przyjętego założenia, że $\mu_{\bullet} \in \mathcal{Z}_{\omega}^T$), a w szczególności ograniczona dla $t \in [0, T]$. Oznaczamy przez $C_{\mu_T} := \sup_{t \in [0, T]} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}$. W takim razie zachodzi

$$\left| \nabla_x \cdot \left[u \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\mu_t(y) \right) \right] \right|_{\alpha} \leq C_3 (C_{\mu_T} \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}} + \|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}).$$

Przyjmijmy oznaczenie $\bar{C} := \max\{C_1, C_2, C_3, C_3 \cdot C_{\mu_T}\}$. Otrzymujemy

$$\|B(\mu_{\bullet})(t)\|_{\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))} \leq \bar{C} (1 + 3\|\mu_t\|_{\mathcal{Z}}).$$

Z tego wynika, że dla dowolnej wagi $\omega(t)$ nierówność (5.37) jest prawdziwa. \blacksquare

Przejdźmy do zbadania operatora S ; patrz (5.35). Dla zadanego $\nu_t^{0, n}$ współczynniki $v_0(k_{\nu_t^{0, n}})$ i $m_0(k_{\nu_t^{0, n}})$ są niczym innym niż funkcjami $b(t, x)$ oraz $w(t, x)$, takimi jak w zagadnieniu liniowym (4.3). Współczynniki $v_0(k_{\nu_t^{0, n}})$ i $m_0(k_{\nu_t^{0, n}})$ spełniają założenia Twierdzenia 1 ze strony 67. W takim przypadku będziemy używali notacji b zamiast v_0 oraz w zamiast m_0 . Zajmijmy się scharakteryzowaniem operatora S . Oznaczmy przez $S(b, w, \mu_0)(t)$ orbitę generowaną przez półgrupę rozwiązań (patrz Definicja B.8) liniowego zagadnienia (5.9), gdzie b oraz w są zadane, i która w czasie $t = 0$ przyjmuje wartość μ_0 .

Stwierdzenie 5.17. *Niech $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Jeżeli waga $\omega(t)$ ma postać $e^{-t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_{\infty}}$, wtedy operator S jest dobrze zdefiniowanym operatorem z przestrzeni $\mathcal{C}_{\omega}([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}))$ w przestrzeń \mathcal{Z}_{ω} .*

Rozważając operator S będziemy brać pod uwagę przedział czasu $[0, +\infty)$. Z tego od razu będą wynikały własności także dla skończonego przedziału czasu.

Dowód. Dla dowolnej miary $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ prawdą jest, że $\|\nu\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\nu\|_{TV}$ (patrz Uwaga 4.1), stąd zachodzi oszacowanie

$$\sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_{\infty}} \|S(b, w, \mu_0)(t)\|_{\mathcal{Z}} \right\} \leq \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_{\infty}} \|S(b, w, \mu_0)(t)\|_{TV} \right\}.$$

Współczynniki b oraz w spełniają założenia Stwierdzenia 5.3 i stosując to stwierdzenie dostajemy

$$\sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_{\infty}} \|S(b, w, \mu_0)(t)\|_{TV} \right\} \leq \sup_{t \geq 0} \left\{ e^{-t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_{\infty}} \cdot e^{t\|w^+(\cdot, \cdot)\|_{\infty}} \|\mu_0\|_{TV} \right\} = \|\mu_0\|_{TV},$$

co kończy dowód. ■

Uwaga 5.18. Przestrzeń \mathcal{C}_ω funkcji ciągłych o wzroście co najwyżej $\omega(t)$ jest podprzestrzenią \mathcal{C} . W związku z tym operator S działa z przestrzeni $\mathcal{C}_\omega([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}))$ w przestrzeń \mathcal{Z}_ω .

Uwaga 5.19. Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej funkcji $\bar{\omega}(t)$, takiej że $\bar{\omega}(t) \leq \omega(t)$ dla każdego $t \in [0, +\infty)$ zachodzi następująca inkluzja $\mathcal{Z}_{\bar{\omega}} \subseteq \mathcal{Z}_\omega$.

Lemat 5.20. Jeżeli odwzorowania $(t \mapsto b(t, \cdot))$, $(t \mapsto \bar{b}(t, \cdot))$, $(t \mapsto w(t, \cdot))$, $(t \mapsto \bar{w}(t, \cdot))$ są klasy $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$, wtedy dla dowolnej chwili czasu t , takiej że $t \leq T < \infty$ zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} & \|S(b, w, \mu_0)(t) - S(\bar{b}, \bar{w}, \mu_0)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq e^{A_1(t)} A_2(t) \left(\int_0^t \|b(s, \cdot) - \bar{b}(s, \cdot)\|_{\infty} ds + \int_0^t \|w(s, \cdot) - \bar{w}(s, \cdot)\|_{\infty} ds \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1(t) &:= tC_t[b, \bar{b}] + t \max\{\|w(\cdot, \cdot)\|_{\infty}, \|\bar{w}(\cdot, \cdot)\|_{\infty}\}, \\ A_2(t) &:= \|\mu_0\|_{TV} \cdot (1 + tC_t[w, \bar{w}]), \end{aligned} \tag{5.38}$$

a stała C_t zależna od czasu zadana jest przez (3.9).

Zanim przedstawimy dowód Lematu 5.20 potrzebujemy jeszcze jednej własności operatora B . Przypomnijmy, że $B(\nu_\bullet)(t) = \left(v_0(k_{\nu_t}), m_0(k_{\nu_t}) \right)$. Ponieważ pole wektorowe zmienia się w kolejnych krokach aproksymacji, to musimy uzasadnić, że $t \mapsto b(t, \cdot)$ faktycznie pozostaje w pewnej kuli $\mathcal{C}_\omega([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ w każdym kroku schematu.

Uwaga 5.21. Niech $\nu_\bullet \in \mathcal{Z}_\omega^T$ oraz $(x \mapsto K_{\nu_0}(\cdot, x))$, $(x \mapsto K_{m_0}(\cdot, x)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$, wtedy

$$\sup_{t \geq 0} \omega(t) \|B(\nu_\bullet)(t)\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq L \cdot \sup_{t \geq 0} \omega(t) \|\nu_t\|_{\mathcal{Z}} = L \cdot \|\nu_\bullet\|_{\mathcal{Z}_\omega}. \tag{5.39}$$

Jest to konsekwencja Twierdzenia 5.7. Teraz wróćmy do Lematu 5.20.

Dowód Lematu 5.20. Zauważmy, że $\nabla_x \cdot w$, $\nabla_x \cdot \bar{w}$, $\nabla_x \cdot b$, $\nabla_x \cdot \bar{b}$ są funkcjami ograniczonymi oraz że $\|\mu_0\|_{TV} < \infty$. Zatem, funkcja $e^{A_1(t)} \cdot A_2(t)$ jest ograniczona dla dowolnej chwili czasu $t \in [0, T]$. To w połączeniu z Lematem 3.9 ze strony 56 kończy dowód Lematu 5.20. ■

Jeszcze jedna własność operatora B jest nam potrzebna, żeby móc przedstawić dowód Twierdzenia 5.14.

Lemat 5.22. *Załóżmy, że $M_0 := \max\{\|K_{v_0}\|_{C_b(\mathbb{R}^d; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))}, \|K_{m_0}\|_{C_b(\mathbb{R}^d; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))}\} < \infty$. Wtedy dla dowolnych $\nu_\bullet, \bar{\nu}_\bullet \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathcal{Z})$, zachodzi oszacowanie*

$$\|B(\nu_\bullet)(t) - B(\bar{\nu}_\bullet)(t)\|_\infty \leq 2L_0 M_0 \|\nu_t - \bar{\nu}_t\|_{\mathcal{Z}},$$

gdzie $L_0 := \max\{\|\nabla v_0\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}, \|\nabla m_0\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}\}$.

Dowód. Oszacujmy dla $t \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \left\| \left(B(\nu_\bullet) - B(\bar{\nu}_\bullet) \right)(t) \right\|_\infty &\leq \left\| v_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, \cdot) d\nu_t(y) \right) - v_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, \cdot) d\bar{\nu}_t(y) \right) \right\|_\infty \\ &\quad + \left\| m_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, \cdot) d\nu_t(y) \right) - m_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, \cdot) d\bar{\nu}_t(y) \right) \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Z definicji L_0 mamy

$$\begin{aligned} \left\| \left(B(\nu_\bullet) - B(\bar{\nu}_\bullet) \right)(t) \right\|_\infty &\leq L_0 \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, \cdot) d\nu_t(y) - \int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y, \cdot) d\bar{\nu}_t(y) \right\|_\infty \\ &\quad + L_0 \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, \cdot) d\nu_t(y) - \int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y, \cdot) d\bar{\nu}_t(y) \right\|_\infty. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Wiemy, że dla $u \in \{v_0, m_0\}$ zachodzi

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\nu_t(y) - \int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d\bar{\nu}_t(y) \right\|_\infty \leq \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^d} K_u(y, x) d(\nu_t - \bar{\nu}_t)(y) \right\|_{C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq C \cdot \|\nu_t - \bar{\nu}_t\|_{\mathcal{Z}}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z Lematu 5.6. Skorzystanie z (5.41) w oszacowaniu (5.40) kończy dowód. ■

Dowód Twierdzenia 5.14. Niech $\nu_\bullet, \bar{\nu}_\bullet$ będą elementami $\mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$; patrz oznaczenie (5.34). Zauważmy, że zachodzi

$$\begin{aligned} e^{-gt} \|\mathcal{T}(\nu_\bullet)(t) - \mathcal{T}(\bar{\nu}_\bullet)(t)\|_{\mathcal{Z}} &= e^{-gt} \left\| \left((B \circ S)(\nu_\bullet) - (B \circ S)(\bar{\nu}_\bullet) \right)(t) \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\quad (\text{korzystając z Lematu 5.20}) \\ &\leq e^{-gt} \cdot e^{A_1(t)} \cdot A_2(t) \int_0^t \left\| (B(\nu_\bullet) - B(\bar{\nu}_\bullet))(s) \right\|_\infty ds. \end{aligned}$$

Skorzystajmy z Lematu 5.22 oraz oznaczmy $D := 2L_0M_0$

$$\begin{aligned} e^{-gt} \|\mathcal{T}(\nu_\bullet)(t) - \mathcal{T}(\bar{\nu}_\bullet)(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq e^{-gt+A_1(t)} \cdot A_2(t) \cdot D \int_0^t \|\nu_s - \bar{\nu}_s\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &= e^{-gt+A_1(t)} \cdot A_2(t) \cdot D \int_0^t e^{gs} \cdot e^{-gs} \|\nu_s - \bar{\nu}_s\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &\leq e^{A_1(t)} \cdot A_2(t) \cdot D \cdot \int_0^t e^{-g(t-s)} \sup_{0 \leq s \leq t} e^{-gs} \|\nu_s - \bar{\nu}_s\|_{\mathcal{Z}} ds. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_0^t e^{-g(t-s)} ds = \int_0^t e^{-gs} ds \leq g$, to możemy zapisać

$$\begin{aligned} e^{-gt} \|\mathcal{T}(\nu_\bullet)(t) - \mathcal{T}(\bar{\nu}_\bullet)(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq e^{A_1(t)} \cdot A_2(t) \cdot D \cdot \|\nu_\bullet - \bar{\nu}_\bullet\|_{\mathcal{Z}_\omega} \cdot \int_0^t e^{-gs} ds \\ &\leq \frac{A_2(t)D}{g} e^{A_1(t)} \|\nu_\bullet - \bar{\nu}_\bullet\|_{\mathcal{Z}_\omega}. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy trik (\spadesuit); patrz strona 20. Zauważmy, że dla dowolnego $t \in [0, T]$ funkcje $A_2(t), e^{A_1(t)}$ zadane przez (5.38) są ograniczone niezależnie od ν_\bullet ani $\bar{\nu}_\bullet$ (to ograniczenie zależy natomiast od $\|\mu_0\|_{TV}$). Stała D nie zależy od czasu. Zatem dla każdej skończonej chwili czasu T można wybrać taką wartość stałej g , że $\frac{A_2(t)D}{g} e^{A_1(t)} \leq c < 1$ dla każdego $t \in [0, T]$. W takim razie otrzymaliśmy, że

$$\|\mathcal{T}(\nu_\bullet)(t) - \mathcal{T}(\bar{\nu}_\bullet)(t)\|_{\mathcal{Z}_\omega^T} \leq c \|\nu_\bullet - \bar{\nu}_\bullet\|_{\mathcal{Z}_\omega^T}.$$

Wynika z tego, że operator \mathcal{T} jest kontrakcją na przedziale czasu $[0, T]$. \blacksquare

Do stwierdzenia, że operator \mathcal{T} jest kontrakcją na przedziale $[0, +\infty)$ waga e^{-tg} nie wystarczy, to znaczy że nie istnieje stała $g > 0$, która mogłaby zredukować przyrost ν_t w taki sposób, żeby wartość $\sup_{t \geq 0} e^{-tg} \|\nu_t\|_{\mathcal{Z}}$ była ograniczona. W tym celu sprawdza się waga zdefiniowana przez (5.32). Dopuszczamy sytuację, gdy $\inf_N g_N = 0$, podczas gdy $g_N > 0$ dla każdego N . Stała g_N zostanie dobrana w taki sposób, że dla ustalonego $0 < c < 1$ zachodzi

$$e^{-tg_N} \left\| \left(\mathcal{T}\nu_\bullet - \mathcal{T}\bar{\nu}_\bullet \right) (t) \right\|_{\mathcal{Z}} \leq ce^{-tg_N} \|\nu_t - \bar{\nu}_t\|_{\mathcal{Z}} \quad \text{dla } t \in [N-1, N].$$

Możliwość znalezienia takich stałych g_N gwarantuje nam Twierdzenie 5.14. Przyjmijmy oznaczenie $\widehat{\mathcal{B}}_\omega^{\mu_0} := \{f \in \mathcal{Z}_\omega : f(0) = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)\}$ – czyli zbiór $\mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$ rozszerzamy na przedział czasu $[0, \infty)$; patrz oznaczenie (5.34).

Stwierdzenie 5.23. *Niech waga $\widehat{\omega}(t)$ zdefiniowana będzie przez (5.32). Operator $\mathcal{T} = B \circ S : \widehat{\mathcal{B}}_\omega^{\mu_0} \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_\omega^{\mu_0}$, zdefiniowany przez $\mathcal{T}(\nu_\bullet^{0,n}) := \nu_\bullet^{0,n+1}$ jest kontrakcją na przedziale czasu $[0, +\infty)$. Innymi słowy zachodzi*

$$\|\mathcal{T}\nu_\bullet - \mathcal{T}\bar{\nu}_\bullet\|_{\widehat{\mathcal{Z}}_\omega} \leq c \|\nu_\bullet - \bar{\nu}_\bullet\|_{\widehat{\mathcal{Z}}_\omega},$$

gdzie stała $c < 1$.

Powyższe stwierdzenie jest konsekwencją Twierdzenia 5.14 oraz konstrukcji wagi (5.32).

Uwaga 5.24. *Niech współczynniki równania (5.26) spełniają założenia Twierdzenia 2. Wtedy ze Stwierdzenia 5.23 oraz z twierdzenia Banacha o punkcie stałym mamy, że schemat aproksymacyjny opisany równaniami (5.27) i (5.28) jest zbieżny. To znaczy istnieje takie $\bar{\nu}_\bullet^0 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, że*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_\bullet^{0,n} - \bar{\nu}_\bullet^0\|_{\mathcal{Z}_\omega} = 0.$$

Ponadto, $\bar{\nu}_t^0$ spełnia słabe sformułowanie zagadnienia (5.26).

Fakt, że $\bar{\nu}_t^0$ jest skończoną miarą Radona jest zagwarantowany przez Twierdzenie 5.12. Nadal nie jest natomiast jasne czy $\bar{\nu}_\bullet^0$ jest rozwiązaniem jedynym – przedstawiony schemat aproksymacyjny ma jedną granicę, ale nie wiemy czy przypadkiem nie istnieją inne rozwiązania zagadnienia (5.26). Należy także sprawdzić czy odwzorowanie $t \mapsto \bar{\nu}_t^0$ jest ciasno ciągle.

