Skompensowana zwartość oraz miary DiPerny-Majdy

Piotr Antoni Kozarzewski

24 maja 2020

1 Skompensowana zwartość

1.1 Rys historyczny

Jednym z najważniejszych problemów rachunku wariacyjnego jest badanie dolnej półciągłości funkcjonałów wariacyjnych. Dla otwartego i ograniczonego zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i funkcji $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ definiujemy funkcjonał

$$I_f(u) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_\Omega f(Du)dx, \tag{1}$$

na odpowiedniej przestrzeni $X(\Omega)$, składającej się z funkcji określonych na Ω i o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Częstym celem badań jest poszukiwanie warunku, dzięki któremu dany funkcjonał jest dolnie półciągły względem słabej topologii $X(\Omega)$, tzn. kiedy spełnia warunek

$$u^\nu \rightharpoonup u \Rightarrow I_f(u) \leq \liminf I_f(u^\nu), \tag{2}$$

gdzie $u^\nu \rightharpoonup u$ oznacza słabą zbieżność w $X(\Omega)$. W skrócie własność słabej dolnej półciągłości będziemy w skrócie oznaczać sdp. Zastosowanie Metod Bezpośrednich Rachunku Wariacyjnego pokazuje, że sdp jest jednym z warunków, które służą do udowodnienia istnienia minimów funkcjonału I_f. Zazwyczaj X jest przestrzenią Sobolewa, lecz często również przestrzenią BV lub Sobolewa-Orlicza. Mając na względzie, że modele fizyczne często sugerują wypukłość energii f, rozważanie funkcjonałów na przestrzeniach Sobolewa-Orlicza wydaje się szczególnie ciekawe. W rozdziale czwartym tym właśnie się zajmiemy.

W 1952 [51] Morrey udowodnił, że sdp funkcjonału I_f, gdy $X(\Omega)$ składa się z funkcji lipszycowskich, jest równoważne quasiwypukłości funkcji f, czyli następującej własności.

$$\forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)\ \forall A \in M^{m\times n} \Longrightarrow f(A) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(A + D\Phi)dx.$$

Niestety quasiwypukłość jest bardzo trudna, a często niemożliwa, do sprawdzenia. Z tego powodu poszukiwano innych warunków, które byłyby łatwiejsze do zrozumienia i klarowniejsze geometrycznie. Pojawiło się ich wiele, lecz ich równoważność z quasiwypukłością jest prawdziwa tylko dla przestrzeni funkcji u zależnych od jednej zmiennej lub o wartościach w $\mathbb{R}$. Wówczas jednak wszystkie te warunki są równoważne klasycznej wypukłości.

Jednym z najważniejszych takich warunków jest wypukłość rzędu 1 funkcji f: dla dowolnej macierzy $A \in M^{m \times n}$ i drugiej macierzy $B \in M^{m \times n}$ rzędu 1 zachodzić ma warunek

$$\text{function } t \mapsto f(A + tB) \text{ jest wypukła.}$$

W 1952 w [51] C. B. Morrey postawił hipotezę odnośnie równoważności wypukłości rzędu 1 i quasiwypukłości. Kontrprzykład dla te hipotezy podał Vladimír Šverák w 1992 w pracy [58], lecz tylko w sytuacji $m \geq 3, n \geq 3$. Przykład nie działa dla $n = m = 2$ i tam pytanie Morreya pozostaje otwarte.

Pewnym uogólnieniem (1) jest

$$I_f(u) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_\Omega f(u)dx, \tag{3}$$

gdzie u leży w jądrze pewnego operatora różniczkowego P o stałych współczynnikach. Na przykład w klasycznej sytuacji, rozważamy gradienty jako funkcje leżące w jądrze operatora rotacji. Podobnie jak w przypadku klasycznych pytań wariacyjnych, pytamy o warunki dolną półciągłość I_f, ale funkcje u mogą być już nie tylko gradientami.

Skompensowana zwartość znalazła do tej pory szerokie spektrum zastosowań analitycznych i geometrycznych, a ponadto wydaje się skutecznym narzędziem w badaniu praw zachowania

W zależności od spełnienia warunku stałego rzędu (warunek algebraiczny zależny od stałości rzędu macierzy charakterystycznej układu $Pu = 0$), funkcjonał I_f zdefiniowany na $\ker P$ może mieć różne właściwości. Warunek stałego rzędu wprowadzili Fonseca i M üller w 1999 r. w [20].

Dla P spełniającego warunek stałego rzędu, uzyskano warunki geometryczne odpowiadające dolnej półciągłości [19].

W innych przypadkach, to znacz, gdy operator P nie spełnia warunku stałego rzędu, nie są znane równoważne warunki. Rozważmy przykład

$$P = (P_1, P_2, P_3) = (\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}). \tag{4}$$

Operator P będziemy nazywać operatorem typu $(2, 3)$. Działa on na funkcjach $u : \Omega \to \mathbb{R}^3, \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i nie spełnia warunku stałego rzędu. Nie ma znanych warunków równoważnych z sdp funkcjonału I_f na $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap \ker P$.

