Autoreferat rozprawy doktorskiej

Rafał Martynek

Głównym rezultatem mojej rozprawy jest pozytywna odpowiedź na hipotezę dotyczącą procesów nieskończenie podzielnych postawioną w [8, Rozdział 11.2], która stwierdza, że twierdzenie o dekopozycji zachodzi bez technicznego założenia o mierze Lévy'ego ν. Metoda dowodu pozwala również rozwiązać hipotezy dotyczące procesów empirycznych (patrz [8, Research problem 9.1.3]) i procesów selektorowych (patrz [8, Conjecture 12.3.3]). Pozostałe wyniki dotyczą pewnych uogólnień zasady porównywania dla procesów Bernoulliego i nierówności typu Lévy'ego-Ottavianiego dla procesów Bernoulliego ze współczynnikami monotonicznymi.

1 Wstęp

Motywem przewodnim teorii supremów procesów stochastycznych opracowanej i zebranej przez M. Talagranda w [8] jest to, że proces stochastyczny, który jest warunkowo procesem Bernoulliego, można rozłożyć na część pozytywną i część, która uwzględnia wszystkie możliwe redukcje pomiędzy elementami szeregu i które można wyjaśnić za pomocą metody łańcuchowej. Aby sprecyzować to zagadnienie musimy zdefiniować kilka obiektów. Najpierw niech $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ oznacza ciąg znaków losowych (ciąg Bernoulliego) t.j. $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$. Przez proces Bernoulliego process rozumiemy rodzinę zmiennych losowych $(B_t)_{t\in T}$, gdzie $B_t = \sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i$ i T jest podzbiorem ℓ^2. Rozważamy funkcjonał $b(T) = \mathbf{E}\sup_{t\in T} B_t$. W tym przypadku wspomniany rozkład przejawia się w następujący sposób. Z jednej strony mamy oczywiste górne ograniczenie dane przez $|B_t| \leqslant \|t\|_1 = \sum_{i\ gs1} |t_i|$, czyli $b(T) \leqslant \sup_{t\in T} \|t\ _1$. Z drugiej strony możemy zauważyć, że jeśli rozważymy kanoniczny proces Gaussowski $G_t = \sum_{i\geqslant 1} t_i g_i$, gdzie g_i to niezależne standardowe zmienne normalne niezależne również od ε_i to z nierówności Jensena mamy następujące ograniczenie

$$g(T) = \mathbf{E}\sup_{t\in T} G_t = \mathbf{E}\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i|g_i| \geqslant \mathbf{E}\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i\mathbf{E}|g_i| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}b(T).$$

Klasyczny wynik o fundamentalnym dla nas znaczeniu pochodzący od Fernique'a i Talagranda mówi, że $g(T)$ jest porównywalny z tzw. liczbą γ_2. Przypomnijmy definicję tej liczby. Niech $N_n = 2^{2^n}$ dla $n \geqslant 1$ i $N_0 = 1$, rozważmy T z odległością d. Nazwiemy zagnieżdżony ciąg partycji $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ zbioru T dopuszczalnym jeśli spełniony jest warunek $|\mathcal{A}_0| = 1$ jak również $|\mathcal{A}_n| \leqslant N_n$ dla $n \geqslant 1$. Przez $A_n(t)$ oznaczymy jednoznaczny element partycji $\mathcal{A}_n$ zawierający $t \in T$ a przez $\Delta(\cdot)$ średnicę zbioru względem odległości d. Dla $\alpha > 0$ definiujemy

$$\gamma_\alpha(T,d) = \inf\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)),$$

gdzie infimum brane jest po wszystkich ciągach partycji dopuszczalnych. Ograniczenie Fernique'a-Talagranda stwierdza, że istnieje stała uniwersalna L taka, że

$$\frac{1}{L}\gamma_2(T,d_2) \leqslant g(T) \leqslant L\gamma_2(T,d_2),$$

gdzie d_2 oznacza odległość euklidesową na T. Widzimy zatem, że $b(T)$ można ograniczyć z góry przez $\sup_{t\in T}\|t\|_1$ (w tej części nie zachodzą redukcje pomiędzy elementami szeregu) i przez $\gamma_2(T,d_2)$ (ta część zbiera elementy pomiędzy którymi zachodzą redukcje). Formalnie w oczywisty sposób zachodzi $T\subset T_1+T_2=\{t^1+t^2 : t^1\in T_1, t^2\in T_2\}$, czyli możemy zapisać $b(T)\leqslant b(T_1)+b(T_2)$ i sformułować ograniczenie górne w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
b(T) &\leqslant L\inf\{\sup_{t\in T_1}\|t\|_1+g(T_2) : T\subset T_1+T_2\}\\
&\leqslant \inf\{\sup_{t\in T_1}\|t\|_1+\gamma_2(T_2) : T\subset T_1+T_2\}.
\end{aligned}
$$

Następny wynik zawdzięczamy Witoldowi Bednorzowi i Rafałowi Latale, który stwierdza, że powyższą granicę można odwrócić (patrz [1]). Twierdzenie to stanowi podstawę wszystkich głównych wyników uzyskanych w mojej rozprawie, które można potraktować jako wnioski z twierdzenia Bednorza-Latały sformułowanego poniżej.

