Anizotropowe zagadnienia najmniejszego gradientu

Autoreferat

Wojciech Górny

17 grudnia 2019

Wprowadzenie

Głównym tematem niniejszej pracy jest analiza kilku wariantów zagadnienia najmniejszego gradientu. Jest ono wariacyjnym sformułowaniem równania 1-Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta:

$$\min \left\{ \int_\Omega |Du|, \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}. \tag{LGP}$$

Najbardziej interesuje nas przypadek anizotropowy, kiedy zamiast euklidesowego całkowitego wahania będziemy minimalizować całkowite wahanie względem funkcji $\phi(x,p)$, która jest wypukła, 1-jednorodna w drugiej zmiennej oraz porównywalna z normą euklidesową $|p|$.

$$\min \left\{ \int_\Omega \phi(x, Du), \quad u \in BV(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}. \tag{aLGP}$$

Pozostałe aspekty tego zagadnienia, którymi będziemy się zajmować, to struktura rozwiązań, ich regularność oraz wpływ geometrii obszaru Ω na istnienie i strukturę rozwiązań.

Poniższa rozprawa doktorska jest wynikiem trzech lat pracy i wszystkie wyniki zostały już opublikowane w czasopismach bądź upublicznione w repozytorium arXiv. Są to, w kolejności pojawiania się w arXiv, następujące artykuły: [6]; [5]; [8]; [9]; [3]. Jestem jedynym autorem tych artykułów za wyjątkiem [3], który jest wynikiem mojej współpracy z Samerem Dweikiem z University of British Columbia. Poniżej wprowadzimy podstawowe pojęcia oraz stan literatury dotyczący zagadnienia najmniejszego gradientu, co odpowiada rozdziałom 1 i 2 w pracy. Następnie omówimy osobno treść każdego z rozdziałów 3-7. Każdy rozdział odpowiada jednemu artykułowi.

Funkcjonał, który minimalizujemy w (aLGP) ma liniowy wzrost w drugiej zmiennej. Z tego powodu nie możemy pracować w przestrzeniach Sobolewa ani Orlicza - naturalną przestrzenią do szukania minimów jest przestrzeń BV. Naszym największym problemem będzie przybliżanie danych brzegowych oraz zwartość rodziny rozwiązań przybliżonych zagadnień. Standardowa teoria przestrzeni BV daje nam jedynie zwartość w topologii L^1; kiedy dodatkowo zakładamy warunek brzegowy Dirichleta, tracimy zwartość, ponieważ operator śladu na BV nie jest ciągły w topologii L^1. Zagadnienie najmniejszego gradientu jest jednym z podstawowych przykładów, na których możemy próbować zrozumieć rolę graną przez warunki brzegowe Dirichleta w zagadnieniach minimalizacyjnych z liniowym wzrostem. W tej pracy oraz w literaturze pokazanie, że ślad funkcji granicznej jest właściwy, jest jednym z najbardziej wymagających problemów.

W 1969 Bombieri, de Giorgi oraz Giusti w pracy [2] wprowadzili pojęcie funkcji najmniejszego gradientu, tzn. funkcji, które lokalnie minimalizują całkowite wahanie (bez brania pod uwagę warunków brzegowych). Pokazali oni, że brzegi nadpoziomic tych funkcji minimalizują powierzchnię, co umożliwia badanie powierzchni minimalnych za pomocą funkcji najmniejszego gradientu. Dzięki temu wynikowi oraz jego anizotropowym wersjom jednym z kluczowych narzędzi w poniższej rozprawie będzie analiza nadpoziomic rozwiązań.