Praca nad warunkiem quasicwypukłości jest uważana za jedną z najważniejszych w analizie funkcjonalnej. Wymaga różnych metod (takich jak na przykład eliptyczna regularność i koercywność, jak w [1]), skutkując dowodami pewnych nierówności z optymalnymi stałymi. Badania te były prowadzone przez tak wielkich matematyków jak Kari Astala [2, 3], John Ball [5, 6], Tadeusz Iwaniec [3, 24, 25], Jan Kristensen [47], Pablo Pedregal [53–56]. W polskiej grupie, choć nie bezpośrednio, ale powiązane badania, zapewniają Krzysztof Chełmiński, Agnieszka Kałamajska lub Adam Osękowski. Pojęcie quasiwypukłości ma również wiele zastosowań w nieliniowej teorii sprężystości.

Również teorię skompensowanej zwartości stosowano w tak ważnych i trudnych gałęziach matematyki jak optyka geometryczna, prawa zachowania i sprężystość. Co równie istotne, teoria wydaje się być dobrym narzędziem do badania hipotezy Morreya. Takie podejście już podjęli tacy matematycy jak Irene Fonseca [19, 20], Francois Murat [6, 52], Jeffrey Rauch [26, 27], czy Luc Tartar [59–61].

Warto wspomnieć, że praca dotycząca skompensowanej zwartości, autorstwa Guido De Philippisa i Filipa Rindlera, została niedawno opublikowana w prestiżowym czasopiśmie Annals of Mathematics [14].

1.2 Krótki opis uzyskanych wyników

W rozdziale drugim, na podstawie [35], badamy problem słabej-$\star$ dolnej półciągłości funkcjonałów opisanych w (3), zdefiniowanych nie w całym $L^\infty(\Omega)$,, ale tylko w jądrze operatora $(2, 3)$. Głównym celem jest poszukiwanie nowych warunków typu wypukłościowego na f,, które by wyjaśniały słabą-$\star$ dolną półciągłość I_f w przejrzysty i geometryczny sposób. W szczególności, w oparciu o interesujące idee pochodzące z [26] i ich rozwinięcie w [13, 29], badamy funkcjonały zdefiniowane w jądrze operatora P zdefiniowanego w (4), który jest prototypem teorii skompensowanej zwartości dla operatorów, które nie spełniają warunku stałego rzędu.

W drugim rozdziale zaproponowaliśmy warunek tetrahedralnej poliwypukłości i zbadaliśmy jego właściwości. Warunek jest geometrycznie jasny. Udowodniono, że jest wystarczający dla słabej-$\star$ dolnej półciągłości funkcjonału opisanego przez(3), ale zdefiniowanej w jądrze operatora P (4). Udowadniamy też twierdzenie typu Carathéodory'ego dla tetrahedralnej poliwypukłości. Sprawdzamy także, że warunek ten nie jest lokalny, tak samo jak quasiwypukłość. Niestety wprowadzenie tego pojęcia nie zamyka problemu badawczego, który podjęliśmy. Dość naturalna modyfikacja przykładu Aliberta i Dacorogni z [1] pokazuje, że nasz warunek nie jest konieczny dla słabej-$\star$ dolnej półciągłości.

2 Zachowanie funkcjonałów o nieciągłej energii

Badania słabej zbieżności złożeń ograniczonych ciągów z funkcjami nieciągłymi została zainspirowana konstrukcją miar DiPerny i Majdy, podaną w [15]. Agnieszka Kałamajska udowodniła Twierdzenie reprezentacyjne w [31], a jej praca była kontynuowana w [30, 34, 43].

2.1 Twierdzenie reprezentacyjne

Po krótce opiszemy Twierdzenie reprezentacyjne 3.2.11, pochodzące z [31]. Niech Ω będzie otwartym i ograniczonym zbiorem w $\mathbb{R}^n$ i $u^\nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Załóżmy ponadto, że $\mathbb{R}^m$ jest podzielone na skończoną liczbę podzbiorów

$$\mathbb{R}^m = A_1 \cup \ldots \cup A_k$$

i dla każdego i zbiór borelowski A_i jest homeomorficzny z pewnym gęstym podzbiorem $\phi_i(A_i)$ zbioru zwartego $\gamma A_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$. Innymi słowy, A_i posiada swoją zadaną kompaktyfikację, zanurzoną w $\mathbb{R}^{N_i}$. Na $\mathbb{R}^m$ zdefiniujmy funkcję gęstości g taką, że $g_i \overset{\text{def}}{=\!=} g_{|A_i} \in C(A_i)$ oraz $g_i(\lambda) \geq \alpha > 0$ dla dowolnego $\lambda \in A_i \cap \partial A_i$. Niech dla każdego i

$$\tilde{f}_i \overset{\text{def}}{=\!=} (f/g_i) \circ \Phi^{-1} \in C(\gamma A_i). \tag{5}$$