Twierdzenie 1 *Niech $T\subset\ell^2$. Istnieje stała uniwersalna L taka, że*

$$\inf\{\gamma_2(T_1,d_2)+\sup_{t\in T_2}\|t\|_1; T\subset T_1+T_2\}\leqslant Lb(T).$$

Możemy teraz przedstawić ogólne założenia i sformułować główne pytanie. Rozważmy zbiór indeksów T i ciąg $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ funkcji losowych na T. Nie musi być on niezależny. Rozważmy niezależny ciąg Bernoulliego $(\varepsilon_i)_{i\geqslant 1}$, który jest niezależny od ciągu $(Z_i)_{i\geqslant 1}$. Naszym celem jest znalezienie pod pewnymi warunkami dolnego oszacowania dla

$$S=\mathbf{E}\sup_{t\in T}X_t,$$

gdzie $X_t=\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon_i Z_i(t)$. Kluczową własnością powyższego szeregu jest to, że warunkując na Z_i rozważamy proces Bernoulliego. Istnieją trzy ważne przykłady procesów, które można wyrazić jako taki szereg. Pierwsza klasa to procesy nieskończenie podzielne, które mają reprezentację szeregową Rosińskiego [5]. Pozostałe dwie klasy procesów to procesy empiryczne i procesy selektorowe.

2 Procesy nieskończenie podzielne

Podstawowym narzędziem technicznym w badaniu procesów nieskończenie podzielnych jest ich reprezentacja szeregowa pochodząca od Jana Rosińskiego [5]. Rozważmy σ- skończoną przestrzeń (Ω,ν) i punktowy proces Poissona o intensywności ν na Ω. Przypomnijmy, że jest to losowy podzbiór Π zbioru Ω taki, że dla dowolnego mierzalnego podzbioru A o skończonej mierze intensywności liczność $A\cap\Pi$ oznaczona przez $|A\cap\Pi|$ jest losową zmienną Poissona o średniej $\nu(A)<\infty$ i dla rozłącznych mierzalnych podzbiorów $A_1,\ldots,A_k$ zmienne losowe $(|A_i\cap\Pi|_{1\leqslant i\leqslant k}$ są niezależne. Oznaczamy elementy Π przez $(Z_i)_{i\geqslant 1}$. Przez $(\varepsilon_i)_{i\geqslant 1}$ oznaczamy ciąg znaków (ciąg Bernoulliego), tj. $\mathbf{P}(\ va_i=\pm 1)=1/2$ niezależne również od $(Z_i)_{i\geqslant 1}$. Będziemy używać następującej definicji. Różni się ona od klasycznej terminologii stosowanej w teorii procesów nieskończenie podzielnych.

Definicja 1 *Procesem nieskończenie podzielnym (symmetrycznym, bez części Gaussowskiej) nazwiemy rodzinę $(X_t)_{t\in T}$ gdzie T jest zbiorem funkcji na Ω spełniających $\int_\Omega t^2\wedge 1d\nu<\infty$ dla $t\in T$ i $X_t=\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon_i t(Z_i)$.*

Najpierw przyjrzyjmy się górnym oszacowaniom $\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t$. Jedno oczywiste oszacowanie wynika z nierówności

$$|X_t| \leqslant \sum_{i\geqslant 1} |t(Z_i)|.$$

Jest to motywacja do zdefiniowania $(|X|_t)_{t\in T}$, gdzie $|X|_t = \sum_{i\geqslant 1}|t(Z_i)|$, a zbiór T jest zbiorem funkcji na Ω spełniających $\int_\Omega |t|\wedge 1 d\nu < \infty$. Dlatego, jeśli zdarzy się, że $(|X|_t)_{t\in T}$ jest ograniczone wtedy oczywiście $\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t$ również jest ograniczone. Drugie oszacowanie górne wynika z nierówności Bernsteina i argumentu łańcuchowego i daje to

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t \leqslant L(\gamma_2(T,d_2)+\gamma_1(T,d_\infty)), \tag{1}$$

gdzie odległości na T, których używamy dane są przez

$$d_\infty(s,t) = \sup_{\omega\in\Omega} |s(\omega)-t(\omega)|$$

i

$$d_2^2(s,t) = \int_\Omega (s(\omega)-t(\omega))^2 \nu(d\omega).$$

Pierwszym głównym wynikiem mojej rozprawy jest następujące twierdzenie dekompozycyjne stanowiące uogólnienie [8, Theorem 11.2.10].

