WŁASNOŚĆ PUNKTU STAŁEGO WALCÓW NAD KRZYWYMI

MIROSŁAW SOBOLEWSKI

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Przedmiotem rozprawy jest konstrukcja krzywej X z własnością punktu stałego, której walec, czyli iloczyn kartezjański $X \times [0,1]$, tej własności nie posiada. Stanowi ona rozwiązanie problemu Binga z 1969 roku.

W roku 1909 Brouwer udowodnił, że kostki skończenie wymiarowe $\mathbb{I}^n$ mają własność punktu stałego. Kostki te – to iloczyny kartezjańskie n egzemplarzy odcinka $\mathbb{I} = [0,1]$. Twierdzenie orzekające własność punktu stałego odcinka można łatwo wyprowadzić z własności Darboux funkcji ciągłych rzeczywistych. Dowód ogólnego twierdzenia Brouwera jest trudny. Zachodzi więc pytanie czy można je uzyskać jako wniosek z reguły stwierdzającej (przynajmniej w pewnej klasie przestrzeni) zachowanie własności punktu stałego przez iloczyny kartezjańskie, a w szczególności przez walce nad przestrzeniami, to jest ich iloczyny kartezjańskie przez odcinek. Pierwsze odnotowane sformułowanie tego problemu pochodzi od Kazimierza Kuratowskiego (1930 [Ku1]) i przybrało ono następującą postać: Czy iloczyn kartezjański kontinuów Peano, t.j. lokalnie spójnych, które mają własność punktu stałego też ma własność punktu stałego? Kuratowski, w swoim sformułowaniu narzucił na przestrzeń postulaty regularności natury zarówno globalnej – zwartość, jak i lokalnej – lokalną spójność. Jeśli odrzucimy te ograniczenia to kontrprzykłady są proste. Pierwszy przykład przestrzeni z własnością punktu stałego, której kwadrat kartezjański nie ma tej własności opublikował w 1959 roku E.Connell ([C]). Równie nieskomplikowany – choć już łukowospójny przykład pochodzi od Klee'go ([Klee]). Z drugiej strony w 1956 Dyer udowodnił, że iloczyny kartezjańskie kontinuów łańcuchowych, t.j. granic odwrotnych łuków mają własność punktu stałego ([Dy]). Twierdzenie to można traktować jako uogólnienie twierdzenia Brouwera. Jest ono szczególnie interesujące jeśli wziąć pod uwagę to, że kontinua łańcuchowe w znacznym stopniu mogą nie spełniać wymogu lokalnej spójności. Najprostszym przykładem jest tu krzywa zwana zagęszczoną sinusoidą, zaś skrajnie skomplikowanym pseudołuk, kontinuum łańcuchowe dziedzicznie nierozkładalne, a więc nie zawierające żadnych łuków. Wcześniej Hamilton (1951 [Ham]) udowodnił, że kontinua łańcuchowe mają własność punktu stałego. W roku 1967 ukazały się dwie prace . W pierwszej z nich Knill ([Kn]) konstruuje kontinuum ściągalne (lecz nielokalnie spójne) wymiaru 2 z własnością punktu stałego, którego walec tej własności już nie ma. W drugiej z nich Lopez ([L]) podaje analogiczny przykład będący wielościanem zwartym. Wymiar wielościanu Lopeza wynosi 17, co od razu stawia wobec problemu jego obniżenia. W dziesięć lat później Husseini skonstruował dwie rozmaitości zamknięte, obie mające własność punktu stałego, których iloczyn kartezjański tej własności już jednak nie ma ([Hu]). Ten przykład ma również wysoki wymiar, mianowicie dla każdego z czynników wynosi on 56. Walce nad rozmaitościami z własnością punktu stałego nadal mają własność punktu stałego. Dowód dla rozmaitości wymiaru >2 przedstawił Fadell w pracy ([F]). Przy użyciu twierdzenia o klasyfikacji powierzchni i twierdzenia Lefschetza możemy go łatwo uzupełnić dla wymiarów ≤ 2.