Zagadnienia najmniejszego gradientu w formie (LGP) zostało wprowadzone przez Sternberga, Williamsa i Ziemera w 1992 roku w pracy [21]. Ich główna motywacja pochodzi z pracy Parksa [17], w której opisano numeryczny algorytm przybliżania powierzchni minimalnych z zadanym brzegiem i orientacją. Jako jeden z kroków algorytmu należy rozwiązać zagadnienie najmniejszego gradientu z dodatkowymi więzami: warunki rozważane w literaturze to standardowo ograniczenie na stałą Lipschitza danych brzegowych bądź punktowe ograniczenie gradientu rozwiązania, patrz [14] oraz [22]; to podejście ma też związki z zagadnieniem optymalnego projektowania. Wykorzystując metody geometrycznej teorii miary, autorzy [21] pokazali istnienie, jednoznaczność oraz ciągłość aż do brzegu rozwiązań dla ciągłych danych brzegowych przy założeniu pewnych warunków geometrycznych na obszar ograniczony Ω, nieco słabszych niż ścisła wypukłość. To podejście jest najczęstszym stosowanym obecnie w literaturze.

Inne spojrzenie na problem (LGP) pochodzi od rozważania p-laplasjanu z warunkami brzegowymi Dirichleta:

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = f,$$

gdzie $1 < p < \infty$. Wariacyjne sformułowanie powyższego równania to następujące zagadnienie minializacyjne:

$$\min \left\{ \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p, \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = f \right\}.$$

Zagadnienie (LGP) jest formalną granicą zagadnienia p-Laplace'a w wersji wariacyjnej dla $p \to 1$ ([13]). W 2014 Mazón, Rossi oraz Segura de León w pracy [15] sformułowali definicję rozwiązania równania 1-Laplace'a

$$-\mathrm{div}(\frac{Du}{|Du|}) = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = f$$

oraz nadali mu sens jako równaniu Euler-Lagrange'a dla zagadnienia (LGP).

Anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu w formie (aLGP) zostało wprowadzone przez Jerrarda, Moradifama i Nachmana w 2013 w pracy [12]. Główną motywacją dla autorów było zagadnienie najmniejszego gradientu z wagą, tzn. dla $\phi(x, Du) = a(x)|Du|$; ma ono związek z zagadnieniem obrazowania przewodnictwa. Autorzy [12] rozważają sytuację, w której anizotropia może zależeć od położenia i okazuje się, że o ile otrzymanie istnienia rozwiązań da ciągłych danych brzegowych jest łatwe - autorzy wskazali wystarczający oraz niemal konieczny warunek (nazywany *warunkiem bariery*). Jeśli chodzi o jednoznaczność i regularność rozwiązań, sytuacja jest bardziej skomplikowana: wszystkie pozytywne wyniki pokazane w [12] mają bardzo mocne założenia na wysoką regularność oraz jednostajną wypukłość ϕ, które pochodzą z klasycznej pracy Schoena, Simona i Almgrena [19] dotyczącej rozmiaru osobliwości powierzchni ϕ-minimalnych.

Zagadnienie najmniejszego gradientu ma także związek z zagadnieniem optymalnego transportu. Jak pokazali w 2016 w pracy [10] Rybka, Sabra oraz autor niniejszej rozprawy, w dwóch wymiarach dla wypukłej dziedziny Ω jest ono równoważne zagadnieniu Beckmanna

$$\min \left\{ \int_\Omega |p|, \quad p \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad \mathrm{div}\, p = 0, \quad p \cdot \nu|_{\partial\Omega} = g := \partial_\tau f \right\}, \tag{BP}$$

które z kolei jest równoważne zagadnieniu

$$\min\left\{\int_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|x-y|\,\mathrm{d}\gamma\,:\,\gamma\in\mathcal{M}^+(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}),\,(\Pi_x)_\#\gamma=g^+\text{ and }(\Pi_y)_\#\gamma=g^-\right\},\tag{OTP}$$

gdzie g^+ i g^- to dodatnia i ujemna część g i miary początkowa oraz końcowa są zlokalizowane na $\partial\Omega$. Ta równoważność jest formalnie zadana poprzez $p = R_{-\frac{\pi}{2}}Du$.