Twierdzenie 2 *Niech dany będzie przeliczalny zbiór T funkcji mierzalnych na Ω takich jak w Definicji 1 i niech $0\in T$. Wtedy możemy zapisać $T\subset T_1+T_2$ w taki sposób, że*

$$\gamma_2(T_1,d_2)+\gamma_1(T_1,d_\infty) \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t \tag{2}$$

i

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T_2} |X|_t \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t. \tag{3}$$

Dowód tego twierdzenia opiera się na trzech głównych krokach. Pierwszym z nich jest przeformułowanie dolnego oszacowania dla $b(T)$. Niedawne wyniki M. Talagranda (patrz [7, Rozdział 8.6]) pozwalają na sformułowaniu dolnego ograniczenia dla $b(T)$ w terminach funkcjonału, który zależy tylko od zbioru T, a nie od dekompozycji T_1+T_2. Znaczenie tego wyniku należy porównywać ze skonstruowaniem miary majoryzującej dla procesów Gaussowskich (por. [7, Rozdziały 2.6, 4.1], [8, Rozdział 2.4]). Ograniczenie to można podsumować w następujący sposób.

Twierdzenie 3 *Niech $S\subset \ell^2$ i μ będzie miarą probabilistyczną na S. Ustalmy $r\geqslant 4$. Rozważmy następujący ciąg kwadratów odległości dla $j\in\mathbb{Z}$*

$$\forall s,t\in T \;\; \tilde\varphi_j(s,t) = \sum_{i\geqslant 1} (r^{2j}|t_i-s_i|^2)\wedge 1. \tag{4}$$

Niech k_0 będzie największą liczbą całkowitą taką, że średnica zbioru T względem odległości euklidesowej $(\Delta(T,d_2))$ nie przekracza r^{-k_0}. Dla $t\in T$ zdefiniujmy $k_0(t)=k_0$, a dla $n\geqslant 1$

$$k_n(t) = \sup\{j\in\mathbb{Z}\;;\; \mu(\{s\in T, \tilde\varphi_j(s,t)\leqslant 2^n\}) \geqslant N_{n-1}^{-1}\}. \tag{5}$$

Let

$$I_\mu(t) = \sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-k_n(t)}. \tag{6}$$

Wtedy istnieje stała uniwersalna L taka, że

$$\int_T I_\mu(t)\mu(dt) \leqslant Lb(T). \tag{7}$$

Rozważmy funkcjonał $I_{\mu,Z}$ zdefiniowany tak jak w (6) ale dla

$$\tilde{\varphi}_j(s,t) = \sum_{i\geqslant 1}(r^{2j}|Z_i(t) - Z_i(s)|^2) \wedge 1.$$

Zdefiniujmy

$$\varphi_j(s,t) = \mathbf{E}\tilde{\varphi}_j(s,t) = \sum_{i\geqslant 1}\mathbf{E}(r^j(Z_i(s) - Z_i(t)))^2 \wedge 1. \tag{8}$$

Biorąc wartość oczekiwaną względem $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ w (7) dostajemy

$$\mathbf{E}\int_T I_{\mu,Z}(t)\mu(dt) \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t. \tag{9}$$

Następnie powtarzamy konstrukcję podaną w Twierdzeniu 3 dla zbioru T. Używając odległości (8) definiujemy liczby $(j_k)_{k\geqslant 0}$ dla każdego punktu $t \in T$. Niech

$$j_0 = \sup\{j \in \mathbb{Z} : \forall s,t \in T, \varphi_j(s,t) \leqslant 4\}. \tag{10}$$

Dla miary probabilistycznej μ na T definiujemy dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ i $t \in T$

$$j_0^\mu(t) = j_0$$

i

$$j_n^\mu(t) = \sup\{j \in \mathbb{Z} : \mu(B_j(t, 2^n)) > N_n^{-1}\}. \tag{11}$$

Definiujemy również

$$J_\mu(t) = \sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n^\mu(t)}.$$

Kluczowym faktem (see [7, Lemma 9.3.2]) jest następujący lemat, który opiera się na elementarnej, ale ważnej obserwacji, że dla dowolnej funkcji $0 \leqslant f \leqslant 1$ i stałej A takiej, że $4A \leqslant \int f d\nu$ mamy

$$\mathbf{P}(\sum_{i\geqslant 1} f(Z_i) \leqslant A) \leqslant \exp(-A). \tag{12}$$

