Analityczne metody w nierównościach dotyczących średnich
Strzeszczenie rozprawy doktorskiej

Paweł Pasteczka

27 kwietnia 2015

Moja rozprawa doktorska składa się z dwu części, które są blisko powiązane tematycznie. Obie części dotyczą zagadnień związanych z szeroko rozumianą *teorią średnich* w analizie matematycznej. Pierwsza część traktuje o średnich *quasi-arytmetycznych* (termin ten wprowadzony został przez Kołmogorowa w roku 1930), druga natomiast dotyczy *własności Hardy'ego* średnich (własność wywodząca się w prostej – choć mocno rozciągniętej w czasie – linii od klasycznej nierówności Hardy'ego z roku 1920 zachodzącej dla części średnich potęgowych).

Idea średnich quasi-arytmetycznych najpierw tylko mignęła w pionierskiej pracy Knoppa [12]; niedługo później została zmaterializowana do końca w trzech pracach z początku lat 1930-ch [7, 14, 20]. Średnią taką definiuje się dla dowolnej ustalonej funkcji ciągłej i ściśle monotonicznej $f\colon U \to \mathbb{R}$, U – przedział. Na $n \geqslant 1$ węzłach $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in U^n$ z odpowiadającymi im dodatnimi wagami $(w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, wynosi ona

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^n w_i f(a_i)\right) .$$

Średnie quasi-arytmetyczne stanowią naturalne uogólnienie średnich potęgowych (nazywanych też czasami średnimi Höldera)

$$\mathcal{P}_p(a, w) := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot a_i^p\right)^{1/p} & p \neq 0, \\ \prod_{i=1}^n a_i^{w_i} & p = 0, \end{cases}$$

gdzie $a \in (0, +\infty)^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ – tego właśnie można doczytać się we wspomnianej wyżej pracy [12].

Jednak sama ich idea jest głęboka: Kołmogorow w [14] odtwarza funkcję generującą daną średnią quasi-arytmetyczną używając tylko kilku podstawowych własności średnich *per se*. Jego dowód, bardzo konstruktywny, pozwala odtworzyć [jedną z wielu dopuszczalnych] funkcji f tylko na podstawie wartości $f^{-1}(\frac{1}{n}\sum f(a_i))$ dla różnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in U^n$. Wiele wyników znanych wcześniej dla średnich potęgowych przenosi się (czasami szybko, a czasami ze sporymi trudnościami) na – o wiele szerszą od potęgowych – rodzinę średnich quasi-arytmetycznych (czasem pisanych skrótowo: Q-A).

W części pierwszej rozprawy (rozdziały trzeci i czwarty) dowodzone są (a) fakty dotyczące *skal* tworzonych przez liczne rodziny średnich Q-A (rodziny brane z

dokładnie analitycznie opisanej klasy rodzin), oraz (b) nowe oszacowania różnic między średnimi quasi-arytmetycznymi pochodzącymi od różnych *funkcji generujących* (takie określenie przyjęło się dla funkcji f występującej w definicji powyżej). Wyniki te nawiązują do i wzmacniają rezultaty uzyskane wcześniej wspólnie przez Cargo oraz Shishę w pracach [5] oraz [6]. Ponadto bardzo istotną rolę w badaniach przedstawionych w tej części rozprawy odgrywa rezultat uzyskany jeszcze znacznie wcześniej przez Mikusińskiego [18] (co ciekawe, rezultat znany był w tamtym czasie także Łojasiewiczowi, patrz [18, przypis 2]).
Uwaga. Rozdział trzeci dość wiernie odpowiada opublikowanej już pracy [25], zaś rozdział czwarty odpowiada pracy [26], która została wysłana do czasopisma.