5.5 Ciasna ciągłość i jednoznaczność rozwiązań

W tej części pokażemy, że odwzorowanie $t \mapsto \bar{\nu}_t^0$ jest jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia (5.1) w klasie ciasno ciągłych odwzorowań. Przypomnijmy, że $\bar{\nu}_t^0$ jest granicą schematu aproksymacyjnego zadanego równaniami (5.27) oraz (5.28) (patrz strona 85). Przypomnijmy także definicję przestrzeni $\mathcal{Z}_{\hat{\omega}} := \mathcal{C}_{\hat{\omega}}([0, \infty); \mathcal{Z})$ oraz normy $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}} := \sup_{t \geq 0} \|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$.

Twierdzenie 5.25. *Odwzorowanie $t \mapsto \bar{\nu}_t^0$ jest ciasno ciągłe.*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 5.26. *Rozważmy schemat aproksymacyjny zadany zagadnieniami (5.27) oraz (5.28), oraz niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy ciąg $\{\nu_{\bullet}^{0,n}\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód. Na początku zauważmy, że dla dowolnego $k \geq 1$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \|\nu_{\bullet}^{0,k} - \nu_{\bullet}^{0,k-1}\|_{\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}} = \\ & = \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\nu_t^{0,k} - \nu_t^{0,k-1}\|_{\mathcal{Z}} = \underbrace{\sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\mathcal{T}(\nu_{\bullet}^{0,k-1})(t) - \mathcal{T}(\nu_{\bullet}^{0,k-2})(t)\|_{\mathcal{Z}}}_{(\mathcal{T} \text{ to kontrakcja ze Stwierdzenia 5.23})} \\ & \leq \underbrace{c \cdot \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\nu_t^{0,k-1} - \nu_t^{0,k-2}\|_{\mathcal{Z}}}_{(\text{powtarzając wcześniejszy krok } k \text{ razy})} \leq c^{k-1} \cdot \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\nu_t^{0,1} - \nu_t^{0,0}\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Przyjmijmy, że $n > m$ i oszacujmy

$$\begin{aligned} & \|\nu_{\bullet}^{0,n} - \nu_{\bullet}^{0,m}\|_{\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}} = \\ & = \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\nu_t^{0,n} - \nu_t^{0,m}\|_{\mathcal{Z}} = \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \left\| \sum_{k=m+1}^n \nu_t^{0,k} - \nu_t^{0,k-1} \right\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \sum_{k=m+1}^n \underbrace{\|\nu_t^{0,k} - \nu_t^{0,k-1}\|_{\mathcal{Z}}}_{(\text{z oszacowania (5.42)})} \leq \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \sum_{k=m+1}^n c^{k-1} \|\nu_t^{0,1} - \nu_t^{0,0}\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq \sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\nu_t^{0,1} - \nu_t^{0,0}\|_{\mathcal{Z}} \cdot c^{m+1} \frac{1 - c^{n-m}}{1 - c}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

gdzie stała $c < 1$. Zarówno $\nu_{\bullet}^{0,1}$ jak i $\nu_{\bullet}^{0,0}$ są elementami przestrzeni $\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}$, czyli wartość $\sup_{t \geq 0} \hat{\omega}(t) \|\nu_t^{0,1} - \nu_t^{0,0}\|_{\mathcal{Z}}$ jest skończona. Z tego wynika, że $\|\nu_{\bullet}^{0,n} - \nu_{\bullet}^{0,m}\|_{\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}}$ może przyjmować dowolnie małe wartości gdy $n, m \rightarrow \infty$. ■

Dowód Twierdzenia 5.25. Wniosek 3.5 mówi o tym, że każde rozwiązanie spełniające formułę (3.7) jest ciasno ciągłe. Będziemy zmierzać właśnie do tego, żeby wykazać, że $\bar{\nu}_t^0$ spełnia formułę (3.7).

Najpierw zauważmy, że w każdym kroku aproksymacji współczynniki v_0 oraz m_0 zagadnienia (5.28) spełniają założenia Lematu 3.4. Dlatego rozwiązanie $\nu_t^{0,n}$ liniowego zagadnienia (5.28) spełnia formułę reprezentacyjną (3.7) dla każdego n . Zatem zachodzi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu_t^{0,n}(x) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \left(X_{v_0(k_{\nu_t^{0,n-1}})}(t, \cdot) \right) \exp \left[\int_0^t m_0(k_{\nu_t^{0,n-1}})(s, X_{v_0(k_{\nu_t^{0,n-1}})}(t, \cdot)) ds \right] d\mu_0(x) \end{aligned}$$

dla każdej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$. Chcemy uzasadnić, że $\bar{\nu}_t^0$ także spełnia formułę reprezentacyjną. W tym celu musimy pokazać, że współczynniki $v_0(k_{\bar{\nu}_t^0})$ oraz $m_0(k_{\bar{\nu}_t^0})$ spełniają założenia Lematu 3.4. Fakt, że $m_0(k_{\bar{\nu}_t^0})$ spełnia założenia Lematu 3.4 jest zagwarantowany przez Twierdzenie 5.7. Pozostaje nam jeszcze pokazanie, że $v_0(k_{\bar{\nu}_t^0})$ jest całkowalne względem czasu oraz przyjmuje wartości w $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Z Lematu 5.26 mamy, że $\{\nu_t^{0,n}\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni \mathcal{Z}_ω . Z tego wynika, że $\{v_0(k_{\nu_t^{0,n}})\}_n$ oraz $\{m_0(k_{\nu_t^{0,n}})\}_n$ również są ciągami Cauchy'ego. Z Twierdzenia 5.7 wiemy, że dla dowolnego $\mu \in \mathcal{Z}$ prawdą jest, że $\mu \mapsto u(k_\mu) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Niestety, przestrzeń $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ nie jest przestrzenią Banacha. Jednak każda funkcja klasy \mathcal{C}^1 jest lokalnie Lipschitzowska – każda funkcja ciągła lokalnie ograniczona, ma również lokalnie ograniczony gradient. Z regularności \mathcal{C}^1 wynika lokalna lipschitzowskość, a to nam wystarczy.

Innymi słowy $b(t, \cdot)$ faktycznie przyjmuje wartości w przestrzeni $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ dla $t \in [0, \infty)$. Analogicznie dla $m_0(k_{\bar{\nu}_t^0})$, w takim razie $w(t, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t, \cdot) = m_0(k_{\bar{\nu}_t^0})$. Zatem $\bar{\nu}_t^0$, podobnie jak $\nu_t^{0,n}$, spełnia formułę reprezentacyjną

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\bar{\nu}_t^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X_b(t, \cdot)) e^{\int_0^t w(s, X_b(t, \cdot)) ds} d\mu_0(x).$$

■

Dowód jednoznaczności rozwiązań zagadnienia (5.1), zostanie przeprowadzony analogicznie jak dowód Twierdzenia 3.34 w [DGMCS]. Potrzebować będziemy następującego lematu.

Lemat 5.27. *Niech μ_t będzie rozwiązaniem równania (5.1) i niech spełnione są założenia Twierdzenia 2. Wtedy odwzorowanie $[0, T] \ni t \mapsto \mu_t$ jest absolutnie ciągle w normie $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. To znaczy, że istnieje taka nieujemna funkcja $L_\mu(t) \in L^1(0, T)$, że dla dowolnych chwil czasu s, t , takich że $0 \leq s \leq t \leq T$ zachodzi*

$$\rho_F(\mu_t, \mu_s) \leq \int_0^t L_\mu(\tau) d\tau.$$

Dowód. Rozważmy funkcję testującą postaci $\varphi(x, t) = \varphi_1(x)\varphi_2(t)$, taką że $\varphi_1(x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\varphi_2(t) \in \mathcal{C}^1([0, T])$. Ustalmy $0 < s_1 < s_2 < T$ oraz $\psi(x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Zdefiniujmy ciąg

funkcji testujących, które są przybliżeniem ψ na przedziale $[0, T]$ dla odpowiednio małych wartości ε

$$\varphi_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [0, s_1 - \varepsilon], \\ \psi(x) \left(\frac{t-s_1}{\varepsilon} + 1 \right) & \text{dla } t \in [s_1 - \varepsilon, s_1], \\ \psi(x) & \text{dla } t \in [s_1, s_2], \\ \psi(x) \left(\frac{s_2-t}{\varepsilon} + 1 \right) & \text{dla } t \in [s_2, s_2 + \varepsilon], \\ 0 & \text{dla } t \in [s_2 + \varepsilon, T]. \end{cases} \quad (5.44)$$

Zauważmy, że dla wystarczająco małych wartości ε zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(t, x) d\mu_T(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(0, x) d\mu_0(x) = 0.$$

Ponadto ma miejsce

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi_\varepsilon(t, x) d\mu_t(x) dt &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{s_1-\varepsilon}^{s_1} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_t(x) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{s_2}^{s_2+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_t(x) dt \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_{s_1}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_{s_2}(x), \end{aligned}$$

gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Co wynika z tego, że odwzorowanie $s \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_s(x)$ jest ciągle; patrz Twierdzenie 5.25.

Podstawiając funkcję (5.44) do słabego sformułowania zagadnienia (5.1) (patrz formuła (5.2)), dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_{s_2}(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) d\mu_{s_1}(x) = \int_{s_1}^{s_2} \int_{\mathbb{R}^d} [\nabla_x \cdot \psi(x) v(\mu_t) + \psi(x) m(\nu_t)] d\mu_t(x) dt.$$

Z Twierdzenia 5.12 wiemy, że rozwiązanie zagadnienia (5.1) jest ograniczoną miarą Radona, $\mu_t \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Innymi słowy zachodzi $\sup_{t \in [0, T]} \|\mu_t\|_{TV} < \infty$. Z założeń na v mamy, że

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \psi(x) v(\mu_t) d\mu_t(x) dt \leq \int_{s_1}^{s_2} \|\nabla_x \cdot \psi\|_\infty \sup_\mu \|v(\mu_t)\|_\infty \|\mu_t\|_{TV} dt.$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla współczynnika m , co kończy dowód. ■

Twierdzenie 5.28. *Przy założeniach Twierdzenia 2 (strona 74) zagadnienie (5.1) ma tylko jedno słabe rozwiązanie.*

Dowód. Weźmy dwa rozwiązania $\mu_t^{(1)}, \mu_t^{(2)}$ zagadnienia (5.5). Zauważmy, że $\mu_t^{(1)}$ można traktować jak rozwiązanie liniowego zagadnienia (4.2) ze współczynnikami

$$b^{(1)}(t, x) \equiv N_{v_0}(\mu_t^{(1)})(x), \quad w^{(1)}(t, x) \equiv N_{m_0}(\mu_t^{(1)})(x)$$

i analogicznie dla $\mu_t^{(2)}$ (patrz Uwaga 5.9). Współczynniki $b^{(i)}(t, x), w^{(i)}(t, x)$ spełniają założenia Lematu 3.4 dla $i = 1, 2$. Stąd wiemy, że miary $\mu_t^{(1)}$ oraz $\mu_t^{(2)}$ spełniają formułę

reprezentacyjną. Z kolei z Lematu 3.9 wiemy, że rozwiązania liniowego równania zależą w sposób lipschitzowski od współczynników równania. Mamy

$$\begin{aligned} & \|\mu_t^{(1)} - \mu_t^{(2)}\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq Cte^{Ct} \int_0^t \left(\|N_{v_0}(\mu_s^{(1)}) - N_{v_0}(\mu_s^{(2)})\|_{\infty} + \|N_{m_0}(\mu_s^{(1)}) - N_{m_0}(\mu_s^{(2)})\|_{\infty} \right) ds \end{aligned}$$

dla pewnej stałej C . Z Twierdzenia 5.7 wiemy, że odwzorowanie $\mu \mapsto u(k_\mu)(\cdot)$ jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ dla $u = v_0, m_0$. W takim razie zachodzi

$$\|\mu_t^{(1)} - \mu_t^{(2)}\|_{\mathcal{Z}} \leq Cte^{Ct} \int_0^t \left(\|\nabla N_{v_0}\|_{\infty} \|\mu_s^{(1)} - \mu_s^{(2)}\|_{\mathcal{Z}} + \|\nabla N_{m_0}\|_{\infty} \|\mu_s^{(1)} - \mu_s^{(2)}\|_{\mathcal{Z}} \right) ds.$$

Z Lematu Gronwalla (patrz Lemat B.7 na stronie 121) otrzymujemy, że $\|\mu_t^{(1)} - \mu_t^{(2)}\|_{\mathcal{Z}} = 0$ dla prawie wszystkich chwil czasu t . Z Lematu 5.27 wiemy jednak, że odwzorowanie $t \mapsto \mu_t$ jest absolutnie ciągłe dla $t \in [0, T]$. Oznacza to, że rozwiązania $\mu_t^{(1)}$ oraz $\mu_t^{(2)}$ są równe dla wszystkich chwil czasu $t \in [0, T]$. Rozumowanie można powtórzyć dla dowolnego przedziału $[kT, (k+1)T]$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zatem rozwiązania $\mu_t^{(1)}$ oraz $\mu_t^{(2)}$ są równe dla wszystkich chwil czasu t . ■

Poniżej podsumujemy to, co już wiemy na temat rozwiązań zagadnienia (5.1).

Uwaga 5.29. *Zagadnienie (5.1) ma jednoznaczne rozwiązanie $t \mapsto \mu_t$ w klasie ciasno ciągłych rozwiązań; patrz Twierdzenie 5.25 oraz Twierdzenie 5.28. Ponadto:*

1. *dla każdej ustalonej chwili czasu t , rozwiązanie μ_t jest skończoną miarą Radona; patrz Twierdzenie 5.12;*
2. *rozwiązanie μ_\bullet jest granicą rozwiązań przybliżonych $\{\nu_\bullet^{0,n}\}_n$ w przestrzeni \mathcal{Z}_ω , które są zadane przez schemat aproksymacyjny opisany liniowymi zagadnieniami (5.27) i (5.28)*

Jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (5.1) wynika z Twierdzenia 5.28. Ze Stwierdzenia 5.23 oraz konstrukcji schematu aproksymacyjnego (patrz zagadnienia (5.27) i (5.28)) wynika, że granica $\bar{\nu}_t^0$ ciągu $\{\nu_t^{0,n}\}_n$ w normie \mathcal{Z} spełnia zagadnienie (5.1) w słabym sensie. Z Twierdzenia 5.25 mamy, że odwzorowanie $t \mapsto \bar{\nu}_t^0$ jest ciasno ciągłe. W związku z tym, $\bar{\nu}_t^0$ jest jednoznacznym słabym rozwiązaniem zagadnienia (5.1). O tym, że $\bar{\nu}_t^0$ jest skończoną miarą Radona mówi Twierdzenie 5.12.

5.6 Schemat aproksymacyjny dla zaburzonego równania

Jednoznaczne rozwiązanie zaburzonego równania (5.5) można znaleźć za pomocą schematu bazującego na tym, przedstawionym na stronie 85 – to znaczy aproksymującym rozwiązanie równania niezaburzonego. W tej części przedstawimy ten schemat.

Zagadnienie (5.5) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot \left((v_0(k_{\mu_t^h}) + hv_0(k_{\mu_t^h})) \mu_t^h \right) = \left(m_0(k_{\mu_t^h}) + hm_1(k_{\mu_t^h}) \right) \mu_t^h \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0. \end{cases} \quad (5.45)$$

Zakładamy oczywiście, że współczynniki równania spełniają założenia Twierdzenia 2. Pokażemy, że rozwiązanie μ_t^h można przybliżać za pomocą ciągu $\{\nu_t^{h,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ zdefiniowanego w następujący sposób:

Krok 0. Miary μ_t^0 rozwiązują niezaburzone, nieliniowe zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^0 + \nabla_x \cdot \left(v_0(k_{\mu_t^0}) \mu_t^0 \right) = m_0(k_{\mu_t^0}) \mu_t^0 \\ \mu_0^0 = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (5.46)$$

Wiemy, że istnieje jednoznaczne słabe rozwiązanie zagadnienia (5.46) takie, że μ_t^0 jest skończoną miarą Radona; patrz Wniosek 5.29. Wiemy także, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_t^0 - \nu_t^{0,n}\|_{\mathcal{Z}} = 0$.