Lemat 1 *Dla każdego $t \in T$ mamy $J_\mu(t) \leqslant L\mathbf{E}I_{\mu,Z}(t)$.*

Lemat 1 wraz z (9) dają

$$\int_T J_\mu(t)\mu(dt) \leqslant L\int_T \mathbf{E}I_{\mu,Z}(t)\mu(dt) = L\mathbf{E}\int_T I_{\mu,Z}(t)\mu(dt) \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t. \tag{13}$$

Drugim krokiem dowodu Twierdzenia 2 jest zastosowanie twierdzenia Hahna-Banacha wraz z argumentem wypukłościowym w celu uzyskania pojedynczej miary prawdopodobieństwa, powiedzmy μ_0, dla której będziemy mieli

$$\sup_{t\in T} J_{\mu_0}(t) \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t.$$

Twierdzenie 4 *Istnieje dodatnia liczba całkowita M, ciąg liczb nieujemnych $(\alpha_i)_{i \leqslant M}$ takich, że*

$$\sum_{i \leqslant M} \alpha_i = 1$$

i ciąg $(\mu_i)_{i \leqslant M}$ miar probabilistycznych na skończonym podzbiorze F zbioru T, dla których dla każdego $t \in F$ zachodzi

$$\sum_{i \leqslant M} \alpha_i J_{\mu_i}(t) \leqslant L \mathbf{E} \sup_{t \in T} X_t. \tag{14}$$

Dowód Twierdzenia 4 wynika z poniższego lematu, który porównać można z [10, Propodition 3.2], [7, Lemma 13.3.9], [8, Lemma 13.1.4].

Lemat 2 *Niech $a > 0$. Załóżmy, że $\mathcal{C}$ jest wypukłym podzbiorem domkniętym zbioru funkcji rzeczywistych na skończonym zbiorze F. Załóżmy, że $f \in \mathcal{C}$, $g \geqslant f \implies g \in \mathcal{C}$ i dla każdej miary probabilistycznej μ na F istnieje $f \in \mathcal{C}$ takie, że $\int f d\mu \leqslant a$. Wtedy istnieje funkcja stała $\mathbf{a} \equiv a$ należąca do $\mathcal{C}$.*

Twierdzenie 4 implikuje, że dla dowolnego podzbioru $F \subset T$ mamy

$$\sup_{t \in F} \sum_{i \leqslant M} \alpha_i \sum_{n \geqslant 0} 2^n r^{-j_n^{\mu_i}(t)} \leqslant L \mathbf{E} \sup_{t \in T} X_t.$$

Naszym celem jest pokazanie, że istnieje pojedyncza miara probabilistyczna na F i liczby całkowite j_n zależne tylko od tej miary takie, że $\sup_{t \in F} \sum_{n \geqslant 0} 2^n r^{-j_n(t)} \leqslant K \ E \sup_{t \in T} X_t.$. Dla ustalonego zbioru skończonego $F \subset T$ i ciągu (α_i) liczb nieujemnych i ciągu (μ_i) miar prawdopodobieństwa z Twierdzenia 4 definiujemy

$$\mu = \sum_{i \leqslant M} \alpha_i \mu_i, \tag{15}$$

a dla każdego $t \in T$ definiujemy liczby $j_n(t)$ with j_0 as in (10) i dla $n \geqslant 1$

$$r^{-j_n(t)-1} < \sum_{i \leqslant M} \alpha_i r^{-j_n^{\mu_i}(t)} \leqslant r^{-j_n(t)}. \tag{16}$$

Następnie zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$t \in F \implies \sum_{n \geqslant 0} 2^n r^{-j_n(t)} \leqslant r \sum_{i \leqslant M} \alpha_i \sum_{n \geqslant 0} 2^n r^{-j_n^{\mu_i}(t)} \tag{17}$$

ponieważ j_0 jest ustalone. Dla dalszej konstrukcji niezwykle ważne jest, że j_n zdefiniowane w (16) zachowuje definiującą własność liczb $j_n^{\mu_i}$ daną w (11).

