Autoreferat rozprawy doktorskiej

Nierówności funkcyjne i transportowe i ich zastosowania do koncentracji miary

Michał Strzelecki

1. Wstęp

Moja rozprawa jest poświęcona nierównościom funkcyjnym i transportowym związanym ze zjawiskiem koncentracji miary. Opis wyników poprzedźmy krótkim historycznym wprowadzeniem.

Z rozwiązania problemu izoperymetrycznego na sferze $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ płynie następujący, dość zaskakujący wniosek: na wysokowymiarowych sferach funkcje o małych lokalnych oscylacjach są praktycznie stałe (koncentrują się wokół swojej mediany czy średniej). Znaczenie tej prostej, lecz bardzo nietrywialnej obserwacji zostało podkreślone przez Milmana, który użył jej do swojego dowodu twierdzenia Dvoretzky'ego [**23**]. Zjawisko koncentracji miary stało się jednym z głównych nurtów badań w wysokowymiarowym rachunku prawdopodobieństwa (patrz monografie [**21, 8**]).

Znaczna część badań została poświęcona zależnościom między nierównościami funkcyjnymi, teorią transportu miary i zjawiskiem koncentracji miary (patrz np. [**26, 22, 20, 6, 24, 5, 10, 11, 13**]). Początkowe wyniki dotyczyły głównie koncentracji miary dla funkcji lipszycowskich od bardzo regularnych zmiennych losowych. Jednak, jak zauważył Talagrand [**26, 27**] , gdy zawęzimy uwagę do wypukłych funkcji lipszycowskich, to bezwymiarowa koncentracja zachodzi przy dużo słabszych założeniach.

Chociaż teoria koncentracji miary dla funkcji wypukłych częściowo biegnie równolegle do teorii klasycznej, to wiele rozumowań z teorii dotyczącej funkcji gładkich całkowicie się załamuje, ponieważ nawet najprostsze operacje na funkcjach (takie jak obcięcie, zmiana znaku czy podniesienie do potęgi) nie muszą zachowywać wypukłości. Niemniej jednak uzyskano szereg ważnych wyników, m.in. charakteryzację bezwymiarowej wypukłej koncentracji [**13**] oraz ogólną teorię słabych nierówności transportowych [**15, 14**].

Moja rozprawa doktorska jest ściśle związane z ostatnimi dwoma pracami. Punktem wyjścia było dla mnie następujące pytanie.

PYTANIE 1.1. *Czy można wskazać warunek konieczny i dostateczny na to, żeby miara probabilistyczna na prostej spełniała nierówność logarytmiczną Sobolewa dla funkcji wypukłych?*

Otrzymane wyniki (w tym odpowiedź na powyższe pytanie) omawiam w następnym rozdziale.

Klasyfikacja tematyczna. 60E15; 26A51,26B25, 26D10.

Słowa kluczowe. Funkcje wypukłe, koncentracja miary, nierówność logarytmiczna Sobolewa, nierówność Poincarégo, nierówności transportowe, splot infimum.

2. Wyniki

2.1. Organizacja rozprawy i prace stanowiące jej podstawę. Moja rozprawa oparta jest głównie na artykułach

1. M. Strzelecka, M. Strzelecki, T. Tkocz, *On the convex infimum convolution inequality with optimal cost function*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 14 (2017), 903–915,
2. Y. Shu, M. Strzelecki, *A characterization of a class of convex log-Sobolev inequalities on the real line*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 54 (2018), 2075–2091,
3. R. Adamczak, M. Strzelecki, *On the convex Poincaré inequality and weak transportation inequalities*, praca przyjęta do druku w Bernoulli,

oraz na wynikach otrzymanych wiosną 2018 roku podczas mojej wizyty w Instytucie Matematycznym w Tuluzie, gdzie pracowałem pod opieką Francka Barthe (są one częścią nieukończonego jeszcze projektu).

Układ treści w rozprawie jest następujący. Pierwsza część dotyczy teorii dla funkcji gładkich (a konkretniej: miar o ogonach cięższych niż gaussowskie). Rozdział 1 to ogólne wprowadzenie, natomiast w Rozdziale 2 prezentujemy nowe wyniki dotyczące nierówności typu Becknera pochodzących od Latały i Oleszkiewicza.

