O krzywych kwantowych, strukturach Airy i supersymetrii (autoreferat)

Paweł Ciosmak

Luty 2020

Wprowadzenie

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu różnych pojęć związanych z teorią strun. Teoria strun jest kandydatem na teorię unifikującą wszystkie znane oddziaływania we współczesnej fizyce: elektromagnetyczne, słabe, silne i grawitacyjne. Jednakże teoria ta stała się także źródłem inspiracji i hipotez w matematyce. Różne wielkości pojawiające się w fizyce i matematyce można zapisać w postaci szeregów tworzących, zwanych funkcjami partycji. W celu obliczania współczynników tych szeregów zostały stworzone odpowiednie techniki. W tej pracy badamy niektóre z tych technik, będące między sobą wzajemnie powiązane: krzywe kwantowe, topologiczne rekurencje i kwantowe struktury Airy, a także różne związane z nimi funkcje partycji.

Topologiczna rekurencja [12], [11] jest procedurą, która przyporządkowuje danej krzywej spektralnej (krzywej zespolonej Σ wraz z parą funkcji meromorficznych) rodzinę niezmienników. Niezmienniki te są meromorficznymi formami różniczkowymi $\omega_{g,n}$ określonymi na Σ^n, indeksowanymi parą liczb naturalnych g i n. Topologiczna rekurencja znalazła zastosowanie w różnych problemach. Pierwotnie pojawiła się przy badaniu macierzy losowych (modeli macierzowych). Następnie okazało się, że pozwala ona obliczać niezmienniki pojawiające się w teorii strun oraz geometrii enumeratywnej, takie jak niezmienniki Gromova-Wittena, liczby Hurwitza czy objętości przestrzeni moduli krzywych. Istnieje ponadto hipoteza, że może ona zostać zastosowana do obliczania niezmienników węzłów. Tak szerokie zastosowanie topologicznej rekurencji jest zaskakujące, co sprawia, że teoria ta jest aktywnym polem badań. Jednym z problemów przyciągających uwagę badaczy jest próba sformułowania supersymetrycznej wersji topologicznej rekurencji.

Kwantowe struktury Airy („quantum Airy structures", w skrócie QASs) [10], [17] stanowią przeformułowanie i uogólnienie topologicznej rekurencji. W formalizmie tym rozważana jest rodzina kwadratowych Hamiltonianów tworząca algebrę ze względu na nawias Poissona. Po skwantowaniu otrzymujemy operatory różniczkowe anihilujące funkcję partycji. Operatory te tworzą algebrę Liego ze względu na komutator. Szczególny wybór QAS, oparty na algebrze Virasoro, pozwala na obliczanie niezmienników zakodowanych w formach różniczkowych $\omega_{g,n}$ pochodzących z topologicznej rekurencji.

Krzywe kwantowe są obiektami powstającymi ze skwantowania krzywych zespolonych. Procedurę tę można rozumieć jako przejście z pierścienia funkcji zespolonych na krzywej do jej nieprzemiennej wersji wyposażonej w dodatkowy parametr $\hbar$. Jeżeli krzywa jest zerem pewnego wielomianu $P(x, y)$, to krzywa kwantowa jest operatorem różniczkowym $\widehat{P}(x, \hbar\frac{\partial}{\partial x})$. Funkcja falowa $\widehat{\psi}(x)$, która jest rozwiązaniem równania Schödingera $\widehat{P}\widehat{\psi}(x) = 0$, koduje różne niezmienniki, którymi jesteśmy zainteresowani. Wśród zastosowań krzywych kwantowych można wymienić układy Hitchina [7], [8], niezmienniki Gromova-Wittena (dla $\mathbb{P}^1$ w [9]) i teorię węzłów [13]. Istnieje hipoteza, która wiąże topologiczną rekurencję z krzywymi kwantowymi [13]. Związek ten został udowodniony pod pewnymi dodatkowymi założeniami [3].

W pracy tej naszą uwagę koncentrujemy na krzywych kwantowych wywodzących się z konforemnej teorii pola („conformal field theory", w skrócie CFT). CFT jest szczególnym rodzajem kwantowej teorii pola, wyposażonym w symetrie ze względu na przekształcenia konforemne. Ograniczamy się tutaj do przypadku, gdy czasoprzestrzeń ma wymiar 2, kiedy to (lokalne) przekształcenia konforemne tworzą przestrzeń nieskończonego wymiaru. Algebra Virasoro jest centralnym rozszerzeniem algebry tych lokalnych przekształceń. W teorii reprezentacji algebry Virasoro istotną rolę odgrywają moduły Vermy. Szczególną rolę pełnią w nich wektory osobliwe, które pojawiają się w zdegenerowanych modułach Vermy i są źródłem równań spełnianych przez funkcje korelacji, zwanych równaniami BPZ [1].

