Paweł Goldstein
goldie@mimuw.edu.pl

Autoreferat rozprawy doktorskiej

pt.

„Potok gradientu funkcji harmonicznej w $\mathbb{R}^3$"

W roku 1970. na *problem session* szkoły letniej „Nuffic Summer School on Manifolds" w Amsterdamie René Thom postawił następujący problem: pokazać, że na przestrzeni trajektorii gradientu rzeczywistej funkcji analitycznej można wprowadzić stratyfikację (spełniającą bliżej nieokreślone warunki regularności). Mniej więcej w takiej, niezbyt sformalizowanej wersji został on opublikowany w [10].

Problem ten można doprecyzować następująco: pokazać, że potok pola gradientu funkcji analitycznej f, traktowany jako przekształcenie bliskich poziomic f, jest morfizmem przestrzeni ze stratyfikacjami (a więc przekształca strata na strata, bądź dyfeomorficznie – gdy strata są tego samego wymiaru, bądź jest rzutowaniem stratum wyższego wymiaru na stratum niższego wymiaru), spełniającym jakieś (*a priori* trudno zgadnąć jakie) warunki regularności.

Zagadnienie to jest trywialne, gdy obie poziomice odpowiadają wartościom regularnym, między którymi nie ma wartości krytycznej – poziomice są wówczas gładkimi rozmaitościami; potok przekształca jedną na drugą dyfeomorficznie. Dlatego też kluczowym zagadnieniem jest zbadanie potoku jako przekształcenia

$$h : V_c = \{f(x) = c\} \longrightarrow V_{c'} = \{f(x) = c'\},$$

gdzie c' jest wartością krytyczną f, $c < c'$ jest dostatecznie bliską wartością regularną f.

W pracy podają żądane stratyfikacje poziomic V_c i $V_{c'}$ (dla wygody przyjmuję $c' = 0$, $c = -\varepsilon$) i pokazuję, że potok spełnia wspomniane wyżej warunki w przypadku, gdy f jest funkcją harmoniczną względem metryki euklidesowej w $\mathbb{R}^3$. Problem jest natury lokalnej, zakładam więc, że f jest zadana na pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^3$.

Badania nad lokalnymi własnościami analitycznego układu gradientowego

$$\dot{x} = \nabla f(x(t)) \tag{1}$$

i jego trajektoriami zaowocowały serią hipotez:

HIPOTEZA 1 (HIPOTEZA GRADIENTOWA THOMA, [11],[1],[8]).
Niech $\mathbf{x}(t)$ będzie trajektorią (1) *taką, że $\mathbf{x}(t) \to x_0 \in U$. Wówczas $\mathbf{x}(t)$ ma w x_0*

styczną, tj. istnieje granica siecznych

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{x}(t) - x_0}{|\mathbf{x}(t) - x_0|}.$$

HIPOTEZA 2 (UOGÓLNIONA HIPOTEZA GRADIENTOWA THOMA, [2]).
Niech zachodzą założenia hipotezy 1. Wówczas istnieje granica stycznych do trajektorii $\mathbf{x}(t)$ w x_0, tj.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}.$$

HIPOTEZA 3 (ISTNIENIE ITEROWANYCH STYCZNYCH, [9],[5],[4]).
Niech zachodzą założenia hipotezy 1. Wówczas dla każdego ciągu rozdmuchań punktu x_0 podniesienie (strict transform) trajektorii $\mathbf{x}(t)$ będzie miało dokładnie jeden punkt graniczny.

HIPOTEZA 4 (ANALITYCZNA HIPOTEZA SKOŃCZONOŚCI DLA GRADIENTU, [2]).
Niech A będzie analitycznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Wówczas $\mathbf{x}(t)$ albo pozostaje w A, albo przecina go w skończenie wielu punktach.

Jedynie pierwsza z tych hipotez została udowodniona (przez K. Kurdykę i T. Mostowskiego w 1996 roku ([3], prostszy dowód podali w 2000 r. wraz z A. Parusińskim w [4]).

Hipotezy te są tu uszeregowane według mocy, w szczególności prawdziwość hipotezy 4 pociąga za sobą prawdziwość pozostałych.

F. Sanz podał w 1998 roku listę warunków na to, by trajektorie analitycznego pola wektorowego spełniały hipotezę 4. ([9]). W pracy pokazuję, że badane przeze mnie pole ∇f w każdym z rozpatrywanych przypadków spełnia założenia twierdzenia Sanza – a więc jego trajektorie spełniają wszystkie cytowane tu hipotezy.