Część druga rozprawy (rozdziały szósty i siódmy) poświęcona jest badaniu tak zwanej własności Hardy'ego średnich. W 1920 roku G. H. Hardy, [11], pokazał dla średnich potęgowych $\mathcal{P}_p$, że dla każdego $p \in (0,1)$ można wskazać stałą c_p taką, że $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_p(a_1,\dots,a_n) < c_p \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla dowolnego $a \in l^1(\mathbb{R}_+)$. Podał on również dowód ze stałą $\tilde{c}_p = (p-p^2)^{-1/p}$ oraz postawił hipotezę, że najlepszą (najmniejszą) stałą w tej nierówności (przy podanym wyżej zakresie zmienności wykładnika p) jest $c_p = (1-p)^{-1/p}$ (to sformułowanie współczesne; język w [11] był trochę inny). Hipoteza ta została udowodniona rok później przez Landaua. (W prywatnym liście do Hardy'ego [16], potem upublicznionym. Oficjalna publikacja [17] jest aż o pięć lat późniejsza.) Jeszcze dwa lata później Carleman [3] pokazał, że $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_0(a_1,\dots,a_n) < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz, że stała e jest tu już najlepsza. Z kolei w 1928 Knopp [12] rozszerzył nierówności Hardy'ego i Carlemana na ujemne wykładniki p, dając od razu najlepszą możliwą stałą w oszacowaniu – w dalszym ciągu okazała się nią być $c_p = (1-p)^{-1/p}$, teraz rozumiana dla $p < 0$. Można tu zauważyć, że graniczną wartością wyrażenia $(1-p)^{-1/p}$ przy $p \to 0$ jest właśnie e. Knopp zamknął tym samym problem wyznaczenia optymalnych wartości stałej w nierówności Hardy'ego dla średnich potęgowych. (Łatwo sprawdzić, że dla $p \geqslant 1$ średnie potęgowe $\mathcal{P}_p$ *nie* spełniają analogicznej nierówności przy jakiejkolwiek stałej; już średnia arytmetyczna $\mathcal{P}_1$ nie daje szans na nierówność tego typu.)

Omówiona wyżej własność, którą mają średnie potęgowe $\mathcal{P}_p$ przy $p < 1$, została eksplicite nazwana dopiero w roku 2004 w pracy [24]. Mianowicie, mówi się obecnie, że średnia $\mathfrak{A} \colon \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \to \mathbb{R}_+$, gdzie U jest przedziałem, $\inf U = 0$ oraz $0 \notin U$, ma *własność Hardy'ego* jeśli istnieje taka stała c, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}(a_1,\dots,a_n) < c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{dla dowolnego } a \in l^1(U)\,.$$

Uwaga. Często średnie mające własność Hardy'ego nazywa się krótko 'średnimi Hardy'ego'. Tak więc, używając już tej skróconej formy, średnia potęgowa $\mathcal{P}_p$ jest Hardy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $p < 1$. Wydaje się naturalnym badanie własności Hardy'ego dla różnych rodzin średnich – temu przecież służy tak ogólna definicja. Daje nam ona pewien rodzaj kryterium porównawczego (średnia mniejsza od pewnej średniej Hardy'ego jest Hardy'ego; średnia większa od pewnej średniej niebędącej średnią Hardy'ego nie jest Hardy'ego). Kryterium to (w nieznacznie tylko ogólniejszej postaci) zostało sformułowane w [24] i wykorzystane do rozstrzygnięcia posiadania tej własności przez wiele średnich innych niż potęgowe.

Bardzo ważną pracą w rozwoju teorii średnich Hardy'ego (pamiętajmy, że jeszcze bardzo długo – ponad 70 lat – nie nazywanych tak oficjalnie!) jest praca

Mulhollanda [19]. Podany jest w niej pewien konkretny warunek jednoznacznie charakteryzujący średnie Hardy'ego w ogromnej rodzinie średnich Q-A. Do dnia dzisiejszego jest to jeden z najogólniejszych rezultatów w teorii średnich!

W tym miejscu warto podkreślić, że – pomimo klasyczności sformułowań – problem bycia [przez średnią] średnią Hardy'ego pozostaje dla większości z nich wciąż nierozwiązany. I to pomimo tego, że od lat 1920-ch pojawiły się liczne wyniki dotyczące średnich Hardy'ego. (Szeroko i przystępnie traktują o tym prace przeglądowe [29, 8, 21] oraz niedawna książka [15].) W ten właśnie nurt wpisują się świeże rezultaty zawarte w drugiej części rozprawy.

Dokładniej, w rozdziale szóstym (odpowiadającym pracy [27]) podana jest zaawansowana próba scharakteryzowania średnich Hardy'ego w bardzo naturalnej trójparametrowej rodzinie, uogólniającej jednoparametrową rodzinę potęgową, zaproponowanej w roku 1971 przez Carlsona, Meany'ego oraz Nelsona. Natomiast w rozdziale siódmym (odpowiadającym pracy [28]) po **pierwsze**: w pełni scharakteryzowana jest własność Hardy'ego wśród *średnich Giniego* ([9]), i jest to rozwiązanie problemu postawionego przez Pàlesa oraz Perssona w roku 2004 w [24]. Po **drugie** zaś, jest tam podana pełna charakteryzacja własności Hardy'ego dla tzw. *produktów Gaussa* średnich potęgowych.

Obie prace [27] i [28] są już przyjęte do druku.