Druga, obszerniejsza część rozprawy dotyczy koncentracji dla funkcji wypukłych. Głównym narzędziem technicznym jest teoria słabych nierówności transportowych wprowadzonych niedawno przez Gozlana, Roberta, Samsona i Tetaliego **[15]**. Najpierw przedstawiamy niezbędne wiadomości wstępne (Rozdział 3), potem badamy wypukłą nierówność logarytmiczną Sobolewa na prostej (Rozdział 4), wypukłą nierówność Poincarégo w $\mathbb{R}^n$ (Rozdział 5), ogólne nierówności koncentracyjne wynikające ze słabych nierówności transportowych (Rozdział 6) oraz nierówności splotu infimum z optymalnymi funkcjami kosztu dla miar o log-wklęsłych ogonach (Rozdział 7).

Poniżej opisuję najważniejsze wyniki zawarte w rozprawie i niektóre płynące z nich wnioski.

2.2. Nierówności typu Becknera i zmodyfikowane nierówności logarytmiczne Sobolewa. Niech $r \in (1, 2)$ i $q \in (2, \infty)$ będą ustalone, takie że $1/r + 1/q = 1$. Do dowodzenia oszacowań koncentracyjnych dla (produktów) miar, które mają cięższe ogony niż standardowa miara gaussowska można użyć kilku wariantów klasycznej nierówności logarytmicznej Sobolewa, w tym nierówności typu Becknera pochodzących od Latały i Oleszkiewicza **[16]** oraz zmodyfikowanych nierówności logarytmicznych Sobolewa Gentila, Guillina i Miclo **[10]**.

Powiemy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^d$ spełnia *nierówność Latały–Oleszkiewicza*, jesli istnieje stała $C_{LO} < \infty$, taka że dla każdej funkcji gładkiej $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\sup_{p\in(1,2)} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu\right)^{2/p}}{(2-p)^{2(1-1/r)}} \le C_{LO} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\mu. \tag{2.1}$$

Powiemy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^d$ spełnia *zmodyfikowaną nierówność logarytmiczną Sobolewa*, jesli istnieje stała $C_{mLS} < \infty$, taka że dla każdej funkcji gładkiej

$f\colon \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \le C_{mLS} \int_{\mathbb{R}^d} H_q\Big(\frac{|\nabla f|}{f}\Big) f^2 d\mu, \tag{2.2}$$

gdzie $H_q(t) := \max\{t^2, |t|^q\}$ dla $t \in \mathbb{R}$ $(q = r/(r-1))$.

Obydwie nierówności mają własność tensoryzacji, ale własności koncentracyjne płynące z (2.2) są, z dokładnością do stałych, lepsze niż te implikowane przez (2.1).[1] Z drugiej strony, można się spodziewać, że – tak jak w przypadku wyniku Bobkova i Ledoux [**4**] dotyczącego nierówności Poincarégo – nierówność Latały–Oleszkiewicza implikuje zmodyfikowaną nierówność logarytmiczną Sobolewa (a co za tym idzie, wzmocnioną koncentrację).[2] Główny wynik Rozdziału 2 mojej rozprawy orzeka, że faktycznie tak jest:

TWIERDZENIE 2.1. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^d$, które spełnia nierówność Latały–Oleszkiewicza* (2.1) *ze stałą C_{LO}. Wówczas μ spełnia zmodyfikowaną nierówność logarytmiczną Sobolewa* (2.2) *ze stałą C_{mLS}, która zależy jedynie od C_{LO} i r.*

Twierdzenie 2.1 pozwala uzyskać ulepszenie własności koncentracyjnych, które zostały wyprowadzone z nierówności (2.1) przez Latałę i Oleszkiewicza [**16**] oraz Gozlana [**12**]. W szczególności, jesli μ spełnia nierówność (2.1) ze stałą C_{LO}, to istnieje stała $K = K(C_{LO}, r) > 0$, taka że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^{dn}$, takiego że $\mu^{\otimes n}(A) \ge 1/2$, mamy

$$\mu^{\otimes n}\big(A + \sqrt{t}B_2^{dn} + t^{1/r}B_{r,2}^{n,d}\big) \ge 1 - e^{-Kt}.$$

Tu B_2^{dn} oznacza kulę jednostką w normie ℓ_2^{dn} przestrzeni $\mathbb{R}^{dn}$ oraz

$$B_{r,2}^{n,d} := \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n : \big(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\big)^{1/r} \le 1\Big\}.$$

W Rozdziale 2 mojej rozprawy omawiam także związki między zmodyfikowanymi nierównościami log-Sobolewa, a pewnymi ważonymi nierównościami logarytmicznymi Sobolewa.