Innymi słowy, $(f/g_i) \circ \Phi^{-1}$, czyli funkcja ciągła na $\Phi(A_i)$, daje się rozszerzyć do funkcji ciągłej na γA_i. Wówczas, (pomijając pewne techniczne detale) dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{u^\nu\}$ istnieje podciąg $\{u_j\}$, miary na Ω $\bar{m}^i, m^i$ oraz rodziny miar probabilistycznych $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ na $\mathbb{R}^m$, $\{\nu_x^i\}_{x\in\Omega}$ na koronie $\gamma A_i \setminus \Phi(A_i)$ oraz $\{\bar{\nu}_x^i\}_{x\in\Omega}$ na $\partial A_i \cap A_i$ takie, że $\{f(u_j(x))dx\}$ zbiega słabo-$\star$ w przestrzeni miar do

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\Bigg(\int_{\operatorname{int} A_i} & f(\lambda)\mu_x(d\lambda)\mu(dx) + \\ \int_{\partial A_i \cap A_i} & f(\lambda)\bar{\nu}_x^i(d\lambda)\bar{m}^i(dx) + \\ \int_{\gamma A_i \setminus \Phi(A_i)} & \tilde{f}_i(\lambda)\nu_x^i(d\lambda)m^i(dx)\Bigg),\end{aligned}$$

Ponadto wszystkie te miary nie zależą od wyboru funkcji f, spełniającej (5).

Powyższe twierdzenie daje nam pewnego rodzaju kontrolę słabej-$\star$ zbieżności ciągów złożonych z funkcjami (energiami) nieciągłymi. Warto zauważyć, że gdy mamy $u^\nu(x) \to u(x)$ prawie wszędzie, to wzór na takie granice podaje Twierdzenie o zbieżności 3.2.12 (patrz [4]). W takim przypadku zbiór punktów skupienia $u^\nu(x)$ to dokładnie $\{u(x)\}$. Nie wiemy o bardziej subtelnych wynikach obejmujących dokładną analizę nośników miar wspomnianych w Twierdzeniu reprezentacyjnym.

Miary Younga generowane przez gradienty były badane przez Davida Kinderlehrera i Pablo Pedregala [38–40], a w późniejszym okresie także Irenę Fonsecę, Stefana Müllera i Pablo Pedregala [21]. Uzyskano pełną klasyfikację tych miar. Charakteryzacja miar DiPerny-Majdy generowanych przez gradienty, ale przy ciągłości energii, dla funkcji z przestrzeni Sobolewa została uzyskana przez Agnieszkę Kałamajską i Martina Kružika w [36]. Analogiczne wyniki dotyczące funkcjonałów z nieciągłą energią nie są nam znane.

2.2 Problem kompaktyfikacji

Sformułowanie Twierdzenia reprezentacyjnego generuje ciekawy problem badawczy, który pokrótce przedstawimy. Mając dany zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^m$ oraz funkcję ciągłą $f : A \to \mathbb{R}$, chcielibyśmy znaleźć metryczną kompaktyfikację γA zbioru A wraz z włożeniem $\varphi : A \hookrightarrow \gamma A$ i taką, że funkcja $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ posiada ciągłe rozszerzenie $\bar{f} : \gamma A \to \mathbb{R}$. Istnienie takiego γA jest założeniem w wielu pracach dotyczących miar DiPerny-Majdy, jak na przykład [30–34, 36]. Sprawdzenie, czy taki warunek może być spełniony, wydaje się być problemem wcześniej niepodjętym. Mówiąc dokładniej – problem, czy taka kompaktyfikacja może być metryczna, nie został zbadany.

Wyjaśnijmy tu kilka nieoczywistych problemów. Naturalną odpowiedzią na zadane wcześniej pytanie mogłaby się wydawać klasyczna i doskonale znana kompaktyfikacja Čecha-Stone'a βA. Rzeczywiście, każda funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ posiada ciągłe rozszerzenie $\bar{f} : \beta A \to \mathbb{R}$. Niestety jednak już prosty przykład $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset [0, 1]$ posiada bardzo skomplikowaną kompaktyfikację Čecha-Stone'a $\beta\mathscr{A}$, która jest niemetryzowalna, nie posiada przeliczalnej bazy topologii i liczba jej elementów to aż $2^{2^{\mathbb{N}}}$ [16, Corollary 3.6.12]. Potrzebujemy zatem bardziej wyspecjalizowanej konstrukcji, aby uzyskać satysfakcjonującą nas kompaktyfikację. Oryginalne sformułowanie Twierdzenia reprezentacyjnego Agnieszki Kałamajskiej [31] wymaga, aby γA było podzbiorem przestrzeni euklidesowej, lecz uważna lektura dowodów pozwala nieco poluzować to założenie. Wciąż jednak metryczność γA, jak również jej zanurzenie w lokalnie zwartą przestrzeń liniową (wymagane do zastosowania plasterkowego argumentu Reschetnyaka [57]) są niezbędne. Pojawiło się kilka podejść do tego problemu, pochodzących od Gelfanda i Naimarka [22, 23], Engelkinga [16], czy też omawianych przez Keeslinga [37], które opiszemy w sekcji 3.5. Niestety, żadne z nich nie daje satysfakcjonującej odpowiedzi.