Zanim przejdziemy do sformułowania najważniejszych wyników rozprawy, podkreślmy, że zagadnienie najmniejszego gradientu jest niezwykle związane z geometrią obszaru. Dzięki wynikom z [2] możemy patrzeć na istnienie rozwiązań jako na istnienie takiej foliacji obszaru Ω za pomocą rodziny powierzchni minimalnych, która jest w pewnym sensie zgodna z danymi brzegowymi. Powracającym motywem w tej rozprawie jest to, że dane brzegowe wymuszają pewną strukturę rozwiązań, i jakie są tego konsekwencje dla istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań. W szczególności, sformułowanie problemu oraz prawdziwość wyników będą zależeć od geometrii obszaru. Ponieważ warunek brzegowy rozumiemy w sensie śladu, w całej pracy (o ile nie jest wprost napisane inaczej) zakładamy, że Ω jest obszarem otwartym ograniczonym z brzegiem lipschitzowskim.

Struktura rozwiązań w przypadku izotropowym

W rozdziale 3 zajmujemy się kwestią jednoznaczności rozwiązań w zagadnieniu najmniejszego gradientu. Jeśli dane brzegowe są nieciągłe, to jak pokazano w [15], może nie być jednoznaczności rozwiązań nawet jeśli dziedzina jest ściśle wypukła. Autorzy także analizują szczegółowo konkretny klasyczny przykład danych brzegowych i zaproponowali hipotezę, że struktura poziomic wszystkich rozwiązań jest taka sama. W poniższym Twierdzeniu ta hipoteza jest udowodniona oraz wyrażona jako wynik dotyczący punktowych wartości rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu.

Twierdzenie 1 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $2 \leq N \leq 7$, będzie obszarem ograniczonym wypukłym. Załóżmy, że $f \in L^1(\partial\Omega)$ i niech u, v będą dokładnymi reprezentantami dwóch rozwiązań zagadnienia* (LGP). *Wtedy $u = v$ na $\Omega\backslash(C \cup \mathcal{N})$, gdzie u oraz v są lokalnie stałe na C oraz $\mathcal{N}$ ma wymiar Hausdorffa co najwyżej $N-1$.*

Ponieważ nasze główne narzędzia to związek między zagadnieniem (LGP) i powierzchniami minimalnymi wprowadzony w [2] oraz zasada maksimum dla powierzchni minimalnych, dowód działa do wymiaru równego siedem; do tego wymiaru brzegi nadpoziomic rozwiązań są gładkie. Nie podnosimy tutaj (jeszcze) kwestii istnienia rozwiązań. W dalszej części rozdziału badamy konsekwencje twierdzenia 1: prezentujemy kryterium do sprawdzania, czy dana funkcja jest rozwiązaniem przy założeniu, że znamy już jedno rozwiązanie u_0, oraz istnienie wyróżnionego rozwiązania wskazanego przez ciąg przybliżonych zagadnień pochodzących z [1].

Rozdział 3 odpowiada artykułowi [6], którego jestem jedynym autorem i który został opublikowany w czasopiśmie "Journal of Mathematical Analysis and Applications".

Nieściśle wypukłe normy anizotropowe

W rozdziale 4 rozważamy zagadnienie najmniejszego gradientu na płaszczyźnie względem anizotropii zadanej przez normę ϕ. Przez większość rozdziału zakładamy ciągłość danych brzegowych. W przypadku izotropowym istnienie, jednoznaczność i regularność zależą od geometrii obszaru Ω; tutaj, sytuacja dodatkowo się komplikuje, ponieważ mamy zależność między kształtem Ω i kształtem kuli jednostkowej w normie anizotropowej $B_\phi(0,1)$. Naszym celem jest zbadanie tego związku. Zwracamy szczególną uwagę na dwie rzeczy. Pierwsza to zależność od regularności ϕ: chcemy ominąć założenia regularnościowe z [19] za pomocą założenia, że ϕ to norma. Druga to przypadek, kiedy ϕ nie jest ściśle wypukła (tzn. kula $B_\phi(0,1)$ nie jest ściśle wypukła). Wówczas warunek bariery nie jest spełniony dla gładkich obszarów Ω, więc musimy użyć innego sposobu, aby otrzymać istnienie rozwiązań.

Dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla ściśle wypukłej normy ϕ jest prosty i używa rzutowań zamiast założeń regularnościowych z [19]. Interesuje nas przede wszystkim hölderowska ciągłość rozwiązań. Klasyczne wyniki z [21] mówią, że dla jednostajnie wypukłej dziedziny, jeśli dane brzegowe są z klasy $C^{0,\alpha}$, to rozwiązanie jest z klasy $C^{0,\frac{\alpha}{2}}$ i wykładnik $\frac{\alpha}{2}$ jest optymalny. W poniższym Twierdzeniu dowodzimy analogicznego wyniku (z tym samym wykładnikiem) w przypadku anizotropowym. W dowodzie używamy w istotny sposób metod geometrii płaskiej.

Twierdzenie 2 *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest jednostajnie wypukłą dziedziną oraz ϕ jest ściśle wypukłą normą na $\mathbb{R}^2$. Załóżmy, że $f \in C(\partial\Omega)$ i niech ω będzie modułem ciągłości f. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia (aLGP) dla danych brzegowych f. Wówczas $u \in C(\overline{\Omega})$ i ma ono moduł ciągłości*

$$\overline{\omega}(|x-y|) = \omega(c(\Omega)|x-y|^{1/2}).$$

W szczególności, jeśli $f \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, to $u \in C^{0,\alpha/2}(\overline{\Omega})$.

Kiedy ϕ jest nieściśle wypukłą normą na płaszczyźnie, to kula jednostkowa $B_\phi(0,1)$ ma płaskie ścianki. Wynika z tego, że żaden obszar Ω z brzegiem klasy C^1 nie spełnia warunku bariery, więc nie możemy użyć istniejącej teorii z [12] i musimy dowodzić istnienia rozwiązań w inny sposób. Otrzymujemy istnienie jednego ciągłego rozwiązania, ale także (dla dowolnej nieściśle wypukłej normy ϕ) konstruujemy takie ciągłe dane brzegowe, że istnieją inne rozwiązania, które mają regularność nie lepszą niż $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Twierdzenie 3 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym wypukłym. Niech ϕ będzie normą na $\mathbb{R}^2$ oraz $f \in C(\partial\Omega)$. Wówczas istnieje rozwiązanie $u \in C(\overline{\Omega})$ zagadnienia (aLGP).*

Rozdział 4 odpowiada artykułowi [5], którego jestem jedynym autorem.

Istnienie rozwiązań dla szerokiej klasy danych brzegowych

W rozdziale 5 zajmujemy się badaniem istnienia rozwiązań anizotropowego zagadnienia najmniejszego gradientu dla nieciągłych danych brzegowych. Używamy bardzo bezpośredniej metody: przybliżamy dane brzegowe za pomocą funkcji ciągłych, używamy zwartego włożenia $BV(\Omega)$ w $L^1(\Omega)$ i otrzymujemy zbieżność rozwiązań przybliżonych zagadnień w $L^1(\Omega)$. Skoro operator śladu nie jest ciągły w topologii L^1, musimy osobno zająć się warunkiem brzegowym.

Jest to możliwe dla danych brzegowych, które są nieciągłe na zbiorze miary zero względem miary $\mathcal{H}^{N-1}$. Udaje nam się dobrze dobrać ciąg przybliżeń w dwóch przypadkach. Po pierwsze, kiedy ϕ jest ściśle wypukłą normą oraz Ω jest ściśle wypukłe, tak że możemy użyć rzutowań (które ściśle zmniejszają ϕ-obwód zbioru). Po drugie, w przypadku gdy ϕ może zależeć od położenia, ale spełnia założenia regularnościowe z [19] i Ω spełnia warunek bariery: wówczas pokazujemy, że ślad granicy jest właściwy używając zasady porównawczej wynikającej z założeń z [19] i pokazanej w [12].

