Dwustronne oszacowania momentów wieloliniowych form losowych - przypadek rzeczywisty i wektorowy

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Rafał Meller

1. Sformułowanie problemu.

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi (będziemy ten warunek zakładać zawsze, często nie pisząc go wprost) oraz, że $a_{i_1,\ldots,i_d}$ należą do przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$. Wtedy zmienna losową, określoną jako

$$S = \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1} \cdots X_{i_d},$$

nazwiemy chaosem losowym rzędu $d \in \mathbb{N}$. Powiemy, że S jest symetryczny jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są symetryczne. Przez p-ty moment całkowy zmiennej S rozumiemy wielkość zadaną przez $\|S\|_p = (\mathbb{E}\|S\|^p)^{1/p}$. Naszym celem jest znalezienie dwustronnych oszacowań momentów zmiennej S, czyli znalezienie "prostszego"wyrażenia H, zależącego od p, $(a_{i_1,\ldots,i_d})_{i_1,\ldots,i_d}$ oraz rozkładu $X_1, X_2, \ldots$, takiego że

$$C(d)^{-1} H \le \|S\|_p \le C(d) H, \tag{1}$$

gdzie $C(d)$ (odpowiednio C) jest stałą zależną tylko od d (odpowiednio jest stałą numeryczną) i może zmieniać się przy każdym wystąpieniu (będziemy pisać $S \sim^d H$, jeśli (1) zachodzi). W celu wyprowadzenia (1) trzeba nałożyć dodatkowe warunki na rozkład zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$. Będziemy też zakładać pewne warunki o strukturze współczynników $(a_{i_1,\ldots,i_d})_{i_1,\ldots,i_d}$. Na przykład będziemy rozważać przypadek, gdy zmienne $X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład normalny (nawet w tym przypadku wciąż istnieją otwarte problemy). Będziemy wtedy pisać $g_1, g_2, \ldots$ zamiast $X_1, X_2, \ldots$. Inną możliwością jest założenie, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są symetryczne i mają log-wklęsłe ogony, tzn. dla każdego i funkcja $t \to -\ln \mathbb{P}(|X_i| \ge t) \in [0, \infty]$ jest wypukła na przedziale $[0, \infty)$. Jest to interesująca klasa zmiennych losowych, gdyż zawiera wiele ważnych rozkładów, m.in. Rademachera, normalny i wykładniczy.

Typowo będziemy zakładać następujące warunki o strukturze $(a_{i_1,\ldots,i_d})_{i_1,\ldots,i_d}$ (zauważmy, że pierwszy warunek nie zmniejsza ogólności problemu):

- współczynniki $(a_{i_1,\ldots,i_d})$ są symetryczne, tzn. $a_{i_1,\ldots,i_d} = a_{i_{\pi(1)},\ldots,i_{\pi(d)}}$ dla wszystkich permutacji π zbioru $\{1, \ldots, d\}$,
- współczynniki $(a_{i_1,\ldots,i_d})$ są tetraedryczne (ang. tetrahedral), tzn. $a_{i_1,\ldots,i_d} = 0$ jeśli $i_k = i_l$ dla $k \ne l$, $k, l \le d$.

Zakładanie powyższych warunków umożliwia stosowanie metody uniezależnienia (ang. decoupling method) [7, 8, 13], która jest podstawowym narzędziem w badaniu momentów chaosów losowych.

Theorem 1.1 (Kwapień). *Załóżmy, że S jest chaosem rzędu d oraz współczynniki $(a_{i_1,\ldots,i_d})_{i_1,\ldots,i_d}$ są symetryczne i tetraedryczne. Niech*

$$S' := \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} X^1_{i_1} \cdots X^d_{i_d},$$

gdzie $(X_i^k)_{i\le n}$, $k=1,\dots d$ są niezależnymi kopiami wektora losowego $(X_i)_{i\le n}$. Wtedy dla dowolnego $p\ge 1$ mamy

$$\|S\|_p \sim^d \|S'\|_p.$$

Czyli aby oszacować $\|S\|_p$ z dokładnością do stałych, wystarczy oszacować $\|S'\|_p$. Chaos S', zwany chaosem uniezależnionym (ang. decoupled chaos) posiada bogatszą strukturę, która umożliwia stosowanie argumentów indukcyjnych.

Oszacowania ogonów wynikają w prosty sposób z oszacowania momentów. Załóżmy, że $\|S\|_p \sim h(p)$ dla dowolnego $p\ge 1$. Wtedy z nierówności Czebyszewa otrzymujemy, że

$$\mathbb{P}\left(|S|\ge Ch(p)\right) \le \left(\frac{\|S\|_p}{Ch(p)}\right)^p \le e^{-p}. \tag{2}$$

Nierówność (2) może być odwrócona o ile $h(2p)\le Ch(p)$ lub równoważnie $\|S\|_{2p}\le C\|S\|_p$ (ten warunek jest spełniony, jeśli chaos S oparty jest o zmienne losowe, których momenty rosną co najwyżej wielomianowo, co zachodzi we wszystkich naszych rozważaniach). Z nierówności Paleya-Zygmunda mamy wówczas

$$\mathbb{P}\left(|S|\ge C^{-1}h(p)\right) \ge \mathbb{P}\left(|S|\ge \frac{1}{2}\|S\|_p\right) \ge \left(1-\frac{1}{2^p}\right)^2\left(\frac{\|S\|_p}{\|S\|_{2p}}\right)^p \ge e^{-Cp}.$$

