Parametryzacje ciągłe na zbiorze Cantora
i selekcje borelowskie na przestrzeniach potęgowych

AUTOREFERAT PRACY DOKTORSKIEJ

Paweł Milewski

Wszystkie rozpatrywane przestrzenie są metryzowalne, ośrodkowe. Zwrot „typowy” odnosi się do kategorii Baire'a w odpowiedniej przestrzeni.

Przekształcenia ciągłe ze zbioru Cantora $2^{\mathbb{N}}$ na przestrzeń zwartą X nazywamy parametryzacjami. Przestrzeń wszystkich parametryzacji $\mathcal{S}(2^{\mathbb{N}}, X)$ kompaktu X na $2^{\mathbb{N}}$ rozważamy z topologią zbieżności jednostajnej. Wobec tego $\mathcal{S}(2^{\mathbb{N}}, X)$ jest ośrodkową przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny. Krotnością punktu $x \in X$ względem parametryzacji $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$ nazywamy moc $|f^{-1}(x)|$ jego warstwy. Rzędem parametryzacji f jest liczba sup$\{|f^{-1}(x)| : x \in X\}$.

Zgodnie z twierdzeniem Kuratowskiego [Ku1], dla k-wymiarowego kompaktu doskona-łego X typowa parametryzacja $f \in \mathcal{S}(2^{\mathbb{N}}, X)$ jest rzędu $\leq k+1$. Twierdzenie Hurewicza [Hu2] zapewnia, że istnieją wówczas punkty krotności $k+1$. Zauważmy, że funkcja schodkowa Cantora, sklejająca końce odcinków usuwanych przy konstrukcji trójkowego zbioru Cantora, ma rząd 2 i zbiór punktów krotności maksymalnej jest przeliczalny. Spotykamy się tu ze szczególnym przypadkiem sytuacji ogólnej. Twierdzenie Lelka–Mohlera [LM] orzeka bowiem, że jeśli X jest doskonałym kompaktem wymiernym, tj. takim, że dim$(X \setminus Q) \leq 0$ dla pewnego zbioru przeliczalnego $Q \subset X$, to istnieje parametryzacja $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$ rzędu 2, która spełnia równość $|f^{-1}(x)| = 1$ dla $x \in X \setminus Q$.

Z dowodu Twierdzenia III.8 w [Nagata] można wyprowadzić uogólnienie tego rezultatu: mianowicie jeśli $Q \subset X$ jest zbiorem przeliczalnym i dim$(X \setminus Q) \leq k-1$, to doskonały kompakt X ma parametryzację rzędu $k+1$ z przeliczalnym zbiorem punktów maksymalnej krotności, zob. [PPR, 9.6].

Jeden z głównych wyników naszej pracy – Twierdzenie 2.1.1 – mówi jednak, że typowa parametryzacja k-wymiarowego, doskonałego kompaktu X ma nieprzeliczalnie wiele punktów maksymalnej krotności $k+1$. Wynik ten precyzujemy we Wniosku 2.1.2 następująco: w rozważanych okolicznościach zbiór punktów krotności $k+1$ jest homeomorficzny z iloczynem kartezjańskim zbioru Cantora i przestrzeni liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. W dowodzie twierdzenia korzystamy z rozumowania użytego w pracy [Po2] do zbadania typowych parametryzacji kompaktów nieskończenie wymiarowych; uzasadniając wniosek odwołujemy się ponadto do twierdzenia charakteryzacyjnego Aleksandrowa–Urysohna [AU].

Przy dodatkowym założeniu, że każdy niepusty podzbiór otwarty kompaktu X ma wymiar k opisujemy także zbiór punktów ustalonej krotności ściśle pomiędzy 1 i k: jako łatwy wniosek z twierdzenia charakteryzacyjnego van Milla [vM] dostajemy, że każdy z tych zbiorów jest homeomorficzny z iloczynem kartezjańskim zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i przestrzeni liczb niewymiernych, zob. Wniosek 2.3.1. Treść punktów 2.2 i 2.3 niemal pokrywa się z zawartością pracy [Mil].

W punkcie 2.4 wykazujemy, że jeśli $Z \subset X$ jest zerowymiarowym zbiorem typu F_σ w doskonałym kompakcie X takim, że dim$(X \setminus Z) \leq k-1$, to istnieje parametryzacja rzędu $k+1$, dla której zbiór punktów maksymalnej krotności jest równy Z. W tym celu określamy ciąg coraz drobniejszych pokryć przestrzeni X i przy ich pomocy definiujemy f w pewien standardowy sposób.

