Rafał Łochowski

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Oszacowania momentów i ogonów wieloliniowych form losowych

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie ciągiem (niezależnych, rzeczywistych) zmiennych losowych. Jednym z głównych zagadnień jakimi zajmuje się rachunek prawdopodobieństwa jest opisanie własności rozkładu sumy $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ w zależności od rozkładów $X_1, X_2, ..., X_n$. Jednymi z podstawowych wielkości charakteryzujących rozkład zmiennej losowej są jego momenty. Bardzo ogólne twierdzenie podające proste formuły szacujące momenty S w zależności od jednowymiarowych rozkładów niezależnych zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n$ w przypadku gdy są one dodatnie lub symetryczne (niekoniecznie o takim samym rozkładzie) podał Latała w [16].

Naturalnym uogólnieniem tej problematyki jest próba przeniesienia otrzymanych wyników dotyczących sum (lub kombinacji liniowych) zmiennych losowych na szerszą klasę funkcji tych zmiennych.

Najprostszymi funkcjami wielu zmiennych, bardziej ogólnymi niż kombinacje liniowe argumentów są formy wieloliniowe. Dla niezależnych, rzeczywistych zmiennych losowych $X_i^{(r)}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq r \leq d$, oraz dla n^d - wymiarowej tablicy rzeczywistych współczynników $(a_{i_1,...,i_d})_{1\leq i_1,...,i_d \leq n}$ zdefiniujmy zmienną losową

$$S = \sum a_{i_1,...,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}.$$

Tego rodzaju zmienną S będziemy nazywali *uniezależnionym chaosem losowym* rzędu d, generowanym przez zmienne losowe $X_i^{(r)}$.

Uzależnionym chaosem losowym rzędu d generowanym przez zmienne losowe X_i, $1 \leq i \leq n$, o współczynnikach $a_{i_1,i_2,...,i_d}$, będziemy nazywali następującą wieloliniową formę losową

$$\tilde{S} = \sum_{i_1=1}^{n-d+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-d+2} ... \sum_{i_d=i_{d-1}+1}^{n} a_{i_1,i_2,...,i_d} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_d}.$$

Idea chaosów losowych została zapoczątkowana jeszcze przez Norberta Wienera [22]. Potem udowodniono takie podstawowe własności chaosów losowych, jak równoważność momentów chaosów uzależnionych i uniezależnionych (ang. *decoupling*) oraz równoważność momentów $\|S\|_p$ i $\|S\|_q$, $1 \leq p < q <$

∞, dla dość dużej klasy zmiennych generujących chaos S (metoda *hiperkontrakcji*), zob. [13], [3]. Z odpowiednio wolnego wzrostu momentów wynikają (przez standardowe zastosowanie nierówności Czebyszewa i nierówności Paleya-Zygmunda) dwustronne oszacowania na ogony S.

Następnym krokiem byłoby uzyskanie analogicznych oszacowań na momenty S do tych, które uzyskał Latała dla kombinacji liniowych.

W rozprawie doktorskiej podjąłem się właśnie próby znalezienia takich oszacowań. Postawiony problem jest jednak zbyt ogólny, trudny (dla piszącego te słowa) i nie do końca dobrze zdefiniowany (co to jest "prosta" formuła?); dlatego w pracy nad rozprawą zająłem się przypadkami, w których spodziewałem się, że poszukiwane formuły "naprawdę" istnieją lub przypadkami, w których choćby częściowa odpowiedź na to jak zachowują się momenty S była istotna ze względu na zastosowania. (Dopiero całkiem niedawno - w styczniu 2005 - Latała udowodnił szacowania w przypadku chaosów generowanych przez zmienne gaussowskie.)

Omówmy co z powyższego programu udało się zrealizować i jaka jest zawartość kolejnych rozdziałów rozprawy.

