Badanie zanurzalności algebr częściowych za pomocą systemów przepisywania termów
Autoreferat

Norbert Dojer

Operacja rozszerzenia algebry (zanurzenia w inną algebrę) wydaje się mieć w teorii algebr częściowych znacznie większe znaczenie niż w przypadku totalnym. Jeśli bowiem rozserzana algebra jest częściowa, jej nośnik może algebrę już rozszerzoną generować, co można interpretować jako wzbogacenie, a jeśli rozważamy rozszerzenie do algebr totalnych, to wręcz uzupełnienie obiektu reprezentowanego przez wyjściową algebrę. Z kolei umiejętność konstruowania odpowiednio wzbogaconych czy uzupełnionych obiektów jest przedmiotem zainteresowania takich dziedzin, jak logiki niemonotoniczne ([8]), induktywne wnioskowanie ([9], [15], [17]) czy specyfikacja oprogramowania (zagadnienie modularności – por. [22], a także rozdz. 23 w [13]).

Umiejętność rozszerzenia algebry częściowej do dobrze znanej lub choćby łatwiejszej do zbadania algebry totalnej może się także okazać bardzo przydatna do poznania jej własności. Tak właśnie działa twierdzenie Poincare-Birkhoffa-Witta pozwalające reprezentować algebry Liego przez algebry łączne. Przykładem bardzo ogólnej metody użycia totalnego rozszerzenia do opisania algebry częściowej jest konstrukcja podana przez Kreowskiego w [14] (pomysł ten wykorzystujemy w rozdziale 3 rozprawy).

Pojawiają się więc w teorii algebr częściowych naturalne pytania: 'Jak można rozszerzyć daną algebrę?', 'Czy można ją rozszerzyć do algebry o podanych własnościach?'. Jednym z podstawowych wariantów tego ostatniego jest problem 'Czy można daną algebrę częściową zanurzyć w algebrę z danej rozmaitości totalnej?', nazywany dalej problemem zanurzalności.

Evans wskazał w [6] i [7] związki problemu zanurzalności z problemem słów.

Z kolei Andréka i Németi w [1] pokazali, że zanurzalność algebry w rozmaitość jest równoważna zachodzeniu w algebrze wzystkich prawdziwych w rozmaitości implikacji równościowych postaci $\bigwedge\limits_{i \in I} t_i \approx s_i \Longrightarrow x \approx y$.

Inne wyniki dotyczące problemu zanurzalności wiążą się z rezultatem uzyskanym przez Schmidta w [19]. Pokazał on, że dla każdej algebry częściowej $\underline{\mathrm{A}}$ oraz klasy algebr $\mathcal{K}$ zamkniętej na produkty i domknięte podalgebry istnieje $\mathcal{K}$-odbicie $\underline{\mathrm{A}}$, tzn. homomorfizm $h\colon \underline{\mathrm{A}} \to \underline{\mathrm{B}} \in \mathcal{K}$ faktoryzujący wszystkie homomorfizmy z $\underline{\mathrm{A}}$ w algebry z klasy $\mathcal{K}$. Ponieważ rozmaitości totalne spełniają powyższe założenia, zanurzalność $\underline{\mathrm{A}}$ w $\mathcal{K}$ jest równoważna każdemu z następujacych warunków:

- homomorfizm h jest różnowartościowy (czyli $ker\ h$ jest identycznością na A)
- kongruencja na wolnym uzupełnieniu $\underline{\mathrm{A}}$ generowana przez teorię równościową $\mathcal{K}$ nie skleja elementów A
- kongruencja na algebrze wolnej w $\mathcal{K}$ nad A generowana przez relacje definiujące algebrę $\underline{\mathrm{A}}$ nie skleja wolnych generatorów

- kongruencja na algebrze termów nad A generowana przez teorię równościową $\mathcal{K}$ oraz relacje definiujące algebrę $\underline{\mathrm{A}}$ nie skleja elementów A.

Słomiński w [20] podał warunek z kongruencją na algebrze wolnej, a także, uogólniając wcześniejsze wyniki dotyczące zanurzalności półgrup w grupy czy też krat w algebry Boole'a, badał przypadek, w którym operacje algebry wyznaczają funkcje dyskretne (nigdzie nie określone) bądź totalne - można więc ją traktować jako algebrę totalną uboższego typu.

Z kolei Burmeister w [5] pokazuje, że każdy model danego zbioru równości egzystencjalnych E można zanurzyć w pewien totalny model E, czyli algebrę z totalnej rozmaitości zdefiniowanej przez E.

Bartol i Roselló w [3] podają (inną niż w [1]) charakteryzację przez implikacje równościowe klasy algebr częściowych zanurzalnych w daną rozmaitość totalną, a także warunki równoważne definiowalności tej klasy przez słabe równości (ograniczając się do przypadku regularnych rozmaitości algebr unarnych).