2.3 Krótki opis uzyskanych wyników

Głównym celem rozdziału trzeciego jest podanie twierdzącej odpowiedzi na wcześniej opisane pytanie. Prezentujemy konstruktywny dowód, że dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}^m$ i przeliczalnej rodziny $\mathscr{F}$ funkcji ciągłych i ograniczonych $f : A \to \mathbb{R}$, istnieje kompaktyfikacja $\kappa A \subset \ell^2$ zbioru A taka, że dla dowolnej $f \in \mathscr{F}$ istnieje ciągłe rozszerzenie $\bar{f} : \kappa A \to \mathbb{R}$. Nasz rezultat jest dość mocno związany z klasycznymi faktami, lecz w odróżnieniu od nich konstruktywny i w tym sensie nowy. Przez konstruktywność rozumiemy tu widoczną strukturę geometryczną kompaktyfikacji, w efekcie czego uzyskujemy konkretne formuły opisujące kształt κA i gęste włożenie $A \to \kappa A$. Ponadto κA jest w naturalny sposób włożona w kostkę Tychonoffa w ℓ^2. Przypomnijmy, że kostką Tychonoffa w przestrzeni $\ell^p, 1 \leq p \leq +\infty$ jest zwarty zbiór

$$\mathscr{T} \overset{\text{def}}{=\!=} \prod_{i=0}^{\infty} [0, 2^{-i}] = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{4}] \times \dots .$$

Zastosowaniem naszej konstrukcji jest reprezentacja słabych-$\star$ granic złożeń ciągów słabo zbieżnych z nieciągłymi funkcjami, do czego używamy metod miar DiPerny-Majdy. W szczególności uogólniamy Twierdzenie reprezentacyjne z [31] do przypadku energii f zależnej od u oraz x. Bez tak uważnej analizy problemu kompaktyfikacji, badanie funkcjonałów $\int_\Omega f(x,u)dx$ nie było możliwe przy nieciągłym f.

W końcowej części rozdziału przedstawiamy argumenty wskazujące, że standardowe pojęcie nośnika probabilistycznej miary Borela nie jest dobrze zdefiniowane w dowolnej przestrzeni topologicznej. Podkreślamy, że pojęcie nośnika odegrało istotną rolę w dowodzie Twierdzenia 3.4.3.

Naszym celem jest stworzenie „bardzo nieośrodkowej" przestrzeni i pokazanie istnienia rodziny domkniętych zbiorów, spośród których każdy jest pełnej miary, ale ich przecięcie jest puste. Prezentowana klasyczna konstrukcja jest przypisywana Jeanowi Dieudonnowi i pochodzi z 1939 roku. Proponujemy również pewne, według naszej wiedzy nowe, uproszczenia. Przykład ten jest dobrą ilustracją tego, co może się zdarzyć, jeśli porzucimy założenia dotyczące regularności γA. Problemy powstają wtedy nie tylko w dowodzie Twierdzenia reprezentacyjnego. W rzeczywistości niektóre tezy, takie jak jak inkluzje nośników, nie mają żadnego sensu, gdy nośnik miary nie jest poprawnie zdefiniowany.

3 Zastosowania teorii miar Younga i DiPerny-Majdy

3.1 Typowe metody w zagadnieniach zbieżności funkcjonałów

W tym samym duchu poszukiwania warunków związanych z sdp funkcjonału (1) jak wyżej, jednym z celów moich badań jest określenie asymptotycznego zachowania rodzin problemów opisanych w (1), pojawiających się w zastosowaniach pochodzących od inżynierii materiałowej i elastyczności, a szczególnie związanych z problemem optymalnego projektu i modelowaniem cienkich struktur. Rzeczywiście, na przykład dla problemów elastyczności, mając rodzinę funkcjonałów $\{I_{f_\nu}\}_\nu$, zdefiniowaną jako

$$I_{f_\nu}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f_\nu(Du)dx, \tag{6}$$

gdzie Ω jest pewnym ciałem materialnym, u – deformacją (lub przemieszczeniem), zaś f_ν – gęstością energii, przy odpowiednich warunkach brzegowych i zadanych silach zewnętrznych, minimizująca deformacja u^ν, jeśli istnieje, reprezentuje stan stabilny.