Zauważmy przy okazji, że stosując wzór Künnetha i twierdzenie Lefschetza ([D-G]) łatwo również sprawdzić, że iloczyny kartezjańskie rozmaitości wymiaru < 3 z własnością punktu stałego także mają tę własność. Czyli wymiar przynajmniej jednej z pary rozmaitości, które by mogły zastąpić przykład Husseiniego ([Hu]) musi być co najmniej 3.

W klasie kontinuów pozostaje do rozstrzygnięcia przypadek wymiaru 1. Jeśli założymy, że jednowymiarowe kontinuum jest lokalnie spójne to wówczas zawiera ono krzywą zwykłą zamkniętą lub jest retraktem absolutnym (dendrytem). Walec nad dendrytem jest nadal retraktem absolutnym, zatem ma własność punktu stałego. Pozostaje więc problem zachowania własności punktu stałego przez walce nad dowolnymi krzywymi. Problem ten postawił Bing w 1969 roku w swojej pracy *"The elusive fixed point property"* ([Bi]). Najsilniejszy pozytywny wynik w tym zakresie uzyskał w 2002 roku Mańka, który udowodnił, że walce nad λ-dendroidami, t.j. dziedzicznie rozkładalnymi krzywymi będącymi granicami odwrotnymi drzew mają własność punktu stałego ([M2], dowód tego, że λ-dendroidy mają tę własność przedstawił ten sam autor w [M1] w 1976). Jego wynik jest wzmocnieniem twierdzenia Ochezina ([O]), stwierdzającego własność punktu stałego dla walców nad dendroidami (dowód tego, że dendroidy mają własność punktu stałego przeprowadził Borsuk [Bo]). Jednak, jak okazuje się odpowiedź na problem Binga w ogólności jest negatywna. Konstrukcja odpowiedniego kontrprzykładu jest głównym celem niniejszej rozprawy. Sam przykład jest dosyć skomplikowany, choć opiera się na prostym pomyśle geometrycznym. Mianowicie, badając własność punktu stałego przestrzeni jednołukowospójnych (t.j przestrzeni łukowospójnych nie zawierających krzywych zwykłych zamkniętych) często korzysta się z następującego lematu. Jeśli przekształcenie $f : J \to T$, gdzie J jest pewnym łukiem leżącym w jednołukowospójnej przestrzeni T odwzorowuje J w ten sposób, że przeprowadza jego końce "na zewnątrz" to w J musi się pojawić punkt stały.

Okazuje się jednak, że ten fenomen punktu stałego w pewnym sensie nie jest zachowany przy mnożeniu kartezjańskim przestrzeni jednołukowospójnej przez odcinek. Nasze wysiłki skupią się na tym, by zanurzyć T w pewnej krzywej X mającej własność punktu stałego, w ten sposób by wykorzystać wspomniane zjawisko do konstrukcji przekształcenia bez punktu stałego $X \times \mathbb{I}$ w siebie.

Do dowodu własności przykładu okazują się użyteczne pewne zaawansowane konstrukcje i pojęcia. Wymienię tutaj klasyczne rezultaty teorii grup topologicznych abelowych lokalnie zwartych, przede wszystkim teorię dualności Pontriagina ([Pon], [H-R]) oraz twierdzenie Scheffera ([Sch]), które są podstawowym narzędziem pozwalającym wywnioskować z algebraicznych własności abelowych grup topologicznych zwartych ich odpowiednie własności topologiczne. Używamy tych pojęć do zbadania własności solenoidów czyli grup topologicznych abelowych zwartych będących granicami ciągów odwrotnych złożonych z egzemplarzy okręgu jednostkowego $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ traktowanego jako grupa multyplikatywna. Szczególnie użyteczne własności ma dla nas solenoid Σ, którego grupa dualna Pontriagina jest izomorficzna z grupą liczb wymiernych. Innym narzędziem, które stosujemy jest pewne pojęcie teorii kształtu wprowadzone przez J. Krasinkiewicza i P. Minca ([K-M], [K]), mianowicie łączalność. Pojęcie to pozwala w kontinuach wyróżnić tzw. składowe łączalności, które w dużej mierze zachowują się podobnie do składowych łukowych. W przypadku solenoidów te pojęcia nawet pokrywają się. Ponadto używamy skonstruowanego przez H. Cooka kontinuum C, o następującej własności: jeśli $f : C' \to C''$ jest przekształceniem pomiędzy podkontinuami C to jest ono identycznością lub przekształceniem w punkt ([Cook]). Ta własność kontinuum Cooka czyni je często bazą innych konstrukcji, w których istotna jest kontrola liczby występujących przekształceń. W naszym przypadku używamy kontinuum Cooka do budowy ciągu kontinuów $C_i, i = 1, 2, 3, \ldots$, który ma z grubsza biorąc następującą własność: C_{i+1} jest obrazem ciągłym C_i, natomiast jeśli $i < j$ to nie ma ciągłego przekształcenia C_j na C_i. Rola tej własności w przykładzie polega na tym, że wymusza ona przekształcanie końców pewnego łuku „na zewnątrz" i w następstwie powoduje pojawienie się punktu stałego. Solenoid Σ, ciąg C_i i triod T są podstawowymi składnikami naszego przykładu X.