Większą część pracy zajmuje konstrukcja stratyfikacji poziomic $V_{-\varepsilon}$ i V_0. Stosunkowo łatwo można podać stratyfikację tej drugiej: zbiór punktów krytycznych f leżących na V_0 (oznaczać go będę przez S_0) jest zbiorem analitycznym ($f = 0$, $\nabla f = 0$); łatwo można pokazać, że dla f harmonicznej $\dim S_0 \leq 1$ – jest więc skończoną sumą analitycznych, otwartych łuków $\tilde{\Gamma}_k$ i punktów P_j. Daje to nam stratyfikację V_0 (dwuwymiarowe stratum $V_0 \setminus S_0$, łuki $\tilde{\Gamma}_{0,k}$ oraz punkty P_j), dla naszych potrzeb rozdrabniam ją dodatkowo dzieląc każdy łuk $\tilde{\Gamma}_{0,k}$ na mniejsze $\Gamma_{0,i}$ tak, by na każdym $\Gamma_{0,i}$ funkcja f miała stałą krotność (punkty w których krotność się zmienia „dorzucam" do punktów P_j).

Głównym narzędziem przy konstrukcji stratyfikacji $V_{-\varepsilon}$ jest teoria rozmaitości niezmienniczych. Badając przeciwobrazy $h^{-1}(\Gamma_{0,i})$ i $h^{-1}(P_j)$ pokazuję, że – po odpowiednich rozdmuchaniach – w każdym przypadku istnieją rozmaitości stabilne lub centralnie-stabilne; pozwala mi to opisać zbiór punktów przekształcanych przez potok odpowiednio w $\Gamma_{0,i}$ i w P_j. Pokazuję, że $h^{-1}(\Gamma_{0,i})$ jest sumą skończenie wielu gładkich łuków, zaś $h^{-1}(P_j)$ – sumą skończenie wielu gładkich łuków i punktów. Otrzymuję więc stratyfikację $V_{-\varepsilon}$: stratum dwuwymiarowym jest $V_{-\varepsilon} \setminus h^{-1}(S_0)$, strata jednowymiarowe to łuki występujące w $h^{-1}(\Gamma_{0,i})$ i $h^{-1}(P_j)$, strata wymiaru 0 to punkty pojawiające się w $h^{-1}(P_j)$.

Konstrukcja $h^{-1}(\Gamma_{0,i})$ jest dość prosta: wprowadzając na otoczeniu $\Gamma_{0,i}$ odpowiedni „walcowy" układ współrzędnych (z $\Gamma_{0,i}$ jako osią „walca") pokazuję, że istnieje m gładkich rozmaitości centralnie-stabilnych, przekształcanych przez potok w $\Gamma_{0,i}$ (m jest krotnością f na $\Gamma_{0,i}$); każda z nich transwersalnie przecina $V_{-\varepsilon}$ wzdłuż gładkiego łuku $\Gamma_{-\varepsilon,k}$. Stąd $h^{-1}(\Gamma_{0,i})$ jest sumą m gładkich łuków.

Znacznie bardziej kłopotliwy okazuje się opis $h^{-1}(P_j)$. Rozpoczynam od rozwinięcia funkcję f względem zmiennej radialnej r:

$$f = \sum_{k=m}^{\infty} r^k F_{k-m}(\theta)$$

i przedstawienia równania gradientowego (1) we współrzędnych biegunowych wokół P_j:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= m r^{m-1} F_0(\theta) + \ldots && \text{(2a)} \\ \dot{\theta} &= r^{m-2} \nabla_\theta F_0(\theta) + \ldots && \text{(2b)} \end{aligned}$$

Korzystając z fundamentalnego dla teorii analitycznych układów gradientowych twierdzenia Łojasiewicza ([6],[7], w pracy tw. 3.1) pokazuję, że współrzędna sferyczna θ trajektorii wpada w otoczenie θ_0 – punktu krytycznego funkcji F_m. Wiemy więc, że trajektoria wpada w pewien stożek wokół półprostej $\theta = \theta_0$.

Dzięki harmoniczności f mogę *explicite* podać postać funkcji F_0. Pozwala mi to, o ile przez cały czas w (2b) dominuje wyraz $r^{m-2}\nabla_\theta F_0(\theta)$, opisać zbiór punktów przeprowadzanych przez potok w P_j.

Co jednak, gdy w (2b) zaczyna dominować inny wyraz (wyrazy)? Zauważam, że zbiór punktów, w których $r^m|F_0(\theta)| \lesssim r^{m+l}|F_l(\theta)|$ to zbiór postaci

$$|\theta - \theta_0| \lesssim r^{\frac{l}{\alpha-\beta}}.$$

Zbiory takie nazywam „rożkami". Z „rożkiem" związany jest naturalny układ współrzędnych (r, u) związany z rozdmuchaniem go do walca (własnościom „rożków" i „współrzędnych rożkowych" poświęcony jest rozdział 3.2). Mogę więc przedstawić funkcję f i równanie (1) w owych „współrzędnych rożkowych":

$$f(r,u) = \underbrace{-cr^p \ + \ \ldots}_{\text{wyrazy niezależne od } u} + r^m F(u) + \ldots \qquad (3)$$

W zależności od wartości p i m uzyskuję (po pewnych uproszczeniach) 3 przypadki:

I.

$$\dot{r} = -cpr^{1+\beta} + \dots \tag{4a}$$
$$\dot{u} = \nabla F + \dots, \tag{4b}$$

gdzie funkcja F jest harmoniczna, $\beta > 0$;

II.

$$\dot{r} = -cpr + \dots \tag{5a}$$
$$\dot{u} = \nabla G + \dots, \tag{5b}$$

gdzie $\Delta_u G = const > 0$;

III.

$$\dot{r} = r^{2N-1}\left[mF - N\Big(u_1\frac{\partial F}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial F}{\partial u_2}\Big)\right] + \dots \tag{6a}$$
$$\dot{u} = \nabla F + \dots, \tag{6b}$$

gdzie funkcja F jest harmoniczna.