Oczywiście przy braku sdp funkcjonałów (6), takie deformacje mogą nie istnieć, lecz wciąż wartościowym dla zastosowań jest postawienie pytania, czy zbiór prawie-minimizatorów $\{u^\nu\}$ posiada jakiekolwiek punkty skupienia $\overline{u}$ względem odpowiedniej topologii. Chcemy także wiedzieć, jaki problem minimizacyjny rozwiązuje $\overline{u}$, a zatem chcielibyśmy wskazać funkcjonał $\overline{I_{f_\nu}}$ taki, aby

$$u^\nu \rightharpoonup u \Rightarrow \overline{I_{f_\nu}}(u) \leq \liminf I_{f_\nu}(u^\nu). \tag{7}$$

W ogólności taki funkcjonał $\overline{I_{f_\nu}}$ może w ogóle nie istnieć lub może nie być typu całkowego (czyli nie być funkcjonałem takim jak (1), co wskazał Buttazzo w [10, Theorem 4.3.2]). Nie musi być także powiązany w granicą punktową f ciągu f_ν, i to nawet w sytuacji, gdy f_ν jest ciągiem stałym, jak pokazano w [46].

W tym miejscu chcielibyśmy podkreślić, że główną rolę w technicznych częściach dowodów powiązanych z taką relaksacją odgrywają warianty lematu dekompozycyjnego, który wydaje się być najczęściej stosowanym narzędziem w przypadku pojęcia jednostajnej całkowalności. Dowody tego lematu nieodmiennie używają miar Younga (jak na przykłąd w [7–9, 21] lub [44] w przypadku przestrzeni Sobolewa-Orlicza). Lemat był wzmacniany (np. w [34]) z pomocą miar DiPerny-Majdy. Badano też własności obecnych w tym przypadku efektów koncentracji [21]. Z drugiej strony, kluczową rolę w sformułowaniu twierdzeń dotyczących takich relaksacji odgrywają pojęcia quasiwypukłości i quasiuwypuklenia, które były głównym tematem badań w rozdziale drugim. Ze względu na typowe w zastosowaniach w teorii elastyczności założenie, że energia ma wzrost kontrolowany przez pewną funkcję wypukłą, ((również w kontekście skompensowanej zwartości), przestrzenie Sobolewa-Orlicza wydają się naturalnym środowiskiem do tego typu badań

3.2 Problem optymalnego projektu

Model, nad którym będziemy pracowali to zagadnienie optymalnego projektu

$$\inf_{\substack{v\in W^{1,M}(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)\\ \chi_{E(\varepsilon)}\in BV(\Omega(\varepsilon);\{0,1\})}} \Big\{ \tfrac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\Omega(\varepsilon)} \big(\chi_{E(\varepsilon)}W_1 + (1-\chi_{E(\varepsilon)})W_2\big)(\nabla v)dx - \int_{\Omega(\varepsilon)} \hat{f}\cdot v\, dx + \alpha P(E(\varepsilon);\Omega(\varepsilon))\Big) :\ v=0 \text{ na } \partial\omega\times(-\varepsilon,\varepsilon), \tfrac{1}{\mathcal{L}^3(\Omega(\varepsilon))}\int_{\Omega(\varepsilon)}\chi_{E(\varepsilon)}\,dx=\lambda \Big\}, \tag{8}$$

gdzie

$$\beta'\left(M(|\xi|)-1\right) \le W_i(\xi) \le \beta(1+M(|\xi|)) \qquad \forall \xi\in\mathbb{R}^{3\times3}, \quad i=1,2, \text{ dla pewnych } \beta\ge\beta'>0, \tag{9}$$

a M jest funkcją Orlicza, która z pewnych przyczyn technicznych spełnia klasyczne warunki ∇_2 and Δ_2. $E(\varepsilon)\subset\Omega(\varepsilon)$ jest mierzalnym podzbiorem z ograniczonym obwodem w pewnej otwartej $\Omega(\varepsilon)$. Zakładamy, że

$$P(E(\varepsilon);\Omega(\varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\Big\{ \int_{E(\varepsilon)} div\varphi\, dx : \varphi\in C_c^1(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3), \|\varphi\|_{L^\infty}\le 1\Big\} < +\infty, \tag{10}$$

z siłą zewnętrzną $\hat{f}\in L^{M^*}(\Omega(\varepsilon);\mathbb{R}^3)$, gdzie M^* jest sprzężoną funkcją Orlicza dla M.

W celu badania asymptotycznego zachowania tego problemu, przeskalowujemy go, tak aby Ω stała się ustalonym ciałem materialnym, a następnie używamy pojęcia Γ-zbieżności w odniesieniu do pary (deformacja, obszar).. W efekcie używamy $\frac{1}{\varepsilon}-$dylatacji w kierunku równoległym do x_3. Definiujemy zatem

$$\begin{aligned}\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega \times (-1,1), E_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1,x_2,x_3) \in \Omega : (x_1,x_2,\varepsilon x_3) \in E(\varepsilon)\}\,,\\ u(x_1,x_2,x_3) \stackrel{\text{def}}{=} v(x_1,x_2,\varepsilon x_3), f\,(x_1,x_2,x_3) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(x_1,x_2,\varepsilon x_3),\\ \chi_{E_\varepsilon}(x_1,x_2,x_3) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{E\ (\varepsilon)}(x_1,x_2,\varepsilon x_3),\end{aligned} \tag{11}$$

gdzie v jest pewną deformacją odpowiednią do problemu (8).