Krok 1. Dla $n \geq 1$ miary $\nu_t^{h,n}$ rozwiązują w słabym sensie liniowe zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{h,n} + \nabla_x \cdot \left[\left(v_0(k_{\nu_t^{h,n-1}}) + hv_1(k_{\nu_t^{h,n-1}})) \nu_t^{h,n} \right) \right] = \left[m_0(k_{\nu_t^{h,n-1}}) + hm_1(k_{\nu_t^{h,n-1}}) \right] \nu_t^{h,n} \\ \nu_0^{h,n} = \mu_0, \end{cases} \quad (5.47)$$

gdzie za $\nu_t^{h,0}$ należy przyjąć μ_t^0 . Dla $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ oraz dla dowolnych $\nu_t^{h,n} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ współczynniki

$$v_0(k_{\nu_t^{h,n}}) + hv_1(k_{\nu_t^{h,n}}) \quad \text{oraz} \quad m_0(k_{\nu_t^{h,n}}) + hm_1(k_{\nu_t^{h,n}})$$

spełniają założenia Lematu 3.4. Z Twierdzenia 5.12 mamy, że μ_t^0 jest skończoną miarą Radona. Dla $n = 1$ mamy do czynienia z zagadnieniem liniowym, którego warunek początkowy jest miarą $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, czyli z Lematu 3.4 wiemy, że $\nu_t^{h,1}$ także jest skończoną miarą Radona oraz że $t \mapsto \nu_t^{h,1}$ jest jednoznacznym rozwiązaniem w klasie ciasno ciągłych rozwiązań. Identycznie dla dowolnego $\nu_t^{h,n}$.

Rozważmy zagadnienie, w którym μ_t jest zadane, a szukanym rozwiązaniem jest $\hat{\mu}_t$

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\mu}_t + \nabla_x \cdot \left((v_0(k_{\mu_t}) + hv_1(k_{\mu_t})) \hat{\mu}_t \right) = \left(m_0(k_{\mu_t}) + hm_1(k_{\mu_t}) \right) \hat{\mu}_t \\ \hat{\mu}_{t=0} = \hat{\mu}_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (5.48)$$

Zdefiniujmy operator $\mathcal{T}_h(\mu_\bullet) := \hat{\mu}_\bullet$. Zauważmy, że punkt stały tego odwzorowania jest rozwiązaniem zagadnienia (5.45). Analogicznie do wcześniejszego rozumowania, to znaczy tak jak w przypadku schematu aproksymacyjnego dla niezaburzonego zagadnienia, operator \mathcal{T}_h można zapisać jako złożenie dwóch operatorów $\mathcal{T}_h = B_h \circ S$; patrz (5.35) oraz (5.36). Operator S jest identyczny do operatora rozważanego wcześniej. Operator B_h tak samo jak wcześniej opisuje wpływ przybliżonego rozwiązania na pole wektorowe w kroku $(n+1)$ -szym. Jednak teraz, operator B_h zależy także od parametru h , czyli

$$B_h : \left(t \mapsto \mu_t \right) \mapsto \left(t \mapsto \left(v_0(k_{\mu_t}) + hv_1(k_{\mu_t}), m_0(k_{\mu_t}) + hm_1(k_{\mu_t}) \right) \right).$$

Ze względu na to, że $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ to dziedzina oraz zbiór wartości operatora B_h jest identyczny jak dla operatora B

$$B_h : \mathcal{Z}_\omega^T \rightarrow \mathcal{C}_\omega \left([0, T]; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+1}) \right).$$

Wszystkie rozumowania dotyczące operatora B opisane w Rozdziale 5.4 można uogólnić na operator B_h . W szczególności bezpośrednią konsekwencją Stwierdzenia 5.23 jest następujący wniosek.

Przyjmijmy oznaczenie $\hat{\mathcal{B}}_\omega^{\mu_0} := \{ f \in \mathcal{Z}_\omega : f(0) = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \}$.

Wniosek 5.30. *Operator $\mathcal{T}_h = B_h \circ S : \mathcal{B}_\omega^{\mu_0} \rightarrow \mathcal{B}_\omega^{\mu_0}$ jest kontrakcją dla dowolnej wartości $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, gdzie waga $\hat{\omega}(t)$ zdefiniowana jest przez (5.32). Dodatkowo mniejsza od jedności stała kontrakcji nie zależy od parametru h .*

Innymi słowy, punkt stały odwzorowania \mathcal{T}_h , oznaczmy go przez μ_t^h , ma tę własność, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_t^h - \nu_t^{h,n}\|_{\mathcal{Z}} = 0$ oraz $t \mapsto \mu_t^h$ jest jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia (5.5) w słabym sensie.

5.7 Dowód Twierdzenia 2

Celem tego rozdziału jest udowodnienie Twierdzenia 2 ze strony 74, czyli pokazanie, że rozwiązanie μ_t^h nieliniowego równania transportu (5.5) jest różniczkowalne względem parametru h , zaburzającego współczynniki tego równania; patrz (5.3) oraz (5.4). Innymi słowy, chcemy pokazać, że granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_t^{h+\lambda} - \mu_t^h}{\lambda}$ jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} dla dowolnego ustalonego $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Jeżeli ta granica istnieje, to jest to oczywiście pochodną rozwiązania równania (5.5) względem h w odpowiednim punkcie. Postępuwać będziemy zgodnie ze szkicem dowodu przedstawionym w Rozdziale 5.1.

Na początek przypomnijmy parę oznaczeń wprowadzonych we wcześniejszej części tego rozdziału, którymi będziemy tutaj nagminnie żonglować

- μ_t^0 – rozwiązanie nieliniowego, niezaburzonego zagadnienia (5.26);
- μ_t^h – rozwiązanie nieliniowego, zaburzonego zagadnienia (5.5);
- $\nu_t^{h,k}$ – rozwiązanie przybliżone do μ_t^h , uzyskane z rozwiązania (5.47) w k -tym kroku schematu aproksymacyjnego;
- μ_\bullet – odwzorowanie $t \mapsto \mu_t : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Przypomnijmy jeszcze, że norma $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}_\omega} := \sup_{t \geq 0} \|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$, gdzie waga $\hat{\omega}(t)$ jest zdefiniowana przez (5.32).

Krok 1. W pierwszej kolejności rozważamy różniczkowalność w punkcie $h = 0$, czyli badamy granicę

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_t^\lambda - \mu_t^0}{\lambda}. \quad (5.49)$$

Niech miara $\nu_t^{\lambda,n}$ będzie rozwiązaniem liniowego równania transportu, uzyskanym w n -tym kroku aproksymacji; patrz (5.46) i (5.47). Ze Stwierdzenia 5.30 wiemy, że zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_t^\lambda - \nu_t^{\lambda,n}\|_{\mathcal{Z}} = 0$. W takim razie zamiast granicy (5.49) możemy rozważyć

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_t^{\lambda,n} - \mu_t^0}{\lambda} \right).$$

Krok 2. Chcemy uzasadnić, że kolejność granic można zamienić. W tym celu skorzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.31. *Niech E będzie podzbiorem w przestrzeni metrycznej, λ_0 będzie punktem skupienia zbioru E oraz niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeżeli funkcje $f_n, f : E \rightarrow Y$ są takie, że f_n zbiega jednostajnie do f na E oraz granica*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_n(\lambda) = A_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

istnieje, wtedy ciąg A_n jest zbieżny w Y oraz $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Innymi słowy można zamienić kolejność granic

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_n(\lambda).$$

Powyższy lemat jest uogólnieniem Twierdzenia 7.11 z książki [Rud76, strona 149]; oryginalne sformułowanie patrz Twierdzenie B.13. Dowód powyższego twierdzenia przebiega tak samo jak w [Rud76], więc zostanie pominięty. W naszym przypadku $E = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$; zbiór $Y = \mathcal{Z}_{\hat{\omega}}$; punkt skupienia $\lambda_0 = 0$;

$$f_n(\lambda) := \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \quad \text{oraz} \quad f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda) = \frac{\mu_{\bullet}^{\lambda} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda}.$$

Dla każdego n i dla dowolnego ustalonego $t \in [0, +\infty)$ funkcja $f_n(\lambda)$ przyjmuje wartości w $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$; patrz Twierdzenie 5.12. Przez $f_n^t(\lambda)$ oznaczmy wartość funkcji f_n dla ustalonego t .

Żeby móc zamienić kolejność granic (zastosować Twierdzenie 5.31), musimy pokazać, że f_n zbiega jednostajnie do f na E , czyli badamy jednostajną zbieżność ciągu $\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n$ do $\frac{\mu_{\bullet}^{\lambda} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda}$. Chcemy pokazać, że $\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego, wtedy jako ciąg elementów z przestrzeni zupełnej $\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}$ jego granica również będzie należała do $\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}$. Ze zbieżności schematu aproksymacyjnego tą granicą będzie $\frac{\mu_{\bullet}^{\lambda} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda}$. Żeby pokazać, że $\left\| \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} - \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, m} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}_{\hat{\omega}}}$ przyjmuje dowolnie małe wartości, gdy $n, m \rightarrow \infty$, potrzebować będziemy parę dodatkowych oszacowań.

Stwierdzenie 5.32. *Niech μ_t^0 będzie rozwiązaniem zagadnienia (5.46) oraz niech $\nu_t^{\lambda, 1}$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (5.47) dla $n = 1$. Niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy granica*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda}$$

jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} . Ponadto zachodzi oszacowanie

$$\left\| \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq C \left\| \partial_{\lambda} \nu_t^{\lambda, 1} |_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}}. \quad (5.50)$$

Dowód. Miara μ_t^0 jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^0 + \nabla_x \cdot \left(v_0(k_{\mu_t^0}) \mu_t^0 \right) = m_0(k_{\mu_t^0}) \mu_t^0 \\ \mu_0^0 = \mu_0, \end{cases} \quad (5.51)$$

a miara $\nu_t^{\lambda, 1}$ rozwiązaniem

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda, 1} + \nabla_x \cdot \left[\left(v_0(k_{\mu_t^0}) + \lambda v_0(k_{\mu_t^0}) \right) \nu_t^{\lambda, 1} \right] = \left[m_0(k_{\mu_t^0}) + \lambda m_1(k_{\mu_t^0}) \right] \nu_t^{\lambda, 1} \\ \nu_0^{\lambda, 1} = \mu_0; \end{cases} \quad (5.52)$$

patrz zagadnienie (5.46) oraz (5.47). Rozwiązanie μ_t^0 można uzyskać za pomocą schematu aproksymacyjnego przedstawionego na stronie 85; patrz (5.27) oraz (5.28). Wtedy współczynniki $v_0(k_{\mu_t^0})$, $v_1(k_{\mu_t^0})$, $m_0(k_{\mu_t^0})$, $m_1(k_{\mu_t^0})$ w powyższych zagadnieniach są zadane, to znaczy zagadnienie (5.52) można traktować jak liniowe

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^0 + \nabla_x \cdot (\bar{b}_0(t, x) \mu_t^0) = \bar{w}_0(t, x) \mu_t^0 \\ \mu_0^0 = \mu_0, \end{cases} \quad (5.51')$$

i podobnie (5.51) można przepisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,1} + \nabla_x \cdot ((\bar{b}_0(t, x) + \lambda \bar{b}_1(t, x)) \nu_t^{\lambda,1}) = (\bar{w}_0(t, x) + \lambda \bar{w}_1(t, x)) \nu_t^{\lambda,1} \\ \nu_0^{\lambda,1} = \mu_0, \end{cases} \quad (5.52')$$

gdzie $\bar{b}_i(t, x) := v_i(k_{\mu_t^0})$ oraz $\bar{w}_i(t, x) := m_i(k_{\mu_t^0})$ dla $i = 0, 1$. Z Twierdzenia 5.7 wiemy, że te współczynniki spełniają założenia Twierdzenia 1 ze strony 67. W takim razie granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda,1} - \mu_t^0}{\lambda}$ to nic innego niż pochodna rozwiązania zagadnienia liniowego (4.5) z zaburzeniem współczynników (4.3) oraz (4.4). Z Twierdzenia 1 ta pochodna istnieje i jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} , czyli zachodzi oszacowanie (5.50). ■

Uwaga 5.33. Powyżej zostało pokazane, że $\nu_t^{\lambda,1}$ to nic innego niż rozwiązanie liniowego równania transportu z dokładnie takim zaburzeniem, a jakim mowa w Twierdzeniu 1 ze strony 67. Stąd z Twierdzenia 1 wiemy, że $\|\partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1}\|_{\mathcal{Z}}$ jest skończona.

Stwierdzenie 5.34. Rozważmy schemat aproksymacyjny zadany zagadnieniami (5.46) oraz (5.47). Niech $\lambda \in I$, gdzie I jest ograniczonym przedziałem, oraz niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy dla każdego ustalonego t oraz dowolnego n zachodzi oszacowanie

$$\left\| \frac{\nu_t^{\lambda, n+1} - \nu_t^{\lambda, n}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq C \cdot c^n \|\partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1}|_{\lambda=0}\|_{\mathcal{Z}},$$

gdzie stała $c < 1$.

Dowód. Na początku przypomnijmy, że operator $\mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n})(t) = \nu_t^{\lambda, n+1}$ jest kontrakcją; patrz Stwierdzenie 5.23 i Wniosek 5.30. W takim razie zachodzi

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, n+1} - \nu_t^{\lambda, n}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq \left\| \frac{\mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n})(t) - \mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-1})(t)}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq c \cdot \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \nu_t^{\lambda, n-1}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &= c \left\| \frac{\mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-1})(t) - \mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-2})(t)}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq c^2 \left\| \frac{\mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-2})(t) - \mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-3})(t)}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq c^3 \left\| \frac{\mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-3})(t) - \mathcal{T}_h(\nu_{\bullet}^{\lambda, n-4})(t)}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \dots \leq c^n \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

gdzie stała $c < 1$. Korzystając ze Stwierdzenia 5.32 mamy $\left\| \frac{\nu_t^{\lambda, n+1} - \nu_t^{\lambda, n}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq C \cdot c^n \left\| \partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1} \Big|_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}}$. Ponieważ wartości parametru λ są ograniczone, to stałą C możemy dobrać w taki sposób, żeby nie zależała od parametru λ . ■

Uzasadnimy teraz, że $\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego, co pozwoli nam wreszcie zastosować Twierdzenie 5.31 (zmienić kolejność granic).

Lemat 5.35. *Rozważmy schemat aproksymacyjny zadany zagadnieniami (5.46) oraz (5.47), oraz niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy ciąg $\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n$ zbiega jednostajnie do $\frac{\mu_{\bullet}^{\lambda} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda}$ w przestrzeni $\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}$.*

Dowód. Pokażemy, że ciąg $\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego. Przyjmijmy, że $n \geq m$. Wprost z definicji normy $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}}$ (patrz (5.30)), mamy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}} &= \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} - \frac{\nu_t^{\lambda, m} - \mu_t^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} = \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \sum_{k=m+1}^n \underbrace{\left\| \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}}}_{\text{(ze Stwierdzenia 5.34)}} \leq \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \sum_{k=m+1}^n C \cdot c^k \left\| \partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1} \Big|_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &= C \cdot \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1} \Big|_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}} \cdot \sum_{k=m+1}^n c^k \\ &= C \cdot \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1} \Big|_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}} \cdot c^{m+1} \left(\frac{1 - c^{n-m}}{1 - c} \right). \end{aligned} \tag{5.54}$$

Ponieważ wartość $\sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1} \Big|_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}}$ jest ograniczona oraz $c < 1$ (patrz Lemat 5.34 i Uwaga 5.33), to otrzymujemy wreszcie, że

$$C \cdot \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \partial_\lambda \nu_t^{\lambda, 1} \Big|_{\lambda=0} \right\|_{\mathcal{Z}} \cdot c^{m+1} \left(\frac{1 - c^{n-m}}{1 - c} \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

czyli $\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}$. Ponieważ przestrzeń $\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}$ jest zupełna, to granica tego ciągu również jest elementem tej przestrzeni.

Ze zbieżności schematów aproksymacyjnych wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_t^\lambda - \nu_t^{\lambda, n}\|_{\mathcal{Z}} = 0$, czyli dla każdego ustalonego t granicą ciągu $\left\{ \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right\}_n$ w przestrzeni \mathcal{Z} jest $\frac{\mu_t^\lambda - \mu_t^0}{\lambda}$. Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\left\{ \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\}_n \text{ zbiega jednostajnie do } \frac{\mu_{\bullet}^\lambda - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \text{ w przestrzeni } \mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}. \quad \blacksquare$$

Mamy zagwarantowane, że spełnione są założenia Twierdzenia 5.31 i kolejność granic można zamienić, to znaczy zamiast rozważać

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right) \quad \text{możemy wziąć} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right).$$

Krok 3. Zajmiemy się badaniem istnienia granicy $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda}$.

Lemat 5.36. *Rozważmy schemat aproksymacyjny zadany zagadnieniami (5.46) oraz (5.47) oraz niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda}$ istnieje i jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} .*

Do udowodnienia powyższego lematu, potrzebne będzie następujące Stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.37. *Rozważmy schemat aproksymacyjny zadany zagadnieniami (5.46) oraz (5.47) oraz niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy dla dowolnego $k \geq 2$ granica*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda}$$

jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} .