Poniżej, w dwu kolejnych sekcjach bardziej szczegółowo opisane są wyniki rozprawy dotyczące średnich quasi-artytmetycznych oraz średnich Hardy'ego.

1 Średnie quasi-arytmetyczne

Średnie quasi-arytmetyczne zostały zaproponowane na początku lat 1930-ch w trzech niezależnych pracach [7, 14, 20]. Przypomnijmy, że jeśli $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną, natomiast U jest przedziałem, to średnią quasi-arytmetyczną generowaną przez f określa się wzorem

$$\mathfrak{M}_f(a, w) := f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i f(a_i)\right) ,$$

gdzie $a \in U^n$ są *węzłami*, natomiast $w_i > 0$ spełniające warunek $\sum w_i = 1$ są *wagami*. Dokładna dziedzina funkcji $\mathfrak{M}_f$ jest nieoczywista – jest to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \times \left\{ w \in (0,1)^n \colon \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}.$$

Często przyjmuje się w uproszczeniu $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \frac{1}{n}$ i dziedziną jest wtedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ (tzn. jest ona wtedy dokładnie taka sama jak wymieniana w kontekście średnich Hardy'ego).

Średnie te stanowią naturalne uogólnienie średnich potęgowych. Zostało to zaanonsowane przez Knoppa pod koniec lat 1920-ch w [12]. W rzeczywistości rodziny te są tak blisko związane, że klasyczny dowód nierówności między średnimi potęgowymi korzystający z nierówności Jensena można w przejrzysty i w pełni kontrolowany sposób przenieść na liczne rodziny średnich quasi-arytmetycznych. Zanim więcej o tym, zatrzymajmy się przy wspomnianej monotoniczności ze względu na indeks (wykładnik) samych średnich potęgowych i zobaczmy, jak ta monotoniczność przejawia się w ... geometrii trapezów.

Pomyślmy przez chwilę o trapezie o bokach długości a i b, $a \neq b$, oraz wysokości h, mającym pole $P = h\,\mathcal{P}_1(a,b)$. (Tu i dalej używamy tylko klasycznych wag $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$.) Niech trójkąty przy jego podstawach utworzone przez jego przekątne mają pola, odpowiednio, P_a i P_b. Z kursu geometrii pamiętamy jeszcze, że wtedy $P_a + P_b > \frac{1}{2}P$, albo pisząc inaczej:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1(P_a,P_b) > \frac{1}{4}P &= \\ &= \mathcal{P}_{\frac{1}{2}}(P_a,P_b) = \frac{1}{4}h\,\mathcal{P}_1(a,b) > \frac{1}{4}h\,\mathcal{P}_{-1}(a,b) \\ &= \mathcal{P}_0(P_a,P_b)\,.\end{aligned}$$

(Pierwsza równość powyżej jest ćwiczeniem na zastosowanie twierdzenia Talesa; ostatnia równość jest wnioskiem z wzorów eksplicite na pola P_a i P_b.)

Tak więc, w klasycznej geometrii trapezów przejawiają się zarówno nierówności $\mathcal{P}_0 < \mathcal{P}_{\frac{1}{2}} < \mathcal{P}_1$, jak też $\mathcal{P}_{-1} < \mathcal{P}_1$.

Wracając do średnich Q-A, niech teraz U będzie przedziałem, f, $g\colon U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i ściśle monotonicznymi. Niech przy tym f będzie funkcją rosnącą (założenie to nie ogranicza ogólności, gdyż, jak łatwo sprawdzić, $\mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_{-f}$). Wówczas równoważne są: (i) $\mathfrak{M}_f(a,w) \geqslant \mathfrak{M}_g(a,w)$ dla dowolnych a, w, (ii) $f \circ g^{-1}$ jest funkcją wypukłą.

Dodatkowo, przy naturalnych założeniach dotyczących gładkości i korzystając z nierówności Jensena, otrzymuje się od razu trzecią własność równoważną (iii) $A_f(x) \geqslant A_g(x)$ dla $x \in U$, gdzie $A_f := f''/f'$.[1]

Otóż istotne wzmocnienie obserwacji (iii) przedstawił niedługo po wojnie Mikusiński:

Twierdzenie 1 ([18])**.** Niech U będzie przedziałem, f, $g\colon U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, $f' \cdot g' \neq 0$ wszędzie w U. Wówczas następujące warunki są równoważne: (a) $\mathfrak{M}_f(a,w) \geqslant \mathfrak{M}_g(a,w)$ dla wszystkich a oraz w, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy a jest wektorem stałym, (b) $A_f > A_g$ na gęstym podzbiorze U.