W dalszej części będziemy się posługiwać notacją $x_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (x_1,x_2)$, $dx_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} dx_1dx_2$. Symbole ∇_α oraz D_α będą utożsamiane z parami (∇_1,∇_2), (D_1,D_2), odpowiednio.

Zauważmy, że z warunku (10) oraz definicji wahania całkowitego,

$$P\left(E\left(\varepsilon\right);\Omega\left(\varepsilon\right)\right) = \left|D\chi_{E(\varepsilon)}\right|\left(\Omega\left(\varepsilon\right)\right).$$

Zmieniając zmienne na $y_3 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x_3$ and $y_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_\alpha$ otrzymamy

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|D\chi_{E(\varepsilon)}\right|(\Omega(\varepsilon)) = \left|\left(D_\alpha\chi_\varepsilon\left|\frac{1}{\varepsilon}D_3\chi_\varepsilon\right.\right)\right|(\Omega),$$

gdzie χ_{E_ε} jest funkcją charakterystyczną zbioru E_ε, którą dla skrócenia notacji będziemy oznaczać χ_ε. W efekcie otrzymujemy przeskalowany problem, który może być badany za pomocą zdefiniowanego poniżej funkcjonału(12).

Dla każdego $\varepsilon > 0$, niech $J_\varepsilon : L^1(\Omega;\{0,1\}) \times L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ będzie funkcjonałem zdefiniowanym w następujący sposób.

$$J_\varepsilon(\chi,u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_\Omega \left(\chi W_1\left(\nabla_\alpha u\,\middle|\,\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u\right) + (1-\chi)W_2\left(\nabla_\alpha u\,\middle|\,\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u\right)\right)dx & \\ -\displaystyle\int_\Omega f\cdot u dx + \alpha\left|\left(D_\alpha\chi\left|\frac{1}{\varepsilon}D_3\chi\right.\right)\right|(\Omega) & \text{w } BV(\Omega;\{0,1\}) \times W^{1,M}(\Omega;\mathbb{R}^3),\\ +\infty & \text{wpp.}\end{cases} \tag{12}$$

Podkreślami, że jeśli $\alpha = 0$ (co oznacza brak penalizacji na granicach obszaru), to podobna analiza asymptotyczna dałaby radykalnie odmienne wyniki. Słaba-$\star$ zbieżność w sensie miar dla funkcji χ musiałaby zostać zastąpiona przez słabą-$\star$ zbieżność w L^∞, z granicami $\theta \in L^\infty(\Omega;[0,1])$, lecz już niekoniecznie w BV.

Takie modele były rozważane w przewodnictwie, chemotaksji oraz elastyczności przez wielu wyśmienitych matematyków, jak między innymi Irene Fonseca [17, 18], Robert Kohn [28, 41], Pablo Pedregal [18] czy Elvira Zappale [11, 12, 45].

Ogólny wzrost Orliczowski dla funkcji energii był już rozważany w [48–50], lecz tam również zakładano, że funkcja Orlicza M spełnia warunki Δ_2 i ∇_2. W tych pracach również badano słabą dolną półciągłość funkcjonałów wariacyjnych. W [44, 45] zdołaliśmy uzyskać formułę reprezentacyjną dla Γ-granic funkcjonałów (12). Warunki Δ_2 i ∇_2 również były używane. Sądzimy jednak, że twierdzenie to pozostanie prawdziwe, jeśli warunek Δ_2 zostanie zastąpiony słabszym założeniem.

Podkreślamy, że pojęcie quasiuwypuklenia, które było centralnym punktem odniesienia dla rozważań z rozdziału drugiego, pojawia się w naturalny i nieunikniony sposób w definicji funkcjonału J_0, będącego, zgodnie z Twierdzeniem 4.4.2, Γ-granicą rodziny funkcjonałów J_ε.

Literatura

[1] J.-J. ALIBERT AND B. DACOROGNA, *An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions,* Arch. Ration. Mech. Anal. **117** (1992), no. 2, pp. 155–166.

[2] K. ASTALA, *Analytic aspects of quasiconformality,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (1998), Berlin, pp. 617–626.

[3] K. ASTALA, T. IWANIEC, I. PRAUSE, AND E. SAKSMAN, *Burkholder integrals, Morrey's problem and quasiconformal mappings,* J. Amer. Math. Soc. **25** (2012), no. 2, pp. 507–531.

[4] J. P. AUBIN AND H. FRANKOWSKA, *Set-Valued Analysis*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, Boston, 1990.