Pierwszy rozdział zawiera podstawowe definicje i kilka wybranych, znanych twierdzeń. Definiuję też, wykorzystane w następnych rozdziałach pojęcie semihiperkontrakcji zmiennej losowej:

Definicja 1 *Rzeczywista zmienna losowa Y ma własność* semihiperkontraktywności *rzędu δ ze stałą C począwszy od momentu $p_0 > 0$ jeżeli $E\,|Y|^{p_0} < \infty$ oraz dla dowolnych $\lambda \geq 1$, $p \geq p_0$ zachodzi nierówność*

$$\|Y\|_{\lambda p} \leq (C\lambda)^{\delta}\, \|Y\|_p\,.$$

W drugim rozdziale rozważono przypadek chaosu S, gdy wszystkie współczynniki $a_{i_1,\ldots,i_d}$ są nieujemne i $X_i^{(r)}$ są niezależnymi, dodatnimi zmiennymi losowymi z logarytmicznie wklęsłymi ogonami.

Znanych jest wiele ważnych nierówności na momenty i ogony S, nawet w bardziej ogólnym przypadku U-statystyk (zob. [5], [6], [9] i [12]). Udowodnione w rozprawie oszacowania są jednak precyzyjniejsze i są optymalne z dokładnością do stałych multiplikatywnych zależnych jedynie od rzędu d.

Optymalne szacowania momentów liniowych kombinacji (przypadek $d = 1$) niezależnych, symetrycznych, logarytmicznie wklęsłych (tzn. z logarytmicznie wklęsłymi ogonami) zmiennych losowych były uzyskane przez Głuskina i Kwapienia (cf. [7]). W pracy [17] podobne nierówności zostały podane dla chaosu rzędu 2 generowanego przez tego typu zmienne (gaussowskie chaosy rzędu 2 były rozważane znacznie wcześniej w [8]). Metody użyte w obydwu pracach mogą być adaptowane do przypadku zmiennych dodatnich (zob. [20]).

Wydaje się jednak, że istnieje zasadnicza różnica pomiędzy chaosami rzędu $d \geq 3$ oraz $d = 2$. Wydaje się, że praca [19] była pierwszym krokiem w stronę bardziej ogólnych rezultatów obejmujących przypadek $d \geq 3$. Dopiero całkiem niedawno - w styczniu 2005 - Latała udowodnił dokładne szacowania w trudnym przypadku chaosów rzędu 3 generowanych przez zmienne gaussowskie. Rozdział drugi zawiera wyniki opublikowane w [19]. Okazało się jednak, że narzędzia tam użyte mogą być znacznie uproszczone. W [19] używa się twierdzenia Talagranda (cf. [21], [14]) dotyczącego koncentracyjnych własności miary $\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$, w rozprawie udało się uniknąć konieczności stosowania tego twierdzenia, w rezultacie czego rozumowania stały się bardziej elementarne.

Głównym rezultatem rozdziału drugiego jest nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Istnieją takie stałe* $0 < c_1(d) \leq C_1(d) < \infty$, *zależne tylko od* d, *że dla dowolnego* $p \geq 1$ *zachodzą oszacowania*

$$c_1(d) \left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \right\|_{\mathcal{N},p} \leq \|S\|_p \leq C_1(d) \left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \right\|_{\mathcal{N},p} .$$

Norma $\left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \right\|_{\mathcal{N},p}$ jest zdefiniowana za pomocą jednowymiarowych rozkładów zmiennych $X_i^{(r)}$.

Wnioskiem z Twierdzenia 1 jest

Twierdzenie 2 *Istnieją stałe* $0 < c_2(d) \leq C_2(d) < \infty$, *zależne tylko od* d *i takie, że dla dowolnego* $t \geq 1$ *zachodzą oszacowania*

$$P\left(S \geq C_2(d) \left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \right\|_{\mathcal{N},t} \right) \leq e^{-t}$$

oraz

$$P\left(S \geq c_2(d) \left\| (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \right\|_{\mathcal{N},t} \right) \geq \min\left(c_2(d), e^{-t} \right) .$$

W trzecim rozdziale zająłem się szacowaniem momentów i ogonów chaosów

$$\Delta_d = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \ldots X_{i_d}^{(d)}$$

o nieujemnych współczynnikach $a_{i_1,\ldots,i_d}$, generowanych przez niezależne zmienne dwupunktowe o rozkładzie

$$P\left(X_i^{(r)} = 1 \right) = 1 - P\left(X_i^{(r)} = 0 \right) = \alpha \in (0;1) .$$

Korzystając z ogólnego Twierdzenia Latały udowodniłem wpierw, z dokładnością do uniwersalnych stałych, oszacowania momentów kombinacji liniowych o dodatnich współczynnikach zmiennych $X_i^{(1)}$.