Twierdzenie to, pomimo swojej klarowności i siły ekspresji, jest mało spopularyzowane w literaturze dotyczącej średnich. Często przytaczane jest ono tylko w uproszczonej (i anonimowej) wersji jako równoważność warunków (i) oraz (iii).

Szacowanie różnic między średnimi

W latach 1960-ch w pracach [5, 6] rozważano kwestie związane z szacowaniem różnicy między dwiema średnimi quasi-arytmetycznymi. W tym celu Cargo oraz Shisha zaproponowali następującą metrykę w zbiorze wszystkich średnich Q-A generowanych przez funkcje na ustalonym przedziale:

$$\rho(\mathfrak{M}_f, \mathfrak{M}_g) := \sup\{|\mathfrak{M}_f(a,w) - \mathfrak{M}_g(a,w)| : a,\ w \text{ dopuszczalne}\}.$$

[1] Operator A zasługuje na własną nazwę. W układach dynamicznych jest to *nieliniowość* danej funkcji. W matematyce finansowej jest to przeciwność tzw. indeksu Arrowa-Pratta.

Podali oni również kilka górnych oszacowań dla tej metryki, m. in. klasyczny już obecnie wynik mówiący, że $\rho(\mathfrak{M}_f, \mathfrak{M}_g) < 2 \cdot \omega_{f^{-1}}(\|f-g\|_\infty)$ ($\omega_h(\cdot)$ jest tu modułem ciągłości funkcji h).

W rozdziale trzecim rozprawy (odpowiadającym pracy [25]), korzystając z wyników [5, 6], dla średnich generowanych przez funkcje spełniające pewne warunki dotyczące gładkości udowodniłem

Twierdzenie 2. Niech U będzie przedziałem, $f,\, g\colon U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$ takimi, że $f' \cdot g'$ nie zeruje się nigdzie w U. Wówczas

$$\rho(\mathfrak{M}_f, \mathfrak{M}_g) \leqslant |U| \exp(2\left\|A_f\right\|_1) \cdot \sinh\Big(2\left\|A_g - A_f\right\|_1\Big).$$

Niedługo po publikacji pracy wynik ten został przeze mnie jeszcze wzmocniony. Jest on przedstawiony w sekcji 4.3.1 rozprawy i brzmi jak następuje

Twierdzenie 3. Niech U będzie przedziałem, $f,\, g\colon U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami jak wyżej. Wówczas

$$\rho(\mathfrak{M}_f, \mathfrak{M}_g) \leqslant |U| \exp\left\|A_f\right\|_* \cdot \Big(\exp\left\|A_f - A_g\right\|_* - 1\Big),$$

gdzie $\left\|u\right\|_* := \sup_{a,b\in U}\left|\int_a^b u(x)dx\right|$.

Rozdział 4, w całości inspirowany problemem przedstawionym w roku 2013 przez Pàlesa, [22], oprócz powyższego Twierdzenia 3, zawiera twierdzenie pozwalające na oszacowanie odległości dla średnich, których generatory *nie* są funkcjami gładkimi. Wynik ten jest wyrażony w terminach wprowadzonego przez Pàlesa w [23] operatora $P_f(x,y,z) := \frac{f(x)-f(y)}{f(x)-f(z)}$. Dokładniej, w rozdziale tym udowadniam

Twierdzenie 4. Niech U będzie przedziałem, $f,\, g\colon U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi, ściśle monotonicznymi. Niech $\Delta_\alpha := \{(x,y,z) \in U^3\colon\, |x-z| \geqslant \alpha\}$. Wówczas, jeśli $\left\|P_f - P_g\right\|_{L^\infty(\Delta_\alpha)} < 1$ dla pewnego $\alpha > 0$ to $\rho(\mathfrak{M}_f, \mathfrak{M}_g) < \alpha$.

Pojęcie skali

Innym kierunkiem badań rozwijanym w rozprawie jest uogólnianie klasycznego faktu znanego dla średnich potęgowych, mówiącego, że dla dowolnego ustalonego wektora argumentów, przy przebieganiu parametrem wszystkich wartości rzeczywistych otrzymuje się wszystkie wartości pośrednie pomiędzy najmniejszą i największą składową wektora (bez straty ogólności można zakładać, że wraz ze wzrostem argumentu wartości średnich rosną). W rozprawie podjęta jest próba rozstrzygnięcia, przy użyciu, jak się wydaje, nietrywialnych metod, kiedy dana rodzina średnich Q-A posiada wymienioną wyżej własność, tzw. własność skali[2]. Dokładniej, w rozdziale trzecim (odpowiadającym pracy [25]) znajduje się udowodnione przeze mnie