2. Znaczenie i wcześniejsze wyniki

Chaosy pojawiają się w wielu gałęziach współczesnego rachunku prawdopodobieństwa, np. jako aproksymacja wielokrotnych całek stochastycznych, składniki w rozwinięciu Fouriera w analizie harmonicznej na kostce dyskretnej (gdy zmienne X_i są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie Rademachera), w problemach związanych ze zliczaniem podgrafów w grafach losowych (wówczas zmienne X_i przyjmują wartości $0,1$), w fizyce statystycznej i statystyce. Przykładowo, nierówność typu Hansona-Wrighta (oszacowania dla form kwadratowych ewaluowanych na wektorach subgausowskich) znalazła szerokie zastosowanie w statystyce (stosunkowo nowa praca [27] jest zacytowana ponad 250 razy według danych z google scholar).

2.1. **Przypadek $d=1$.** Zauważmy, że dla $d=1$, $S=\sum a_iX_i$ jest kombinacją liniową zmiennych losowych i dlatego można zastosować w tym przypadku wiele klasycznych nierówności dotyczących szacowania momentów i ogonów (takich jak np. nierówność Chinczyna, Rosenthala, Bernsteina, Hoeffdinga, Prohorowa lub Bennetta). Sytuacja jest bardziej delikatna, kiedy interesują nas oszacowania dwustronne. Omówimy pokrótce wyniki, jakie były znane, zaczynając od przypadku, gdy współczynniki a_i są rzeczywiste.

Pierwszym wynikiem w tym kierunku były dwustronne oszacowania kombinacji liniowych zmiennych Rademachera $S=\sum_i a_i\varepsilon_i$, otrzymane przez Montgomerego-Smitha [26] oraz Hitczenkę [9] (Montgomery-Smith pokazał oszacowania na ogony zmiennej S, a Hitczenko wyprowadził z nich oszacowania na momenty S). Udowodnili oni, że

$$\left\|\sum a_i\varepsilon_i\right\|_p \sim \sum_{i\le p} a_i + \sqrt{p}\sqrt{\sum_{i\ge p+1}(a_i)^2}, \tag{3}$$

gdzie $a_1,a_2,\dots$ jest nierosnącym ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych (ten warunek może być założony bez straty ogólności). Następnym wynikiem były dwustronne oszacowania momentów kombinacji liniowych zmiennych o logarytmicznie wklęsłych ogonach, otrzymane przez Gluskina i Kwapienia [11] (co uogólniało (3)). Wykazali oni, że

$$\left\|\sum_i a_iX_i\right\|_p \sim \sup\left\{\sum_{i\le p} a_ib_i \mid \sum_{i\le p} N_i(b_i)\le p\right\} + \sqrt{p}\sqrt{\sum_{i\ge p+1}(a_i)^2},$$

gdzie ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest taki jak powyżej, dla $i = 1, 2 \ldots$ $N_i(t) = -\ln \mathbb{P}(|X_i| \geq t) \in [0, \infty]$ oraz spełniony jest warunek normalizacyjny $\mathbb{E}(X_i)^2 = 1$ dla wszystkich i. Hitczenko, Montgomery-Smith i Oleszkiewicz [10] dopełnili ten wynik przez wykazanie, że

$$\left\|\sum_i X_i\right\|_p \sim \left(\sum_i \mathbb{E}|X_i|^p\right)^{1/p} + \sqrt{p}\sqrt{\sum_i \mathbb{E}|X_i|^2},$$

przy założeniu, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są symetryczne oraz mają logarytmicznie wypukłe ogony.

Następny wynik zamknął przypadek $d = 1$ w zakresie współczynników rzeczywistych. Zakładając, że zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są symetryczne (i nic więcej) Latała [15] udowodnił, że

$$\left\|\sum_i X_i\right\|_p \sim \inf\left\{t > 0 : \sum_i \ln\left(\mathbb{E}\left|1 + \frac{X_i}{t}\right|^p\right) \leq p\right\}, \tag{4}$$

(powyższe zachodzi też gdy $\mathbb{P}(X_1, \ldots, X_n \geq 0) = 1$). Użyteczność powyżej formuły wynika z tego, że w wielu przypadkach funkcja $t \to \ln \mathbb{E}|1 + tX_i|^p$ może być oszacowane w prosty sposób.

Jeden z pierwszym rezultatów w przypadku wektorowym (tzn. gdy (a_i) należą do przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$) należy do Latały [17]. Zakładając, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są symetryczne, mają logarytmicznie wklęsłe ogony oraz że zachodzi warunek normalizacyjny $\mathbb{E}X_i^2 = 1$ dla wszystkich i pokazał on, że

$$\left\|\sum a_i X_i\right\|_p \sim \left\|\sum a_i X_i\right\|_1 + \sup_{\substack{\varphi \in F^* \\ \|\varphi\|_* = 1}} \sup\left\{\sum_i \varphi(a_i) b_i \mid \sum_i \hat{N}_i(b_i) \leq p\right\}, \tag{5}$$

gdzie $(F^*, \|\cdot\|_*)$ jest przestrzenią dualną do $(F, \|\cdot\|)$ a funkcje $\hat{N}_i(t)$ są zdefiniowane jako

$$\hat{N}_i(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } |t| < 1 \\ -\ln \mathbb{P}(|X_i| \geq |t|) & \text{dla } |t| \geq 1 \end{cases}.$$

Niedawno formuła (5) została uogólniona przez Latałę i Stzelecką na przypadek zmiennych, których momenty rosną co najwyżej wielomianowo [19] (z punktu widzenia wielu zastosowań jest to wystarczająca ogólność).