Oni też, wraz z Monserratem, Rudakiem i Torrensem, podają w [2] konstrukcję wspomnianej kogruencji na wolnym uzupełnieniu algebry częściowej i stosują ją do badania własności algebr termalnych (tj. takich, w których wartość termu może być określona nawet wtedy, gdy nie są określone wartości pewnych jego podtermów).

Wymienione wyniki pozwalają w wielu sytuacjach wyznaczyć pewne klasy algebr zanurzalnych w dane rozmaitości, jak również klasy rozmaitości, w które dane algebry można zanurzyć. Trudno jednak uznać je za narzędzie do rozstrzygania problemu zanurzalności w konkretnych przypadkach. Możliwości skonstruowania takiego narzędzia stwarza natomiast teoria przepisywania termów.

Systemy przepisywania termów służą do rozwiązywania problemu słów dla teorii równościowych, tj. problemu 'Czy dana równość należy do danej (prezentowanej przez dany zbiór aksjomatów) teorii równościowej?'. Ich działanie polega na przekształcaniu obu stron rozważanej równości do pewnych kanonicznych postaci i sprawdzeniu, czy są one jednakowe. Sposób przekształcania określają reguły przepisywania („skierowane” równości) otrzymane z aksjomatów teorii. Teoria przepisywania termów znajduje obecnie zastosowanie w wielu dziedzinach matematyki i informatyki, m. in. w algebrze uniwersalnej, automatycznym dowodzeniu twierdzeń, tworzeniu i weryfikacji oprogramowania.

Celem rozprawy jest ustanowienie metod badania problemu zanurzalności wykorzystujących narzędzia pochodzące z teorii przepisywania termów. Główna idea wygląda następująco: Do systemu przepisywania termów prezentującego algebrę $\underline{\mathrm{A}}$ należy dodać aksjomaty rozmaitości $\mathcal{K}$ i skonstruować nowy system prezentujący $\mathcal{K}$-odbicie algebry $\underline{\mathrm{A}}$. Wówczas do sprawdzenia, czy $\mathcal{K}$-odbicie skleja elementy $\underline{\mathrm{A}}$ wystarczy porównać zbiory stałych termów nieredukowalnych w obu systemach, co umożliwia pojęcie stałoredukowalności (ground reducibility).

Pomysł ten rozwija idee pochodzące z [13] (a wcześniej m. in. [16], [10] i [12]) algorytmów sprawdzających prawdziwość równości w algebrze totalnej oraz zanurzalność algebry totalnej w rozmaitość bogatszego typu. Wymaga to jednak zaadoptowania teorii przepisywania termów do algebr częściowych, czemu poświęcona jest znaczna część pracy, jak również większość postawionych otwartych problemów. Związane z tymi zagadnieniami wyniki mogą znaleźć zastosowanie w systemach wspomagających dowodzenie, a także przy implementacji specyfikacji algebraicznych wykorzystujących algebry częściowe (por. [11] i [23] oraz [22], [4], [14], [18] i [13]).

W rozdziale 2 rozprawy wprowadzamy używaną później notację oraz twierdzenia z zakresu algebry uniwersalnej, przepisywania termów i zagadnień pokrewnych.

Rozdział 3 poświęcony jest zastosowaniu (totalnych) systemów przepisywania termów do badania (klas) algebr częściowych skonstruowanych metodą zaproponowaną przez H.-J. Kreowskiego w [14] za pomocą (klas) algebr totalnych. Podrozdział 3.1 zawiera opis metody (dwie pierwsze definicje) oraz analizę własności otrzymanych tak klas algebr. Podrozdział 3.2 prezentuje sposób użycia systemów przepisywania termów do badania teorii równościowych tych klas (dla równości egzystencjalnych i równości Evansa) oraz zanurzalności ich obiektów początkowych w pewne rozmaitości totalne. Proponowana metoda nie wymaga modyfikowania narzędzi oferowanych przez teorię przepisywania termów, lecz badanie za ich pomocą teorii równościowych algebr częściowych jest dość złożone, a badanie problemu zanurzalności ograniczone do rozmaitości zawartych w użytej do opisania algebry częściowej.

Alternatywne rozwiązanie przedstawia rozdział 4. Polega ono na zaadoptowaniu systemów przepisywania termów do badania egzystencjalnych teorii równościowych. Podrozdziały 4.1 i 4.2 wprowadzają odpowiedniki pojęć systemu redukcyjnego i systemu przepisywania termów oraz związaną z nimi terminologię (własności zbiegania, zupełności itd.). Następnie za jej pomocą sformułowane zostają warunki równoważne prezentowaniu przez nie egzystencjalnych teorii równościowych. Podrozdział 4.3 przedstawia konstrukcję częściowego systemu przepisywania termów prezentującego zadaną teorię (algorytm uzupełnienia), a także przykładowe jej zastosowania.