2.3. Charakteryzacja wypukłej nierówności logarytmicznej Sobolewa na prostej. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}$. Powiemy, że μ spełnia *wypukłą nierówność logarytmiczną Sobolewa*, jeśli dla każdej gładkiej i wypukłej funkcji lipszycowskiej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^f) \le C \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 e^f d\mu. \tag{2.3}$$

Niech U_μ będzie lewostronnie ciągłym niemalejącym przekształceniem transportującym symetryczna miarę wykładniczą na miarę μ,

$$U_\mu(x) = F_\mu^{-1} \circ F_\tau(x) = \begin{cases} F_\mu^{-1}(\frac{1}{2}e^{-|x|}) & \text{if } x < 0, \\ F_\mu^{-1}(1 - \frac{1}{2}e^{-|x|}) & \text{if } x \ge 0. \end{cases}$$

[1] W szczególności pozwalają odzyskać zachowanie z Centralnego Twiedzenia Granicznego.

[2] W przypadku miar na prostej znane są (przy pewnych założeniach technicznych) charakteryzacje obu nierówności, patrz [**2, 3**]. Nie wydaje się jednak, żeby można było pokazać na tym poziomie, że zmodyfikowana nierówność logarytmiczna Sobolewa wynika z nierówności Latały–Oleszkiewicza.

Tu F_μ^{-1} jest ugólnioną funkcją odwrotną do dystrybuanty F_μ.

Głównym wynikiem Rozdziału 4 mojej rozprawy doktorskiej jest poniższe twierdzenie, które wzmacnia wyniki otrzymane ostatnio w [**14**]. (Podobne twierdzenie jest prawdziwe również dla zmodyfikowanych nierówności logarytmicznych Sobolewa dla funkcji wypukłych).

TWIERDZENIE 2.2. *Następujące warunki są równoważne.*

(i) Dla każdego $s > 0$ mamy $\int_{\mathbb{R}} e^{s|x|} d\mu(x) < \infty$ oraz istnieje stała $C > 0$, taka że μ spełnia wypukłą nierówność logarytmiczną Sobolewa (2.3).

(ii) Istnieją $a, b > 0$, takie że dla wszystkich $h > 0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\{U_\mu(x+h) - U_\mu(x)\} \le \sqrt{a+bh}.$$

W obydwu implikacjach stałe zależą tylko od stałych występujących w założeniach.

Chociaż w sformułowaniu nie pojawiają się słabe nierówności transportowe, to jednak odgrywają one bardzo ważną rolę w dowodzie, a samo Twierdzenie 2.2 rzuca nowe światło na związki między nierównościami $\overline{\mathbf{T}}_\theta$ i $\overline{\mathbf{T}}_\theta^-$.

Jako wniosek otrzymujemy oszacowania koncentracyjne dla górnego i dolnego ogona lipszycowskich funkcji wypukłych. Warto podkreślić, że wcześniej oszacowania dla dolnego ogona były nieznane – pracując bezpośrednio z wypukłą nierównością logarytmiczną Sobolewa uzyskuje się jedynie oszacowania dla górnego ogona, patrz [**20**].

2.4. Wypukła nierówność Poincarégo w $\mathbb{R}^n$. Powiemy, że miara probabilistyczna μ na $\mathbb{R}^n$ spełnia *wypukłą nierówność Poincarégo* ze stałą $\lambda > 0$, jeśli dla każdej funkcji wypukłej $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Var} f(X) \le \frac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}\,|\nabla f(X)|^2, \tag{2.4}$$

gdzie X to wektor losowy o rozkładzie μ, zaś $|\nabla f(x)|$ oznacza długość gradientu f w punkcie x, zdefiniowaną jako

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}.$$

Główny wynik Rozdziału 5 to wypukły odpowiednik znanego twierdzenia Bobkova i Ledoux [**4**] dotyczącego nierówności Poincarégo dla funkcji gładkich. Rozszerza to na dowolny wymiar wyniki otrzymane niezależnie w [**9**] i [**14**].

TWIERDZENIE 2.3. *Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^n$ spełniającą wypukłą nierówność Poincarégo* (2.4) *i niech X będzie wektorem losowym o rozkładzie μ. Wówczas, jeśli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest wypukła oraz $|\nabla f(x)| \le c < \sqrt{2\lambda}/(32e)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$, to*

$$\operatorname{Ent}(e^{f(X)}) \le C(c,\lambda)\,\mathbb{E}\,|\nabla f(X)|^2 e^{f(X)},$$
$$\operatorname{Ent}(e^{-f(X)}) \le C(\lambda,c,M)\,\mathbb{E}\,|\nabla f(X)|^2 e^{-f(X)},$$

gdzie $M \in \mathbb{R}_+$ jest dowolną liczbą, dla której $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}\,X| \le M) \ge 3/4$.