Lemat 3 *Ustalmy $n \geqslant 0$ i $t \in T$. Dla μ jak w (15) i $j_n(t)$ jak w (16) mamy*

$$\mu(B_{j_n(t)}(t, 2^n)) \geqslant \frac{2}{3} \frac{1}{N_n} \geqslant \frac{1}{N_{n+1}}. \tag{18}$$

Teraz rozważmy liczby $j_n^{\mu}(t)$ zdefiniowane w (11) dla miary μ z (15). Z (18) wynika, że $j_{n+1}^{\mu}(t) \geqslant j_n(t)$. Stad, z (17), (14) i faktu, że $j_0^{\mu} = j_0 = j_0^{\mu_i}$ dostajemy dla dowolnego $t \in F$

$$\sum_{n \geqslant 0} 2^n r^{-j_n^{\mu}(t)} \leqslant L \sum_{n \geqslant 0} 2^n r^{-j_n(t)} \leqslant L \mathbf{E} \sup_{t \in T} X_t. \tag{19}$$

Prawie osiągnęliśmy nasz cel w tym sensie, że skonstruowaliśmy miarę majoryzującą μ, która zależy od skończonego zbioru F. Mianowicie,

$$\sup_{t\in F} J_{\ mu}(t) \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t.$$

Ostatnim krokiem dowodu Twierdzenia 2 jest skonstruowanie dopuszczalnego ciągu partycji zbioru T i zastosowanie następującego twierdzenia, które jest centralnym narzędziem dowodzenia twierdzeń dekompozycyjnych (patrz [7, Theorem 6.6.1], [8, Theorem 5.2.6]).

Twierdzenie 5 *Rozważmy przeliczalny zbiór T funkcji mierzalnych na $(\mathcal{F},\nu)$, ustalmy $r \geqslant 4$ i załóżmy, że $0 \in T$. Rozważmy dopuszczalny ciąg partycji $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ zbioru T i dla $A \in \mathcal{A}_n$ niech $j_n \in \mathbb{Z}$ mają następujące własności, gdzie $u > 0$ jest parametrem*

$$A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_{n-1}, A \subset B \implies j_n(A) \geqslant j_{n-1}(B),$$

$$\forall s,t \in A \in \mathcal{A}_n, \;\; \varphi_{j_n(A)}(s,t) \leqslant u2^n.$$

Wtedy istnieją takie T', T'', T''', że $T \subset T' + T'' + T'''$, $0 \in T'$ i

$$\gamma_2(T', d_2) \leqslant L\sqrt{u}\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n(A_n(t))}, \tag{20}$$

$$\gamma_1(T', d_\infty) \leqslant L\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n(A_n(t))} \tag{21}$$

$$\forall t \in T'', \|t\|_1 \leqslant Lu\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n(A_n(t))}. \tag{22}$$

Ponadto,

$$\forall t \in T''', \exists s \in T, \;\; |t| \leqslant 5|s|\mathbb{1}_{\{2|s|\geqslant r^{-j_0(A_0(t))}\}}. \tag{23}$$

Przedefiniujmy $j_n^\mu(t)$ tak, aby tworzyły niemalejący ciąg, którego elementy rosną o co najwyżej 1. Zdefiniujmy

$$\tilde{j}_n^\mu(t) = \min_{0\leqslant p\leqslant n}(j_p^\mu(t) + n - p).$$

W ten sposób $\tilde{j}_0^\mu(t) = j_0^\mu(t)$ i dla $n \geqslant 1$

$$\tilde{j}_n^\mu(t) \leqslant \tilde{j}_{n+1}^\mu(t) \leqslant \tilde{j}_n^\mu(t) + 1. \tag{24}$$

Ponadto, $\tilde{j}_n^\mu(t) \leqslant j_n^\mu(t)$, więc

$$\mu(B_{\tilde{j}_n^\mu(t)}(t, 2^n)) \geqslant N_n^{-1}. \tag{25}$$

Ostatecznie dla $t \in F$, z faktu, że $r \geqslant 4$ otrzymujemy

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-\tilde{j}_n^\mu(t)} \leqslant \sum_{n\geqslant 0} 2^n \sum_{0\leqslant p\leqslant n} r^{-j_p^\mu(t)-n+p} = \sum_{p\geqslant 0} 2^p r^{-j_p^\mu(t)} \sum_{n\geqslant p}\left(\frac{2}{r}\right)^{n-p} \leqslant 2J_\mu(t). \tag{26}$$

Twierdzenie 6 *Istnieje dopuszczalny ciąg partycji $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ zbioru F i dla $A \in \mathcal{A}_n$ istnieje liczba całkowita $j_n(A)$ taka, że dla każdego $t \in T$*

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n(A_n(t))} \leqslant L\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-\tilde{j}_n^\mu(t)}. \tag{27}$$

Ponadto,

$$s,t \in A \in \mathcal{A}_n \implies \varphi_{j_n(A)}(s,t) \leqslant 2^{n+2}. \tag{28}$$

Aby dokończyć argument musimy podnieść otrzymaną konstrukcję na T, które będzie przeliczalne.