Rozdział 5 poświęcony jest badaniu zanurzalności algebry początkowej z rozmaitości egzystencjalnej prezentowanej przez dany częściowy system przepisywania termów w daną rozmaitość totalną. Prezentowana metoda nie wymaga, żeby rozmaitość ta była zawarta w innej, związanej z systemem, jak to było w przypadku algorytmów rozważanych wcześniej. Podrozdział 5.1 przedstawia sposób przekształcenia częściowego systemu redukcyjnego do postaci umożliwiającej sprawdzanie stałoredukowalności termów za pomocą algorytmu dla systemów totalnych. Podrozdział 5.2 poświęcony jest sformułowaniu warunków równoważnych zanurzalności wygodnych do weryfikowania za pomocą systemów przepisywania termów. Wreszcie podrozdział 5.3 przedstawia zapowiadaną metodę badania zanurzalności.

W Zakończeniu przedstawiamy otwarte problemy związane z planowanymi kierunkami dalszych badań.

Dodatek zawiera pewne techniczne szczegóły dowodu poprawności algorytmu uzupełnienia dla częściowych systemów przepisywania termów.

Literatura

[1] H. Andréka, I. Németi *Generalization of the concept of variety and quasivariety to partial algebras through category theory.* Dissert. Math. (Rozpr. Mat.) 204 (1983).

[2] W. Bartol, M. Monserrat, F. Rosselló, L. Rudak, J. Torrens *On the construction of least congruences with certain properties in a partial algebra.* Praca niepublikowana

[3] W. Bartol, F. Rosselló *On the class of weak subalgebras of a variety.* Praca niepublikowana

[4] M. Broy, M. Wirsing *Partial Abstract Types.* Acta Inf. 18 (1982), 47-64.

[5] P. Burmeister *An embedding theorem for partial algebras and the free completion of a free partial algebra within the primitive class.* Alg. Univ. 3 (1973), 271-279.

[6] T. Evans *The word problem for abstract algebras.* Journ. of the Lond. Math. Soc. 26 (1951), 64-71.

[7] T. Evans *Embeddability and the word problem.* Journ. of the Lond. Math. Soc. 28 (1953), 76-80.

[8] D. M. Gabbay, C. J. Hogger, J. A. Robinson (ed.) *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming,* vol. 3 *Nonmonotonic Reasoning and Logic Programming.* Clarendon Press Oxford (1994).

[9] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman *The elements of statistical learning.* Data mining, inference and prediction, Springer-Verlag New York (2001).

[10] G. Huet, J.-M. Hullot *Proofs by induction in equational theories with constructors.* Journ. of Comp. and Syst. Sci. 25 (1982), 239-266.

[11] J. Hsiang *Rewrite method for theorem proving in first order theory with equality.* Journ. of Symb. Comput. 3 (1987), 133-151.

[12] J.-P. Jouannaud, E. Kounalis *Proof by induction in equational theories without constructors.* W *Proceedings 1st IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Cambridge (Mass. USA).* (1986), 358-366.

[13] C. Kirchner, H. Kirchner *Rewriting Solving Proving.* http://www.loria.fr/˜ckirchne

[14] H.-J. Kreowski *Partial algebras flow from algebraic specifications.* W *Automata, Languages and Programming (Karlsruhe 1987).* Lect. Notes in Comp. Sci. 267 (1987), 521-530.

[15] D. Michie, D. Spiegelhalter, C. Taylor *Machine learning, neural and statistical classification.* Ellis Horwood series in artificial intelligence, Ellis Horwood (1994).

[16] D. R. Musser *On proving inductive properties of abstract data types.* W *Proceedings 7th ACM Symp. on Principles of Programming Languages.* (1980), 154-162.

[17] S. K. Pal, A. Pal *Pattern Recognition. From classical to modern approaches.*

[18] H. Reichel *Structural Induction on Partial Algebras.* Mathematical Research, vol. 18, Akademie-Verlag Berlin (1984).

[19] J. A. Schmidt *A general existence theorem on partial algebras and its special cases.* Colloq. Math. 14 (1966), 73-87.

[20] J. Słomiński *A theory of extensions of quasi-algebras to algebras.* Dissert. Math. (Rozpr. Mat.) 40 (1964).

[21] J. Słomiński *Peano-algebras and quasi-algebras.* Dissert. Math. (Rozpr. Mat.) 57 (1968).

[22] M. Wirsing *Algebraic specification.* Rozdział 13 w J. van Leeuwen (ed.) *Handbook of Theoretical Computer Science*, vol. B *Formal Models and Semantics.* Elsevier (1990), 675-788.

[23] H. Zhang, D. Kapur *First-order theorem proving using conditional rewrite rules.* W *Proceedings 9th International Conference on Automated Deduction.* Lect. Notes in Comp. Sci. 310 (1988), 1-20.