Twierdzenie 5. Niech I, U będą przedziałami otwartymi, $(k_\alpha)_{\alpha\in I}$ będzie rodziną funkcji klasy $\mathcal{C}^2$, $k_\alpha\colon U \to \mathbb{R}$, $k_\alpha' \neq 0$ wszędzie w dziedzinie U dla $\alpha \in I$. Wówczas

[2]Definicja skali jest bardzo trudna do dokładnego zlokalizowania w literaturze. W klasycznej monografii P. S. Bullena występuje ona w kilku miejscach jedynie implicite [2, str. 269, 299, 323, 364].

- **jeśli** $I \ni \alpha \mapsto A_{k_\alpha}(x) \in \mathbb{R}$ jest rosnąca i 1-1 dla x z gęstego podzbioru U oraz jest „na” dla każdego $x \in U$, **to** $(\mathfrak{M}_{k_\alpha})_{\alpha \in I}$ jest rosnącą skalą na U;

- **jeśli** $(\mathfrak{M}_{k_\alpha})_{\alpha \in I}$ jest rosnącą skalą na U, **to** istnieje gęsty podzbiór $X \subset U$ taki, że $I \ni \alpha \mapsto A_{k_\alpha}(x) \in \mathbb{R}$ jest rosnąca, 1-1 oraz „na” dla każdego $x \in X$.

Chciałbym w tym miejscu podkreślić, że oba warunki podane w Twierdzeniu 5 w sensie logicznym ‘się rozjeżdżają’. Pierwszy z nich (**dostateczny** dla bycia skalą) brzmi: [rozważane tam] przekształcenie jest „na” dla dowolnego $x \in U$. Drugi natomiast (**konieczny** dla bycia skalą) mówi tylko, że musi ono być „na” dla x z (pewnego) gęstego podzbioru $X \subset U$.

Twierdzenie 5 ma kilka (wydaje się, że znaczących) konsekwencji. Należą do nich

- nowy, bardzo krótki dowód faktu, iż rodzina średnich potęgowych tworzy skalę na przedziale $(0, +\infty)$;

- dowód faktu pochodzącego od włoskiej szkoły statystycznej z początku XX wieku mówiącego, że klasyczna rodzina średnich pierwiastkowych (*radical means*) tworzy skalę na przedziale $(0,\, +\infty)$;

- wynik częściowo powiązany ze wcześniejszymi rezultatami Kolesárovej [13] z roku 2001 mówiący, że dla dowolnej ściśle rosnącej, wypukłej funkcji $k\colon (0,\,1) \to (0,\,+\infty)$ rodzina $\{\mathfrak{M}_{k_\alpha}\}_{\alpha \in (0,\,+\infty)}$ średnich quasi-arytmetycznych generowanych przez funkcje k_α, $k_\alpha(x) = k(x^\alpha)$, $\alpha \in (0,\,+\infty)$, tworzy skalę na przedziale $(0, 1)$ *między* średnią geometryczną oraz maksimum. To znaczy, że dla dowolnego wektora a z wagami w, jeśli $s \in \left(\prod_{i=1}^n a_i^{w_i},\, \max(a)\right)$, to istnieje dokładnie jedna wartość α spełniająca równanie
$$\mathfrak{M}_{k_\alpha}(a,\, w) = s.$$

Trzeci wynik w tym wyliczeniu nie mówi wprost o skali w sensie podanym na początku tego podrozdziału, tylko o jego nieznacznym uogólnieniu. Możemy mówić o skali *między* dwiema ustalonymi funkcjami, wymagając przyjmowania wszystkich wartości pomiędzy nimi (w przykładzie powyżej – pomiędzy średnią geometryczną i maksimum) zamiast, jak to stoi w klasycznej definicji skali, wszystkich wartości pośrednich pomiędzy najmniejszą i największą składową wektora. Okazuje się, że rozszerzenie to nie prowadzi do istotnej komplikacji metod dowodowych. Z drugiej strony pozwala ono na prostsze formułowanie niektórych rezultatów.