Z wektorami osobliwymi związać można także krzywe kwantowe. Pierwotnie taka konstrukcja została przeprowadzona w ramach teorii macierzy losowych [18], a następnie z punktu widzenia CFT [5]. W ten sposób otrzymujemy rodzinę równań różniczkowych, które anihilują funkcję falową. Jednakże podejścia te nie są w pełni matematycznie usystematyzowane. Jedna ze wskazówek, jak rozwiązać ten problem, pochodzi z równań BPZ. Równania te są związane z krzywymi kwantowymi i można je otrzymać w szczególnym przypadku teorii tych krzywych. Z drugiej strony równania BPZ zostały matematycznie omówione z punktu widzenia algebr operatorów wierzchołkowych („vertex operator algebras", w skrócie VOAs) oraz operatorów przeplatania [15].

Wymieńmy trzy główne zagadnienia, którym poświęcona jest ta praca:

- analiza związku pomiędzy wektorami osobliwymi i krzywymi kwantowymi z punktu widzenia VOAs,
- uogólnienie powyższej relacji do przypadku supersymetrycznego (w ramach podejścia CFT),
- uogólnienie QASs do super kwantowych struktur Airy (SQASs).

Przedstawimy te trzy zagadnienia w trzech oddzielnych sekcjach. Niniejsza rozprawa doktorska oparta jest na pracach [5], [6] (drugi punkt z powyższych) oraz [2] (punkt trzeci), a także na dotąd nieopublikowanych wynikach autora (punkt pierwszy i niektóre wyniki dotyczące SQASs). Ponadto prezentuje ona teorie i wyniki wcześniej znane, będące wprowadzeniem dla czytelnika, dla którego tematy tutaj omawiane są nowe.

Krzywe kwantowe i wektory osobliwe

W tej pracy przedstawiamy matematycznie ścisłą konstrukcję krzywych kwantowych powstających z wektorów osobliwych. W tym celu posługujemy się matematycznym językiem CFT, czyli teorią VOAs. Algebry te są przestrzeniami, które modelują pojęcie pól w CFT. Są one wyposażone w operację Y, która każdemu wektorowi $v \in V$ należącemu do VOA przyporządkowuje nieskończony szereg:

$$Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{(n)} z^{-n-1}$$

w zmiennej formalnej z ze współczynnikami w operatorach liniowych $v_{(n)} \in \mathrm{End}(V)$. Wynika stąd, że „iloczyn" $Y(v,z)w$ dwóch wektorów v i w jest nieskończoną rodziną wektrów $v_{(n)}w$, zamiast być pojedynczym wektorem. Ta własność sprawia, że VOA są technicznie wymagające. Każda VOA może zostać wyposażona w kategorię modułów. Moduły są definiowane w analogiczny sposób, jak VOA: każdemu wektorowi $v \in V$ przyporządkowana jest nieskończona rodzina linowych przekształceń modułu M. W dalszej kolejności możemy rozważyć operatory przeplatania. Są to odwzorowania

$$I(\cdot, z) : M_1 \to \mathrm{Hom}(M_2, M_3) \otimes \mathbb{C}\{z\},$$

gdzie M_1, M_2 i M_3 są modułami nad V, a $\mathbb{C}\{z\}$ jest przestrzenią szeregów formalnych z niekoniecznie całkowitymi potęgami. W pracy tej wykorzystujemy te pojęcia w celu zdefiniowania krzywych kwantowych oraz funkcji falowych. Wcześniej jednak zaprezentujmy podejścia wykorzystujące modele macierzowe i CFT.

Modele macierzowe

W [18] został znaleziony związek pomiędzy krzywymi kwantowymi oraz CFT. Pozwala on na to, aby pierwotne pojęcie krzywej kwantowej rozszerzyć poza operatory drugiego rzędu. Ta odpowiedniość została wprowadzona w kontekście β-zdeformowanych całek macierzy losowych. Opiszmy ją tutaj pokrótce. Algebra Virasoro $\mathcal{V}$ jest generowana przez operatory L_n spełniające następującą relację komutacji

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m},$$

gdzie c jest ładunkiem centralnym. Niech $V(\Delta)$ będzie modułem Vermy nad algebrą Virasoro z wymiarem konforemnym Δ. Wektor osobliwy $v_s \in V(\Delta)$ jest to element liniowo niezależny od wektora najwyższej wagi $|\,\Delta\,\rangle \in V(\Delta)$, który spełnia równania $L_n v_s = 0$ dla $n > 0$. Każdy taki wektor może zostać wyrażony przy wykorzystaniu operatorów kreacji algebry Virasoro (L_{-n} dla $n > 0$) działających na wektor $|\,\Delta\,\rangle$:

$$v_s = A(\{L_{-n}\}_{n>0})\,|\,\Delta\,\rangle\,,$$

gdzie A jest wielomianem zależnym od L_{-n}, a także funkcją c oraz Δ. Istnieje reprezentaja wspomnianych operatrów kreacji na przestrzeni szeregów formalnych w zmiennych $t_1, t_2, \ldots$ oraz x, która przybiera następującą postać:

$$\widehat{L}^{CFT}_{-1} = \partial_x, \quad \widehat{L}^{CFT}_{-n} = \frac{1}{\hbar^2(n-2)!}\Big(\frac{1}{4}\partial_x^{n-2}(W'(x))^2 + \frac{Q\hbar}{2}\partial_x^n W(x) + \partial_x^{n-2}\widehat{f}_f(x)\Big) \quad \text{for } n \geq 2, \quad (1)$$

gdzie $\widehat{f}_t(x) = \hbar^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=n+2}^{\infty} m t_m \partial_{t_{m-n-2}}$ i $W(x) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x^i$, natomiast $\hbar$ to parametr formalny. Krzywe kwantowe otrzymujemy z operatora A wyrażając go za pomocą tej reprezentacji i otrzymując operator $\widehat{A} = A(\{\widehat{L}_{-n}\}_{n>0})$. Operator ten działa na funkcję falową:

$$\widehat{\psi}_\alpha(x) = \int \Delta(z_1, \ldots, z_N)^{2\beta} \prod_{i=1}^{N} (z_i - x)^{-\frac{2\alpha\sqrt{\beta}}{\hbar}} e^{-\frac{\sqrt{\beta}}{\hbar} \sum_{i=1}^{N} W(z_i)} \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_N,$$

gdzie $\Delta(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)$ jest wyznacznikiem Vandermonda. Powyższe wyrażenia jest uogólnieniem wyrażenia na wielomian charakterystyczny w teorii macierzy losowych. Jest ono nazwane także α/β-zdeformowaną całką macierzową. Wektory osobliwe w modułach Vermy algebry $\mathcal{V}$ istnieją dla szczególnych wartości parametru α:

$$\alpha_{r,s} = \frac{r-1}{2\sqrt{\beta}} - \frac{s-1}{2}\sqrt{\beta},$$

gdzie r i s są dodatnimi liczbami całkowitymi, $\Delta = \alpha(Q - \alpha)$, $Q = \frac{1}{\sqrt{\beta}} - \sqrt{\beta}$, a β to dodatkowy parametr. Krzywe kwantowe anihilują funkcję falową, co wyraża się za pomocą równań Schrödingera:

$$\widehat{A}(\Delta(\alpha_{r,s}))\widehat{\psi}_{\alpha_{r,s}}(x) = 0.$$

Równania te zostały sprawdzone w [18] aż do stopnia piątego wektorów osobliwych. Reprezentacja (1) także została tam wyprowadzona.

CFT

Odpowiedniość pomiędzy krzywymi kwantowymi, a wektorami osobliwymi została omówiona z bardziej formalnego punktu widzenia w [5]. Cała konstrukcja została przeprowadzona przy wykorzystaniu operatorów wierzchołkowych z CFT i ich funkcji korelacji. Te operatory wierzchołkowe mają postać:

$$I(|\,\alpha\,\rangle, x) = u^\alpha \exp\Big(2\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} a_{-j}\Big) \exp\Big(-2\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{-j}}{j} a_j\Big) x^{2\alpha a_0}, \tag{2}$$

gdzie a_j są generatorami algebry Heisenberga: $[a_i, a_j] = \frac{i}{2}\delta_{i+j}$. W [5] zostało pokazane, że funkcja falowa wprowadzona we wcześniejszej sekcji może zostać wyrażona przy wykorzystaniu tych operatorów wierzchołkowych:

$$\widehat{\psi}_\alpha(x) = \int \langle V| I(|\,\alpha\,\rangle, x) \prod_{i=1}^{N} I\Big(\Big|-\sqrt{\beta}\Big\rangle, z_i\Big) |\,0\,\rangle \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_N, \tag{3}$$

gdzie $\langle V|$ jest odpowiednio wybranym stanem zamykającym. Działanie algebry Virasoro zdefiniowane jest w następujący sposób:

$$L_{-n} \cdot \widehat{\psi}_\alpha(x) = \int \langle V| L_{-n} \cdot I(|\,\alpha\,\rangle, x) \prod_{i=1}^{N} I\Big(\Big|-\sqrt{\beta}\Big\rangle, z_i\Big) |\,0\,\rangle \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_N,$$

gdzie

$$L_{-n} \cdot I(|\,\alpha\,\rangle, x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C(x)} \frac{1}{(y-x)^{n-1}} T(y) I(|\,\alpha\,\rangle, x) \mathrm{d}y,$$

całkowanie jest przeprowadzone po małym okręgu $C(x)$ wokół puntu $x \in \mathbb{C}$, a $T(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n y^{-n-2}$ jest tensorem energii-pędu. Po dłuższych obliczeniach definicja ta prowadzi do reprezentacji (1). Ważnym składnikiem całej konstrukcji jest odwzorowanie $S_{\alpha,Q} : V(\Delta) \to \mathcal{F}(\alpha)$ z modułu Vermy do modułu Focka. Własnością tego odwzorowania jest to, że wektory osobliwe należą do jego jądra: $S_{\alpha,Q}(v_s) = 0$.