[5] J. M. BALL, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.* Arch. Ration. Mech. Anal. **63** (1978), pp. 337–403.

[6] J. M. BALL AND F. MURAT, *Remarks on rank-one convexity and quasiconvexity,* Ordinary and Partial Differential Equations, eds. B.D. Sleeman and R.J. Jarvis, Vol. III, Pitman Research Notes in Mathematics Series **254**, 1991, Longman, New York, pp. 25–37.

[7] M. BOCEA AND I. FONSECA, *Equi-integrability results for 3d-2d dimension reduction problems*, ESAIM: COCV, 7 (2002), pp. 443–470.

[8] A. BRAIDES, I. FONSECA, AND G. FRANCFORT, *3d-2d asymptotic analysis for inhomogeneous thin films*, Indiana Univ. Math. J., 49 (2000), pp. 1367–1404.

[9] A. BRAIDES AND C. I. ZEPPIERI, *A note on equi-integrability in dimension reduction problems*, Calc. Var., 29 (2007), pp. 231–238.

[10] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, Relaxation, and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Longman Scientific & Technical New York, Harlow, Essex, England, 1989.

[11] G. Carita and E. Zappale, *3d–2d dimensional reduction for a nonlinear optimal design problem with perimeter penalization*, CRAS Math., 350 (2012), pp. 1011–1016.

[12] G. Carita and E. Zappale, *Relaxation for an optimal design problem with linear growth and perimeter penalization*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 145 (2015), p. 223–268.

[13] K. Chełmiński and A. Kałamajska, *New convexity conditions in the calculus of variations and compensated compactness theory.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. **12** (2006), pp. 64–92.

[14] G. De Philippis and F. Rindler, *On the structure of $\mathscr{A}$-freemeasures and applications,* Annals of Mathematics **184** (2016), pp. 1–23;

[15] R. J. DiPerna and A. J. Majda, *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations*, Communications in Mathematical Physics, 108 (1987), pp. 667–689.

[16] R. Engelking, *General Topology*, vol. 6 of Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[17] I. Fonseca and G. A. Francfort, *3D-2D asymptotic analysis of an optimal design problem for thin films*, J. Reine Angew. Math., 505 (1998), pp. 173–202.

[18] I. Fonseca, D. Kinderlehrer, and P. Pedregal, *Energy functional depending on elastic strain and chemical composition*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2 (1994), pp. 283–313.

[19] I. Fonseca and M. Kružík, *Oscillations and concentrations generated by A-free mappings and weak lower semicontinuity of integral functionals,* ESAIM Control Optim. Calc. Var. **16** (2010), no. 2, pp. 472–502.

[20] I. Fonseca, S. Müller, *A-quasiconvexity, lower semicontinuity, and Young measures,* SIAM J. Math. Anal. **30** (1999), pp. 1355–1390.

[21] I. Fonseca, S. Müller, and P. Pedregal, *Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients*, SIAM J. Math. Anal., 29 (1998), pp. 736–756 (electronic).

[22] I. M. Gelfand, *Normierte Ringe*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 9(51) (1941), pp. 3–24.

[23] I. M. Gelfand and M. A. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space*, Math. Sbornik, 12 (1943), pp. 197–217.

[24] T. Iwaniec, *Nonlinear Cauchy-Riemann operators in* $\mathbb{R}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 5, pp. 1961–1995.

[25] T. Iwaniec and A. Lutoborski, *Polyconvex functionals for nearly conformal deformations,* Siam. J. Math. Anal. **27**, (1996), No. 3, pp. 609–619.

[26] J.-L. Joly, G. Metivier, and J. Rauch, *Trilinear compensated compactness and nonlinear geometric optics,* Ann. of Math. **142** (1995), pp. 121–169.

[27] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch, *Diffractive nonlinear geometric optics with rectification,* Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), no. 4, pp. 1167–1241.

[28] F.-H. Lin and R. Kohn, *Partial regularity for optimal design problems involving both bulk and surface energies*, Chin. Ann. Math. Series B, 20 (1999), pp. 137–158.

[29] A. Kałamajska, *On new geometric conditions for some weakly lower semicontinuous functionals with applications to the rank-one conjecture of Morrey,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **133(A)** (2003), pp. 1361–1377.

[30] A. Kałamajska, *On one generalization of a theorem by DiPerna and Majda*, Mathematical Methods in Applied Sciences, 29 (2006), pp. 1307–1325.

[31] A. Kałamajska, *On Young measures controlling discontinuous functions*, Journal of Convex Analysis, 13 (2006), pp. 177–192.

[32] A. Kałamajska, *Oscillation and concentration effects described by Young measures which control discontinuous functions*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 31 (2008), pp. 111–138.

[33] A. Kałamajska, *On one method of improving weakly converging sequence of gradients*, Asymptotic Analysis, 62 (2009), pp. 107–123.