Dowód. Pokażemy to przez indukcję. Wprowadźmy oznaczenie $\bar{u}^\lambda(\cdot) := u_0(\cdot) + \lambda u_1(\cdot)$ dla $u \in \{v, m\}$. Miara $\nu_t^{\lambda, k}$ jest rozwiązaniem liniowego zagadnienia

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda, k} + \nabla_x \cdot (\bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-1}}) \nu_t^{\lambda, k}) = \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-1}}) \nu_t^{\lambda, k} \\ \nu_{t=0}^{\lambda, k} = \mu_0, \end{cases} \quad (5.55)$$

a miara $\nu_t^{\lambda, k-1}$ rozwiązaniem liniowego zagadnienia

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda, k-1} + \nabla_x \cdot (\bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-2}}) \nu_t^{\lambda, k-1}) = \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-2}}) \nu_t^{\lambda, k-1} \\ \nu_{t=0}^{\lambda, k-1} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.56)$$

W zagadnieniu (5.55) rozwińmy współczynniki $\bar{u}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-1}})$ w szereg Taylora w punkcie $\nu_t^{\lambda, k-2}$ dla $u \in \{\bar{v}, \bar{m}\}$. Równanie (5.55) przyjmuje wtedy postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda, k} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-2}}) + \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-2}}) (\nu_t^{\lambda, k-1} - \nu_t^{\lambda, k-2}) + o(\|\nu_t^{\lambda, k-1} - \nu_t^{\lambda, k-2}\|_{\mathcal{Z}}) \right) \nu_t^{\lambda, k} \right] \\ = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-2}}) + \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda, k-2}}) (\nu_t^{\lambda, k-1} - \nu_t^{\lambda, k-2}) + o(\|\nu_t^{\lambda, k-1} - \nu_t^{\lambda, k-2}\|_{\mathcal{Z}}) \right] \nu_t^{\lambda, k} \\ \nu_{t=0}^{\lambda, k} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.55')$$

Krok S1. Dla $k = 2$ zagadnienie (5.55') ma następującą formę

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda, 2} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}) + \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}) (\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0) + o(\|\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0\|_{\mathcal{Z}}) \right) \nu_t^{\lambda, 2} \right] = \\ = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}) + \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}) (\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0) + o(\|\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0\|_{\mathcal{Z}}) \right] \nu_t^{\lambda, 2} \\ \nu_{t=0}^{\lambda, 2} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.57)$$

Ponieważ $\nu_t^{\lambda,1} - \mu_t^0$ można zapisać jako $\frac{\nu_t^{\lambda,1} - \mu_t^0}{\lambda} \cdot \lambda$, to korzystając ze Stwierdzenia 5.32 otrzymujemy, że

$$\nu_t^{\lambda,1} - \mu_t^0 = \frac{\nu_t^{\lambda,1} - \mu_t^0}{\lambda} \cdot \lambda \leq \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1} \cdot \lambda. \quad (5.58)$$

W takim razie zagadnienie (5.57) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,2} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}) + \lambda \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}) \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1} + o(|\lambda|) \right) \nu_t^{\lambda,2} \right] = \\ \quad = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}) + \lambda \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}) \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1} + o(|\lambda|) \right] \nu_t^{\lambda,2} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,2} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.57')$$

Zapiszmy jeszcze równanie (5.56) dla $k = 2$

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,1} + \nabla_x \cdot \left(\bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}) \nu_t^{\lambda,1} \right) = \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}) \nu_t^{\lambda,1} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,1} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.59)$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} b_{0,2}(t, x) &:= \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}) & b_{1,2}(t, x) &:= \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1} \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^0}), \\ w_{0,2}(t, x) &:= \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}) & w_{1,2}(t, x) &:= \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1} \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^0}). \end{aligned}$$

Druga liczba w indeksie dolnym wskazuje jaką wartość k obecnie przyjmujemy. Ze Stwierdzenia 5.50 wiemy, że wartość $\|\partial_\lambda \nu_t^{\lambda,1}\|_{\mathcal{Z}}$ jest ograniczona. Wiemy, że dla $i = 0, 1$ współczynniki $b_{i,2}$ oraz $w_{i,2}$ spełniają założenia Twierdzenia 5.5. Korzystając z powyższych oznaczeń, zagadnienie (5.59) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,1} + \nabla_x \cdot \left(b_{0,2}(t, x) \nu_t^{\lambda,1} \right) = w_{0,2}(t, x) \nu_t^{\lambda,1} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,1} = \mu_0, \end{cases} \quad (5.59')$$

a zagadnienie (5.57') ma postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,2} + \nabla_x \cdot \left[\left(b_{0,2}(t, x) + \lambda b_{1,2}(t, x) + o(|\lambda|) \right) \nu_t^{\lambda,2} \right] = \left[w_{0,2}(t, x) + \lambda w_{1,2}(t, x) + o(|\lambda|) \right] \nu_t^{\lambda,2} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,2} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.57'')$$

W takim razie (5.57'') to nic innego niż (5.59') z zaburzeniem

$$b_{0,2}(t, x) + h \cdot b_{1,2}(t, x) + o(|h|) \quad \text{oraz} \quad w_{0,2}(t, x) + h \cdot w_{1,2}(t, x) + o(|h|)$$

Z Twierdzenia 5.5 wiemy, że $\nu_t^{\lambda,2}$ jest różniczkowalne względem takiego zaburzenia, czyli granica

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1}}{\lambda} \quad \text{jest elementem przestrzeni } \mathcal{Z}. \quad (5.60)$$

Krok S2. Dla $k = 3$ zagadnienie (5.55') ma następującą postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,3} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) + \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) (\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1}) + o(\|\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1}\|_{\mathcal{Z}}) \right) \nu_t^{\lambda,3} \right] = \\ \quad = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) + \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) (\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1}) + o(\|\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1}\|_{\mathcal{Z}}) \right] \nu_t^{\lambda,3} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,3} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.61)$$

Podobnie jak wcześniej (patrz 5.58) możemy szacować

$$\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1} = \underbrace{\frac{\nu_t^{\lambda,2} - \nu_t^{\lambda,1}}{\lambda}}_{(z \text{ (5.60)})} \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,2}. \quad (5.62)$$

W takim razie zagadnienie (5.61) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,3} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) + \lambda \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,2} + o(|\lambda|) \right) \nu_t^{\lambda,3} \right] = \\ \quad = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) + \lambda \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,2} + o(|\lambda|) \right] \nu_t^{\lambda,3} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,3} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.61')$$

Zapiszmy także równanie (5.56) dla $k = 3$

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,2} + \nabla_x \cdot \left(\bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) \nu_t^{\lambda,2} \right) = \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) \nu_t^{\lambda,2} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,2} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.63)$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} b_{0,3}(t, x) &:= \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) & b_{1,3}(t, x) &:= \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,2} \bar{v}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) \\ w_{0,3}(t, x) &:= \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}) & w_{1,3}(t, x) &:= \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,2} \bar{m}^\lambda(k_{\mu_t^{\lambda,1}}). \end{aligned}$$

Z (5.60) wiemy, że wartość $\|\partial_\lambda \nu_t^{\lambda,2}\|_{\mathcal{Z}}$ jest ograniczona. Wiemy także, że dla $i = 0, 1$ współczynniki $b_{i,3}$ oraz $w_{i,3}$ spełniają założenia Twierdzenia 5.5. Korzystając z powyższych oznaczeń, zagadnienie (5.63) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,2} + \nabla_x \cdot \left(b_{0,3}(t, x) \nu_t^{\lambda,2} \right) = w_{0,3}(t, x) \nu_t^{\lambda,2} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,2} = \mu_0, \end{cases} \quad (5.63')$$

a zagadnienie (5.61') ma postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,3} + \nabla_x \cdot \left[\left(b_{0,3}(t, x) + \lambda b_{1,3}(t, x) + o(|\lambda|) \right) \nu_t^{\lambda,3} \right] = \left[w_{0,3}(t, x) + \lambda w_{1,3}(t, x) + o(|\lambda|) \right] \nu_t^{\lambda,3} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,3} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.61'')$$

W takim razie (5.61'') to nic innego niż (5.63') z zaburzeniem

$$b_{0,3}(t, x) + h \cdot b_{1,3}(t, x) + o(|h|) \quad \text{oraz} \quad w_{0,3}(t, x) + h \cdot w_{1,3}(t, x) + o(|h|)$$

Z Twierdzenia 5.5 mamy, że $\nu_t^{\lambda,3}$ jest różniczkowalne względem takiego zaburzenia, czyli granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda,3} - \nu_t^{\lambda,2}}{\lambda}$ jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} .

Krok S3. Załóżmy, że dla pewnego l prawdą jest, że

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1}}{\lambda} \in \mathcal{Z}. \quad (5.64)$$

Wtedy dla $k = l + 1$ zagadnienie (5.55') ma następującą postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,l+1} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) + \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}})(\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1}) + o(\|\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1}\|_{\mathcal{Z}}) \right) \nu_t^{\lambda,l+1} \right] = \\ \quad = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) + \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}})(\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1}) + o(\|\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1}\|_{\mathcal{Z}}) \right] \nu_t^{\lambda,l+1} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,l+1} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.65)$$

Analogicznie do (5.58) oraz (5.62), z założenia (5.64) mamy

$$\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1} = \frac{\nu_t^{\lambda,l} - \nu_t^{\lambda,l-1}}{\lambda} \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,l}.$$

W takim razie zagadnienie (5.65) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,l+1} + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) + \lambda \nabla_\nu \bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,l} + o(|\lambda|) \right) \nu_t^{\lambda,l+1} \right] = \\ \quad = \left[\bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) + \lambda \nabla_\nu \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,l} + o(|\lambda|) \right] \nu_t^{\lambda,l+1} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,l+1} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.65')$$

Zapiszmy jeszcze równanie (5.56) dla $k = l$

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,l} + \nabla_x \cdot \left(\bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) \nu_t^{\lambda,l} \right) = \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) \nu_t^{\lambda,l} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,l} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.66)$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} b_{0,l+1}(t, x) &:= \bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) & b_{1,l+1}(t, x) &:= \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,l} \bar{v}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) \\ w_{0,l+1}(t, x) &:= \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}) & w_{1,l+1}(t, x) &:= \partial_\lambda \nu_t^{\lambda,l} \bar{m}^\lambda(k_{\nu_t^{\lambda,l-1}}). \end{aligned}$$

Analogicznie jak w krokach **S1** i **S2**: z założenia indukcyjnego wiemy, że wartość $\|\partial_\lambda \nu_t^{\lambda,l}\|_{\mathcal{Z}}$ jest ograniczona. W takim razie wiemy także, że dla $i = 0, 1$ współczynniki $b_{i,l+1}$ oraz $w_{i,l+1}$ spełniają założenia Twierdzenia 5.5. Korzystając z powyższych oznaczeń, zagadnienie (5.66) można zapisać następująco

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda,l} + \nabla_x \cdot \left(b_{0,l+1}(t, x) \nu_t^{\lambda,l} \right) = w_{0,l+1}(t, x) \nu_t^{\lambda,l} \\ \nu_{t=0}^{\lambda,l} = \mu_0, \end{cases} \quad (5.66')$$

a zagadnienie (5.65') ma postać

$$\begin{cases} \partial_t \nu_t^{\lambda, l+1} + \nabla_x \cdot \left[(b_{0, l+1}(t, x) + \lambda b_{1, l+1}(t, x) + o(|\lambda|)) \nu_t^{\lambda, l+1} \right] = \\ \quad = [w_{0, l+1}(t, x) + \lambda w_{1, l+1}(t, x) + o(|\lambda|)] \nu_t^{\lambda, l+1} \\ \nu_{t=0}^{\lambda, l+1} = \mu_0. \end{cases} \quad (5.65'')$$

Oznacza to, że zagadnienie (5.65'') to nic innego niż (5.66') z następującym zaburzeniem we współczynnikach równania

$$b_{0, l+1}(t, x) + \lambda \cdot b_{1, l+1}(t, x) + o(|\lambda|) \quad \text{oraz} \quad w_{0, l+1}(t, x) + \lambda \cdot w_{1, l+1}(t, x) + o(|\lambda|).$$

Z Twierdzenia 5.5 mamy, że $\nu_t^{\lambda, l+1}$ jest różniczkowalne względem takiego zaburzenia, czyli granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, l+1} - \nu_t^{\lambda, l}}{\lambda} \in \mathcal{Z}$. Ostatecznie otrzymaliśmy, że $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda} \in \mathcal{Z}$ dla każdej wartości $k \geq 2$. ■

Wreszcie możemy pokazać, że granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \in \mathcal{Z}$.

Dowód Lematu 5.36. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda} + \sum_{k=2}^n \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda} \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda} + \sum_{k=2}^n \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Ze Stwierdzenia 5.32 wiemy, że granica $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda}$ jest elementem przestrzeni \mathcal{Z} . Ze Stwierdzenia 5.37 wiemy, że $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, k} - \nu_t^{\lambda, k-1}}{\lambda} \in \mathcal{Z}$ dla każdego $k \geq 2$. Stąd granica (5.67) także jest elementem \mathcal{Z} , jako skończona suma elementów z przestrzeni \mathcal{Z} . ■

Krok 4. Teraz przechodzimy do zbadania granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right)$.

Twierdzenie 5.38. *Rozważmy schemat aproksymacyjny zadany zagadnieniami (5.46) i (5.47) oraz niech współczynniki tych zagadnień spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Wtedy granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right)$$

istnieje i jest elementem przestrzeni $\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}$.

Innymi słowy: odwzorowanie $h \mapsto \mu_{\bullet}^h$ jest klasy $\mathcal{C}^1\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \mathcal{C}_{\widehat{\omega}}([0, \infty); \mathcal{Z})\right)$ w punkcie $h = 0$ oraz $\partial_h \mu_t^h \in \mathcal{Z}$.

Dowód. Identycznie jak w oszacowaniu (5.54) mamy

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, n} - \mu_t^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \right) \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{\omega}(t) \sum_{i=0}^n c^i \cdot \left\| \frac{\nu_t^{\lambda, 1} - \mu_t^0}{\lambda} \right\|_{\mathcal{Z}} \right) \leq C \cdot \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \partial_h \nu_t^{h, 1} \Big|_{h=0} \right\|_{\mathcal{Z}} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c^i}_{= \frac{1}{1-c}} \\
& = \frac{C}{1-c} \cdot \sup_{t \geq 0} \widehat{\omega}(t) \left\| \partial_h \nu_t^{h, 1} \Big|_{h=0} \right\|_{\mathcal{Z}}.
\end{aligned}$$

W takim razie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\nu_{\bullet}^{\lambda, n} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_{\bullet}^{\lambda} - \mu_{\bullet}^0}{\lambda}$ jest elementem przestrzeni $\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}$. Tym samym uzyskaliśmy różniczkowalność rozwiązań nieliniowego równania (5.5) względem parametru zaburzającego w punkcie 0. ■

Krok 5. Dokładnie te same argumenty zadziałają dla parametru $h \neq 0$.

Twierdzenie 5.39. Niech μ_t^h będzie rozwiązaniem zagadnienia (5.5), którego współczynniki spełniają założenia Twierdzenia 2 ze strony 74. Granica

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_{\bullet}^{h+\lambda} - \mu_{\bullet}^h}{\lambda}$$

istnieje i jest elementem przestrzeni $\mathcal{Z}_{\widehat{\omega}}$.