VOAs

Pomysł na zaaplikowanie VOA do krzywych kwantowych polega na zastąpieniu „operatorów wierzchołkowych" pojawiających się w definicji funkcji falowej przez operatory przeplatania. To podejście do krzywych kwantowych zostało rozwinięte przez autora tej pracy i wraz z poniższymi wynikami nie zostało dotychczas opublikowane. Wzór (2) stanowi punkt wyjścia do definicji operatów przeplatania pomiędzy modułami Focka [15]. Dlatego też nowe podejście jest konsystentne z podejściem wcześniejszym. W nowym podejściu uogólniamy funkcję falową za pomocą wzoru:

$$\widehat{\psi}_\alpha(v,x) \simeq \int \langle V | I(v,x) \prod_{i=1}^{N} I\Big(\Big| -\sqrt{\beta} \Big\rangle, z_i \Big) \,|\, 0 \,\rangle \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_N,$$

gdzie $I(\cdot, z) : M_1 \to \mathrm{Hom}(M_2, M_3) \otimes \mathbb{C}\{z\}$ są operatorem przeplatania pomiędzy modułami Focka ($M_i = \mathcal{F}(\eta)$ dla różnych wartości η), a $v \in \mathcal{F}(\alpha)$ jest dowolnym wektorem. Do precyzyjnej definicji funkcji falowej potrzebujemy wybrać odpowiedni cykl całkowania. Taki cykl Γ został skonstruowany w [16]. Wynik ten został także zwięźle omówiony w [22]. Cykl ten jest zawarty w definicji *operatora ekranowania* $\Sigma_{N,\beta,b}$:

$$\Sigma_{N,\beta,b} \simeq \int_\Gamma \prod_{i=1}^{N} I\Big(\Big| -\sqrt{\beta} \Big\rangle, z_i \Big) \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_N.$$

Ścisła definicja funckji falowej zadana jest wzorem:

$$\widehat{\psi}_\alpha(v,x) = \Phi^{\hbar}_{\alpha - N\sqrt{\beta}} \Sigma_{N,\beta} I(v,x) \,|\, 0 \,\rangle \,, \tag{4}$$

gdzie $\Phi^{\hbar}_{\alpha - N\sqrt{\beta}}$ jest odpowiednim homomorfizmem odgrywającym rolę stanu zamykającego $\langle\, V \,|$, $v \in \mathcal{F}(\alpha)$ jest dowolnym wektorem, a $\alpha = Q + N\sqrt{\beta} + b\frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Niech $\mathcal{W}_\alpha$ będzie przestrzenią uogólnionych funkcji falowych. Rozszerzona dziedzina definicji funkcji falowej pozwala na inną definicję działania algebry Virasoro:

$$\widehat{L}_n \cdot \widehat{\psi}_\alpha(v,x) = \widehat{\psi}_\alpha(L_n v, x). \tag{5}$$

Niech $S_{\alpha,Q} : V(\Delta) \to \mathcal{F}(\alpha)$ będzie odwzorowaniem wspomnianym w sekcji CFT, którego jądro zawiera wektory osobliwe. Z naszej konstrukcji bezpośrednio wynika, że uogólnione funkcje falowe ewaluowane na $S_{\alpha,Q}(v_s) = 0$ spełniają tożsamość $\widehat{\psi}_\alpha(x)(S_{\alpha,Q}(v_s)) = 0$. Jedyna trudność polega na wyprowadzeniu odpowiedniej reprezentacji. Reprezentacja ta otrzymana jest przy wykorzystaniu

dwóch lematów, z których wynika, że:[1]

$$\begin{aligned} I(L_{-1}v,z) &= \partial_x I(v,z), \\ I(L_{-n}v,x) &= \frac{1}{(n-2)!} : \partial_x^{n-2} T(x) I(v,x) : . \end{aligned} \tag{6}$$

Wykorzystując (6) zaaplikowane do definicji (4) i (5) otrzymujemy równania Schrödingera. Główne twierdzenie przybiera postać:

Twierdzenie 1 *Istnieje reprezentacja ρ operatorów kreacji algebry Virasoro na przestrzeni $\mathcal{W}_\alpha$ taka, że*

$$\widehat{L}_k \widehat{\psi}_\alpha(v,x) = \widehat{\psi}_\alpha(L_{-k}v,x), \tag{7}$$

gdzie $\widehat{L}_k = \rho(L_k)$ i $k<0$. Reprezentacja ta zadana jest za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{-1} &= \partial_x, \quad \textit{natomiast dla } n \geq 2: \\ \widehat{L}_{-n} &= \frac{1}{\hbar^2 (n-2)!} \partial_x^{n-2} \Big(\frac{1}{4}(W'(x))^2 + \frac{Q\hbar}{2} W''(x) + \widehat{f}_t(x) + (\alpha - N\sqrt{\beta})\widehat{d}(x) \Big), \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $\widehat{f}_t(x) = \hbar^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=n+2}^{\infty} m t_m \partial_{t_{m-n-2}}$ i $\widehat{d}(x) = \hbar \sum_{m=0}^{\infty} (m+2) t_{m+2} x^m$.