Twierdzenie 7 *Niech T będzie przeliczalne. Wtedy istnieje ciąg partycji dopuszczalnych $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ zbioru T i dla $A \in \mathcal{A}_n$ istnieje liczba całkowita $j_n(A)$ taka, że zachodzą następujące własności*

$$\forall t \in T, \quad \sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n(A_n(t))} \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t, \tag{29}$$

$$A \in \mathcal{A}_n, \ C \in \mathcal{A}_{n-1}, \ A \subset C \implies j_{n-1}(C) \leqslant j_n(A) \leqslant j_{n-1}(C) + 1 \tag{30}$$

i

$$s, t \in A \in \mathcal{A}_n \implies \varphi_{j_n(A)}(s,t) \leqslant 2^{n+2}. \tag{31}$$

Do dokończenia Twierdzenia 2 potrzebujemy dodatkowo dwóch technicznych wyników, z których pierwszym jest nierówność Giné-Zinna stwierdzająca, że

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T} |X|_t \leqslant \sup_{t\in T} \int_\Omega |t(\omega)|\nu(d\omega) + 4\mathbf{E}\sup_{t\in T} |X_t|, \tag{32}$$

a drugim

$$\int_\Omega |t| \mathbb{1}_{\{2|t| \geqslant r^{-j_0(t)}\}} d\nu \leqslant L\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t. \tag{33}$$

Ponadto, $0 \in T$ pozwala (see [8, Lemma 2.2.1]) zapisać

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T} |X_t| \leqslant 2\mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t. \tag{34}$$

Dowód Twierdzenia 2. Niech $s(T) = \mathbf{E}\sup_{t\in T} X_t$. Niech T', T'', T'' będą takie jak w Twierdzeniu 5. Połóżmy $T_1 = T'$ i $T_2 = T'' + T'''$. Z (29) mamy $\gamma_2(T_1, d_2) \leqslant Ls(T)$ i $\gamma_1(T_1, d_\infty) \leqslant Ls(T)$ korzystając kolejno z (20) i (21), czyli pokazaliśmy (2). Teraz, zastępując T_2 przez $T_2 \cap (T - T_1)$, z (32) wynika, że

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\sup_{t\in T_2} |X|_t &\leqslant \sup_{t\in T_2} \int_\Omega |t(\omega)|\nu(d\omega) + 2\mathbf{E}\sup_{t\in T_2} |X_t| \\
&\leqslant \sup_{t\in T'''} \int_\Omega |t(\omega)|\nu(d\omega) + L(\mathbf{E}\sup_{t\in T} |X_t| + \mathbf{E}\sup_{t\in T_1} |X_t|),
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że dla $t \in T''$ wynika natychmiast z (22) i (29), że $\|t\|_1 \leqslant Ls(T)$. Teraz zauważmy, że (1) i (34) wraz z (2) dają, że $\mathbf{E}\sup_{t\in T_1} |X_t| \leqslant Ls(T)$. Stąd, ostatnim krokiem, który musimy pokazać jest, że dla każdego $t \in T'''$, $\|t\|_1 \leqslant Ls(T)$. Z konstrukcji (23) wiemy, że dla każdego $t \in T'''$ istnieje $s \in T$ takie, że

$$|t| \leqslant 5|s|\mathbb{1}_{\{2|s| \geqslant r^{-j_0}\}}.$$

Łącząc to z (33) otrzymujemy

$$\sup_{t\in T'''} \int_\Omega |t(\omega)|\nu(d\omega) \leqslant Ls(T).$$

■

Wynik dotyczący procesów nieskończenie podzielnych jest przedmiotem rozdziału 4 mojej rozprawy i pochodzi z [4].

3 Procecy empiryczne i selektorowe

Główną obserwacją jest to, że metoda dowodu Twierdzenia 2 jest w dużym stopniu niezależna od struktury procesów nieskończenie podzielnych. Można zauważyć, że kluczowy Lemat 1 wynika z (12), który zachodzi dla niezależnych Z_i. Idea zatem jest taka, że jeśli mamy nierówność Giné-Zinna i ograniczenie typu (33) dla ogólnego $X_t = \sum_{i\geqslant 1} \varepsilon_i t(Z_i)$, gdzie Z_i są niezależne to możemy sformułować twierdzenie dekompozycyjne.
W szczególności możemy udowodnić [8, Research problem 9.1.3]. Przypomnijmy najpierw strukturę procesów empirycznych. Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{F}$ będzie ograniczonym, przeliczalnym podzbiorem $L^2(\mu)$ (jest to jedyny przypadek, gdy nie oznaczamy zbioru indeksów przez T). Ponieważ $\mathcal{F}$ jest przeliczalny nie musimy rozróżniać między konkretnymi funkcjami w Ω a klasami funkcji w $L^2(\mu)$. Oznaczmy $\mu(f) = \int f d\mu$. Rozważmy niezależne zmienne losowe $(X_i)_{i\leqslant N}$, wszystkie o rozkładzie μ. W tym przypadku S ma postać

$$S_N(\mathcal{F}) = \mathbf{E} \sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \sum_{i\leqslant N} (f(X_i) - \mu(f)) \right|. \tag{35}$$