Główny wynik niniejszej rozprawy prezentowałem w 2004 roku na Wiosennej Konferencji Topologii i Układów Dynamicznych w Birmingham w Alabamie w Stanach Zjednoczonych. Został on opublikowany w pracy [So].

Bibliografia

[Bi] R. H. Bing, *The elusive fixed point property*, Amer. Math. Monthly **76**, (1969), pp. 119–132.

[Bo] K. Borsuk, *A theorem on fixed point*, Bull. Acad. Sci. **2**, (1954), pp. 17–20.

[C] E. Connell, *Properties of fixed point spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), pp. 974–979.

[Cook] H. Cook, *Continua which admit only the identity mapping onto nondegenerate subcontinua*, Fund. Math. **60**, pp. 241–249, (1967).

[D-G] J. Dugunji, A. Granas, *Fixed point theory* **1**, PWN, (1982).

[Dy] E. Dyer, *A fixed point theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), pp. 662–672.

[F] E. Fadell, *Recent results in the fixed point theory of continuous maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **76**, (1970), pp. 10–29.

[Ham] O. H. Hamilton, *A fixed point theorem for pseudo-arcs and certain other metric continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 2, (1951), pp. 173–174.

[H-R] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract harmonic analysis*, (po rosyjsku) Mir, (1975).

[Hu] S. Husseini, *The product of the manifolds with the f. p. p. need not have the f. p. p.*, Amer. J. Math. **99**, (1977), pp. 919–931.

[Klee] V. Klee, *An example related to the fixed-point property*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **8**, (1960), 81–82.

[Kn] R. Knill, *Cones, products and fixed point*, Fund. Math. **60**, (1967), pp. 35–46.

[K] J. Krasinkiewicz, *On pointed movability and related notions*, Fund. Math. **114**, (1981), pp. 29-52.

[K-M] J. Krasinkiewicz, P. Minc, *Generalized paths and pointed 1-movability*, Fund. Math. **104**, (1979), pp. 141–153.

[Ku1] K. Kuratowski, *Problem 49*, Fund. Math. **15**, (1930), p. 356.

[Ku2] K. Kuratowski, *Topologia II*, (po rosyjsku) Mir, (1969)

[L] W. Lopez, *An example in the fixed point property of polyhedra*, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, (1967), pp. 922–924.

[M1] R. Mańka, *Associacion and fixed point*, Fund. Math. **91**, (1976), pp. 105–121.

[M2] R. Mańka, *Cylinders over λ-dendroids have the fixed point property*, Fund. Math. **173**, (2002), pp. 101–112.

[O] V. P. Okhezin, *Fixed point theorems on products of spaces*, w *Studies in functional analysis and its applications*, Gos. Univ., (1985), (po rosyjsku), pp. 562–567.

[Pon] L. S. Pontriagin, *Nepreryvnye gruppy*, Nauka (1984), (po rosyjsku)

[Sch] W. Scheffer, *Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **33**, (1972), pp. 562–567.

[So] M. Sobolewski, *A curve with the fixed point property whose cylinder admits a fixed point free map*, Houston J. Math. 31 (2005), no. 1, pp. 239–253.