2 Średnie Hardy’ego

Historia średnich Hardy’ego, wprowadzonych formalnie zaledwie dziesięć lat temu w pracy [24], sięga wstecz aż do roku 1920, kiedy to Hardy opublikował dowód nierówności
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^q \leqslant \left(\frac{q^2}{q-1} \right)^q \sum_{k=1}^{N} a_k^q, \qquad \text{gdzie } q > 1, n \in \mathbb{N}_+ \text{ oraz } a_k \geqslant 0,$$

z której, po zmianie zmiennych oraz rozważeniu granicy $N \to \infty$, otrzymuje się

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_p(a_1, \ldots, a_n) < (p - p^2)^{-1/p} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{gdzie } p \in (0,1) \text{ oraz } a \in l^1(\mathbb{R}_+).$$

We współczesnym języku, uwzględniając późniejsze uzupełnienia Carlemana i Knoppa, mówi się krótko: średnia potęgowa $\mathcal{P}_p$ jest Hardy'ego dla *wszystkich* $p < 1$. Hardy zdawał sobie sprawę z faktu, iż stała występująca po prawej stronie powyższej nierówności nie jest optymalna. (Jego stała $(p - p^2)^{-1/p}$ nie jest funkcją rosnącą, podczas gdy wielkości $\mathcal{P}_p(a_1, \ldots, a_n)$ rosną przy wzroście p.)

Rok później problem ten rozwiązuje Landau w liście do Hardy'ego datowanym na 21 czerwca 1921, będącym podstawą do noty [17]. (Dokładna chronologia wydarzeń jest tu bardzo skomplikowana; pojawiają się w niej nazwiska Hilberta, Riesza, Schura, Carlemana, oczywiście też Landaua. Szczegółowo opisują to autorzy monografii [15] w dodatku kończącym książkę.) Ostatecznie pod koniec lat dwudziestych było wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_p(a_1, \ldots, a_n) < c_p \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{dla dowolnego } a \in l^1(\mathbb{R}_+) \text{ oraz } p < 1,$$

gdzie $c_p = (1 - p)^{-1/p}$ dla $p \neq 0$ oraz $c_0 = e$ są już najmniejszymi możliwymi stałymi.

Obecnie teoria ta jest już na tyle rozbudowana, że wiele jej aspektów zostało w rozprawie w całości pominiętych lub tylko wspomnianych. Tutaj zaanonsuję jedynie kilka z nich. Pierwszym jest problem znajdowania, dla ustalonego $p < 1$, parametrów $\nu_n > 1$ oraz $\mu_n < 1$ spełniających

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \mathcal{P}_p(a_1, \ldots, a_n) < c_p \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n \qquad \text{dla dowolnego } a \in l^1(\mathbb{R}_+)$$

(np. Redheffer [30]) oraz analogicznie dla innych średnich (co ważne – bez zmiany optymalnej stałej). Drugim jest badanie całkowych odpowiedników nierówności Hardy'ego.

W jeszcze innym nurcie mieści się ważny wynik z roku 1932 łączący dwa główne filary rozprawy doktorskiej – średnie quasi-arytmetyczne oraz średnie Hardy'ego. W kontekście historycznym na uwagę zasługuje niewielki odstęp czasowy między definicją średnich Q-A oraz tym rezultatem. Wynik w pracy [19] nie jest wyrażony w języku średnich – można go natomiast łatwo przedstawić w tym języku. Nie wiadomo, czy Mulholland wiedział o definicji średnich Q-A, która pojawiła się niewiele wcześniej w pracach [7, 14, 20]. Tym niemniej w swojej pracy, używając współczesnego języka, pokazał on

Twierdzenie 6 ([19])**.** Niech $U \subset \mathbb{R}_+$ będzie przedziałem, $\inf U = 0$. Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną. Wówczas $\mathfrak{M}_f$ jest średnią Hardy'ego wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby $A > 1$, $k > 1$ oraz funkcja wypukła $\varphi\colon f(U) \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\varphi(y) \leqslant (f^{-1}(y))^{1/k} \leqslant A \cdot \varphi(y) \qquad \text{dla } y \in f(U)\,.$$

Pomimo istnienia tak ogólnych rezultatów, problem posiadania przez średnią własności Hardy'ego pozostaje otwarty dla wielu bardzo naturalnych rodzin średnich. W rozprawie podaję warunek konieczny i wystarczający bycia średnią Hardy'ego dla: *(i)* średnich Giniego oraz *(ii)* produktów Gaussa średnich potęgowych. Ponadto podjęta jest zaawansowana próba dokładnej charakteryzacji własności Hardy'ego dla pewnego trójparametrowego, znanego od ponad 40 lat, uogólnienia średnich potęgowych.