Następnie zająłem się oszacowaniami momentów form wieloliniowych od zmiennych $X_i^{(r)}$. Niestety nie udało się uzyskać optymalnych formuł na momenty Δ_d, wykazałem natomiast, że nie zachodzi naturalne uogólnienie na wyższe rzędy d formuł uzyskanych dla $d = 1$, czyli dla kombinacji liniowych zmiennych $X_i^{(r)}$.

Otrzymane rezultaty wykorzystałem do udowodnienia semihiperkontraktywnych własności chaosu generowanego przez niezależne zmienne dwupunktowe i zastosowałem je do identyfikacji wielkości pojawiających się w badaniu prawdopodobieństw odchyleń liczby małych podgrafów ponad wielokrotności jej wartości oczekiwanej w klasycznym, dwumianowym modelu grafu losowego. Nieco inne techniki do badania tych prawdopodobieństw rozwinęli Janson, Oleszkiewicz i Ruciński w [11].

Technika oparta na semihiperkontrakcji pozwoliła ulepszyć nieco wyniki autorów [11] w przypadku małych podgrafów będących np. gwiazdami lub trójkątami.

W ostatnim, czwartym rozdziale zająłem się oszacowaniami momentów i ogonów $S = \sum a_{i_1,\ldots,i_d} X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_d}^{(d)}$ w przypadku, gdy $X_i^{(r)}$ są symetrycznymi zmiennymi losowymi z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. (Jest to również przypadek chaosów gaussowskich i chaosów rademacherowych.) Dokładne oszacowania (z dokładnością do uniwersalnych stałych) na ogony i momenty S nie są znane gdy $d \geq 3$. Dla $d = 1, 2$ (por. [15], [17]) mamy następujące szacowania.

$$\left\| \sum a_i X_i^{(1)} \right\|_p \sim \sup_{x^{(1)} \in \tilde{B}_p^{(1)}} \sum a_i x_i^{(1)}, \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum a_{ij} X_i^{(1)} X_j^{(2)} \right\|_p \sim \; & \sup_{x^{(1)} \in \tilde{B}_p^{(1)}} \sum_i x_i^{(1)} \sqrt{\sum_j a_{ij}^2} \\ & + \sup_{x^{(2)} \in \tilde{B}_p^{(2)}} \sum_j x_j^{(2)} \sqrt{\sum_i a_{ij}^2} \\ & + \sup_{x^{(1)} \in \tilde{B}_p^{(1)}, x^{(2)} \in \tilde{B}_p^{(2)}} \sum a_{ij} x_i^{(1)} x_j^{(2)}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

$\tilde{B}_p^{(1)}, \tilde{B}_p^{(2)}$ są pewnymi podzbiorami R^n, zdefiniowanymi za pomocą jednowymiarowych rozkładów zmiennych $X_i^{(r)}$.

Ostatnio Latała udowodnił także oszacowania dla chaosów gaussowskich rzędu 3. W [18] udowodnione są również analogiczne oszacowania dla chaosów rzędu $d > 3$ z dokładnością do czynnika $\max(1, \ln p)^{d-3}$.

Wczesniej Borell [2] oraz niezależnie Arcones i Giné [1] otrzymali dokładne oszacowania dla chaosów gaussowskich, w których występowały jednak wartości oczekiwane supremów pewnych procesów empirycznych. W rozdziale czwartym uogólnione są ich wyniki na chaosy generowane przez symetryczne zmienne losowe z logarytmicznie wklęsłymi ogonami. Użyłem w tym celu podobnych metod jak autorzy [1], tzn. zjawiska koncentracji miary udowodnionego przez Talagranda w [21]. Zaadaptowałem tez kilka metod z [17].