2.2. **Przypadek $d \geq 2$.** Przypadek $d \geq 2$ był dużo gorzej zrozumiany. W szczególności wszystkie wyniki przytoczone poniżej (oprócz ostatniego) dotyczą tylko chaosów o wartościach rzeczywistych.

Dla dowolnego d dwustronne oszacowania momentów były znane w następujących sytuacjach:

- Chaosy gaussowskie [14],
- Chaosy oparte o nieujemne zmienne z logarytmicznie wklęsłymi ogonami i nieujemnymi współczynnikami $a_{i_1,\ldots,i_d}$ [18],
- Chaosy oparte o symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wypukłymi ogonami [12].

Łochowski [23] wyprowadził (uogólniając wcześniejszy wynik [5]) dwustronne oszacowania na momenty dla chaosów rzeczywistych dowolnego stopnia opartych o symetryczne zmienne o logarytmicznie wklęsłych ogonach. Jednakże, jego oszacowania zawierają wartości oczekiwane supremów procesów stochastycznych indeksowanych zbiorami zależnymi od p. Takie wyrażenia w ogólności są bardzo trudne do oszacowania.

Dla chaosów małego rzędu znane były następujące wyniki

- $d = 2$, chaosy oparte o symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami [16],
- $d = 3$, chaosy oparte o symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami [1].

Jedynym wynikiem w literaturze, obejmującym dwustronne oszacowania momentów, chaosów wektorowych był rezultat dotyczący chaosów gaussowskich dowolnego rzędu (porównaj podrozdział 3.3). Niestety, zawiera on wielkości (wartości oczekiwane supremów norm, ewaluowanych na wektorze gaussowskim), które są często niezwykle trudne do oszacowania.

3. Omówienie rozprawy

Rozprawa doktorska składa się z pięciu rozdziałów zawierających wyniki badań przeprowadzonych w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego od lutego 2016 r. do grudnia 2018 r. Rozdziały są oparte głównie (z wyjątkiem piątego rozdziału) na opublikowanych, przesłanych lub przygotowanych do wysłania do recenzji artykułach w następujący sposób:

- Rozdział 1 R. Meller, *Two-sided moment estimates for a class of nonnegative chaoses*, Statistics & Probability Letters 119 (2016), 213–219;
- Rozdział 2 R. Meller, *Tail and moment estimates for a class of random chaoses of order two*, przyjęte do Studia Mathematica (2018);
- Rozdział 3 R. Adamczak, R. Latala, R. Meller, *Hanson-Wright inequality in Banach spaces*, wysłane do recenzji;
- Rozdział 4 R. Adamczak, R. Latala, R. Meller, *Moments of Gaussian chaoses in Banach spaces*, w przygotowaniu.

Piąty rozdział zawiera spostrzeżenia autora rozprawy dotyczące chaosów o wartościach w przestrzeniach L_q, opartych o symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami.

Omówimy teraz pokrótce główne wyniki przedstawione w pracy doktorskiej. Ponieważ we wszystkich przypadkach zakładamy warunki, które umożliwiają zastosowanie metody uniezależnienia (z niewielkim wyjątkiem w trzecim i czwartym rozdziale), ograniczymy się głównie do przypadku chaosów uniezależnionych.

3.1. **Dwustronne oszacowania momentów dla klasy nieujemnych chaosów.** Załóżmy, że współczynniki $a_{i_1,\ldots,i_d}$ są nieujemne, $\mathbb{P}(\forall_{i,j}\, X_i^j \geq 0) = 1$ oraz, że dla dowolnych i, j $\mathbb{E}X_i^j = 1$, oraz X_i^j ma logarytmicznie wklęsły ogon. Niech $N_i^j(t) = -\ln \mathbb{P}(X_i^j > t) \in [0, \infty]$. Przy powyższych założeniach i notacji, Łochowski i Latała [18] pokazali, że

$$\|S'\|_p \sim^d \sup \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} \prod_{j=1}^{d} (1 + v_{i_j}^j), \tag{6}$$

gdzie supremum jest wzięte po wektorach $v^1, v^2, \ldots, v^d \in \mathbb{R}_+^n$ takich, że dla dowolnego $j \leq d$ mamy

$$\sum_i N_i^j(v_i^j) \leq p.$$

W szczególności dla $d = 1$ otrzymujemy, że

$$\left\| \sum_i a_i X_i^1 \right\|_p \sim \sup \left\{ \sum_i a_i (1 + v_i^1) \mid \sum_i N_i^1(v_i^1) \leq p \right\}. \tag{7}$$