Średnie Giniego

Średnie Giniego zostały zaproponowane w 1938 roku [9] jako uogólnienie średnich potęgowych. Dane są one wzorem

$$\mathfrak{G}_{p,q}(a_1,\dots,a_n) := \begin{cases} \left(\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^q}\right)^{1/(p-q)} & \text{dla } p \neq q\,, \\ \exp\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i^p \ln a_i}{\sum_{i=1}^n a_i^p}\right) & \text{dla } p = q\,. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $q = 0$ otrzymuje się na tej drodze p-tą średnią potęgową. Otóż Páles oraz Persson udowodnili w [24], że

- Jeśli $\mathfrak{G}_{p,q}$ jest średnią Hardy'ego to $\min(p,q) \leqslant 0$ oraz $\max(p,q) \leqslant 1$.
- Jeśli $\min(p,q) \leqslant 0$ oraz $\max(p,q) < 1$ to $\mathfrak{G}_{p,q}$ jest średnią Hardy'ego.

W rozdziale siódmym (Twierdzenie 7.3) pokazuję

Twierdzenie 7. Niech p, $q \in \mathbb{R}$. Wówczas $\mathfrak{G}_{p,q}$ jest Hardy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $\min(p,q) \leqslant 0$ oraz $\max(p,q) < 1$.

Chcę podkreślić, że do tej pory była to jedynie hipoteza postawiona przez autorów pracy [24].

Iloczyn Gaussa średnich potęgowych

Definicja takiego iloczynu, uogólniająca słynną średnią arytmetyczno-geometryczną Gaussa (stąd właśnie nazwa), została zaproponowna (w wersji trochę ogólniejszej, niż tu poniżej) w 1947 roku przez Gustina [10]. Niech $p \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{R}^{p+1}$. Niech ponadto v będzie jakimkolwiek wektorem liczb dodatnich. Wówczas można zdefiniować następujący ciąg wektorów

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= v, \\ v^{(i+1)} &= \Big(\mathcal{P}_{\lambda_0}(v^{(i)}), \mathcal{P}_{\lambda_1}(v^{(i)}), \dots, \mathcal{P}_{\lambda_p}(v^{(i)})\Big), \quad i = 0,\, 1,\, 2, \dots. \end{aligned}$$

Okazuje się, że dla dowolnego $0 \leqslant k \leqslant p$ istnieje granica $\lim_{i\to\infty} v_k^{(i)}$, która ponadto nie zależy od k. Granicę tę nazywa się produktem Gaussa średnich potęgowych i oznacza $\mathcal{P}_{[\lambda]}(v)$. Dotychczas średnie te zupełnie nie były badane pod kątem posiadania przez nie własności Hardy'ego.

Podobnie jak wyżej, w rozdziale siódmym (Twierdzenie 7.2), pokazuję

Twierdzenie 8. Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$. Wówczas

$$\mathcal{P}_{[\lambda]} \text{ jest średnią Hardy'ego} \iff \max_{0 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j < 1\,.$$

Uogólnione średnie potęgowe

W 1971 roku w pracy [4] zostało zaproponowane jeszcze inne uogólnienie średnich potęgowych. Mianowicie dla $k \in \mathbb{N}$, $s\,, q \in \mathbb{R}$ określa się średnią

$$\tilde{\mathcal{P}}_{k,s,q}(v_1 \dots v_n) := \begin{cases} \mathcal{P}_s\Big(\mathcal{P}_q(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})\colon 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n\Big) & \text{dla } n \geqslant k\,, \\ \mathcal{P}_q(v_1, \dots, v_n) & \text{dla } n < k\,. \end{cases}$$

W pierwszym przypadku średnia $\mathcal{P}_s$ jest brana dla ciągu argumentów długości $\binom{n}{k}$. Dodatkowo uwzględnione są graniczne parametry średnich potęgowych ($\mathcal{P}_{-\infty} = \min$ oraz $\mathcal{P}_{+\infty} = \max$).

Autorzy pracy [4] pokazali, że

$$\tilde{\mathcal{P}}_{k,s,q}(v_1, \dots, v_n) \leqslant \tilde{\mathcal{P}}_{l,s,q}(v_1, \dots, v_n)$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, wektora $a \in \mathbb{R}_+^n$, liczb rzeczywistych s, t takich, że $s \leqslant t$ oraz k, $l \in \mathbb{N}$ spełniających $k + l > n$. Omawiane tu uogólnienie średnich potęgowych nie było dotychczas badane pod kątem własności Hardy'ego.