UWAGA 2.4. Podejrzewamy, że zależność od M można usunąć.

Twierdzenie 2.3 implikuje w szczególności, że μ spełnia wypukłą nierówność Poincarégo wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia słabą nierówność transportową $\overline{\mathbf{T}}$ z kwadratowo–liniową funkcją kosztu.

W Rozdziale 6 przedstawione są ogólne nierówności koncentracyjne wynikające ze słabych nierówności transportowych (lub, równoważnie, z ich dualnych sformułowań: wypukłych nierówności splotu infimum), w tym oszacowania koncentracyjne dla nielipszycowskich funkcji wypukłych w stylu wyników otrzymanych niedawno przez Bobkova, Nayara i Tetaliego [**7**].

2.5. Wypukłe nierówności splotu infimum z optymalną funkcją kosztu. Niech X będzie wektorem losowym o wartościach w $\mathbb{R}^n$, zaś $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ niech będzie funkcją mierzalną. Powiemy, że para (X,φ) spełnia *wypukłą nierówność splotu infimum*, jeśli dla każdej wypukłej, ograniczonej z dołu funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\, e^{f\Box\varphi(X)}\, \mathbb{E}\, e^{-f(X)} \leq 1, \tag{2.5}$$

gdzie $f\Box\varphi$ oznacza splot infimum f i φ,

$$f\Box\varphi(x) = \inf\{f(y) + \varphi(x-y) : y \in \mathbb{R}^n\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dla wektora losowego X w $\mathbb{R}^n$ definiujemy

$$\Lambda_X^*(x) := \mathcal{L}\Lambda_X(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \{\langle x,y\rangle - \ln \mathbb{E}\, e^{\langle y,X\rangle}\}.$$

Jeśli X jest symetryczny i para (X,φ) spełnia wypukłą nierówność splotu infimum, to $\varphi(x) \leq \Lambda_X^*(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ (patrz Remark 2.12 w [**19**]). Innymi słowy, Λ_X^* jest optymalną funkcją kosztu, z jaką może zachodzi wypukła nierówność splotu infimum.

W Rozdziale 7 za pomocą wyników pochodzących z [**14**] dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.5. *Niech X będzie symetryczną zmienną losową o log-wklęsłych ogonach, tzn. taką że funkcja*

$$t \mapsto N(t) := -\ln \mathbb{P}(|X| \geq t), \quad t \geq 0,$$

jest wypukła. Wtedy istnieje stała uniwersalna $\beta \leq 1680e$, taka że $(X, \Lambda_X^*(\cdot/\beta))$ spełnia wypukłą nierówność splotu infimum.

Jako wniosek wyprowadzone zostaje porównywanie słabych i silnych momentów wektorów losowych o niezależnych współrzędnych o log-wklęsłych ogonach w duchu wyników z prac [**25, 1, 18, 17**].

3. Pozostałe publikacje i preprinty

Jestem również (współ-)autorem następujących artykułów, niezwiązanych bezpośrednio z moją rozprawą doktorską:

4. R. Adamczak, M. Strzelecki, *Modified log-Sobolev inequalities for convex functions on the real line. Sufficient conditions*, Studia Math. 230 (2015), 59–93,
5. M. Strzelecki, *A note on sharp one-sided bounds for the Hilbert transform*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), 1171–1181,
6. M. Strzelecki, *The L^p-norms of the Beurling–Ahlfors transform on radial functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 42 (2017), 73–93,

7. R. Adamczak, M. Kotowski, B. Polaczyk, M. Strzelecki, *A note on concentration for polynomials in the Ising model*, arXiv e-prints.

Praca 4. zawiera częściowe wyniki, które zostały następnie uogólnione w [**14**] i w wymienionej wyżej pracy 2. Artykuły 5. i 6. dotyczą nierówności martyngałowych i ich zastosowania do badania klasycznych operatorów analizy harmonicznej. Praca 7. jest bliżej związana z moją rozprawą doktorską: używamy w niej wyników uzyskanych w wymienionym wyżej artykule 3. do otrzymania nierówności koncentracyjnych dla form kwadratowych od ograniczonych, zależnych zmiennych losowych (ważnym przykładem jest tu model Isinga przy założeniu tzw. warunku Dobrushina).