Łochowski pokazał w swojej pracy doktorskiej, ze chaosy oparte o niezależne zmienne zero-jedynkowe o jednakowych rozkładach spełniają (6) z niewielką poprawką. Mianowicie pokazał on, że

$$C(d)^{-1} \ln^{-d}(\frac{1}{\alpha}) \sup \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} \prod_{k=1}^{d} (\alpha + v_{i_k}^k) \leq \|S'\|_p$$

$$\leq C(d) \ln^{d}(\frac{1}{\alpha}) \sup \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} \prod_{k=1}^{d} (\alpha + v_{i_k}^k),$$

gdzie $\alpha = \mathbb{P}(X_i^j = 1)$ (w powyższej formule występuje $(\alpha + v_{i_k}^k)$ zamiast $(1 + v_{i_k}^k)$ ponieważ zmienne losowe $(X_i^j)_{ij}$ nie są znormalizowane). Pokazał on też, że stała w oszacowaniu górnym musi zależeć od α. Jeśli $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = \alpha$, to dla dowolnego $p \geq 1$ mamy $\|X\|_{2p} \leq \alpha^{-1/2} \|X\|_p$. To motywowało pytanie, czy (6) zachodzi (ze stałą zależną od β) dla nieujemnych zmiennych losowych, spełniających następujący warunek

$$\left\|X_i^j\right\|_{2p} \leq \beta \left\|X_i^j\right\|_p. \tag{8}$$

Udzieliliśmy pozytywnej odpowiedzi, która jest głównym rezultatem pierwszego rozdziału.

Theorem 3.1. *Niech $(X_i^j)_{i \leq n, j \leq d}$ będą niezależnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi spełniającymi warunek (8). Załóżmy ponadto, że dla dowolnego i, j mamy $\mathbb{E}X_i^j = 1$. Wtedy dla dowolnych, nieujemnych współczynników $(a_{i_1,\ldots,i_d})_{i_1,\ldots,i_d \leq n}$ zachodzi*

$$\|S'\|_p \sim^{d,\beta} \sup \sum_{i_1,\ldots,i_d} a_{i_1,\ldots,i_d} \prod_{j=1}^{d} (1 + v_{i_j}^j),$$

gdzie supremum jest wzięte po wektorach $v^1, v^2, \ldots, v^d \in \mathbb{R}_+^n$ takich, że dla dowolnego $j \leq d$ mamy

$$\sum_i N_i^j(v_i^j) \leq p.$$

Można łatwo wykazać, że zmienne posiadająca logarytmicznie wklęsłe ogony, spełnia (8) z $\beta = 3$, czyli Theorem 3.1 uogólnia [18].

3.2. Oszacowania momentów i ogonów dla pewnej klasy chaosów losowych rzędu dwa. W tym rozdziale ograniczamy się do przypadku $d = 2$, czyli gdy $S' = \sum_{ij} a_{ij} X_i^1 X_j^2$ jest formą kwadratową ewaluowaną na niezależnych wektorach losowych. Zakładamy, że dla dowolnych i, j mamy $\mathbb{E}(X_i^1)^2 = \mathbb{E}(X_j^2)^2 = 1$, X_i^1, X_j^2 są symetryczne i spełniają warunek (8) (w szczególności współczynniki a_{ij} mogą być ujemne). Definiujemy

$$\hat{N}_i^1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } |t| < 1 \\ -\ln \mathbb{P}(|X_i^1| \geq |t|) & \text{dla } |t| \geq 1 \end{cases},$$

$\hat{N}_j^2(t)$ jest określone analogicznie. Oznaczmy

$$\|(a_{ij})\|_{X^1,X^2,p} = \sup\left\{ \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j \;\middle|\; \sum_i \hat{N}_i^1(x_i) \leq p, \; \sum_j \hat{N}_j^2(y_j) \leq p \right\}, \tag{9}$$

$$\|(a_i)\|_{X^1,p} = \sup\left\{ \sum_i a_i x_i \;\middle|\; \sum_i \hat{N}_i^1(x_i) \leq p \right\}, \tag{10}$$

$$\|(a_j)\|_{X^2,p} = \sup\left\{ \sum_j a_j y_j \;\middle|\; \sum_j \hat{N}_j^2(y_j) \leq p \right\}. \tag{11}$$

Głównym rezultatem omawianego rozdziału jest następujące twierdzenie.

Theorem 3.2. *Przy powyższych założeniach, dla każdego $p \geq 1$ zachodzi*

$$\left\|\sum_{ij} a_{ij} X_i^1 X_j^2\right\|_p \sim^{\beta} \|(a_{ij})\|_{X^1,X^2,p} + \left\|\left(\sqrt{\sum_j a_{ij}^2}\right)\right\|_{X^1,p} + \left\|\left(\sqrt{\sum_i a_{ij}^2}\right)\right\|_{X^2,p}. \tag{12}$$

Powyższe twierdzenie uogólnia rezultat Latały [16]. Zaskakujące jest to, że w obu przypadkach (chaosów opartych o zmienne losowe o logarytmicznie wklęsłych ogonach i chaosów opartych o zmienne losowe spełniające (8)) momenty można oszacować w ten sam sposób (por. [16, Theorem 1]).

Rozdział dzieli się naturalnie na dwie części. W pierwszej części analizujemy przypadek $d = 1$. Można było przypuszczać, że formuła (4) uzyskana przez Latałę, może być zastosowana bezpośrednio. Tak jednak nie jest (przynajmniej autorowi pracy się to nie udało). Zamiast tego przedstawiono bezpośredni, żmudny dowód oszacowań w przypadku $d = 1$. W drugiej części rozdziału najpierw formułujemy lematy dekompozycyjne, dotyczące procesów opartych o symetryczne zmienne losowe, które spełniają warunek (8) (które w naszej ocenie są interesujące same w sobie). Następnie, stosując kilka pomysłów i powołując się na wyniki uzyskane w [1], dowodzimy Theorem 3.2.