W rozdziale szóstym (Wniosek 6.3.1) udowodniłem następujące

Twierdzenie 9. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

- $\tilde{\mathcal{P}}_{k,s,q}$ nie jest Hardy'ego dla $s \geqslant 1$, $q > 0$,
- $\tilde{\mathcal{P}}_{k,s,q}$ nie jest Hardy'ego dla $s \geqslant k$ oraz $q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,
- $\tilde{\mathcal{P}}_{k,1,q}$ jest Hardy'ego dla $q \leqslant 0$,
- $\tilde{\mathcal{P}}_{k,s,q}$ jest Hardy'ego dla $s < 1$ oraz $q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Literatura

[1] P. R. Bessac and J. Pečarič, *On Jensen's inequality for convex functions II*, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), 61–65.

[2] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Mathematics and Its Applications, vol. **560**, Kluwer, Dordrecht 2003.

[3] T. Carleman, *Sur les fonctions quasi-analytiques*, Conférences faites au cinquième congres des mathématiciens scandinaves, Helsinki (1923), 181-196.

[4] B. C. Carlson, R. K. Meany, S. A. Nelson, *Mixed arithmetic and geometric means*, Pacif. J. Math. **38** (1971), 343–349.

[5] G. T. Cargo and O. Shisha, *On comparable means*, Pacific J. Math. **14** (1964), 1053–1058.

[6] G. T. Cargo and O. Shisha, *A metric space connected with generalized means*, J. Approx. Th. **2** (1969), 207–222.

[7] B. de Finetti, *Sur concetto di media*, Giornale dell' Istitutio Italiano degli Attuari **2** (1931), 369–396.

[8] J. Ducan, C. M. McGregor, *Carleman's Inequality*, Amer. Math. Monthly **110(5)** (2003), 424–431.

[9] C. Gini, *Di una formula compressiva delle medie*, Metron **13** (1938), 3–22.

[10] W. Gustin, *Gaussian Means*, Amer. Math. Monthly **54** (1947), 332–335.

[11] G. H. Hardy, *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Zeitschrift **6** (1920), 314–317.

[12] K. Knopp, *Über Reihen mit positiven Gliedern*, J. London Math. Soc. **3** (1928), 205–211.

[13] A. Kolesárová, *Limit properties of quasi-arithmetic means*, Fuzzy Sets and Systems **124** (2001), 65–71.

[14] A. Kolmogoroff, *Sur la notion de la moyenne*, Rend. Accad. dei Lincei **6** (1930), 388–391.

[15] A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson, *The Hardy Inequality: About its History and Some Related Results*, Vydavatelský Servis, Pilsen 2007.

[16] E. Landau, list do G. H. Hardy'ego, 21 czerwca 1921.

[17] E. Landau, *A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter of E. Landau to I. Schur*, J. London Math. Soc. **1** (1926), 38–39.

[18] J. G. Mikusiński, *Sur les moyennes de la forme* $\psi^{-1}\left[\sum q\psi(x)\right]$, Studia Math. **10** (1948), 90–96.

[19] H. P. Mulholland, *On the generalization of Hardy's inequality*, J. Lond. Math. Soc. **1** (1932), 208–214.

[20] M. Nagumo, *Uber eine Klasse der Mittelwerte*, Jap. Journ. of Math. **7** (1930), 71–79.

[21] J. A. Oguntuase, L-E. Persson, *Hardy type inequalities via convexity – the journey so far*, Aust. J. Math. Anal. Appl. **7** (2011), 1–19.

[22] Zs. Páles, *Report of Meeting 15th International Conference on Functional Equations and Inequalities*, Ann. Univ. Paedag. Crac. Stud. Math. **XII** (2013), 121–122.

[23] Zs. Páles, *On the convergence of Means*, J. Anal. Appl. **156** (1991), 52–60.

[24] Zs. Páles, L.-E. Persson, *Hardy-type inequalities for means*, Bull. Austral. Math. Soc. **70** (2004), 521–528.

[25] P. Pasteczka, *When is a Family of Generalized Means a Scale?*, Real Analysis Exchange **38** (2013), 193–210.

[26] P. Pasteczka, *A new estimate of the difference among quasi-arithmetic means*, preprint http://arxiv.org/pdf/1310.7212.pdf.

[27] P. Pasteczka, *On some Hardy type inequalities involving generalized means*, Publ. Math. Debrecen, przyjęta do druku.

[28] P. Pasteczka, *On negative results concerning Hardy means*, Acta Math. Hungar., przyjęta do druku.

[29] J. Pečarič, K. B. Stolarsky, *Carleman's inequality: history and new generalizations*, Aequationes Math. **61** (2001), 49–62.

[30] R. M. Redheffer, *Easy proofs of hard inequalities*, in: E. F. Beckenbach, W. Walter (eds.) *General Inequalities 3*, 123—140, Birkhäuser, Basel 1983.