Załóżmy, że $\mu(f) = 0$. Najpierw, aby zobaczyć, że jesteśmy w przypadku warunkowego procesu Bernoulliego zauważmy, że

$$\mathbf{E} \sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \sum_{i\leqslant N} \varepsilon_i f(X_i) \right| \leqslant 2S_N(\mathcal{F}). \tag{36}$$

Nierówność Giné-Zinna ma postać

$$\mathbf{E} \sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{i\leqslant N} |f(X_i)| \leqslant N \sup_{f\in\mathcal{F}} \mu(f) + 4\mathbf{E} \sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \sum_{i\leqslant N} \varepsilon_i f(X_i) \right|. \tag{37}$$

Ponadto, łatwo sprawdzić, że ograniczenie (33) zachodzi dla dowolnego X_t.

Twierdzenie 8 *Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą funkcji w $L^2(\mu)$ i przyjmijmy, że $\mu(f) = 0$ dla $f \in \mathcal{F}$. Dla ustalonej liczby N, istnieje dekompozycja $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ taka, że $0 \in \mathcal{F}_1$ i*

$$\gamma_2(\mathcal{F}_1, d_2) \leqslant \frac{L}{\sqrt{N}} S_N(\mathcal{F}),$$

$$\gamma_1(\mathcal{F}_1, d_\infty) \leqslant L S_N(\mathcal{F}),$$

a także

$$\mathbf{E} \sup_{f\in\mathcal{F}_2} \sum_{i\leqslant N} |f(X_i)| \leqslant L S_N(\mathcal{F}).$$

Uogólniona hipoteza Bernoulliego [8, Conjecture 12.3.3] również wynika z tego podejścia (patrz [7, Twierdzenie 9.11.1]). Dla liczby $0 < \delta < 1$ definiujemy ciąg niezależnych zmiennych losowych $(\delta_i)_{i\leqslant M}$, które przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem δ i 0 z prawdopodobieństwem $1 - \delta$. Zmienne te nazywane są selektorami, ponieważ pozwalają na wybranie losowego podzbioru $\{1, 2, \ldots, M\}$ o liczności równej około δM. Przez proces selektorowy rozumiemy rodzinę zmiennych losowych $\sum_{i\leqslant M} t_i(\delta_i - delta)$, gdzie t pochodzi ze zbioru ciągów T. Teraz S ma postać

$$\delta(T) = \mathbf{E} \sup_{t\in T} \left| \sum_{i\leqslant M} t_i(\delta_i - \delta) \right|. \tag{38}$$

Znowu mamy następującą nierówność przenoszącą nas do przypadku warunkowego procesu Bernoulliego

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T}\left|\sum_{i\leqslant M}\varepsilon_i t_i\delta_i\right|\leqslant 3\delta(T), \tag{39}$$

natomiast nierówność Giné-Zinna ma postać

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T}\sum_{i\leqslant M}\delta_i|t_i|\leqslant \delta\sup_{t\in T}\sum_{i\leqslant M}|t_i|+12\delta(T). \tag{40}$$

Otrzymujemy, zatem dekompozycję.

Twierdzenie 9 *Dla zbioru ciągów T istnieje dekompozycja $T\subset T_1+T_2$ taka, że*

$$\gamma_2(T_1,d_2)\leqslant\frac{L}{\sqrt{\delta}}\delta(T),$$

$$\gamma_1(T_1,d_\infty)\leqslant L\delta(T)$$

i

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T_2}\sum_{i\leqslant M}|t_i|\delta_i\leqslant L\delta(T).$$

4 Rozszerzone porównywanie Bernoulliego i nierówność typu Lévy'ego-Ottavianiego

Pozostałe dwa wyniki mojej dysertacji to pomniejsze, jednak nietrywialne właściwości procesu Bernoulliego.
Pierwsza dotyczy problemu porównywania dla procesu Bernoulliego, a dowód tego wyniku jest ściśle związany z dowodem twierdzenia Bednorza-Latały. Został opublikowany w [2]. Niech $\varphi: T\to\ell^2$ będzię pewnym mapowaniem.