Z naszej konstrukcji otrzymujemy bardziej ogólną reprezentację niż ta zaprezentowana w [5]. Jeżeli oznaczymy przez $\widehat{L}_{-n}^{CFT}$ reprezentację otrzymaną za pomocą metod CFT (czyli także za pomocą modeli macierzowych) to nasza reprezentacja przybiera następującą postać:

$$\widehat{L}_{-n} = \widehat{L}_{-n}^{CFT} + \gamma \sum_{m=n-2}^{\infty} \binom{m}{n-2} (m+2) t_{m+2} x^{m-n+2},$$

gdzie $\gamma = \hbar(\alpha - N\sqrt{\beta})$ jest parametrem deformacji. Jako wniosek otrzymujemy także następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 1 *Załóżmy, że $a,b,k>0$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, natomiast $k \geq a+b+2$. Wówczas zachodzi następująca tożsamość:*

$$\sum_{n=b}^{k-2-a} \binom{k-n-2}{a} \binom{n}{b} (2n-k+2) = (b-a) \binom{k}{a+b+2}.$$

Przytoczmy teraz twierdzenie o krzywych kwantowych:

Twierdzenie 2 *Jeżeli $v_s = A_{r,s} \,|\, \Delta \,\rangle$ jest wektorem osobliwym, $2N = s-1$, $2b = 1-r$ i $\alpha = Q - \alpha_{r,s}$, to wówczas, wykorzystując reprezentację (8), otrzymujemy krzywe kwantowe:*

$$\widehat{A}_{r,s}(\widehat{L}_{-n}) \widehat{\psi}_\alpha(x) = 0$$

[1] Pierwsza z powyższych równości wynika z definicji operatorów przeplatania, zatem lemat jest sprawdzeniem, czy wybrane I jest takim operatorem. Nie jest wiadome dla autora, czy z takiej definicji wynika także druga z powyższych równości.

Podejście wykorzystujące VOAs ma szereg dodatkowych zalet, które chcielibyśmy tutaj wymienić:

- Definiujemy nie tylko działanie algebry Virasoro na funkcjach falowych, ale także działanie algebry Heisenberga.
- Konstrukcja jest matematycznie bardziej czytelna i nie wymaga żadnych dodatkowych fizycznych założeń czy argumentów.
- Dowodzimy w przejrzysty sposób, że wyprowadzona przez nas postać reprezentacji ma właściwą postać w działaniu nie tylko na pierwotną funkcję falową, ale także na jej uogólnioną wersję. Oznacza to, że możemy zastosować tą reprezentację do dowolnego wyrażenia wielomianowego w operatorach kreacji algebry Virasoro.
- Zakładając prawdziwość równań (6), wyprowadzenie reprezentacji jest prostsze.

Zdaniem autora podejście wykorzystujące VOAs może być dalej zastosowane do innych algebr posiadających wektory osobliwe, na przykład do $\mathcal{W}$-algebr.

Omówmy jeszcze krótko związek z równaniami BPZ. W tych równaniach odpowiednie równania różniczkowe (pochodzące z wektorów osobliwych) anihilują funkcję korelacji postaci

$$\langle\, w_1 \,|\, I(|\,\alpha\,\rangle\,, x) \prod_{i=1}^{N} I\Big(\Big|-\sqrt{\beta}\,\Big\rangle\,, z_i\Big) \,|\, w_2 \,\rangle\,,$$

gdzie I są operatorami przeplatania. To wyrażenie jest bardzo podobne do funkcji falowej $\widehat{\psi}_\alpha(|\,\alpha\,\rangle\,, x)$. Jednakże otrzymana dla równań BPZ reprezentacja jest inna niż ta podana w Twierdzeniu 1.

Super krzywe kwantowe

Supersymetria jest pojęciem wywodzącym się z fizyki teoretycznej, które przewiduje dualność pomiędzy cząsteczkami elementarnymi. Spójność teorii strun silnie ogranicza ilość wymiarów czasoprzestrzeni. W przypadku braku supersymetrii czasoprzestrzeń powinna mieć wymiar 26, supersymetria natomiast ogranicza tą liczbę do 10. Jednym z głównych zastosowań supersymetrii w matematyce jest symetria lustrzana. Postuluje ona dualność pomiędzy trójwymiarowymi zespolonymi rozmaitościami Calabi-Yau (komplementarnymi do czterech obserwowanych wymiarów czasu i przestrzeni). Matematyczny opis supersymetrii wykorzystuje współrzędne antyprzemienne. Noszą one nazwę współrzędnych fermionowych, podczas gdy tradycyjne współrzędne nazywamy współrzędnymi bozonowymi.