W przypadku II. pokazuję istnienie rozmaitości stabilnej lub centralnie stabilnej (∇G ma nieznikającą część liniową).

W przypadkach I. i III. nie mam pewności, czy wypisane w (4b) i (6b) rzeczywiście dominują dla $t > 0$. O ile dominują, to (z wspomnianego już tw. Łojasiewicza) współrzędna u dąży do u_0 – punktu krytycznego funkcji F; pokazuję, że w otoczeniu tego punktu istnieją rozmaitości niezmiennicze, co pozwala mi opisać zbiór punktów przeprowadzanych w P_j.

Zbiór, w którym w (4b) (ew. 6b) dominuje inny wyraz, to mniejszy „rożek", zawarty w rozpatrywanym. Powtarzam więc procedurę, przedstawiając funkcję f i układ gradientowy w odpowiadających mu współrzędnych rożkowych, otrzymując ponownie przypadki I., II., lub III.

To, że procedura ta kończy się po skończenie wielu krokach, gwarantuje Lemat 2, pokazujący, że rząd funkcji F występującej w (4b) i (6b) w odpowiednim punkcie krytycznym przy przejściu z większego „rożka" do mniejszego nie rośnie, a przy dwóch takich przejściach maleje.

Ostatni rozdział pracy poświęcony jest badaniu własności łuków $\Gamma_{-\varepsilon,k}$ — strat wymiaru 1 stratyfikacji $V_{-\varepsilon}$.

Łatwo można pokazać, że potok funkcji harmonicznej zachowuje objętość — łuki $\Gamma_{-\varepsilon,k}$ nie mogą więc w $V_{-\varepsilon}$ tworzyć zamkniętego cyklu.

Większą część tego rozdziału zajmuje przykład funkcji f, dla której dwa łuki $\Gamma_{-\varepsilon,k}$ mają nieskończony rząd styczności. Konstrukcja pokazuje trudności, jakie napotyka się przy poszukiwaniu jakichkolwiek niebanalnych przykładów analitycznych układów gradientowych.

Założenie o harmoniczności funkcji f jest oczywiście założeniem bardzo ograniczającym; metody użyte w pracy bardzo silnie z harmoniczności f korzystają. Z drugiej strony jest to pierwszy (wedle mojej najlepszej wiedzy) wynik dający geometryczny opis potoku w przypadku trójwymiarowym. Być może mi uda się też podobnymi metodami opisać potok (hermitowskiego) pola gradientowego funkcji holomorficznej w $\mathbb{C}^2$.

Literatura

[1] W. I. Arnold, *Some open problems in the theory of singularities*, in *Singularities I*, 1983, Proc. Symposia in Pure Math. 40 (1983), 57-69.

[2] K. Kurdyka, *On the gradient conjecture of R. Thom*, Seminari di Geometria 1998-1999, Università di Bologna, Istituto di Geometria, Dipartamento di Matematica, 143-151.

[3] K. Kurdyka, T. Mostowski, The gradient conjecture of René Thom, preprint, 1996 (revised 1999), http://www.lama.univ-savoie.fr/sitelama/Membres/pages-web/KURDYKA/index.html.

[4] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusiński, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom*, Annals of Mathematics, 152 (2000), 763-792.

[5] J. M. Lion, R. Moussu, F. Sanz, *Champs de vecteurs analytiques et champs de gradients*, Ergod. Th. & Dynam. Sys (2002), 22, 525-534.

[6] S. Łojasiewicz, *Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique*, Seminari di Geometria 1982-83, Università di Bologna, Istituto di Geometria, Dipartamento di Matematica, 115-117, 1984.

[7] S. Łojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels*, Colloques Internation. du CNRS, No 117 (1962), 87-89.

[8] S. Łojasiewicz, *Sur la géométrie semi- et sous-analytique*, Ann. Inst. Fourier 43 (1993), 1575-1595.

[9] F. Sanz, Non oscillating solutions of analytic gradient vector fields, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 48, 4 (1998), 1045-1067.

[10] R. Thom, problem session, w *Manifolds. Amsterdam 1970., Proceedings of the Nuffic Summer School on Manifolds, Amsterdam, August 17-29*, Lecture Notes in Math. 197 (1971).

[11] R. Thom, *Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique: un bilan*, Publ. Math. IHES 70 (1989), 200-214.