Twierdzenie 10 *Załóżmy, że dla wszystkich $s,t\in T$ i wszystkich całkowitych $p\geqslant 0$ mamy*

$$\inf_{|I^c|\leqslant Cp}\sum_{i\in I}|\varphi_i(t)-\varphi_i(s)|^2\leqslant C^2\inf_{|I^c|\leqslant p}\sum_{i\in I}|t_i-s_i|^2 \tag{41}$$

dla pewnej stałej uniwersalnej $C\geqslant 1$. Wtedy, $b(\varphi(T))\leqslant Kb(T)$, gdzie K jest stałą uniwersalną.

Uwaga 1 *Wynik jest wzmocnieniem klasycznego porównywania dla procesów Bernoulliego stwierdzającego, że*

$$\text{jeśli } |\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|\leqslant|x-y| \text{ dla } i\geqslant 1, \text{ to } b(\varphi(T))\leqslant b(T). \tag{42}$$

Łatwo podać przykład φ dla, którego kontrakcja na każdej współrzędnej nie będzie zachodzić, ale jeśli dla $t\in T$, $\varphi(t)$ jest równe zero dla wszystkich oprócz pewnej skończonej liczby współrzędnych to wtedy C może być wybrane tak, że (41) zachodzi dla $p=0$.

Drugi wynik odnosi się do problemu postawionego w [6] i został opublikowany w [3]. Niech $a_i:[0,1]\to\mathbb{R}_+$, for $i=1,2,\ldots,n$ będą funkcjami niemalejącymi, ciągłymi prawostronnie. Niech

$$X=\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^n a_i(t)\varepsilon_i$$

i

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i(1)\varepsilon_i.$$

W. Szatzschneider postawił hipotezę, że zachodzi następująca nierówność

$$\mathbf{P}(X \geqslant 1) \leqslant 2\mathbf{P}(Y \geqslant 1).$$

Uzyskany wynik jest następujący.

Twierdzenie 11 *Niech $a_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ będą funkcjami niemalejącymi, ciągłymi prawostronnie i $n \geqslant 5$. Wtedy dla $u > 0$*

$$\mathbf{P}(\sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\varepsilon_i \geqslant 8u) \leqslant 53\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} a_i(1)\varepsilon_i \geqslant u).$$

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na następującym wyniku koncentracyjnym i oszacowaniu wynikającym z metody łańcuchowej.

Twierdzenie 12 *Niech $T = [0, t_1^0] \times \cdots \times [0, t_n^0]$ i $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ będzie dowolną funkcją rosnącą i wypukłą. Wtedy,*

$$\mathbf{E}\varphi(X - \mathbf{E}X) \leqslant \mathbf{E}\varphi(Y). \tag{43}$$

Twierdzenie 13 *Oznaczmy przez $\|\cdot\|$ normę euklidesową. Zachodzi następujące szacowanie $\mathbf{E}X \leqslant C\|a(1)\|$, gdzie $C \leqslant 4.45$.*

Literatura

[1] Bednorz, W. and Latała, R.: On the boundedness of Bernoulli processes, *Ann. of Math.* **180** (2014), 1167–1203.

[2] Bednorz, W. and Martynek, R. : On the contraction property of Bernoulli canonical processes, *Bulletin Polish Acad. Sci. Math.*, **67**, Number 2, (2019), 187–209.

[3] Bednorz, W. and Martynek, R. : A Lévy–Ottaviani type inequality for the Bernoulli process on an interval, *Stat Probab Lett*, **162.C**, (2020).

[4] Bednorz, W. and Martynek, R. : A note on infinitely divisible processes, (2020), arXiv:2008.09876.

[5] Rosiński, J.: On series representations of infinitely divisible random vectors, *Ann. Probab.*, **18**, (1990), pp. 405–430.

[6] Szatzschneider, W. (1991) An Inequality. *SIAM Rev.*, **33(1)**, (1991), 116–118.

[7] Talagrand, M. (2019) Upper and Lower Bounds for Stochastic Processes. Modern Methods and Classical Problems. Preprint.

[8] Talagrand, M.: Upper and Lower Bounds for Stochastic Processes. Modern Methods and Classical Problems, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **60**. (2014) Springer, New York.

[9] Talagrand, M: Regularity of infinitely divisible processes. *Ann. Probab.* **20**. Number 1 (1993), 362–432.

[10] Talagrand, M: Sample Boundedness of Stochastic Processes Under Increment Conditions. *Ann. Probab.* **18**. Number 1 (1990), 1-49.