W trzecim rozdziale szczególnie ważna rola jest odgrywana przez przestrzeń potęgową $\mathcal{K}(X)$ niepustych, zwartych podzbiorów przestrzeni X z metryką Hausdorffa. Rozważamy selekcje borelowskie, tj. funkcje $s : \mathcal{K}(X) \to X$ borelowsko mierzalne, które każdemu niepustemu kompaktowi $K \in \mathcal{K}(X)$ przyporządkowują punkt $s(K) \in K$. Selekcją multifunkcji $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ nazywamy dowolną funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f(x) \in F(x)$.

W punkcie 3.1 formułujemy niedawno opublikowane twierdzenie P. Holickiego i M. Zelenego [HZ], zgodnie z którym każda funkcja borelowska $f : X \to Y$ mająca nieprzeliczalnie wiele warstw, które nie są σ-zwarte, przekształca pewien zbiór domknięty E na zbiór nieborelowski $f[E]$. Rezultat ten dopełnia w interesujący sposób klasyczne twierdzenie Arsenina–Kunugui, [Ar], [Kun].

Punkty 3.2 i 3.4 są głównie poświęcone przeniesieniu na przypadek multifunkcji twier-dzenia Holickiego–Zelenego. Wyniki w nich zawarte zostały uzyskane wspólnie z R. Polem i zamieszczone w pracy [MP].

Kluczowym elementem zarówno w dowodzie Holickiego i Zelenego jak i w naszym rozumowaniu są pewne parametryczne wersje twierdzenia Kechrisa–Louveau–Woodina [KLW]. Nasze uzasadnienie odwołuje się bezpośrednio do twierdzenia Hurewicza [Hu1], nie używając przy tym gry domkniętej wprowadzonej przez A. Louveau i J. Saint-Raymonda [LSR], która jest w istotny sposób wykorzystywana w dowodzie Holickiego i Zelenego. To podejście wydaje się nam prostsze od dowodu przedstawionego w [HZ].

Wspomniane wcześniej uogólnienie twierdzenia Holickiego–Zelenego orzeka, że jeżeli przestrzenie S i E są metryzowalne w sposób zupełny oraz $F : S \to \mathcal{K}(E)$ jest przekształceniem borelowskim takim, że zbiór $\{x \in S : y \in F(x)\}$ nie jest σ-zwarty dla nieprzeliczalnie wielu punktów $y \in E$, to istnieje zbiór domknięty $\tilde{S} \subset S$ i funkcja borelowska $f : S \to E$ taka, że $f(x) \in F(x)$ dla $x \in S$ i zbiór $f[\tilde{S}]$ nie jest borelowski.

Wzmocnienie pewnego wyniku uzyskanego niezależnie przez M. Balcerzaka, J. Peredko i R. Pola [BPP1] oraz D. Lecomte [Le] zamieszczamy w 3.3. Pokazujemy mianowicie, że jeśli X jest przestrzenią zupełną, w której zbiory zwarte mają puste wnętrze (np. X jest przestrzenią liczb niewymiernych lub przestrzenią Hilberta ℓ_2), to dla każdej borelowskiej selekcji $f : \mathcal{B} \to X$, określonej na zbiorze borelowskim II kategorii Baire'a $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}(X)$, istnieje punkt $x \in X$, którego warstwa $f^{-1}(x)$ nie leży w żadnym σ-zwartym podzbiorze przestrzeni potęgowej $\mathcal{K}(X)$, w szczególności jest nieprzeliczalna. Stąd i z pewnego faktu wynikającego bezpośrednio z twierdzenia Holickiego–Zelenego wyprowadzamy Wniosek 3.3.6, że w tej sytuacji istnieje leżący w $\mathcal{B}$ zbiór domknięty $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X)$, którego obraz $f[\mathcal{F}]$ nie jest borelowski.

LITERATURA

[AU] P. Alexandroff i P. Urysohn, *Über nulldimensionale Punktmengen*, Math. Ann. 98 (1928), 89-106.

[Ar] W.J. Arsenin, *Sur les projections des certain ensembles mesurable B*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR 27 (1940), 107-109.

[BPP1] M. Balcerzak, J. Peredko, R. Pol, *On non-injectivity of Borel functions selecting points from compact sets*, Arch. Math. (Basel) 73 (4) (1999), 286-290.

[BPP2] M. Balcerzak, J. Peredko, R. Pol, *On non-injectivity of Borel functions selecting points from compact sets* II, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49 (2) (2001), 103-105.

[Br] L.E.J. Brouwer, *On the structure of perfect sets of points,* Proc. Akad. Amsterdam, 12 (1910), 785-794.

[ChP] J. Chaber, R. Pol, *Remarks on closed relations and a theorem of Hurewicz,* Top. Proc. 22 (1997), 81-94.