Supersymetryczne rozszerzenie relacji pomiędzy krzywymi kwantowymi oraz wektorami osobliwymi zostało przedstawione w [21] oraz [5]. Istnieją różne warianty takiego rozszerzenia, w zależności od obranej wersji super algebry Virasoro. W szczególności w przypadku supersymetrii z $\mathcal{N} = 1$ mamy dwa takie rozszerzenia: algebrę Neveu-Schwarza oraz algebrę Ramonda. W pracy [21] rozważony został pierwszy przypadek z punktu widzenia supersymetrycznych całek po wartościach własnych.

W pracy [5] za pomocą formalizmu CFT została wprowadzona do tych rozważań algebra Ramonda. Trudności związane z potraktowaniem związku super krzywych kwantowych oraz super wektorów osobliwych egzemplifikuje przedstawione w pracy twierdzenie o nieistnieniu pewnego supersymetrycznego odpowiednika operatora przeplatania. Tym niemniej w rozprawie tej prezentujemy wyniki z [5] wykorzystujące podejście CFT.

Super kwantowe struktury Airy

Istnieją różne podejścia do definicji supersymetrycznej wersji topologicznej rekurencji. Jako przykład możemy wymienić prace dotyczące supersymetrycznych całek po wartościach własnych: [4], [20]. Jednakże możemy postąpić także inaczej: skoro QASs są przeformułowaniem topologicznej rekurencji, możemy je uogólnić do SQASs.

Jak już zostało wspomniane we wprowadzeniu QASs definiowane są poprzez rodzinę operatorów kwadratowych:

$$\widehat{L}_i = \hbar\partial_{x_i} - \frac{1}{2}\sum_{a,b\in I} A^i_{a,b}x_a x_b - \hbar\sum_{a,b\in I} B^i_{a,b}x_a\partial_{x_b} - \frac{1}{2}\hbar^2\sum_{a,b\in I} C^i_{a,b}\partial_{x_a}\partial_{x_b} - \hbar D^i, \tag{9}$$

gdzie $i \in I$. Pochodzą od nich równania różniczkowe anihilujące funkcję partycji $\widehat{L}_i e^F = 0$, gdzie

$$F = \sum_{g\geq 0, n\geq 1} \frac{\hbar^{g-1}}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_n\in I} F_{g,n}(i_1,\ldots,i_n)x_{i_1}\cdots x_{i_n}.$$

Operatory $\widehat{L}_i$ tworzą algebrę Liego $\mathfrak{g}$ ze względu na standardowy komutator:

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] = \hbar\sum_k f^k_{i,j}\widehat{L}_k \tag{10}$$

dla pewnych stałych $f^k_{ij} \in \mathbb{C}$. Funkcja partycji koduje niezmienniki, które w odpowiednich przypadkach odpowiadają niezmiennikom obliczonym za pomocą topologicznej rekurencji.

W celu zdefiniowania SQASs wykorzystajmy wzory (9) oraz (10) dając jednak inne znaczenie użytym symbolom. W (9) dopuszczamy jako x_a zmienne fermionowe. Wyróżnione są one za pomocą gradacji na zbiorze indeksów $I \to \mathbb{Z}_2$. Dla zwykłych zmiennych bozonowych odpowiednią gradacją jest 0, dla fermionowych natomiast 1. W (10) zastępujemy zwykły komutator przez superkomutator:

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j]_s = \widehat{L}_i\widehat{L}_j - (-1)^{|i||j|}\widehat{L}_j\widehat{L}_i.$$

Algebra $\mathfrak{g}$ staje się super algebrą Liego. Wymagamy, aby funkcja partycji anihilowana przez te operatory miała gradację parzystą. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności funkcji partycji zachodzi także w tym przypadku:

Twierdzenie 3 *[2] Załóżmy, że operatory $\widehat{L}_i$ tworzą SQAS. Wówczas istnieje dokładnie jedna rodzina elementów $F_{g,n} \in A$, które spełniają równania $\widehat{L}_i \exp(\sum_{g\geq 0}\sum_{n\geq 1}\hbar^{g-1}F_{g,n}) = 0$, dla których $F_{0,2} = 0$.*

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje supersymetryczną wersję lematu Poincaré dla 1-form. Jedną z zalet SQASs nad QASs jest możliwość wprowadzenia dodatkowej zmiennej fermionowej nie związanej z żadnym z operatorów. To rozszerzenie powala na konstrukcję różnych przykładów, w tym opartego na algebrze Neveu-Schwarza.