Twierdzenie 4 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie obszarem otwartym ograniczonym z brzegiem lipschitzowskim. Załóżmy, że $f \in L^1(\partial\Omega)$ jest funkcją taką, że $\mathcal{H}^{N-1}$-p.w. punkty $\partial\Omega$ są punktami ciągłości f. Załóżmy, że zachodzi jeden z dwóch warunków:*
(A) ϕ jest ściśle wypukłą normą na $\mathbb{R}^N$ i Ω jest ściśle wypukła;
(B) ϕ spełnia założenia regularnościowe z [19] i Ω spełnia warunek bariery.
Wówczas istnieje rozwiązanie zagadnienia (aLGP) *dla danych brzegowych f.*

Twierdzenie 4 jest rozszerzeniem znanych wyników (np. [7]) zarówno jeśli chodzi o wymiar dziedziny, jak i klasę dopuszczalnych danych brzegowych. Jest optymalne w tym sensie, że istnieje znany kontrprzykład na istnienie rozwiązań na płaszczyźnie, jeśli zbiór punktów nieciągłości f ma dodatnią miarę Lebesgue'a (patrz [20]). Ponadto, powyższe Twierdzenie jest uzupełnione wynikami dotyczącymi nieściśle wypukłych norm na płaszczyźnie i charakteryzacją warunku bariery.

Metody wypracowane podczas dowody Twierdzenia 4 są następnie zastosowane w innym kontekście. Chcemy znaleźć przestrzeń funkcyjną na $\partial\Omega$, dla której zagadnienie najmniejszego gradientu jest dobrze postawiona dla nieograniczonych obszarów. Musimy zwracać uwagę na dwie rzeczy: regularność danych brzegowych oraz kształt dziedziny. Oczywiście musimy odpowiednio zmodyfikować definicję rozwiązania, jako że niekoniecznie leży ono w $BV(\Omega)$, a raczej w $BV_{loc}(\Omega)$.

W przypadku nieograniczonym jest kilka dodatkowych trudności. Po pierwsze, nie działa konstrukcja Sternberga-Williamsa-Ziemera (patrz [21]), która daje istnienie, jednoznaczność i ciągłość rozwiązań dla ciągłych danych brzegowych. Zamiast tego, pokazujemy istnienie rozwiązań dla ciągłych danych brzegowych używając odpowiednio dobranych przybliżeń zbioru Ω od wewnątrz. Ciekawsza jest kwestia jednoznaczności rozwiązań, gdzie główny wynik to:

Twierdzenie 5 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie nieograniczonym ściśle wypukłym obszarem oraz $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. Niech $f \in C_0(\partial\Omega)$. Wówczas istnieje rozwiązanie $u \in BV_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zagadnienia najmniejszego gradientu dla danych brzegowych f i jest ono jednoznaczne.*

Ciągłość rozwiązania nie jest natychmiastowa - nasza procedura aproksymacyjna nie daje oszacowań na tempo zbieżności przybliżonych rozwiązań u_n do u. Ciągłość otrzymujemy za pomocą zasady maksimum dla powierzchni minimalnych. Ponadto, nawet jeśli dane brzegowe są w $C_b(\partial\Omega)$ zamiast $C_0(\partial\Omega)$, to jeśli Ω zawiera stożek, to tracimy jednoznaczność rozwiązań nawet dla bardzo prostych danych brzegowych. Oznacza to, że twierdzenia strukturalne dla funkcji najmniejszego gradientu takie jak Twierdzenie 1 czy [16, Theorem 1.1] nie zachodzą na zbiorach nieograniczonych.

Rozdział 5 odpowiada artykułowi [8], którego jestem jedynym autorem i który został zaakceptowany przez czasopismo Indiana University Mathematics Journal.