Dowód. Dla ustalonego t rozważmy granicę $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_t^{h+\lambda} - \mu_t^h}{\lambda}$. Dla ustalonej wartości parametru h można zapisać

$$\begin{aligned}
u_0(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) + (h + \lambda)u_1(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) &= \left(u_0(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) + hu_1(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) \right) + \lambda u_1(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) \\
&=: \bar{u}_0^h(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) + \lambda u_1(k_{\mu_t^{h+\lambda}})
\end{aligned} \tag{5.68}$$

dla $u \in \{v, m\}$. W takim razie zamiast rozwiązywać zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^{h+\lambda} + \nabla_x \cdot \left[\left(v_0(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) + (h + \lambda)v_1(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) \right) \mu_t^{h+\lambda} \right] = \\ \quad = \left[m_0(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) + (h + \lambda)m_1(k_{\mu_t^{h+\lambda}}) \right] \mu_t^{h+\lambda} \\ \mu_0^{h+\lambda} = \mu_0, \end{cases}$$

można zająć się problemem równoważnym

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\mu}_t^\lambda + \nabla_x \cdot \left[\left(\bar{v}_0^h(k_{\bar{\mu}_t^\lambda}) + \lambda v_1(k_{\bar{\mu}_t^\lambda}) \right) \bar{\mu}_t^\lambda \right] = \left[\bar{m}_0^h(k_{\bar{\mu}_t^\lambda}) + \lambda m_1(k_{\bar{\mu}_t^\lambda}) \right] \bar{\mu}_t^\lambda \\ \bar{\mu}_0^\lambda = \mu_0, \end{cases}$$

gdzie $\bar{\mu}_t^\lambda := \mu_t^{h+\lambda}$. Tym samym problem różniczkowości w punkcie $h \neq 0$ sprowadziliśmy do różniczkowości w $h = 0$, to znaczy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu_t^{h+\lambda} - \mu_t^h}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\bar{\mu}_t^\lambda - \bar{\mu}_t^0}{\lambda}.$$

Różniczkowość w punkcie $h = 0$ jest zapewniona przez Twierdzenie 5.38. ■

To ostatecznie kończy dowód Twierdzenia 2: słabe rozwiązania nieliniowego zagadnienia (5.5) są różniczkowalne względem parametru zaburzającego h , dla $h \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Rozdział 6

Zastosowania

Niniejszy rozdział poświęcony jest omówieniu potencjalnych zastosowań wyników tej rozprawy. Najpierw omówimy, wspomniane już, modele populacji ze strukturą, a następnie zastosowania w kontekście teorii optymalizacji.

Jak zostało wspomniane we wstępie, jeden z pierwszych modeli populacji ze strukturą został wprowadzony przez Andersona Gray’a McKendricka w pracy „Applications of mathematics to medical problems” z 1926 roku. Model (2.36) jest zbliżony do tego wprowadzonego przez A. G. McKendricka; patrz Przykład 5.

Model (2.36) doczekał się wielu rozszerzeń i modyfikacji bazujących na równaniu transportu. Opisywaną cechą populacji zamiast wieku może być rozmiar komórek [AR04], czy ich stopień różnicowania się [DMCPZ11]. Naturalnie można rozważać również wiele cech populacji (*modele populacji z wielowymiarową strukturą* zostały wprowadzone w [SS67]) lub analizować dwie oddziałujące ze sobą populacje. Model (2.36) cieszył się szerokim zainteresowaniem badaczy między innymi ze względu na możliwość modelowania populacji ludzkiej z uwzględnieniem na przykład: poziomu edukacji czy opieki medycznej. Jest także stosowany w epidemiologii [DH88, Gar02, MM07].

Koncepcja modelowania populacji za pomocą miar zrodziła się w latach 80-tych w pracy [MD86]. Jednak jeszcze przez długi czas nie rozwinęła się odpowiednia teoria matematyczna. Jak już nakreśliliśmy w Rozdziale 1 problematyczny był nawet dobór odpowiednich norm. Przypomnijmy: weźmy równanie $\partial\mu_t + \partial_x\mu_t = 0$ z warunkiem początkowym $\mu_0 = \delta_0$. W Przykładzie 14 pokazaliśmy, że rozwiązanie równania, czyli δ_t , nie jest ciągłe w normie $\|\cdot\|_{TV}$: $\|\delta_{t_1} - \delta_{t_2}\|_{TV} = 2$ dla $t_1 \neq t_2$. Metryka Wassersteina (koniec lat 60-tych) radzi sobie z powyższym problemem, patrz Przykład 13. Jednakże równania opisujące populację często nie są jednorodne (niezerowa prawa strona oznacza, że całkowita liczba żywych osobników może zmieniać się w czasie) i dla takiego przypadku metryka Wassersteina zawodzi; patrz Uwaga 2.34. Z tym problemem radzi sobie *uogólniona metryka Wassersteina*.

Obecnie, równanie transportu w przestaniach skończonych miar Radona stosuje się między innymi do modelowania populacji ze strukturą [Thi03, GLM10, GM10, Uli12, Uli13, CC04]. W modelach populacji często zamiast przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ rozważa się $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ – liczebność osobników o danej cesze nie może być ujemna – lub $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+)$. Często również rozważa się także tylko skończony przedział czasu $[0, T]$, co oczywiście ułatwia analizę.

Lista publikacji, w których rozważa się zagadnienia optymalizacyjne z równaniem transportu stale rośnie [BGSW13, BFRS17, ACFK17, BDT17, AHP18, BR19]. Poniżej przedstawimy możliwe zastosowania wyników z Rozdziału 4 oraz 5 w kontekście właśnie teorii optymalizacji.

Przykład 15 (Optymalizacja w modelu populacji ze strukturą). *Rozważmy następujący model*

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \partial_x (b(t, x, \mu_t^h; h) \mu_t^h) = -w(t, x, \mu_t^h; h) \mu_t^h \\ b(t, 0, \mu_t^h; h) D_\lambda \mu_t(0) = \int_0^\infty \beta(t, x; h) d\mu_t^h(x) \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_+), \end{cases} \quad (6.1)$$

gdzie przez $D_\lambda \mu_t(0)$ oznaczamy pochodną Radona-Nikodyma μ_t (patrz Twierdzenie B.12) względem miary Lebesgue'a λ wyznaczaną w zerze. Przyjmujemy, że $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}_+$ oraz $b > 0$, $w > 0$, $\beta \geq 0$. Nadajmy zagadnieniu (6.1) interpretację, wspomnianą już wielokrotnie, populacji ze strukturą (patrz Przykład 5): t to czas, x wiek osobników a parametr h odpowiada za rządowy program polityki prorodzinnej – może to być na przykład stały regularny dodatek dla rodziny na każde dziecko, aż do uzyskania przez nie określonego wieku. Cel programu jest taki, żeby w danym kraju rodziło się więcej dzieci, co ma się przełożyć na poprawę gospodarki. Parametr sterujący h opisuje wpływ programu rządowego na chęć do prokreacji $\beta(t, x; h)$, co ma bezpośrednie przełożenie na liczbę urodzeń. W dłuższej perspektywie program powinien mieć pozytywny wpływ na gospodarkę, i jako efekt uboczny, zmniejszyć śmiertelność: w lepiej rozwiniętych krajach ludzie przeciętnie żyją dłużej.

Jak już wspomnieliśmy celem programu jest poprawa gospodarki, co w uproszczeniu można mierzyć różnicą wpływów do budżetu państwa i tego co zostało wydane na program polityki prorodzinnej. Chodzi o zmaksymalizowanie wartości funkcjonału

$$\mathcal{J}(h) := \int_0^\infty K(t, \mu_t^h; h) dt, \quad (6.2)$$

czyli o znalezienie takiej wartości h^* , żeby $\mathcal{J}(h^*) = \max_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{J}(h)$.

Strategie rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (czyli znajdowania h^* maksymalizującego $\mathcal{J}(h)$) można podzielić zasadniczo na dwie kategorie. W przypadku, gdy funkcjonał $\mathcal{J}(h)$ nie jest różniczkowalny względem parametru sterującego h , należy wykorzystać metody *analizy niegładkiej* (ang. non-smooth analysis), której poświęconej jest wiele podręczników, na przykład [Sch07]. Druga opcja to metody wymagające istotnej regularności rozwiązań, na przykład różniczkowalności względem parametru sterującego. Różnica jest zasadnicza. Metody optymalizacji zagadnień różniczkowalnych są dużo bardziej efektywne. W przypadku metod analizy niegładkiej algorytmy działają wolniej, często w ogóle nie można znaleźć rozwiązania optymalnego.

Przykład 16 (Optymalizacja sprzedaży). *W [BR19] autorzy rozważają następujący problem optymalizacyjny*

$$\begin{cases} \max_{u \in \mathcal{U}} \left[\int_0^T L(\mu_t, u(t, \cdot)) dt + \psi(\mu_T) \right] \\ \begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot \left((v(t, \mu_t, \cdot) + u(t, \cdot)) \mu_t \right) = 0 \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d), \end{cases} \end{cases} \quad (6.3)$$

gdzie $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ to podzbiór $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ złożony z miar o zwartym nośniku. Miara μ_t tym razem opisuje znormalizowaną cenę produktu, a $u(t, x)$ wielkość sprzedaży w chwili t produktów o cesze x . Równanie $\partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot \left((v(t, \mu_t, \cdot) + u(t, \cdot)) \mu_t \right) = 0$ opisuje zachowanie ceny tego produktu na rynku, gdzie v opisuje pewne własności tego rynku. Zadanie polega na maksymalizowaniu przychodów ze sprzedaży w czasie $[0, T]$. Funkcję L można interpretować jako dochód zależny od wysokości sprzedaży u oraz ceny produktów μ_t . Funkcja $\psi(\mu_T)$ opisuje przychód w końcowym momencie T – skoro chcemy maksymalizować zysk, to w końcowej chwili czasu powinniśmy sprzedać wszystko co zostało.

Założenia przyjęte przez autorów [BR19] na pole wektorowe $(v(t, \mu_t, \cdot) + u(t, \cdot))$ są słabsze niż te, założone przez nas w nieliniowym równaniu transportu (patrz Twierdzenie 2 na stronie 74). W pracy [BR19] sformułowano **zasadę maksimum Pontryagina** z użyciem *subróżniczek* (ang. subdifferential; patrz Definicja B.4) w przestrzeniach Wassersteina i takim narzędziem poradzono sobie z zadaniem optymalizacyjnym (6.3).

Do (6.3) można by jednak podejść inaczej. To znaczy wzmocnić założenia na współczynniki równania, tak żeby zagadnienie było różniczkowalne (o ile przy silniejszych założeniach można wystarczająco dobrze modelować dany problem). Wtedy można by wykorzystać *lepsze* narzędzia do rozwiązania tego problemu (jednak kosztem wzmocnienia założeń!).

Przedstawimy zarys tego, jak Twierdzenie 1 ze strony 67 oraz Twierdzenie 2 ze strony 74 mogą pomóc w tym drugim podejściu (to znaczy, gdy wzmocnimy założenia). Sterowanie układu bazuje na obserwacji układu w każdym punkcie lub ich skończonej liczbie, $\phi(\mu_t^h)$. W rozważanych przez nas równaniach transportu, μ_t^h jest elementem $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Z}$. Dlatego rozsądne wydaje się rozważanie takich funkcji ϕ , które są złożeniem liniowych funkcjonałów na \mathcal{Z} oraz funkcji klasy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Stwierdzenie 4.4 mówi o tym, że każdy liniowy i ciągły funkcjonał na \mathcal{Z} jest dobrze reprezentowany przez całkowanie funkcji klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ – oznaczmy tą funkcję przez K .

Rozważamy funkcjonał następującej postaci

$$\gamma(\mu^h) := \hat{\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K(x) d\mu^h(x) \right), \quad (6.4)$$

gdzie $\hat{\gamma}$ jest funkcją klasy \mathcal{C}^1 oraz $K \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Jak już wspomnieliśmy na stronie 62 powyższy operator całkowy nie jest dobrze zdefiniowany dla elementów $\mu \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, jednak może być jednoznacznie rozszerzony na wszystkie $\mu \in \mathcal{Z}$. To rozszerzenie funkcjonału (6.4) ma następującą postać

$$\bar{\gamma}(\mu^h) = \hat{\gamma} \left(\langle \mu, K \rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \right). \quad (6.5)$$

Rozważmy zadanie optymalizacyjne

$$\max_{h \in \mathbb{R}} \bar{\gamma}(\mu^h). \quad (6.6)$$

Oznacza to, że chcemy znaleźć takie $h^* \in \mathbb{R}$, żeby $\bar{\gamma}(\mu^{h^*}) \geq \bar{\gamma}(\mu^h)$ dla każdego $h \in \mathbb{R}$. O ile tylko $h \mapsto \bar{\gamma}(\mu^h) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathbb{R})$, to warunkiem koniecznym do tego, żeby μ^{h^*} realizowało

maksimum jest, zgodnie z *zasadą najmniejszego działania*, żeby pochodna funkcji $\bar{\gamma}$ była równa zero w punkcie μ^{h^*} , to znaczy

$$\partial_h \bar{\gamma}(\mu^h) \Big|_{h=h^*} = \hat{\gamma}' \Big|_{\langle \mu^h, K \rangle} \cdot \left\langle \partial_h \mu^h \Big|_{h=h^*}, K \right\rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} = 0. \quad (6.7)$$

Pytanie brzmi: jakie warunki muszą być spełnione, żeby $h \mapsto \bar{\gamma}(\mu^h)$ było klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathbb{R})$? O tym mówi następujący lemat.

Lemat 6.1. *Jeżeli $K(x) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, wtedy funkcjonal $\bar{\gamma}$ zdefiniowany przez (6.5) jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}; \mathbb{R})$.*

Dowód. Chcemy pokazać, że funkcjonal $\mu \mapsto \langle \mu, K \rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ jest liniowy i ograniczony na \mathcal{Z} . Wtedy z tego będzie wynikać, że $\hat{\gamma}(\langle \mu, K \rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)})$ jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{Z}, \mathbb{R})$, jako złożenie funkcji \mathcal{C}^1 oraz ograniczonego liniowego funkcjonału.

Liniowość $\mu \mapsto \langle \mu, K \rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ jest oczywista, zachodzi bowiem

$$\left| \langle \mu, K \rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \right| \leq \|K\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\mu\|_{\mathcal{Z}} \leq C \|\mu\|_{\mathcal{Z}},$$

gdzie stała $C = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |K(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\nabla \cdot K(x)| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y} \frac{|\nabla \cdot K(x) - \nabla \cdot K(y)|}{|x-y|^\alpha}$. Z czego wynika, że $\mu \mapsto \langle \mu, K \rangle_{\mathcal{Z}, \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ jest ograniczony. ■

Oczywiście istnieje wiele metod optymalizacyjnych, które nie polegają na tym, żeby analitycznie wyznaczyć punkt, w którym pochodna funkcjonału się zeruje. Jednak kiedy funkcjonal $\bar{\gamma}(\mu^h)$ jest różniczkowalny względem parametru h , wtedy zagadnienie optymalizacyjne (6.6) może być rozwiązywane za pomocą metod bazujących na samym istnieniu tej pochodnej, tak zwanych *metodach gradientowych* (ang. gradient-based optimization).

W pracy [CGR18] autorzy rozważali model (6.1) z zadaniem optymalizacyjnym (6.2). Zmodyfikowano istniejący algorytm *Escalator Boxcar Train*. W tym algorytmie oryginalne zagadnienie jest aproksymowane za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych. Do działania algorytmu potrzebna jest lipschitzowska zależność rozwiązań równania od warunków początkowych i współczynników równania. Własność różniczkowalności rozwiązań (6.1) względem parametru może dać podstawy do zaproponowania bardziej efektywnego algorytmu.

Rozdział 7

Dalsze perspektywy

W niniejszej rozprawie analizowane było równanie transportu w postaci konserwatywnej, o wartościach w przestrzeni ograniczonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Pod uwagę brane było zarówno równanie liniowe, jak i nieliniowe. Przedstawiony został przegląd wyników dotyczących tych równań oraz ich zastosowania.

W głównej części rozprawy zostało pokazane przy jakich założeniach na pole wektorowe oraz prawą stronę równania zachodzi różniczkowalność rozwiązań względem parametru zaburzającego współczynniki tego równania — Twierdzenie 1 ze strony 67 oraz Twierdzenie 2 ze strony 74.

Naturalnym dalszym kierunkiem badań nad tymi zagadnieniami są na przykład:

- zweryfikowanie czy można osłabić założenia Twierdzenia 1 lub Twierdzenia 2;
- zbadanie różniczkowalności rozwiązań równania nieliniowego dla innej postaci pola wektorowego i prawej strony niż to występuje w Twierdzeniu 2;
- pokazanie różniczkowalności rozwiązań zagadnienia z dodatkowym warunkiem brzegowym, na przykład takim jak w zagadnieniu (6.1) – po to, aby wynik dotyczący różniczkowalności dało się zastosować do modeli populacji ze strukturą;

Taki wynik ukazał się ostatnio w [Skr18]. Pokazano różniczkowalność rozwiązań, w modelu populacji ze strukturą, gdy parametr $\alpha > \frac{1}{2}$. Także wciąż pozostaje kwestia różniczkowalności dla $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

- zastosowanie wyniku dotyczącego różniczkowalności rozwiązań do opracowania lepszych algorytmów rozwiązujących zagadnienia optymalizacyjne, w których występuje równanie transportu.