W rozprawie tej prezentujemy także relacje na tensory A, B, C oraz D wynikające z warunku (10), a także równania rekurencyjne na współczynniki $F_{g,n}$ pochodzące z warunku $\widehat{L}_i e^F = 0$ [2]. Tożsamości te są uogólnieniem wyników zaprezentowanych w [10]. Badamy także redukcję struktur Airy opartych o algebrę $\mathfrak{g}$ do podalgebry $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$, jak to zostało przedstawione w poniższym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 2 *Załóżmy, że $L : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ jest reprezentacją symplektyczną tworzącą klasyczną strukturę Airy. Niech $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą taką, że $\rho(\mathfrak{j})(\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{j}^*) \subset \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{j}^*$. Wówczas L ograniczone do $\mathfrak{j}$ tworzą klasyczną strukturę Airy.*

W szczególności wnioskujemy, że:

Stwierdzenie 3 *[2] Mając daną klasycznę super strukturę Airy L^{cl} z super algebrą $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ można ją ograniczyć do bozonowej struktury Airy z algebrą $\mathfrak{g}_0$.*

Badanie QASs z punktu widzenia teorii reprezentacji zostało zapoczątkowane w [10]. Pokazano tam, że klasyczne Struktury Airy odpowiadają reprezentacjom sympletycznym $\rho : \mathfrak{g} \to (\mathrm{End}(W), \omega)$ (ω jest formą symplektyczną) odpowiedniej algebry Liego oraz zanurzeniu lagranżowskiemu $j : \mathfrak{g} \to W$ spełniającymi warunek $\varphi(v_1)j(v_2) - \varphi(v_2)j(v_1) = j([v_1, v_2])$. Z lematu Whiteheada, jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprosta, a $\mathfrak{g}$ i W mają wymiar skończony, wynika, że możemy znaleźć element $\Omega \in W$ taki, że $j(x) = \rho(x)\Omega$. W rozprawie rozwijamy teorię wykorzystując rozkład na przestrzenie własne $W = \sum_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$. Rozkład ten pozwala napisać $\Omega = \sum_\lambda \Omega_\lambda$. Przy tych założeniach dowodzimy szeregu lematów:

Lemat 1 *Zbiór $X = \{\lambda \in \Lambda : \Omega_\lambda \neq 0\}$ rozpina przestrzeń $\mathfrak{h}^*$.*

Lemat 2 *Dla dowolnych elementów $x, y \in \mathfrak{g}$ mamy $\omega(\rho(x)\Omega, \rho(y)\Omega) = 0$ oraz $\omega(\Omega, \rho(x)\rho(y)\Omega) = 0$.*

Lemat 3 *Załóżmy, że dla $a \in W_{\lambda_1}$ oraz $b \in W_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$) zachodzi warunek $\omega(a, b) \neq 0$ oraz, że istnieje ścieżka w diagramie reprezentacji łącząca a i b, dla której krawędzie odpowiadają parami komutującym operatorom. Wówczas długość tej ścieżki jest nieparzysta.*

Wykorzystujemy powyższe lematy oraz rozkład na przestrzenie wag w celu zbadania struktur Airy dla algebry $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. Konstruujemy dwie takie struktury. Pierwsza z nich pochodzi z reprezentacji $V_6 \otimes V_1 + V_1 \otimes V_6$ (V_n jest n-wymiarową nieprzywiedlną reprezentacją $\mathfrak{sl}(2)$). Druga struktura jest ciekawsza. Pochodzi ona z reprezentacji $V_3 \otimes V_2 + V_2 \otimes V_3$. Ponieważ obie te struktury są skończenie wymiarowe, mogą zostać skwantowane. Badanie struktur opartych na algebrze $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$

stanowi także początkowy krok w celu zbadania SQASs opartych na algebrze $\mathfrak{osp}(3|2)$. Badamy także SQASs oparte na algebrze $\mathfrak{osp}(1|2)$ [2]. Z rozważań wymiarowych wynika, że algebra ta nie posiada SQASs jeżeli nie założymy istnienia dodatkowej zmiennej fermionowej. Z tą zmienną taka struktura istnieje, jak też zostało pokazane w [2].

W pracy [10] został przeprowadzony pierwszy krok w celu klasyfikacji QASs opartych na prostych algebrach Liego. Wiele algebr zostało wykluczonych. W opinii autora niniejszej rozprawy teoria struktur Airy opartych o algebry półproste powinna być bogatsza, co ilustruje już przypadek algebry $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. Wynika to stąd, że algebry półproste są „bardziej przemienne", a zatem warunek (10) jest łatwiejszy do spełnienia. Opinia ta została niedawno potwierdzona w pracy [14].