Oszacowania na rozwiązania w L^p

Dla zagadnienia najmniejszego gradientu znana jest słaba zasada maksimum (patrz [11]): ograniczenie danych brzegowych w L^∞ jest równocześnie ograniczeniem rozwiązania w L^∞. W rozdziale 6 naszym celem jest zbadanie dwóch zbliżonych problemów. Pierwszy z nich to oszacowanie w L^p normy funkcji $\phi-$najmniejszego gradientu w terminach normy ich danych brzegowych w pewnym L^q. Drugi z nich to pokazanie oszacowań w L^∞ dla rozwiązań z dala od brzegu.

Nie poruszamy kwestii istnienia ani jednoznaczności rozwiązań: dla danego rozwiązania zagadnienia (aLGP) pokazujemy oszacowanie jego normy w $L^{\frac{Np}{N-1}}$ oraz oszacowań w L^∞ z dala od brzegu. Z tego powodu, w przeciwieństwie do pozostałych rozdziałów, nie nakładamy dodatkowych założeń na Ω: jest to obszar otwarty ograniczony z brzegiem lipschitzowskim.

Używając argumentu opartego na anizotropowej wersji wyników z [2] łączących rozwiązania zagadnienia (aLGP) z powierzchniami ϕ-minimalnymi oraz nierówności izoperymetrycznej, otrzymujemy (bez założeń regularnościowych na ϕ) następujący wynik.

Twierdzenie 6 *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ to obszar otwarty ograniczony z brzegiem lipschitzowskim. Dla $1 \leq p < \infty$, jeśli $u \in BV(\Omega)$ jest funkcją ϕ-najmniejszego gradientu taką, że*

$$Tu = f \in L^p(\partial\Omega),$$

to $u \in L^{\frac{Np}{N-1}}(\Omega)$. Ponadto, wykładnik $\frac{Np}{N-1}$ jest optymalny.

Pokazujemy również lokalne oszacowania w L^∞ w dwóch przypadkach: anizotropowym w $\mathbb{R}^2$ oraz izotropowym w dowolnym wymiarze. W tym celu wykorzystujemy odpowiednio strukturę jednowymiarowych prądów oraz formułę monotoniczności dla powierzchni minimalych. Otrzymujemy także konkretne oszacowanie zależne od odległości od brzegu.

Twierdzenie 7 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem lipschitzowskim. Załóżmy, że u jest funkcją najmniejszego gradientu bądź $N = 2$ i u jest funkcją ϕ-najmniejszego gradientu. Wówczas $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Ponadto, jeśli $Tu = f \in L^1(\partial\Omega)$, to*

$$ess \sup_{\Omega'} u - ess \inf_{\Omega'} u \leq \frac{C(N)\|f\|_{L^1(\partial\Omega)}}{(dist(\partial\Omega, \partial\Omega'))^{N-1}}.$$

Rozdział 6 odpowiada artykułowi [9], którego jestem jedynym autorem i który został zaakceptowany przez czasopismo Proceedings of the American Mathematical Society.

Zagadnienie najmniejszego gradientu na pierścieniach

W rozdziale 7 badamy zagadnienie najmniejszego gradientu na płaszczyźnie dla odmiennego typu obszaru. Jak widzieliśmy w poprzednich rozdziałach, zagadnienie to jest zazwyczaj rozważane przy założeniu wypukłości bądź ścisłej wypukłości Ω czy w przypadku anizotropowym warunku bariery; w tym rozdziale, naszym celem jest analiza zagadnienia najmniejszego gradientu na pierścieniu, który nie spełnia powyższych założeń. Skoro dziedzina nie jest ściśle wypukła, to istnieją ciągłe dane brzegowe takie, że zagadnienie (LGP) nie ma rozwiązań. Pokażemy istnienie rozwiązań przy założeniu odpowiednich warunków dopuszczalności na zachowanie danych brzegowych. Ponieważ nie możemy użyć żadnej z technik używanych w poprzednich rozdziałach, użyjemy zamiast tego równoważności mędzy zagadnieniem (LGP) a zagadnieniem optymalnego transportu. Dla prostoty formułujemy wyniki w przypadku izotropowym, ale odnosimy się także do przypadku anizotropowego.