[34] A. Kałamajska, *On one extension of Decomposition Lemma dealing with weakly converging sequences of gradients with application to nonconvex variational problems*, Journal of Convex Analysis, 20 (2013), pp. 545–571.

[35] A. Kałamajska and P. A. Kozarzewski, *On the condition of tetrahedral polyconvexity, arising from calculus of variations*, ESAIM: COCV, 23 (2017), pp. 475–495.

[36] A. Kałamajska and M. Kružík, *Oscillations and concentrations in sequences of gradients*, ESAIM: COCV, 14 (2008), pp. 71–104.

[37] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proceedings, 19 (1994), pp. 129–148.

[38] D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Characterizations of Young measures generated by gradients*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 115 (1991), pp. 329–365.

[39] D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), pp. 1–19.

[40] D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces*, The Journal of Geometric Analysis, 4 (1994), pp. 59–90.

[41] R. V. Kohn and G. Strang, *Optimal design and relaxation of variational problems, I, II, III*, Comm. Pure and Appl. Math., (1986), pp. 113–137, 139–182, 353–377.

[42] P. A. Kozarzewski, *On existence of the support of a Borel measure*, Demonstratio Mathematica, 76 (2018), pp. 76–84.

[43] P. A. Kozarzewski, *On certain compactification of an arbitrary subset of* $\mathbb{R}^m$ *and its applications to DiPerna-Majda measures theory*, submitted, (2020).

[44] P. A. Kozarzewski and E. Zappale, *Orlicz equi-integrability for scaled gradients*, Journal of Elliptic and Parabolic equations, 3 (2017), pp. 1–10.

[45] P. A. Kozarzewski and E. Zappale, *A note on optimal design for thin structures in the Orlicz–Sobolev setting*, in Integral Methods in Science and Engineering, Volume 1: Theoretical Techniques, C. Constanda, M. Dalla Riva, P. D. Lamberti, and P. Musolino, eds., Springer International Publishing, Cham, 2017, pp. 161–171.

[46] J. Kristensen, *On the non-locality of quasiconvexity,* Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire, **16** (1999), no. 1, pp. 1-13.

[47] J. Kristensen, *On condition for polyconvexity,* Proc. Amer. Math. Soc., **128**, (2000) no. 6, pp. 1793–1797.

[48] W. Laskowski and H. T. Nguyễn, *Effective energy integral functionals for thin films in the Orlicz-Sobolev space setting*, Demonstratio Mathematica, XLVI (2013).

[49] W. Laskowski and H. T. Nguyễn, *Effective energy integral functionals for thin films with bending moment in the Orlicz-Sobolev space setting*, Banach Center Publ., 102 (2014), pp. 143–167.

[50] W. Laskowski and H. T. Nguyễn, *Effective energy integral functionals for thin films with three dimensional bending moment in the Orlicz-Sobolev space setting,* Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36** (2016), no. 1, pp. 7–31.

[51] C. B. Morrey, *Quasi–convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals,* Pac. J. Math. **2** (1952), pp. 25–53.

[52] F. Murat, *A survey on compensated compactness,* Contributions to modern calculus of variations (L. Cesari ed.), Pitman Research Notes in Mathematics Series **148**, Longman, Harlow, 1987, pp. 145–183.

[53] P. Pedregal, *Some remarks on quasiconvexity and rank–one convexity.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **126(A)** (1996), pp. 1055–1065.

[54] P. Pedregal, *Parametrized Measures and Variational Principles,* Birkhäuser, 1997.

[55] P. Pedregal, *Weak continuity and weak lower semicontinuity for some compensation operators,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **113(A)** (1989), pp. 267–279.

[56] P. Pedregal, V. Šverák, *A note on Quasiconvexity and Rank–one Convexity for* 2×2 *Matrices* J. Conv. Anal. **5** (1998), pp. 107–117.

[57] Y. G. Reshetnyak, *Weak convergence of completely additive vector functions on a set*, Syberian Mathematical Journal, 9 (1968), pp. 1039–1045.

[58] V. Šverák, *Rank–one property does not imply quasiconvexity,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **120(A)** (1992), pp. 185–189.

[59] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations,* Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, Res. Notes in Math., **39**, Pitman, Boston, Mass. 1979, pp. 136–212.

[60] L. Tartar, *The Compensated Compactness Method Applied to Systems of Conservation Laws,* In: Śystems of Nonlinear Partial Differential Equations"; J. M. Ball (ed.), pp. 263–285, (D. Riedel Publ. Company) 1983.

[61] L. Tartar, *Mathematical tools for studying oscillations and concentrations: From Young measures to H-measures and their variants, in Multiscale problems in science and technology,* Challenges to mathematical analysis and perspectives, N. Antonič, C.J. Van Duijin and W. Jager Eds., Proceedings of the conference on multiscale problems in science and technology, held in Dubrovnik, Croatia, September 3–9, 2000, Springer, Berlin (2002).