Literatura

1. R. Adamczak, R. Latała, A. E. Litvak, K. Oleszkiewicz, A. Pajor, and N. Tomczak-Jaegermann, *A short proof of Paouris' inequality*, Canad. Math. Bull. **57** (2014), no. 1, 3–8. MR 3150710 5
2. F. Barthe and C. Roberto, *Sobolev inequalities for probability measures on the real line*, Studia Math. **159** (2003), no. 3, 481–497, Dedicated to Professor Aleksander Pełczyński on the occasion of his 70th birthday (Polish). MR 2052235 3
3. ———, *Modified logarithmic Sobolev inequalities on* $\mathbb{R}$, Potential Anal. **29** (2008), no. 2, 167–193. MR 2430612 3
4. S. Bobkov and M. Ledoux, *Poincaré's inequalities and Talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution*, Probab. Theory Related Fields **107** (1997), no. 3, 383–400. MR 1440138 3, 4
5. S.G. Bobkov, I. Gentil, and M. Ledoux, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 7, 669–696. MR 1846020 1
6. S.G. Bobkov and F. Götze, *Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **163** (1999), no. 1, 1–28. MR 1682772 1
7. S.G. Bobkov, P. Nayar, and P. Tetali, *Concentration properties of restricted measures with applications to non-Lipschitz functions*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 2169, Springer, Cham, 2017, pp. 25–53. MR 3645113 5
8. S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart, *Concentration inequalities*, Oxford University Press, Oxford, 2013, A nonasymptotic theory of independence, With a foreword by Michel Ledoux. MR 3185193 1
9. N. Feldheim, A. Marsiglietti, P. Nayar, and J. Wang, *A note on the convex infimum convolution inequality*, Bernoulli **24** (2018), no. 1, 257–270. MR 3706756 4
10. I. Gentil, A. Guillin, and L. Miclo, *Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities*, Probab. Theory Related Fields **133** (2005), no. 3, 409–436. MR 2198019 1, 2
11. N. Gozlan, *A characterization of dimension free concentration in terms of transportation inequalities*, Ann. Probab. **37** (2009), no. 6, 2480–2498. MR 2573565 1
12. ———, *Poincaré inequalities and dimension free concentration of measure*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), no. 3, 708–739. MR 2682264 3
13. N. Gozlan, C. Roberto, and P.-M. Samson, *From dimension free concentration to the Poincaré inequality*, Calc. Var. Partial Differential Equations **52** (2015), no. 3-4, 899–925. MR 3311918 1
14. N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson, Y. Shu, and P. Tetali, *Characterization of a class of weak transport-entropy inequalities on the line*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), no. 3, 1667–1693. MR 3825894 1, 4, 5, 6
15. N. Gozlan, C. Roberto, P.-M. Samson, and P. Tetali, *Kantorovich duality for general transport costs and applications*, J. Funct. Anal. **273** (2017), no. 11, 3327–3405. MR 3706606 1, 2
16. R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Between Sobolev and Poincaré*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 1745, Springer, Berlin, 2000, pp. 147–168. MR 1796718 2, 3
17. R. Latała and M. Strzelecka, *Weak and strong moments of ℓ_r-norms of log-concave vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 8, 3597–3608. MR 3503729 5
18. ———, *Comparison of weak and strong moments for vectors with independent coordinates*, Mathematika **64** (2018), no. 1, 211–229. MR 3778221 5

19. R. Latała and J. O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, Studia Math. **189** (2008), no. 2, 147–187. MR 2449135 5
20. M. Ledoux, *On Talagrand's deviation inequalities for product measures*, ESAIM Probab. Statist. **1** (1995/97), 63–87 (electronic). MR 1399224 (97j:60005) 1, 4
21. ______, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1849347 (2003k:28019) 1
22. B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), no. 2, 188–197. MR 1097258 1
23. V. D. Milman, *A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies*, Funkcional. Anal. i Priložen. **5** (1971), no. 4, 28–37. 1
24. F. Otto and C. Villani, *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 2, 361–400. MR 1760620 1
25. G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), no. 5, 1021–1049. MR 2276533 5
26. M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, pp. 94–124. MR 1122615 (93d:60095) 1
27. ______, *Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1995), no. 81, 73–205. MR 1361756 (97h:60016) 1