3.3. Nierówność Hansona-Wrighta w przestrzeniach Banacha. W tym rozdziale opisano próbę znalezienia dwustronnych oszacowań dla momentów chaosów gaussowskich rzędu 2 o wartościach wektorowych. W tym przypadku $S' = \sum_{ij} a_{ij} g_i g_j'$ oraz a_{ij} należą do przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$. Takie nierówności były znane w literaturze w różnych kontekstach, nawet dla chaosów gaussowskich dowolnego stopnia por. [5, 6, 20, 21]. Zawierały one jednak wielkości bardzo trudne do oszacowania (wartości oczekiwane supremów norm ewaluowanych na wektorach gaussowskich). W szczególnym przypadku $d = 2$ było wiadomo, że dla każdego $p \geq 1$ zachodzi

$$\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g_j'\right\|_p \sim \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g_j'\right\| + \sqrt{p}\,\mathbb{E} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i g_j\right\| + p \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} \left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j\right\| \tag{13}$$

Estymacja problematycznego wyrazu $\mathbb{E} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i g_j\right\|$ przez parametry, które w wielu sytuacjach można łatwiej oszacować, jest kluczowym rezultatem trzeciego rozdziału.

Proposition 3.3. *Przy powyższych założeniach dla dowolnego $p \geq 1$ mamy*

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i g_j\right\| \leq p^{-1/2} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g_j'\right\| + \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_{ij}\right\|\right) + \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i g_j\right\| \\ + \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \left\|\sum_{ij} a_{ij} x_{ij}\right\| + p^{1/2} \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} \left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j\right\|.\end{aligned} \tag{14}$$

Niestety (14) jest za słabe by uzyskać dwustronne oszacowania momentów chaosów gaussowskich rzędu 2 o wartościach wektorowych. Jest tak, ponieważ nie w każdej przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$ zachodzi następująca nierówność

$$\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g_j'\right\|_p \geq \frac{1}{C} \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_{ij}\right\|.$$

Ale jeśli

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_{ij}\right\| \leq \alpha \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g_j'\right\| \quad \text{dla dowolnej macierzy } (a_{ij})_{ij} \text{ o wartościach w } F, \tag{15}$$

gdzie α jest stałą, która zależy tylko od geometrii przestrzeni Banacha F, to nierówność (14) jest wystarczająca do uzyskania dwustronnych oszacowań momentów. Jest to główny wynik rozdziału trzeciego.

Theorem 3.4. *Niech $(a_{ij})_{ij}$ będzie macierzą o wartościach w przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$. Wtedy dla dowolnego $p \geq 1$ mamy*

$$\Big\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g'_j\Big\|_p \leq C\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g'_j\Big\| + \mathbb{E}\Big\|\sum_{ij} a_{ij} g_{ij}\Big\| + \sqrt{p} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \mathbb{E}\Big\|\sum_{ij} a_{ij} x_i g_j\Big\|$$
$$+ \sqrt{p} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\sum_{ij} a_{ij} x_{ij}\| + p \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} \Big\|\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j\Big\|\Big). \tag{16}$$

Jeśli dodatkowo zachodzi (15)*, to*

$$\Big\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g'_j\Big\|_p \sim^{\alpha} \mathbb{E}\Big\|\sum_{ij} a_{ij} g_i g'_j\Big\| + \sqrt{p} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \mathbb{E}\Big\|\sum_{ij} a_{ij} x_i g_j\Big\|$$
$$+ \sqrt{p} \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\sum_{ij} a_{ij} x_{ij}\| + p \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} \Big\|\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j\Big\|. \tag{17}$$

Pokazanie, że warunek (15) zachodzi (z $\alpha \sim q$) w przestrzeniach L_q jest łatwym ćwiczeniem. Co więcej, w przypadku przestrzeni L_q wyrażenia niedeterministyczne mogą być zastąpione przez wyrażenia deterministyczne. Spodziewamy się, że (17) jest prawdziwe w dowolnej przestrzeni Banacha (ze stałą niezależna od geometrii przestrzeni), ale nie jesteśmy w stanie tego pokazać. Jednak udało nam się wykazać (17) z dokładnością do czynnika $\ln p$ (patrz Theorem 3.1.3 w trzecim rozdziale).

Dzięki standardowym argumentom można z (16) wywnioskować następującą nierówność typu Hansona-Wrighta w przestrzeniach Banacha (zauważmy, że w poniższym twierdzeniu występuje chaos nierozparowany ang. undecoupled chaos). Przez δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Theorem 3.5. *Niech zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależne $\alpha-$subgaussowskie i o średniej zero natomiast $(a_{ij})_{ij}$ będzie symetryczną macierzą o wartościach w przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$. Wtedy dla*

$$t > C\alpha^2\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{ij} a_{ij}(g_i g_j - \delta_{ij})\Big\| + \mathbb{E}\Big\|\sum_{i \neq j} a_{ij} g_{ij}\Big\|\Big)$$

zachodzi

$$\mathbb{P}\Big(\Big\|\sum_{ij} a_{ij}(X_i X_j - \mathbb{E}(X_i X_j))\Big\| \geq t\Big) \leq 2\exp\Big(-\frac{1}{C}\min\Big\{\frac{t^2}{\alpha^4 U^2}, \frac{t}{\alpha^2 V}\Big\}\Big), \tag{18}$$

gdzie

$$U = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \mathbb{E}\Big\|\sum_{i \neq j} a_{ij} x_i g_j\Big\| + \sup_{\|(x_{ij})\|_2 \leq 1}\Big\|\sum_{ij} a_{ij} x_{ij}\Big\|,$$

$$V = \sup_{\|x\|_2 \leq 1, \|y\|_2 \leq 1} \Big\|\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j\Big\|.$$