Istnieje kilka obszarów, gdzie SQASs mogłyby zostać zastosowane. Jednym z nich jest znalezienie związku z super krzywymi spektralnymi. Innym pomysłem jest zbadanie niezmienników Gromova-Wittena rozmaitości X posiadającej nieznikające kohomologie w nieparzystych wymiarach. Zapisanie takich kohomologii w szeregi formalne wymaga wykorzystania zmiennych fermionowych. Więzy na takie szeregi zostały wyprowadzone w pracy [19] w przypadku, gdy X jest krzywą zespoloną. Operatory zadające te więzy istotnie spełniają warunek super algebry Liego. Jednakże nie tworzą one SQAS, ponieważ ilość wykorzystanych zmiennych jest większa niż ilość operatorów. W szczególności więzy te nie wyznaczają funkcji partycji w sposób jednoznaczny.

Bibliografia

[1] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 241:333–380, July 1984.

[2] Vincent Bouchard, Paweł Ciosmak, Leszek Hadasz, Kento Osuga, Błażej Ruba, and Piotr Sułkowski. Super Quantum Airy Structures. *arXiv e-prints*, page arXiv:1907.08913, 2019.

[3] Vincent Bouchard and Bertrand Eynard. Reconstructing WKB from topological recursion. *Journal de l'École Polytechnique - Mathematiques*, 4, June 2016.

[4] Vincent Bouchard and Kento Osuga. Supereigenvalue Models and Topological Recursion. *Journal of High Energy Physics*, 2018, February 2018.

[5] Paweł Ciosmak, Leszek Hadasz, Zbigniew Jaskólski, Masahide Manabe, and Piotr Sułkowski. From CFT to Ramond super-quantum curves. *Journal of High Energy Physics*, 2018, December 2017.

[6] Paweł Ciosmak, Leszek Hadasz, Masahide Manabe, and Piotr Sułkowski. Super-quantum curves from super-eigenvalue models. *Journal of High Energy Physics*, 2016, August 2016.

[7] Olivia Dumitrescu and Motohico Mulase. Quantum Curves for Hitchin Fibrations and the Eynard-Orantin Theory. *Letters in Mathematical Physics*, 104, October 2013.

[8] Olivia Dumitrescu and Motohico Mulase. An invitation to 2D TQFT and quantization of Hitchin spectral curves. *Banach Center Publications*, 114, May 2017.

[9] Petr Dunin-Barkowski, Motohico Mulase, Paul Norbury, Alexandr Popolitov, and Sergey Shadrin. Quantum spectral curve for the Gromov-Witten theory of the complex projective line. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, December 2013.

[10] Jorgen Ellegaard Andersen, Gaëtan Borot, Leonid O. Chekhov, and Nicolas Orantin. The ABCD of topological recursion. *arXiv e-prints*, page arXiv:1703.03307, Mar 2017.

[11] Bertrand Eynard and Nicolas Orantin. Invariants of algebraic curves and topological expansion. *Communications in Number Theory and Physics*, 1, March 2007.

[12] Bertrand Eynard and Nicolas Orantin. Topological recursion in enumerative geometry and random matrices. *J. Phys. A: Math. Theor*, 147:293001–117, July 2009.

[13] Sergei Gukov and Piotr Sulkowski. A-polynomial, B-model, and quantization. *Journal of High Energy Physics*, 2012(2):70, February 2012.

[14] L. Hadasz and B. Ruba. Airy structures for semisimple Lie algebras. *arXiv e-prints*, page arXiv:1911.10453, Nov 2019.

[15] Yi-Zhi Huang. Lecture notes at joint mathematics and physics summer school on topological phases, conformal field theory and tensor category, 2010. https://sites.math.rutgers.edu/∼yzhuang/.

[16] Kenji Iohara and Yoshiyuki Koga. *Representation Theory of the Virasoro Algebra*, volume 308 of *Springer Monographs in Mathematics*. Springer-Verlag London, January 2011.

[17] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. *Topological Recursion and its Influence in Analysis, Geometry, and Topology*, volume 100 of *Proc. Symposia in Pure Mathematics*, chapter Airy structures and symplectic geometry of topological recursion, pages 433–490. 2018.

[18] Masahide Manabe and Piotr Sułkowski. Quantum curves and conformal field theory. *Physical Review D*, 95, December 2015.

[19] A. Okounkov and R. Pandharipande. Virasoro constraints for target curves. *Inventiones mathematicae*, 163:47–108, January 2006.

[20] Kento Osuga. Topological recursion in the Ramond sector. *Journal of High Energy Physics*, 2019, October 2019.

[21] Paweł Ciosmak, Leszek Hadasz, Masahide Manabe, Piotr Sułkowski. *Topological Recursion and its Influence in Analysis, Geometry, and Topology*, volume 100 of *Proc. Symposia in Pure Mathematics 100 (2018) 119*, chapter Singular vector structure of quantum curves, pages 119–150. 2018.

[22] Akihiro Tsuchiya and Yukihiro Kanie. Fock space representations of the Virasoro algebra. Intertwining operators. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 22, March 1986.