Dodatek A

Notacja

Zbiory

\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	zbiór liczb naturalnych z 0 tj. $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Q}	zbiór liczb wymiernych
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{R}^+	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
\mathbb{R}^d	d -wymiarowy wektor, którego współrzędne $x_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, \dots, d$

Przestrzenie funkcyjne

Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ oraz $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi.

$\mathcal{C}(X; Y)$	przestrzeń funkcji ciągłych z przestrzeni X w przestrzeń Y
$\mathcal{C}^k(X; Y)$	przestrzeń funkcji k -krotnie różniczkowalnych, gdzie $k \in \mathbb{N}$
$\mathcal{C}_b(X; Y)$	przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych w normie supremum
$\mathcal{C}^\infty(X; Y)$	przestrzeń funkcji gładkich
$\mathcal{C}_0(X; Y)$	przestrzeń funkcji znikających w nieskończoności
$\mathcal{C}_c(X; Y)$	przestrzeń funkcji o zwartym nośniku
$L^1(X; Y)$	przestrzeń funkcji całkowalnych
$L^1_{loc}(X; Y)$	przestrzeń funkcji lokalnie całkowalnych
$L^k(X; Y)$	przestrzeń funkcji całkowalnych z k -tą potęgą
$\text{Lip}(X; Y)$	przestrzeń funkcji lipschitzowskich
$\text{Lip}(b, [a, b])$	dla lipschitzowskiej funkcji b jest to stała Lipschitza na przedziale $[a, b]$
$\mathcal{C}^{1+\alpha}(X; Y)$	przestrzeń funkcji ograniczonych, których pierwsze pochodne (względem dowolnej zmiennej) są ograniczone oraz hölderowsko ciągłe z wykładnikiem α
$\mathcal{C}^{k+\alpha}(X; Y)$	przestrzeń funkcji ograniczonych, których wszystkie pochodne aż do k -tej są ograniczone oraz hölderowsko ciągłe z wykładnikiem α
$W^{k,p}(X)$	przestrzeń Sobolewa; patrz Definicja B.2
$(\cdot)^*$	przestrzeń dualna do (\cdot) wraz z naturalnie określona normą
$\mathcal{L}(X; Y)$	przestrzeń funkcjonałów liniowych z przestrzeni X w Y

Inne oznaczenia

$\text{diam}(X)$	średnica zbioru X
$\text{span}\{X\}$	najmniejszą przestrzeń liniową rozpiętą na zbiorze X
$\{\mathbf{1}\}_{A,X}(x)$	funkcja charakterystyczna zbioru $A \subset X$
δ_x	delta Diraca skoncentrowana w punkcie x
$x_1 \bullet x_2$	iloczyn skalarny elementów x_1 i x_2
$\text{supp}(f)$	nośnik funkcji b
$(f \circ g)(x)$	złożenie funkcji $f(g(x))$

Miary

Niech X będzie zupełną ośrodkową przestrzenią metryczną.

$\mathcal{B}(X)$	borelowska σ -algebra na X
$\mathcal{M}(X)$	przestrzeń skończonych miar Radona ze znakiem, określonych na X
$\mathcal{M}^+(X)$	przestrzeń nieujemnych skończonych miar Radona określonych na X
$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{M}^+(X)$	przestrzeń miar probabilistycznych określonych na X
$\mu _X$	obcięcie miary do zbioru X

Pochodne

Niech $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ i $x \in U$

- (i) Jeżeli $U \subseteq \mathbb{R}$, wtedy $\dot{u}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ – pochodną funkcji u względem jedynej zmiennej od której zależy. Pochodną $\dot{u}(x)$ czasami oznaczamy również $\frac{du}{dx}$.
- (ii) Jeżeli $U \subseteq \mathbb{R}^d$, wtedy $\partial u_{x_i}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}$ jest pochodną cząstkową funkcji u względem zmiennej x_i , o ile ta granica istnieje. Pochodną ∂u_{x_i} czasami oznaczamy również $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ lub u_{x_i} . Podobnie $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = u_{x_i x_j x_k}$ itp.
- (iii) *Notacja wielowskaźnikowa:*
 - (a) Wektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ o nieujemnych współrzędnych całkowitych α_i nazywamy *wielowskaźnikiem długości* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.
 - (b) Jeśli α jest wielowskaźnikiem, to piszemy $D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$.
 - (c) Jeśli k jest nieujemną liczbą całkowitą, to $D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$ jest zbiorem wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu k . Ustalając pewien porządek w zbiorze wielowskaźników, możemy również traktować $D^k u(x)$ jako punkt przestrzeni \mathbb{R}^N , gdzie N jest liczbą wszystkich wielowskaźników długości k .
 - (d)

$$|D^k u| := \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- (e) Przypadki szczególne: dla $k = 1$ zapisujemy Du w postaci wektora

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d}),$$

który nazywamy **gradientem** funkcji u .

(f)

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_i} u_{x_i} = \text{tr}(D^2 u)$$

jest **laplasjanem** funkcji u .

- (g) Przy symbolach D, D^2 etc. piszemy czasem indeksy na dole, żeby zaznaczyć, względem jakiej zmiennej różniczkujemy. Jeśli na przykład $u = u(x, y), (x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^m)$, to $D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d}), D_y u = (u_{y_1}, \dots, u_{y_m})$.
- (h) $\text{div} u = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{i=d} \partial u_{x_i}$ dla $u \in \mathcal{C}^1$.

Dodatek B

Dodatkowe definicje, pojęcia i twierdzenia

Definicja B.1 (Funkcja borelowsko mierzalna). Niech $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ będzie borelowską σ -algebrą na \mathbb{R}^d . Jeżeli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, wtedy A nazywamy zbiorem **borelowskim** lub **borelowsko mierzalnym**. Mówimy, że $b : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ jest **borelowsko mierzalną funkcją**, lub krócej funkcją borelowską, jeżeli $b^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$.

Definicja B.2 (Przestrzeń Sobolewa). Niech m, d będą ustalonymi liczbami naturalnymi, p będzie liczbą z przedziału $[1, \infty]$ oraz X będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^d . **Przestrzenią Sobolewa** $W^{m,p}(X)$ nazywa się przestrzeń wszystkich tych funkcji $f \in L^p(X)$, dla których $D^\alpha f \in L^p(X)$, gdzie $|\alpha| = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ jest wielowskaźnikiem spełniającym warunek

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d \leq m$$

oraz symbol $D^\alpha u$ oznacza słabą pochodną funkcji u rzędu α .

Przestrzeń $W^{m,p}(X)$ jest przestrzenią Banacha z następującą normą

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dla $1 \leq p < \infty$ oraz

$$\|f\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty} \quad \text{dla } p = \infty.$$

Definicja B.3 (Moment zwykły k -tego rzędu). Moment zwykły rzędu $k = 1, 2, \dots$ zmiennej losowej X to wartość oczekiwana k -tej potęgi tej zmiennej. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym, a $f(x)$ funkcją gęstości, wtedy k -ty moment zwykły to

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Definicja B.4 (Subróżniczka). **Subpochodną** funkcji wypukłej $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie x_0 należącym do przedziału otwartego I nazywamy liczbę rzeczywistą c , taką że

$$f(x) - f(x_0) \geq c(x - x_0)$$

dla każdego $x \in I$. Można pokazać, że zbiór subróżniczek w punkcie x_0 dla funkcji wypukłej jest niepustym domkniętym przedziałem $[a, b]$, gdzie a i b są jednostronnymi granicami

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad b = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zbiór $[a, b]$ wszystkich subpochodnych jest nazywany **subróżniczną** funkcji f w punkcie x_0 . Jeżeli f jest wypukła oraz jeśli zbiór subpochodnych w punkcie x_0 zawiera tylko jedną liczbę, wtedy f jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

Definicja B.5 (Przestrzeń Bochnerowska). [Bre11] Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią mierzalną oraz $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie przestrzenią Banacha. **Przestrzeń Bochnerowska** $L^p(\Omega; X)$ zawiera wszystkie takie funkcje f zdefiniowane na Ω o wartościach w X , które są mierzalne i takie, że

$$\int_{\Omega} \|f(x)\|_X^p d\mu < +\infty, \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty,$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|f(x)\|_X < +\infty, \quad \text{dla } p = \infty.$$

Definicja B.6 (Pochodna Frécheta). Niech V i W będą przestrzeniami unormowanymi, U niepustym podzbiorem otwartym przestrzeni V . Funkcję $f : U \rightarrow W$ nazywa się różniczkowalną w sensie Frécheta w punkcie $x \in U$, jeżeli istnieje taki ograniczony operator liniowy $A_x : V \rightarrow W$, że

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|f(x + \lambda) - f(x) - A_x(\lambda)\|_W}{\|\lambda\|_V} = 0.$$

W przypadku, gdy funkcja f jest różniczkowalna w danym punkcie, to operator liniowy A_x spełniający powyższy warunek jest wyznaczony jednoznacznie i nazywa się różniczką Frécheta funkcji f w punkcie x i oznaczany jest przez $Df(x)$. Odwzorowanie $Df : V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ dane wzorem $x \mapsto Df(x)$ we wszystkich punktach x , w których f jest różniczkowalna, nazywa się **pochodną Frécheta** funkcji f , gdzie $\mathcal{L}(V, W)$ oznacza przestrzeń wszystkich ograniczonych operatorów liniowych $V \rightarrow W$.

Lemat B.7 (Gronwalla). Niech I będzie przedziałem liczb rzeczywistych, czyli $[a, \infty)$, $[a, b]$, $[a, b)$ lub (a, b) , gdzie $a < b$. Ponadto niech α, β, u będą funkcjami określonymi na I o wartościach w \mathbb{R} . Załóżmy, że β oraz u są ciągłe oraz że ujemna część α jest całkowna na każdym domkniętym i ograniczonym podzbiorsze I .

1. Jeżeli β jest nieujemna i dla każdego $x \in I$ funkcja u spełnia nierówność całkową

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_a^x \beta(s)u(s)ds,$$

to dla $x \in I$ zachodzi również

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_a^x \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^x \beta(\xi)d\xi} ds.$$

2. Jeśli dodatkowo funkcja α jest niemalejąca, wtedy

$$u(x) \leq \alpha(x)e^{\int_a^x \beta(s)ds}.$$

Definicja B.8 (Półgrupa operatorów). Rodzinę dwuparametrowych ograniczonych operatorów $\{\mathcal{T}_{\tau,t}\}_{0 \leq \tau \leq t \leq T}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy **dwuparametrową półgrupą operatorów** (ang. two-parameter semigroup), jeżeli spełnione są następujące warunki:

- $\mathcal{T}_{\tau,\tau} = \text{Id}$ (identyczność) dla dowolnej chwili czasu τ , takiej że $0 \leq \tau \leq T$,
- $\mathcal{T}_{\tau,t_2} = \mathcal{T}_{t_1,t_2} \mathcal{T}_{\tau,t_1}$ dla dowolnych chwil czasu t, τ_1, τ_2 , takich że $0 \leq \tau \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Rodzina jednoparametrowych ograniczonych operatorów $\{\mathcal{T}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ na przestrzeni metrycznej (X, d) jest nazywana **jednoparametrową półgrupą operatorów**, jeżeli formuła $\mathcal{T}_{t-\tau} := \mathcal{T}_{\tau,t}$ definiuje dwuparametrową półgrupę.

Uwaga B.9. Niech (X, d) będzie taka, że $X = \mathbb{R}^d$ ze standardową metryką euklidesową. Jeżeli $b \in L^1((0, T); W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))$, wtedy następujące równanie różniczkowe zwyczajne

$$\partial_t X_b(t, \tau, x) = b(t, X_b(t, \tau, x)), \quad X_b(\tau, \tau, x) = x$$

ma jednoznaczne rozwiązanie, które definiuje dwuparametrową półgrupę $\mathcal{T}_{\tau,t} = X_b(t, \tau, \cdot)$ na \mathbb{R}^d . Jeżeli b nie zależy od czasu, to mamy do czynienia z jednoparametrową półgrupą $\mathcal{T}_t = X_b(t, 0, \cdot) = X_b(t + \tau, \tau, \cdot)$.

Twierdzenie B.10 (Cauchy'ego o wartości średniej, ang. Generalized Mean Value Theorem). Niech $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalnymi na (a, b) . Jeżeli $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a, b)$, wtedy istnieje takie $\theta \in (a, b)$, że

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}.$$

Twierdzenie B.11 (O rozszerzeniu funkcjonau). [AE08, Twierdzenie 2.1] Niech X oraz Y będą przestrzeniami metrycznymi, oraz niech Y będzie zupełna. Jeżeli X_1 jest gęstym podzbiorem X , oraz funkcja $f : X_1 \rightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła, wtedy funkcję f można jednoznacznie rozszerzyć, tak że to rozszerzenie $\bar{f} : X \rightarrow Y$ jest zadane przez

$$\bar{f}(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x, x_1 \in X_1} f(x_1) \quad \text{dla } x \in X,$$

oraz \bar{f} także jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie B.12 (Radona-Nikodýma). Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną, a μ, ν będą dwoma σ -skończonymi miarami określonymi na tej przestrzeni. Jeżeli ν jest absolutnie ciągła względem μ , to istnieje taka mierzalna funkcja $f : X \rightarrow [0, +\infty)$, że dla każdego mierzalnego zbioru $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Funkcja f nazywana jest **pochodną Radona-Nikodýma** funkcji ν względem μ i oznaczana jest symbolem $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Twierdzenie B.13. [Rud76, Twierdzenie 7.11, strona 149] Niech funkcje $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie E jest podzbiorem w przestrzeni metrycznej. Niech f_n zbiega jednostajnie do f na E . Niech λ_0 będzie punktem skupienia zbioru E oraz przyjmijmy, że

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_n(\lambda) = A_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Wtedy ciąg A_n jest zbieżny, oraz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Twierdzenie B.14 (Banacha o izomorfizmie). *Niech X będzie przestrzenią liniową oraz niech $\|\cdot\|_{X_1}$ i $\|\cdot\|_{X_2}$ będą dwiema normami na X , takimi że $(X, \|\cdot\|_{X_1})$ oraz $(X, \|\cdot\|_{X_2})$ są przestrzeniami Banacha. Jeżeli istnieje stała $K > 0$, dla której $\|x\|_{X_1} \leq K\|x\|_{X_2}$ dla każdego $x \in X$, wtedy istnieje również stała $M > 0$, taka że $\|x\|_{X_2} \leq M\|x\|_{X_1}$ dla każdego $x \in X$.*

Symbole Landau'a

Mówimy, że funkcja f jest **co najwyżej rzędu** g , co zapisujemy $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, jeżeli istnieją takie stałe $n_0 > 0$ oraz M , że dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi $f(n) \leq Mg(n)$. Warunkiem wystarczającym, żeby $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ jest $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) < \infty$.