W ostatnim podrozdziale rozdziału 4. podałem oszacowania innego typu. Występują w nich momenty chaosów generowanych tylko przez zmienne rademacherowskie i dają oszacowania p - tego momentu z dokładnością do czynnika $(\max(1, \ln p))^{d^2}$. Wydaje się jednak, że szacowanie chaosów rademacherowych jest zdecydowanie bardziej zawiłą rzeczą niż szacowanie chaosów gaussowskich. W dowodach użyłem technik z [19].

Bibliografia

[1] M. Arcones and E. Giné, *On decoupling, series expansions, and tail behavior of chaos processes*, J. Theoret. Probab. **6** (1993), 101-122.

[2] C. Borell, *On the Taylor series of a Wiener polynomial,* Seminar Notes on multiple stochastic integration, polynomial chaos and their integration, Case Western Univ., Cleveland 1984.

[3] V. H. de la Peña and E. Giné, *Decoupling: From Dependence to Independence*, Springer Verlag, New York 1999.

[4] P. Hitczenko, *Domination inequality for martingale transforms of Rademacher sequence*, Israel J. Math. **84** (1993), 161-178.

[5] V. H. de la Peña and S. Montgomery-Smith, *Bounds for the tail probabilities of U-statistics and quadratic forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **31** (1994), 223-227.

[6] E. Giné, R. Latała and J. Zinn, *Exponential and Moment Inequalities for U-statistics*, High Dimensional Probability II, 13–38, Progr. Probab. 47, Birkhäuser, Boston (2000).

[7] E. D. Gluskin and S. Kwapień, *Tail and moment estimates for sums of independent random variables with logarithmically concave tails*, Studia Math. **114** (1995), 303-309.

[8] D. L. Hanson and F. T. Wright, *A bound on tail probabilities for quadratic forms in independent random variables*, Ann. Math. Statist. **42** (1971), 52-61.

[9] R. Ibragimov and Sh. Sharakhmetov, *Analogues of Khintchin, Marcinkiewicz-Zygmund and Rosenthal inequalities for symmetric statistics*, Scand. J. Statist. **26** (1999), 621-623.

[10] S. Janson, T. Łuczak and A. Ruciński, *Random Graphs,* Wiley, New York, 2000.

[11] S. Janson, K. Oleszkiewicz and A. Ruciński, *Upper tails for subgraph counts in random graphs*, Israel J. Math. **141** (2004), 61-92.

[12] M. Klass and K. Nowicki, *A symmetrization-desymmetrization procedure for uniformly good approximations of expectations involving arbitrary sums of generalized U-statistics*, Ann. Probab. **28** (2000), 1884-1907.

[13] S. Kwapień and W. Woyczyński, *Random series and stochastic integrals, single and multiple,* Birkhäuser, Boston 1992.

[14] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geometric and Functional Analysis **1** (1991), 188-197.

[15] R. Latała, *Tail and moment estimates for sums of independent random vectors with logarithmically concave tails,* Studia Math. (1996), 301-304.

[16] R. Latała, *Estimation of moments of sums of independent real random variables*, Ann. Probab. 25 (1997), 1502-1513.

[17] R. Latała, *Tail and moment estimates for some type of chaos*, Studia Math. **135** (1999), 39-53.

[18] R. Latała, *Estimates of moments and tails of Gaussian chaoses*, preprint.

[19] R. Latała and R. Łochowski, *Moment and Tail Estimates for Multidimensional Chaos Generated by Positive Random Variables with Logarithmically Concave Tails*, Progr. Probab. 56, Birkhäuser, Basel (2003), 77-92.

[20] R. Łochowski, *Oszacowania momentów sum niezależnych zmiennych losowych i dwuwymiarowego chaosu*, praca magisterska, Uniwersytet Warszawski 2000.

[21] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Israel Seminar (GAFA), Springer Verlag Lecture Notes in Math. 1469 (1991), 94-124.

[22] N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. 60 (1930), 897-936.