Zaczynamy od rozszerzenia równoważności między zagadnieniami najmniejszego gradientu i Beckmanna na przypadek, gdy Ω to pierścień. Okazuje się, że skoro $\partial\Omega$ nie jest spójny, to rozwiązywanie zagadnienia Beckmanna jest równoważne rozwiązywaniu równocześnie wielu zagadnień najmniejszego gradientu.

Twierdzenie 8 *Rozważmy następujące zagadnienia minimalizacyjne:*

$$\inf \left\{ \int_{\overline{\Omega}} |v| \ : \ v \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2), \ \nabla \cdot v = g \right\} \tag{1}$$

$$\inf\left\{ \int_\Omega |Du| \, : \, u \in BV(\Omega), \, \partial_\tau(Tu) = g \right\}, \tag{2}$$

Mamy $\inf(1) = \inf(2)$*. Ponadto, z każdego rozwiązania* $u \in BV(\Omega)$ *zagadnienia* (2) *możemy skonstruować rozwiązanie zagadnienia* (1)*. Z drugiej strony, z każdego rozwiązania* $v \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ *zagadnienia* (1) *możemy skonstruować rozwiązanie zagadnienia* (2)*, jeśli tylko* $|v|(\partial\Omega) = 0$.

Główny pomysł pochodzi z [10] i [14] i polega na użyciu formalnej równoważności $v = R_{-\frac{\pi}{2}} Du$. Trzeba pokazać, że takie pole wektorowe jest dopuszczalne w (1) i że można z niego odzyskać funkcję u. Ponieważ pracujemy w dwóch wymiarach, prostopadły gradient jest polem bezdywergencyjnym w Ω; nie wystarcza to jednak do odzyskania funkcji u, bo w dowodzie w [10] odcałkowuje się pewną 1-formę, czego nie możemy tu zrobić, bo Ω nie jest jednospójna i a priori całka może zależeć od wyboru drogi całkowania. Po uporaniu się z tym problemem dowodzimy równoważności między zagadnieniami Beckmanna i optymalnego transportu na pierścieniach.

W tym rozdziale, skoro pierścień nie jest wypukły i jego brzeg jest niespójny, nie ma ogólnych wyników implikujących istnienie rozwiązań zagadnienia (LGP). Są także dostępne bardzo proste przykłady gładkich danych brzegowych, dla których zagadnienie (LGP) nie ma rozwiązań. Dowodzimy istnienia rozwiązań przy założeniu pewnych warunków dopuszczalności, które są wybrane tak, aby promienie transportowe leżały wewnątrz Ω. To podejście odpowiada podejściu zaprezentowanemu w [18] dla wielokątów. Pokazujemy także jednoznaczność rozwiązań dla ciągłych danych brzegowych używając metod transportowych.

Zauważmy, że formalna równoważność w postaci $v = R_{-\frac{\pi}{2}} Du$ implikuje, że oszacowania w L^p na pole wektorowe v rozwiązujące (1) (bądź na gęstość transportu) są oszacowaniami w $W^{1,p}$ na rozwiązanie u zagadnienia (2). Ten fakt został pierwszy raz zauważony i dowiedziony dla jednostajnie wypukłych obszarów w [4]; rozszerzamy zakres stosowalności tej metody do przypadku, gdy Ω jest pierścieniem przy dodatkowych założeniach na dane brzegowe.