Mówimy, że funkcja f jest **niższego rzędu niż** g , co zapisujemy $o(g(n))$, gdy dla każdej stałej $M > 0$ istnieje stała $n_0 > 0$ taka, że dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi $f(n) < Mg(n)$. Warunkiem wystarczającym, żeby $f(n) = o(g(n))$ jest $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$

Szacowanie reszt z rozwinięcia w szereg Taylora

Stwierdzenie B.15. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie otwartym zbiorem i niech $f \in \mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$, gdzie $l \in \mathbb{N}_0$ oraz $\alpha \in (0, 1]$. Niech $k \leq l$ oraz $R_k[f; x_0](x)$ będzie resztą z rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Taylora w punkcie x_0 , to znaczy*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + R_k[f; x_0](x).$$

Wtedy $R_k[f; x_0](x)$ można szacować w następujący sposób

$$\sup_{x \in \Omega} |R_k[f; x_0](x)| \leq C_{k,\alpha} \cdot \max_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta|=k} |D^\beta f|_\alpha \cdot |x - x_0|^{k+\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie $C_{k,\alpha} := \frac{d^k}{\alpha(\alpha+1) \cdot \dots \cdot (\alpha+d-1)}$ i przyjmujemy, że $C_{0,\alpha} = 1$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Dla $k = 0$ mamy

$$|R_0[f; x_0](x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq |f|_\alpha \cdot |x - x_0|^\alpha.$$

Zatem (B.1) zachodzi dla tego przypadku. Załóżmy, że (B.1) zachodzi dla pewnego $k = n$. Załóżmy, że $f \in \mathcal{C}^{n+1+\alpha}(\Omega)$. Rozważmy

$$\mathcal{R}_{n+1}(h) := \frac{R_{n+1}[f; x_0](hx + (1-h)x_0)}{|x - x_0|}$$

dla $0 \leq h \leq 1$. Wtedy funkcja \mathcal{R}_{n+1} jest ciągła na przedziale $[0, 1]$ i różniczkowalna na $(0, 1)$. Weźmy w takim razie jej pochodną

$$\mathcal{R}'_{n+1}(h) = (\nabla_x \cdot R_{n+1}[f; x_0])(hx + (1-h)x_0) \bullet \frac{x - x_0}{|x - x_0|}. \quad (\text{B.2})$$

Zdefiniujmy $\gamma_x(h) := |hx + (1-h)x_0 - x_0| = |h| \cdot |x - x_0|$. Z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej (patrz Twierdzenie B.10) dla funkcji g zdefiniowanej przez $g(h) := \gamma_x(h)^{n+1+\alpha}$ istnieje takie $h_x \in (0, 1)$, że

$$\frac{R_{n+1}[f; x_0](x)}{|x - x_0|^{n+1+\alpha}} = \frac{\mathcal{R}_{n+1}(1) - \mathcal{R}_{n+1}(0)}{\gamma_x(1)^{n+\alpha} - \gamma_x(0)^{n+\alpha}} = \frac{\mathcal{R}'_{n+1}(h_x)}{(n + \alpha) \cdot (h_x)^{n-1+\alpha} \cdot |x - x_0|^{n+\alpha}}.$$

Korzystając z (B.2) oraz nierówności Schwarz'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} |R_{n+1}[f; x_0](x)| &\leq \|\nabla_x \cdot R_{n+1}[f; x_0](h_x x + (1-h_x)x_0)\| \cdot \frac{|x - x_0|}{(n + \alpha)|h_x|^{n-1+\alpha}} \\ &= \left\| \sum_{i=1}^d R_n\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}; x_0\right](h_x x + (1-h_x)x_0) \mathbf{e}_i \right\| \cdot \frac{|x - x_0|}{(n + \alpha)|h_x|^{n-1+\alpha}} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq d} \left| R_n\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}; x_0\right](h_x x + (1-h_x)x_0) \right| \cdot \frac{d \cdot |x - x_0|}{(n + \alpha)|h_x|^{n-1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Równość wynika z faktu $\partial_{x_i} R_{n+1}[f; x_0](x) = R_n[\partial_{x_i} f; x_0](x)$, co jest konsekwencją tego, że

$$R_{n+1}[f; x_0](x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0).$$

W taki razie zachodzi

$$\begin{aligned} |R_{n+1}[f; x_0](x)| &\leq C_{n,\alpha} \max_{1 \leq i \leq d} \max_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta|=n} |D^\beta \frac{\partial f}{\partial x_i}|_\alpha \cdot \frac{d \cdot |x - x_0|^{n+1+\alpha} |h_x|^{n+\alpha}}{(n + \alpha)|h_x|^{n-1+\alpha}} \\ &\leq C_{n,\alpha} \cdot \max_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta|=n+1} |D^\beta f|_\alpha \cdot \frac{d|h_x|}{(n + \alpha)} \cdot |x - x_0|^{n+1+\alpha} \\ &\leq C_{n+1,\alpha} \cdot \max_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta|=n+1} |D^\beta f|_\alpha \cdot |x - x_0|^{n+1+\alpha}. \end{aligned}$$

i teraz indukcji została udowodniona. ■

Dowód Lematu 4.7

Poniżej przedstawiamy dowód Lematu 4.7, który został użyty w dowodzie Twierdzenia 1 ze strony 67. Poniższy dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia o różniczkowalności rzędu $k \geq 2$ rozwiązań równań zwyczajnych względem parametru – można go znaleźć w podręczniku [Har02, strona 100].

Naszym celem jest pokazanie, że $\partial_h X$ jest Hölderowsko ciągła.

Dowód. Rozważmy różnicę $\partial_t(\partial_h X(t, x; h))|_{h=h_1} - \partial_t(\partial_h X(t, x; h))|_{h=h_2}$, którą można zapisać

w następującej postaci [Har02, Twierdzenie 3.1, formuła (3.3)]

$$\begin{aligned}
& \partial_t (\partial_h X(t, x; h))|_{h=h_1} - \partial_t (\partial_h X(t, x; h))|_{h=h_2} = \\
& = \left[\nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_1)) + h_1 b_1(t, X(t, x; h_1)) \right) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} + b_1(t, X(t, x; h_1)) \right] \\
& \quad - \left[\nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_2)) + h_2 b_1(t, X(t, x; h_2)) \right) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2} + b_1(t, X(t, x; h_2)) \right] \\
& = \nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_1)) + h_1 b_1(t, X(t, x; h_1)) \right) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} \\
& \quad - \nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_2)) + h_2 b_1(t, X(t, x; h_2)) \right) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2} \\
& \quad + b_1(t, X(t, x; h_1)) - b_1(t, X(t, x; h_2)) \\
& = \underbrace{\nabla_x \cdot b_0(t, X(t, x; h_1)) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \nabla_x \cdot b_0(t, X(t, x; h_2)) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}}_{(A)} \\
& \quad + \underbrace{h_1 \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, x; h_1)) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - h_2 \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, x; h_2)) \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}}_{(B)} \\
& \quad + \underbrace{b_1(t, X(t, x; h_1)) - b_1(t, X(t, x; h_2))}_{(C)}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Każdy ze składników (A), (B) i (C) będziemy szacować osobno. Zaczniemy od (A)

$$\begin{aligned}
(A) & = \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} \cdot \nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_1)) - b_0(t, X(t, x; h_2)) \right) \\
& \quad + \nabla_x \cdot b_0(t, X(t, x; h_2)) \cdot \left(\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2} \right).
\end{aligned}$$

Z założenia $b_0(t, \cdot) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ wiemy, że

$$\left| \nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_1)) - b_0(t, X(t, x; h_2)) \right) \right| \leq c |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|^\alpha.$$

Dodatkowo zachodzi

$$\left| \nabla_x \cdot b_0(t, X(t, x; h_2)) \right| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\nabla_x \cdot b_0(t, x)|.$$

Z tego wynika, że $\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1}$ jest ograniczone. Bezpośrednio z definicji $X(t, x; h)$ (patrz (4.7)) mamy

$$\left| \partial_t (\partial_h X(t, x; h)) \right| = \left| \nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h)) + h b_1(t, X(t, x; h)) \right) \partial_h X(t, x; h) + b_1(t, X(t, x; h)) \right|,$$

otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t_0}^t \partial_s (\partial_h X(s, x; h)) \, ds \right| = \\
& = \left| \int_{t_0}^t \left(\nabla_x \cdot \left(b_0(s, X(s, x; h)) + h b_1(s, X(s, x; h)) \right) \partial_h X(s, x; h) + b_1(s, X(s, x; h)) \right) \, ds \right|.
\end{aligned}$$

Pochodna $\partial_h X(t_0, x; h) = 0$ ze względu na to, że warunek początkowy układu (4.7) nie zależy od parametru h , co prowadzi do oszacowań

$$\begin{aligned} |\partial_h X(t, x; h)| &\leq \int_{t_0}^t \left| \nabla_x \cdot \left(b_0(s, X(s, x; h)) + hb_1(s, X(s, x; h)) \right) \right| \cdot |\partial_h X(s, x; h)| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t |b_1(s, X(s, x; h))| ds \\ &\leq \left(\|\nabla_x \cdot b_0\|_\infty + |h| \cdot \|\nabla_x \cdot b_1\|_\infty \right) \cdot \int_{t_0}^t |\partial_h X(s, x; h)| ds + (t - t_0) \|b_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Norma supremum w powyższej nierówności jest rozważana zarówno ze względu na zmienną przestrzenną x , jak i czasową t . Ponieważ $(t - t_0) \|b_1\|_\infty$ jest funkcją niemalejącą na przedziale $[t_0, \infty)$, to stosując Lemat Gronwalla (patrz Lemat B.7) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$|\partial_h X(t, x; h)| \leq (t - t_0) \|b_1\|_\infty e^{\int_{t_0}^t C ds} = (t - t_0) \|b_1\|_\infty e^{C(t-t_0)},$$

gdzie $C = \|\nabla_x \cdot b_0\|_\infty + |h| \|\nabla_x \cdot b_1\|_\infty$. Tym sposobem dostajemy finalne oszacowanie (A)

$$\begin{aligned} |(A)| &\leq |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} \cdot \left| \nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, x; h_1)) - b_0(t, X(t, x; h_2)) \right) \right| \\ &\quad + \left| \nabla_x \cdot b_0(t, X(t, x; h_2)) \right| \cdot |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}| \\ &\leq c_1 |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|^\alpha + c_2 |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}|, \end{aligned}$$

gdzie stałe c_1, c_2 nie zależą od x , ale mogą być zależne od t .

Następnie szacujemy składnik (B)

$$\begin{aligned} |(B)| &= \left| h_1 \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, x; h_1)) \cdot (\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}) \right. \\ &\quad \left. + h_2 \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2} \cdot \left(\nabla_x \cdot b_1(t, X(t, x; h_1)) - \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, x; h_2)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, x; h_1)) \cdot \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2} (h_1 - h_2) \right| \\ &\leq |h_1| \cdot \|\nabla_x \cdot b_1\|_\infty \cdot |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}| \\ &\quad + |h_2| \cdot c_3 \cdot |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|^\alpha + |h_1 - h_2| \cdot \|\nabla_x \cdot b_1\|_\infty \cdot c_4 \\ &\leq c_5 |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}| + c_6 |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|^\alpha + c_7 |h_1 - h_2|. \end{aligned}$$

Pora na ostatni składnik (C)

$$|(C)| \leq |b_1(t, X(t, x; h_1)) - b_1(t, X(t, x; h_2))| \leq c_8 |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|.$$

Sumę (A) + (B) + (C) w takim razie można oszacować przez

$$\begin{aligned} |(A) + (B) + (C)| &\leq C_1 |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|^\alpha + C_2 |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)| \\ &\quad + C_3 |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}| + C_4 |h_1 - h_2|. \end{aligned}$$

Zachodzi następująca równość

$$\int_{t_0}^t (\partial_s \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1} - \partial_s \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_2}) ds = \int_{t_0}^t (A) + (B) + (C) ds, \quad (B.4)$$

z której po scałkowaniu lewej strony dostajemy

$$\begin{aligned} \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, y; h)|_{h=h_2} - \underbrace{\partial_h X(t_0, x; h)|_{h=h_1}}_0 + \underbrace{\partial_h X(t_0, x; h)|_{h=h_1}}_0 = \\ = \int_{t_0}^t (A) + (B) + (C) ds. \end{aligned}$$

Przykładając moduł do obu stron oraz uwzględniając oszacowanie sumy (A) + (B) + (C), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2}| \leq \\ \leq C_1 \int_{t_0}^t |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)|^\alpha ds + C_2 \int_{t_0}^t |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)| ds \\ + C_3 \int_{t_0}^t |\partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_2}| ds + C_4 |h_1 - h_2| (t - t_0). \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że naszym celem jest pokazanie, że $\partial_h X(t, x; h_1) - \partial_h X(t, x; h_2)$ jest rzędu $|h_1 - h_2|^\alpha$. Do zamknięcia oszacowań (ponownie użyjemy Lematu Gronwalla) pozostaje już tylko oszacowanie $|X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|$. Ze sformułowania (4.7) wiemy, że

$$\begin{aligned} \partial_t X(t, x; h_1) - \partial_t X(t, x; h_2) = b_0(t, X(t, x; h_1)) - b_0(t, X(t, x; h_2)) \\ + h_1 b_1(t, X(t, x; h_1)) - h_2 b_1(t, X(t, x; h_2)), \end{aligned}$$

co po obustronnym przyłożeniu całki daje

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (\partial_s X(s, x; h_1) - \partial_s X(s, x; h_2)) ds = \int_{t_0}^t (b_0(s, X(s, x; h_1)) - b_0(s, X(s, x; h_2)) \\ + h_1 b_1(s, X(s, x; h_1)) - h_2 b_1(s, X(s, x; h_2))) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)| \leq \int_{t_0}^t |b_0(s, X(s, x; h_1)) - b_0(s, X(s, x; h_2)) \\ + h_1 b_1(s, X(s, x; h_1)) - h_2 b_1(s, X(s, x; h_2))| ds \\ \leq \int_{t_0}^t \underbrace{|b_0(s, X(s, x; h_1)) - b_0(s, X(s, x; h_2))|}_{(D)} ds \\ + \int_{t_0}^t \underbrace{|h_1 b_1(s, X(s, x; h_1)) - h_2 b_1(s, X(s, x; h_2))|}_{(E)} ds. \end{aligned}$$

Zachodzą następujące oszacowania (D) oraz (E)

$$\begin{aligned} (D) &\leq c'_1 |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)| \\ (E) &= |h_1 (b_1(s, X(s, x; h_1)) - b_1(s, X(s, x; h_2))) + b_1(s, X(s, x; h_2))(h_1 - h_2)| \\ &\leq |h_1| \cdot |b_1(s, X(s, x; h_1)) - b_1(s, X(s, x; h_2))| + |b_1(s, X(s, x; h_2))| \cdot |h_1 - h_2| \\ &\leq c'_2 \cdot |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)| + c'_3 \cdot |h_1 - h_2|. \end{aligned}$$

Kontynuując oszacowania $|X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)|$, dostajemy

$$\begin{aligned} |X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)| &\leq \int_{t_0}^t c'_3 |h_1 - h_2| ds + \int_{t_0}^t c'_4 |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)| ds \\ &= c'_3 |h_1 - h_2| (t - t_0) + \int_{t_0}^t c'_4 |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)| ds. \end{aligned}$$

Z Lematu Gronwalla uzyskujemy

$$|X(t, x; h_1) - X(t, x; h_2)| \leq c'_3 |h_1 - h_2| (t - t_0) e^{c'_4 (t - t_0)}.$$

Możemy wrócić do następującej nierówności (patrz (B.4))

$$\left| \int_{t_0}^t \partial_s (\partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_2}) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |(A) + (B) + (C)| ds.$$

Uwzględniając wszystkie powyższe oszacowania dostajemy ostatecznie, że

$$\begin{aligned} &\left| \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(t, x; h)|_{h=h_2} \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \left[C_1 |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)|^\alpha + C_2 |X(s, x; h_1) - X(s, x; h_2)| \right. \\ &\quad \left. + C_3 |\partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_2}| + C_4 |h_1 - h_2| \right] ds \\ &\leq C_1 \int_{t_0}^t |h_1 - h_2|^\alpha |s - t_0|^\alpha e^{\alpha c'_4 (s - t_0)} ds + C_2 \int_{t_0}^t |h_1 - h_2| |s - t_0| e^{c'_4 (s - t_0)} ds \\ &\quad + C_3 \int_{t_0}^t |\partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1}| ds + C_4 \int_{t_0}^t |h_1 - h_2| ds \\ &\leq C_1 |h_1 - h_2|^\alpha \gamma_\alpha (t - t_0) + C_2 |h_1 - h_2| \gamma_1 (t - t_0) \\ &\quad + C_3 \int_{t_0}^t |\partial_h X(s, x; h)|_{h=h_1} - \partial_h X(s, x; h)|_{h=h_2}| ds + C_4 |h_1 - h_2| (t - t_0), \end{aligned}$$

gdzie $\gamma_\alpha(t) := \int_{t_0}^t s^\alpha e^{c'_4 s} ds$. Ponownie stosując Lemat Gronwalla otrzymujemy, że $\partial_h X$ jest Hölderowsko ciągle z wykładnikiem α . ■

Dowód Twierdzenia 5.5

Dowód twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu Twierdzenia 1. Jedyne czego potrzebujemy, żeby powtórzyć rozumowanie, to odpowiednik Stwierdzenia 4.7. Układ charakterystyczny zagadnienia (5.13) ma następującą postać.

$$\begin{cases} \dot{X}_{\bar{b}}(t, y, h) = \bar{b}^h(t, X_{\bar{b}}(t, y, h)), \\ X_{\bar{b}}(t_0, y) = y \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

co można również zapisać jako

$$\begin{cases} \dot{X}_{\bar{b}}(t, y, h) = b_0(t, X_{\bar{b}}(t, y, h)) + h b_1(t, X_{\bar{b}}(t, y, h)) + o(|h|), \\ X_{\bar{b}}(t_0, y) = y \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Sformułujemy odpowiednik Stwierdzenia 4.7, to znaczy określimy regularność potoku $X(t, y, h)$ względem parametru h .