Łatwo sprawdzić, że w przypadku $F = \mathbb{R}$ Theorem 3.5 implikuje klasyczną nierówność Hansona-Wrighta.

3.4. **Momenty chaosów gaussowskich w przestrzeniach Banacha.** W tym rozdziale omawiamy momenty chaosów gaussowskich rzędu większego niż 2 o wartościach wektorowych. Ponadto dowodzimy dwustronnych oszacowań momentów chaosów dowolnego rzędu o wartościach w przestrzeniach L_q opartych o symetryczne zmienne wykładnicze.

Głównym pomysłem (który został wzięty z (14)) jest wprowadzenie zmiennych gaussowskich indeksowanych przez grupę indeksów. Dla przykładu nasze główne twierdzenie przyjmuje dla $d = 3$ następującą postać (zdecydowaliśmy się zaprezentować przypadek szczególny wyniku, aby uniknąć potrzeby wprowadzenia dodatkowej skomplikowanej notacji).

Theorem 3.6. *Załóżmy, że $(a_{ijk})_{ijk}$ jest symetryczną macierzą o wartościach w przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$. Wtedy dla dowolnego $p \geq 1$ mamy*

$$
\begin{aligned}
C^{-1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i^1 g_j^2 g_k^3\Big\|_p \leq & \mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i^1 g_j^2 g_k^3\Big\| + \mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_{ij}^1 g_k^2\Big\| + \mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_{ijk}\Big\| \\
& + p^{1/2}\Big(\sup_{\|x\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i^1 g_j^2 x_k\Big\| + \sup_{\|x\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_{ij}^1 x_k\Big\| \\
& + \sup_{\|x\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i x_{jk}\Big\| + \sup_{\|x\|_2\leq 1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} x_{ijk}\Big\|\Big) \\
& + p\Big(\sup_{\|x\|_2,\|y\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i x_j y_k\Big\| + \sup_{\|x\|_2,\|y\|_2\leq 1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} x_{ij} y_k\Big\|\Big) \\
& + p^{3/2}\sup_{\|x\|_2,\|y\|_2,\|z\|_2\leq 1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} x_i y_j z_k\Big\|. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Warto podkreślić, że nasza ogólna nierówność (a więc i w szczególności (19)) zachodzi w dowolnej przestrzeni Banacha ze stałą zależną tylko od rzędu chaosu (a więc nie zależy od geometrii przestrzeni Banacha). Niestety, tak jak w omówionym wcześniej przypadku $d = 2$, nie ma szans na odwrócenie naszych oszacowań w pełnej ogólności. Jednak można je odwrócić (dla dowolnego d) jeśli przestrzeń Banacha spełnia warunek (15). W szczególności (jak wspomniano powyżej) można więc odwrócić (19) w przestrzeniach L_q (oraz można wtedy zastąpić wszystkie wyrażenia niedeterministyczne przez wyrażenia deterministyczne). Jest to treść następnego twierdzenia (z tego samego powodu co powyżej postanowiliśmy przedstawić tutaj tylko przypadek $d = 3$, twierdzenie zostało udowodnione w rozprawie doktorskiej dla dowolnego stopnia chaosu).

Theorem 3.7. *Załóżmy, że $(a_{ijk})_{ijk}$ jest symetryczną macierzą o wartościach w przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$, spełniającej warunek (15). Wtedy dla dowolnego $p \geq 1$ zachodzi*

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i^1 g_j^2 g_k^3\Big\|_p \sim^{\alpha} & \mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i^1 g_j^2 g_k^3\Big\| \\
& + p^{1/2}\Big(\sup_{\|x\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i^1 g_j^2 x_k\Big\| + \sup_{\|x\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i x_{jk}\Big\| + \sup_{\|x\|_2\leq 1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} x_{ijk}\Big\|\Big) \\
& + p\Big(\sup_{\|x\|_2,\|y\|_2\leq 1}\mathbb{E}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} g_i x_j y_k\Big\| + \sup_{\|x\|_2,\|y\|_2\leq 1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} x_{ij} y_k\Big\|\Big) \\
& + p^{3/2}\sup_{\|x\|_2,\|y\|_2,\|z\|_2\leq 1}\Big\|\sum_{ijk} a_{ijk} x_i y_j z_k\Big\|.
\end{aligned}
$$

Co więcej, używając technik z [4], uogólniliśmy nasz wynik dotyczący gaussowskich form wieloliniowych, na ogólny wielomian o współczynnikach w przestrzeniach Banacha ewaluowany na niezależnych zmiennych gaussowskich.