Twierdzenie 9 *Przy odpowiednich warunkach dopuszczalności na dane brzegowe, dla każdego* $p \in [1, \infty]$ *mamy, że rozwiązanie* v *zagadnienia* (1) *należy do* $L^p(\Omega; \mathbb{R}^2)$*, o ile* $g \in L^p(\partial\Omega)$*. W szczególności, odpowiadające mu rozwiązanie* $u \in BV(\Omega)$ *zagadnienia* (2) *należy do* $W^{1,p}(\Omega)$.

Rozdział 7 odpowiada artykułowi [3], który jest wynikiem mojej współpracy z Samerem Dweikiem, który teraz jest na University of British Columbia.

Literatura

[1] M. Amar, M. Chirocotto, L. Giacomelli, and G. Riey. Mass-constrained minimization of a one-homogeneous functional arising in strain-gradient plasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, 397:381–401, 2013.

[2] E. Bombieri, E. de Giorgi, and E. Giusti. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.*, 7:243–268, 1969.

[3] S. Dweik and W. Górny. Least gradient problem on annuli. *arXiv:1908.09113*, 2019.

[4] S. Dweik and F. Santambrogio. L^p bounds for boundary-to-boundary transport densities, and $W^{1,p}$ bounds for the BV least gradient problem in 2D. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 58(1):31, 2019.

[5] W. Górny. Least gradient problem with respect to a non-strictly convex norm. *arXiv:1806.01921*, 2018.

[6] W. Górny. (Non)uniqueness of minimizers in the least gradient problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 468:913–938, 2018.

[7] W. Górny. Planar least gradient problem: existence, regularity and anisotropic case. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 57(4):98, 2018.

[8] W. Górny. Existence of minimisers in the least gradient problem for general boundary data. *Indiana Univ. Math. J.*, to appear, 2019.

[9] W. Górny. L^p regularity of least gradient functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear, 2019.

[10] W. Górny, P. Rybka, and A. Sabra. Special cases of the planar least gradient problem. *Nonlinear Anal.*, 151:66–95, 2017.

[11] H. Hakkarainen, R. Korte, P. Lahti, and N. Shanmugalingam. Stability and continuity of functions of least gradient. *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 3:123–139, 2014.

[12] R. Jerrard, A. Moradifam, and A. Nachman. Existence and uniqueness of minimizers of general least gradient problems. *J. Reine Angew. Math.*, 734:71–97, 2018.

[13] P. Juutinen. p-harmonic approximation of functions of least gradient. *Indiana Univ. Math. J.*, 54:1015–1029, 2005.

[14] R. Kohn and S. Strang. The constrained least gradient problem. In R. Knops and A. Lacey, editors, *Non-classical continuum mechanics. Proceedings of the London Mathematical Society Symposium, Durham, July 1986*, pages 226–243, Cambridge, 1986. Cambridge University Press.

[15] J. Mazón, J. Rossi, and S. Segura de León. Functions of least gradient and 1-harmonic functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 63:1067–1084, 2014.

[16] A. Moradifam. Existence and structure of minimizers of least gradient problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 67(3):1025–1037, 2018.

[17] H. Parks. Explicit determination of area minimizing hypersurfaces. *Duke Math. J.*, 44:519–534, 1977.

[18] P. Rybka and A. Sabra. The planar least gradient problem in convex domains, the case of continuous datum. *arXiv:1911.08403*, 2019.

[19] R. Schoen, L. Simon, and F. Almgren. Regularity and singularity estimates on hypersurfaces minimizing parametric elliptic variational integrals. *Acta Mathematica*, 139:217–265, 1977.

[20] G. Spradlin and A. Tamasan. Not all traces on the circle come from functions of least gradient in the disk. *Indiana Univ. Math. J.*, 63:1819–1837, 2014.

[21] P. Sternberg, G. Williams, and W. Ziemer. Existence, uniqueness, and regularity for functions of least gradient. *J. Reine Angew. Math.*, 430:35–60, 1992.

[22] P. Sternberg, G. Williams, and W. Ziemer. The constrained least gradient problem in $\mathbb{R}^n$. *Trans. AMS*, 339(1):403–432, 1993.