Lemat B.16. Niech $(t \mapsto b_0(t, \cdot)), (t \mapsto b_1(t, \cdot)) \in \mathcal{C}_b([0, +\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$, wtedy dla dowolnego $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ odwzorowanie $(h \mapsto X(t, y, h))$, gdzie $X(t, y, h)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (B.5), jest klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie do dowodu Lematu 4.7; patrz Dodatek B. Chcemy pokazać, że $\partial_h X$ jest Hölderowsko ciągłe. Różnicę

$$\partial_t(\partial_h X(t, y, h))|_{h=h_1} - \partial_t(\partial_h X(t, y, h))|_{h=h_2}$$

można zapisać następująco [Har02, Twierdzenie 3.1, formuła (3.3)]

$$\begin{aligned} & \partial_t(\partial_h X(t, y, h))|_{h=h_1} - \partial_t(\partial_h X(t, y, h))|_{h=h_2} = \\ & = \left[\nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, y, h_1)) + h_1 b_1(t, X(t, y, h_1)) + o(|h_1|) \right) \cdot \partial_h X(t, y, h)|_{h=h_1} \right. \\ & \quad \left. + b_1(t, X(t, y, h_1)) \right] \\ & \quad - \left[\nabla_x \cdot \left(b_0(t, X(t, y, h_2)) + h_2 b_1(t, X(t, y, h_2)) + o(|h_2|) \right) \cdot \partial_h X(t, y, h)|_{h=h_2} \right. \\ & \quad \left. + b_1(t, X(t, y, h_2)) \right] \\ & = \nabla_x \cdot b_0(t, X(t, y, h_1)) \cdot \partial_h X(t, y, h)|_{h=h_1} - \nabla_x \cdot b_0(t, X(t, y, h_2)) \cdot \partial_h X(t, y, h)|_{h=h_2} \\ & \quad + h_1 \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, y, h_1)) \cdot \partial_h X(t, y, h)|_{h=h_1} - h_2 \nabla_x \cdot b_1(t, X(t, y, h_2)) \cdot \partial_h X(t, y, h)|_{h=h_2} \\ & \quad + b_1(t, X(t, y, h_1)) - b_1(t, X(t, y, h_2)). \end{aligned}$$

Zauważmy, że różnica $\partial_t(\partial_h X(t, y, h))|_{h=h_1} - \partial_t(\partial_h X(t, y, h))|_{h=h_2}$, którą chcemy oszacować nie różni się ostatecznie niczym od formuły (B.3). Z oszacowań w dowodzie Lematu 4.7 (patrz Dodatek B) dostajemy, że $h \mapsto X(t, y, h)$ jest klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ■

Dysponując Lematem B.16, dowód Lematu 5.5 można przeprowadzić identycznie do dowodu różniczkowalności rozwiązań liniowego zagadnienia (Twierdzenie 1; patrz strona 67).

Bibliografia

- [ACFK17] G. Albi, Y-P. Choi, M. Fornasier, and D. Kalise. Mean field control hierarchy. *Applied Mathematics and Optimization*, 76(1):93–135, 2017.
- [Ada03] R. A. Adams. *Calculus; A complete course*. 5th ed. Adison Wesley Longman, 2003.
- [ADR06] D. Armbruster, P. Degond, and C. Ringhofer. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(3):896–920, 2006.
- [AE08] H. Amann and J. Escher. *Analysis II*. Birkhäuser Basel, 2008.
- [AFM18] L. Ambrosio, M. Fornasier, and M. Morandotti. Spatially inhomogeneous evolutionary games. *ArXiv:1805.04027v1*, 2018.
- [AG08] L. Ambrosio and W. Gangbo. Hamiltonian ODEs in the Wasserstein space of probability measures. *Studia Mathematica*, 61(1):18–53, 2008.
- [AGS08] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient Flows In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Birkhäuser, 2008.
- [AHP18] G. Albi, M. Herty, and L. Pareschi. Linear multistep methods for optimal control problems and applications to hyperbolic relaxation systems. *ArXiv:1807.08547v1*, 2018.
- [Amb04] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields and applications. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–11, 2004.
- [AMR⁺06] D. Armbruster, D. E. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, and T.-C. Jo. A continuum model for a re-entrant factory. *Operations Research*, (5):933—950, 2006.
- [AR04] O. Arino and R. Rudnicki. Phytoplankton dynamics. *Comptes Rendus Biologies*, 327(11):961–969, 2004.
- [AZ90] J. Appell and P. P. Zabrejko. *Nonlinear superposition operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [BCM⁺10] M. Borodzick, T. Cieślak, P. Mucha, P. Rybka, W. Sadowski, P. Strzelecki, A. Tarasińska, and A. Zatorska–Goldstein. *Równania różniczkowe cząstkowe w zadaniach*. Uniwersytet Warszawski, 2010.
- [BDDR08] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, and M. Rasclé. A model for the formation and evolution of traffic jams. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 187(2):185–220, 2008.
- [BDT17] N. Bellomo, P. Degond, and E. Tadmor. *Active Particles, Volume 1: Advances in Theory, Models, and Applications*. Springer, Birkhäuser, 2017.
- [BFRS17] M. Bongini, M. Fornasier, F. Rossi, and F. Solombrino. Mean-field Pontryagin maximum principle. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 175(1):1–38, 2017.

- [BGM16] J.-E. Busse, P. Gwiazda, and A. Marciniak-Czochra. Mass concentration in a non-local model of clonal selection. *Journal of Mathematical Biology*, 73(4):1001–1033, 2016.
- [BGSW13] Y. Brenier, W. Gangbo, G. Savaré, and M. Westdickenberg. Sticky particle dynamics with interactions. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 99(5):577–617, 2013.
- [Bob15] A. Bobrowski. *Analiza funkcjonalna jeden i pół. Szkic o zupełności*. Podręczniki – Politechnika Lubelska, 2015.
- [BR19] B. Bonnet and F. Rossi. The Pontryagin maximum principle in the Wasserstein space. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 58(1):Art. 11, 36, 2019.
- [Bre11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [CC04] R. M. Colombo and A. Corli. A semilinear structure on semigroups in a metric space. *Semigroup Forum*, 68(3):419–444, 2004.
- [CCGU12] J. A. Carrillo, R. M. Colombo, P. Gwiazda, and A. Ulikowska. Structured populations, cell growth and measure valued balance laws. *Journal of Differential Equation*, 252:3245–3277, 2012.
- [CGR18] R. M. Colombo, P. Gwiazda, and M. Rosińska. Optimization in structure population models through the Escalator Boxcar Train. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 24(1):377–399, 2018.
- [CLM13] G. Crippa and M. Lécureux-Mercier. Existence and uniqueness of measure solutions for a system of continuity equations with non-local flow. *NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications*, 20(3):523–537, 2013.
- [CnCC13] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, and S. Cuadrado. Measure solutions for some models in population dynamics. *Acta Applicandae Mathematicae*, 123:141–156, 2013.
- [CnCR11] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, and J. Rosado. A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(3):515–539, 2011.
- [Coh80] D. L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Con67] E. D. Conway. Generalized solutions of linear differential equations with discontinuous coefficients and the uniqueness question for multidimensional quasilinear conservation laws. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18(2):238–251, 1967.
- [CPT11] E. Cristiani, B. Piccoli, and A. Tosin. Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics. *Multiscale Modeling & Simulation. A SIAM Interdisciplinary Journal*, 9(1):155–182, 2011.
- [Cri07] G. Crippa. *Differentiability in perturbation parameter of measure solution to nonlinear perturbed transport equation*. Scuola Normale Superiore di Pisa, University of Zurich, 2007.
- [DGMCS] C. Düll, P. Gwiazda, A. Marciniak-Czochra, and J. Skrzeczkowski. *Structured population equation in spaces of measures*. in preparation.
- [DH88] K. Dietz and K. P. Hadeler. Epidemiological models for sexually transmitted diseases. *Journal of Mathematical Biology*, 26(1):1–25, 1988.

- [DHL14] P. Degond, M. Herty, and J.-G. Liu. Flow on sweeping networks. *Multiscale Modeling & Simulation. A SIAM Interdisciplinary Journal*, 12(2):538–565, 2014.
- [DL89] R. J. DiPerna and P. L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 87(89):511–547, 1989.
- [DMCPZ11] M. Doumic, A. Marciniak-Czochra, B. Perthame, and J. P. Zubelli. A structured population model of cell differentiation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(6):1918–1940, 2011.
- [Dud66a] R. Dudley. Convergence of Baire measures. *Studia Mathematica*, 27(3):251–268, 1966.
- [Dud66b] R. Dudley. Correction to "Convergence of Baire measures" *Studia Mathematica* 27(1966). *Studia Mathematica*, 51:275, 1966.
- [EG92] L. C. Evans and R. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Function*. CRC Press, 1992.
- [EHM16] J. H. M. Evers, S. C. Hille, and A. Muntean. Measure-valued mass evolution problems with flux boundary conditions and solution-dependent velocities. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(3):1929–1953, 2016.
- [Eva99] L. C. Evans. Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer. In *Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA)*, pages 65–126. International Press of Boston, MA, 1999.
- [Eva08] L. C. Evans. *Równania różniczkowe cząstkowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag New York, 1969.
- [FLOS18] M. Fornasier, L. Lisini, C. Orrieri, and G. Savaré. Mean-field optimal control as gamma-limit of finite agent controls. *ArXiv:1803.04689v1*, 2018.
- [Gar02] G. P. Garnett. An introduction to mathematical models in sexually transmitted disease epidemiology. *Sexually Transmitted Infections*, 78:7–12, 2002.
- [GHŁ] P. Gwiazda, S. C. Hille, and K. Łyczek. Differentiability in perturbation parameter of measure solution to non-linear perturbed transport equation. *In preparation*.
- [GHŁŚ19] P. Gwiazda, S. C. Hille, K. Łyczek, and A. Świerczewska-Gwiazda. Differentiability in perturbation parameter of measure solutions to perturbed transport equation. *Kinetic & Related Models*, 12:1093–1108, 2019.
- [GJMU14] P. Gwiazda, J. Jabłoński, A. Marciniak-Czochra, and A. Ulikowska. Analysis of particle methods for structured population models with nonlocal boundary term in the framework of bounded Lipschitz distance. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(6):1797–1820, 2014.
- [GLM10] P. Gwiazda, T. Lorenz, and A. Marciniak-Czochra. A nonlinear structured population model: Lipschitz continuity of measure-valued solutions with respect to model ingredients. *Journal of Differential Equations*, 248:2703–2735, 2010.
- [GM79] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy. Some simple models for nonlinear age-dependent population dynamics. *Mathematical Biosciences. An International Journal*, 43(3-4):199–211, 1979.
- [GM10] P. Gwiazda and A. Marciniak-Czochra. Structured population equations in metric spaces. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 7:733–773, 2010.
- [GMCT18] P. Gwiazda, A. Marciniak-Czochra, and H. R. Thieme. Measures under the flat norm as ordered normed vector space. *Positivity. An International Mathematics Journal Devoted to Theory and Applications of Positivity*, 22(1):105–138, 2018.

- [GR17] P. Goatin and F. Rossi. A traffic flow model with non-smooth metric interaction: well-posedness and micro-macro limit. *Communications in Mathematical Sciences*, 15(1):261–287, 2017.
- [GS16] P. Goatin and S. Scialanga. Well-posedness and finite volume approximations of the LWR traffic flow model with non-local velocity. *Networks and Heterogeneous Media*, 11(1):107–121, 2016.
- [GSR04] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Navier–Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels. *Inventiones mathematicae*, 155(1):81–161, 2004.
- [Har02] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [HSWZ17] S. C. Hille, T. Szarek, D. T. H. Worm, and M. Ziemiańska. On a schur-like property for spaces of measures. *ArXiv:1703.00677*, 2017.
- [HW09] S. C. Hille and D. H. T. Worm. Embedding of semigroups of Lipschitz maps into positive linear semigroups on ordered Banach spaces generated by measures. *Integral Equations and Operator Theory*, 63(3):351–371, 2009.
- [KM27] W. Kermack and A. McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics–i. *The Royal Society*, 1927. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1991, volume 43, pages 33–55.
- [KM33] W. Kermack and A. McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics. iii.—further studies of the problem of endemicity. *The Royal Society*, 1933. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1991, volume 43, pages 57–88.
- [KM91a] W. Kermack and A. McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics–i. 1927. *Bulletin of Mathematical Biology*, 53:33–55, 1991.
- [KM91b] W. Kermack and A. McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics–iii. further studies of the problem of endemicity. 1931. *Bulletin of Mathematical Biology*, 53:57–87, 1991.
- [KP92] D. Kinderlehrer and P. Pedregal. Weak convergence of integrands and the Young measure representation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(1):1–19, 1992.
- [KR] S. Kolouri and G. K. Rohde. Optimal transport: A crash course.
- [Kra06] A. S. Kravchenko. Completeness of the space of separable measures in the Kantorovich-Rubinshtein metric. *Rossiiskaya Akademiya Nauk. Sibirskoe Otdelenie. Institut Matematiki im. S. L. Soboleva. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 47(1):85–96, 2006.
- [Kwa91] M. Kwapisz. Bielecki’s method, existence and uniqueness results for Volterra integral equations in L^p space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 154(2):403–416, 1991.
- [Man07] S. Maniglia. Probabilistic representation and uniqueness results for measure-valued solutions of transport equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 87(6):601–626, 2007.
- [McK26] A. McKendrick. Applications of mathematics to medical problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 40:98–130, 1926.
- [MD86] J. A. Metz and O. Diekmann. *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.
- [MM07] D. Maxin and F. Augusto. Milner. The effect of nonreproductive groups on persistent

- sexually transmitted diseases. *Mathematical Biosciences and Engineering. MBE*, 4(3):505–522, 2007.
- [MO04] S. Müller and M. Ortiz. On the Γ -convergence of discrete dynamics and variational integrators. *Journal of Nonlinear Science*, 14(3):279–296, 2004.
- [Pac13] J. Pachl. *Uniform spaces and measures*, volume 30 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2013.
- [Pel99] A. Pelczar. Wybrane karty z polskiej historii równań różniczkowych. *Prace Komisji Historii Nauki Polskiej Akademii Umiejętności 1*, 1:22–38, 1999.
- [Per07] B. Perthame. *Transport Equations in Biology*. Birkhäuser Verlag, 2007.
- [Pic17] B. Piccoli. Measure differential equations. *ArXiv:1708.09738v1*, 2017.
- [PR13] B. Piccoli and F. Rossi. Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces: convergence of numerical schemes. *Acta Applicandae Mathematicae*, 124:73–105, 2013.
- [PR14] B. Piccoli and F. Rossi. Generalized Wasserstein distance and its application to transport equations with source. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 211(6):335–358, 2014.
- [PR16] B. Piccoli and F. Rossi. On properties of the generalized Wasserstein distance. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 222(3):1339–1365, 2016.
- [Pra05] A. Pratelli. Equivalence between some definitions for the optimal mass transport problem and for the transport density on manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV*, 184(2):215–238, 2005.
- [Rud76] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [San15] F. Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Springer International Publishing, 2015.
- [Sch07] W. Schirotzek. *Nonsmooth Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Skr18] J. Skrzeczkowski. Measure solutions to perturbed structured population models – differentiability with respect to perturbation parameter. *ArXiv:1812.01747v3*, 2018.
- [Smo94] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag New York, 2nd edition, 1994.
- [SS67] J. W. Sinko and W. Streifer. A new model for age-size structure of a population. *Ecology*, 48:910–918, 1967.
- [Str06] P. Strzelecki. *Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 2006.
- [Tar07] L. Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, Berlin; UMI, Bologna, 2007.
- [Thi03] H. R. Thieme. *Mathematics in Population Biology*. Princeton University Press, 2003.
- [Uli12] A. Ulikowska. An age-structured two-sex model in the space of Radon measures: well posedness. *Kinetic and Related Models*, 5(4):873–900, 2012.
- [Uli13] A. Ulikowska. Structured population models in metric spaces. *PhD Thesis*, 2013.

- [Ver13] A. M. Vershik. Long history of the monge-kantorovich transportation problem. *The Mathematical Intelligencer*, 35(4):1–9, Dec 2013.
- [Vil09] C. Villani. *Optimal transport*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.
- [Vil18] C. Villani. *Narodziny twierdzenia czyli matematyka na gorąco*. Wydawnictwo Atut, 2018.
- [Web85] G. F. Webb. *Theory of nonlinear age-dependent population dynamics*. Marcel Dekker, New York, 1985.