3.5. Oszacowania momentów dla pewnego typu chaosów w przestrzeniach Banacha. Będziemy korzystać z notacji zaprezentowanej w podrozdziale 3.2, ale będziemy teraz zakładać, że zmienne losowe $X_1^1, X_2^2, \ldots, X_1^2, X_2^2, \ldots$ są symetryczne, niezależne oraz mają logarytmicznie wklęsłe ogony, natomiast $(a_{ij})_{ij}$ jest macierzą o wartościach w przestrzeni Banacha $(F, \|\cdot\|)$. Chcemy oszacować momenty chaosu losowego o wartościach wektorowych $S' = \sum_{ij} a_{ij} X_i^1 X_j^2$. Podczas dowodu wyników opisanych w podrozdziale 3.3, było jasne, że przy drobnej modyfikacji dowodu szacowań entropijnych, można uzyskać oszacowania które są potrzebne do badania momentów S'. Jednak było też jasne, że będzie potrzebny odpowiednik [1, Theorem 7.2]. Nie wdając się w szczegóły, chcielibyśmy przedstawić "dużyźbiór jako sumę ńiezbyt wielużbiorów, które są "małe". Przez "małyźbiór mamy na myśli, że supremum pewnego procesu gaussowskiego indeksowanego tym zbiorem jest "małe". Problem polega na tym, że w przypadku wektorowym "dużyźbiór ma gorszą strukturę niż w przypadku rzeczywistym. Niestety nie udało nam się wyprowadzić w rozważanej sytuacji odpowiednika [1, Theorem 7.2]. Naszym głównym pomysłem jest to, że przy dodatkowym założeniu o subgaussowości zmiennych $X_1^2, X_2^2, \ldots$ można użyć prostszego rozkładu. W rezultacie otrzymujemy następujące oszacowanie momentów chaosu S' (z dodatkowym założeniem o subgaussowości) o wartościach w ogólnej przestrzeni Banacha. Zanim sformułujemy twierdzenie, przypominamy o normach $\|\cdot\|_{X^1,X^2,p}$, $\|\cdot\|_{X^1,p}$, $\|\cdot\|_{X^2,p}$ zdefiniowanych w (9),(10) oraz (11).

Theorem 3.8. *Przy powyższych założeniach, oraz zakładając dodatkowo, że dla $j = 1, 2$ oraz $i \geq 1$ mamy $\mathbb{E}\left(X_i^j\right)^2 = 1$, oraz że zmienne $X_1^2, X_2^2, \ldots$ są γ-subgaussowskie, następująca nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $p \geq 1$*

$$
\begin{aligned}
C^{-1}\left\|\sum_{ij} a_{ij} X_i^1 X_j^2\right\|_p \leq\; & \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} X_i^1 X_j^2\right\| + \alpha\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_{ij}\right\| + \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} g_i \mathcal{E}_j\right\|\right) \\
& + \sup\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} x_i^1 X_j^2\right\| \mid \sum_i \hat{N}_i^1(x_i^1) \leq p\right\} \\
& + \sup\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij} X_i^1 x_j^2\right\| \mid \sum_j \hat{N}_j^2(x_j^2) \leq p\right\} \\
& + \sup_{\substack{\varphi \in F^* \\ \|\varphi\|_* \leq 1}}\left\|\left(\sqrt{\sum_i \varphi(a_{ij})^2}\right)_j\right\|_{X^2,p} + \sup_{\substack{\varphi \in F^* \\ \|\varphi\|_* \leq 1}}\|(\varphi(a_{ij}))_{ij}\|_{X^1,X^2,p}, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

gdzie $(F^*, \|\cdot\|_*)$ oznacza przestrzeń dualną do $(F, \|\cdot\|)$.

Podobnie jak w przypadku gaussowskim, powyższe oszacowanie okazuje się być dwustronne w przestrzeniach L_q. Kluczową własnością przestrzeni L_q jest to, że dla dowolnego chaosu S' opartego o zmienne o logarytmicznie wklęsłych ogonach zachodzi

$$
\mathbb{E}\left\|S'(t)\right\|_{L_q(T)} \sim^q \left\|\sqrt{\mathbb{E}|S'(t)|^2}\right\|_{L_q(T)}
$$

(zauważmy, że wyrażenie po prawej stronie jest deterministyczne)

Theorem 3.9. *Niech zmienne losowe $X_1^1, X_2^2, \ldots, X_1^2, X_2^2, \ldots$ będą takie jak w Theorem 3.8 oraz $(a_{ij})_{ij}$ będzie macierzą o wartościach w przestrzeni $L_q(T, d\mu)$. Wtedy dla dowolnego $p \geq 1$*

zachodzi

$$\left\|\sum_{ij} a_{ij}X_i^1X_j^2\right\|_p \sim^{q,\alpha} \mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij}X_i^1X_j^2\right\|_{L_q} + \sup\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij}x_i^1X_j^2\right\|_{L_q} \mid \sum_i \hat{N}_i^1(x_i^1) \le p\right\}$$
$$+\sup\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_{ij} a_{ij}X_i^1x_j^2\right\|_{L_q} \mid \sum_j \hat{N}_j^2(x_j^2) \le p\right\}$$
$$+\sup_{\substack{\varphi\in L_q^* \\ \|\varphi\|_*\le 1}} \left\|\left(\sqrt{\sum_i \varphi(a_{ij})^2}\right)_j\right\|_{X^2,p} + \sup_{\substack{\varphi\in L_q^* \\ \|\varphi\|_*\le 1}} \|(\varphi(a_{ij}))_{ij}\|_{X^1,X^2,p}, \tag{21}$$

gdzie $(L_q^*, \|\cdot\|_*) = (L_{q^*}, \|\cdot\|_{L_{q^*}})$ *jest przestrzenią dualną do* $L_q(T, d\mu)$.