[De] C. Dellacherie, *Un cours sur les ensembles analytiques,* w książce: *Analytic Sets,* C.A. Rogers *et al.*, Academic Press, London, 1980, 183-316.

[vD] E.K. van Douwen, *Closed copies of the rationals*, Comment. Math. Univ. Carol. 28 (1987), 137-139.

[En1] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1989.

[En2] R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Heldermann, Lemgo 1995.

[He] E. Hemmingsen, *Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces*, Duke Math. Journ. 13 (1946), 495-504.

[HZ] P. Holický i M. Zelený, *A converse of Arsenin–Kunugui theorem on Borel sets with σ-compact sections*, Fund. Math. 165 (2000), 191-202.

[Hu1] W. Hurewicz, *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)*, Fund. Math. 12 (1928), 78-109.

[Hu2] W. Hurewicz, *Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen*, Journal für die reine und angewandte Math. 169 (1933), 71-78.

[J] W. Jankoff, *Sur l'uniformisation des ensembles A*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR 30 (1941), 597-598.

[Ke] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[KLW] A.S. Kechris, A. Louveau i W.H. Woodin, *The structure of σ-ideals of compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1) (1987), 263-288.

[Kun] K. Kunugui, *Contributions $\grave{a}$ la $th\acute{e}orie$ des ensembles $bor\acute{e}liens$ et analytiques* II i III, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 8 (1939-1940), 79-108.

[Kur1] K. Kuratowski, *Sur l'application des espaces fonctionnels $\grave{a}$ la $Th\acute{e}orie$ de la dimension*, Fund. Math. 18 (1932), 285-292.

[Kur2] K. Kuratowski, *Topology*, vol. I, Warszawa, 1966.

[Kur3] K. Kuratowski, *Topology*, vol. II, Academic Press, New York, London; PWN, Warszawa 1968.

[KU] K. Kuratowski i S. Ulam, *Quelques $propri\acute{e}t\acute{e}s$ topologiques du produit combinatoire*, Fund. Math. 19 (1932), 247-251.

[Le] D. Lecomte, *Uniformisations partielles et $crit\acute{e}res$ $\grave{a}$ la Hurewicz dans le plan*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 4433-4460.

[LM] A. Lelek i L. Mohler, *On the topology of curves* III, Fund. Math. 71 (1971), 147-160.

[LSR] A. Louveau i J. Saint-Raymond, *Borel classes and closed games*, Trans. Amer. Math. Soc. 304 (1987), 431-467.

[Mau1] R.D. Mauldin, *Bimeasurable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 369-370.

[Mau2] R.D. Mauldin, *One-to-one selections-marriage theorems*, Amer. J. Math. 104 (1982), 823-828.

[Maz] S. Mazurkiewicz, *Sur le type de dimension de l'hyperspace d'un continu*, Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. 24 (1931), 191.

[Mil] P. Milewski, *On typical parametrizations of finite-dimensional compacta on the Cantor set*, Fund. Math. 174 (2002), 253-261.

[MP] P. Milewski i R. Pol, *On a theorem of Holický and Zelený concerning Borel maps without σ-compact fibers*, Czechoslovak Math. J., w druku.

[vM] J. van Mill, *Characterization of some zero-dimensional separable metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1981), 205-215.

[Mir] L. Mirsky, *Transversal theory. An acount of some aspects of combinatorial mathematics*, Academic Press, New York – London, 1971.

[Na] K. Nagami, *Finite-to-one closed mappings and dimension* I, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 503-506.

[Nagata] J. Nagata, *Modern Dimension Theory*, Heldermann, Berlin 1983.

[vN] J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. 50 (1949), 401-485.

[Nö] G. Nöbeling, *Über die rationale Dimension*, Math. Ann. 109 (1934), 353-375.

[Pa] T. Parthasarathy, *Selection theorems and their applications*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1972.

[PPR] E. Pol, R. Pol i M. Reńska, *On countable-dimensional spaces with the Menger property, rational dimension and a question of S.D. Iliadis*, Mh. Math. 128 (1999), 331-348.

[Po1] R. Pol, *Some remarks about measurable parametrizations*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 628-632.

[Po2] R. Pol, *A converse to a theorem of K. Kuratowski on parametrizations of compacta on the Cantor set*, Fund. Math. 139 (1991), 37-47.

[Pu] R. Purvis, *On bimeasurable functions*, Fund. Math. 58 (1966), 149-157.

[SR] J. Saint-Raymond, *Boréliens à coupes* K_σ, Bull. Soc. Math. France, 104 (1976), 389-400.

[Sri] S.M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Su] J. Suzuki, *Note on a theorem for dimension*, Proc. Japan Acad. 35 (1959), 201-202.