Bez przytaczania wyniku, wspomnimy tylko, że w przypadku przestrzeni Hilberta założenie o subgaussowości może być pominięte. W ostatnim rozdziale stosujemy większość technik użytych i rozwiniętych w poprzednich rozdziałach. Z tego powodu jest to dobre podsumowanie pracy doktorskiej.

Literatura

[1] Radosław Adamczak and Rafał Latała, *Tail and moment estimates for chaoses generated by symmetric random variables with logarithmically concave tails*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **48** (2012), no. 4, 1103–1136.

[2] Radosław Adamczak, Rafał Latała, and Rafał Meller, *Hanson-Wright inequality in Banach Spaces*, arXiv:1811.00353, submitted.

[3] Radosław Adamczak, Rafał Latała, and Rafał Meller, *Moments of Gaussian chaoses in Banach spaces*, in preparation.

[4] Radosław Adamczak and Paweł Wolff, *Concentration inequalities for non-Lipschitz functions with bounded derivatives of higher order*, Probab. Theory Related Fields **162** (2015), no. 3-4, 531–586.

[5] Miguel A. Arcones and Evarist Giné, *On decoupling, series expansions, and tail behavior of chaos processes*, J. Theoret. Probab. **6** (1993), no. 1, 101–122.

[6] Christer Borell, *On the Taylor series of a Wiener polynomial*, Seminar Notes on multiple stochastic integration, polynomial chaos and their integration, Case Western Reserve Univ., Cleveland, (1984).

[7] Víctor H. de la Peña and Evarist Giné, *Decoupling*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 1999. From dependence to independence; Randomly stopped processes. U-statistics and processes. Martingales and beyond.

[8] Victor H. de la Peña and S. J. Montgomery-Smith, *Decoupling inequalities for the tail probabilities of multivariate U-statistics*, Ann. Probab. **23** (1995), no. 2, 806–816.

[9] Paweł Hitczenko, *Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence*, Israel J. Math. **84** (1993), no. 1-2, 161–178.

[10] P. Hitczenko, S. J. Montgomery-Smith, and K. Oleszkiewicz, *Moment inequalities for sums of certain independent symmetric random variables*, Studia Math. **123** (1997), no. 1, 15–42.

[11] E. D. Gluskin and S. Kwapień, *Tail and moment estimates for sums of independent random variables with logarithmically concave tails*, Studia Math. **114** (1995), no. 3, 303–309.

[12] Konrad Kolesko and Rafał Latała, *Moment estimates for chaoses generated by symmetric random variables with logarithmically convex tails*, Statist. Probab. Lett. **107** (2015), 210–214.

[13] Stanisław Kwapień, *Decoupling inequalities for polynomial chaos*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 3, 1062–1071.

[14] Rafał Latała, *Estimates of moments and tails of Gaussian chaoses*, Ann. Probab. **34** (2006), no. 6, 2315–2331.

[15] Rafał Latała, *Estimation of moments of sums of independent real random variables*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 3, 1502–1513.

[16] Rafał Latała, *Tail and moment estimates for some types of chaos*, Studia Math. **135** (1999), no. 1, 39–53.

[17] Rafał Latała, *Tail and moment estimates for sums of independent random vectors with logarithmically concave tails*, Studia Math. **118** (1996), no. 3, 301–304.

[18] Rafał Latała and Rafał Łochowski, *Moment and tail estimates for multidimensional chaos generated by positive random variables with logarithmically concave tails*, Stochastic inequalities and applications, Progr. Probab., vol. 56, Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 77–92.

[19] Rafał Latała and Marta Strzelecka, *Comparison of weak and strong moments for vectors with independent coordinates*, Mathematika **64** (2018), no. 1, 211–229.

[20] Michel Ledoux, *A note on large deviations for Wiener chaos*, Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89, Lecture Notes in Math., vol. 1426, Springer, Berlin, 1990, pp. 1–14.

[21] Michel Ledoux and Michel Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[22] Rafał M. Łochowski, *Oszacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych*, in Polish.

[23] Rafał M. Łochowski, *Moment and tail estimates for multidimensional chaoses generated by symmetric random variables with logarithmically concave tails*, Approximation and probability, Banach Center Publ., vol. 72, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2006, pp. 161–176.

[24] Rafał Meller, *Two-sided moment estimates for a class of nonnegative chaoses*, Statist. Probab. Lett. **119** (2016), 213–219.

[25] Rafał Meller, *Tail and moment estimates for a class of random chaoses of order two*, To appear in Studia Math. (2018).

[26] S. J Montgomery-Smith, *The distribution of Rademacher sums*, s. Proc. Amer. Math. (Do uzupelnienia!).

[27] Mark Rudelson and Roman Vershynin, *Hanson-Wright inequality and sub-Gaussian concentration*, Electron. Commun. Probab. **18** (2013), no. 82, 9.

[28] Michel Talagrand, *Upper and lower bounds for stochastic processes*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 60, Springer, Heidelberg, 2014. Modern methods and classical problems.

Meller