

Równania paraboliczne z bardzo singularną nieliniową dyfuzją

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Michał Łasica

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

3 kwietnia 2019

Rozprawa stanowi zbiór wyników dotyczących analizy matematycznej rozwiązań quasiliniowych równań parabolicznych z *bardzo singularną dyfuzją*. Rozumiemy pod tą nazwą ewolucyjne równania różniczkowe cząstkowe (lub układy takich równań) na funkcję $u: \mathbb{R}^m \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ postaci

$$u_t = \operatorname{div}(A(\nabla u)\nabla u),$$

gdzie tensor dyfuzji $A(\nabla u)$ jest rzędu $|\nabla u|^{-1}$, przynajmniej w okolicy obszarów, gdzie $\nabla u = 0$ (tu u oznacza niewiadomą w równaniu). Modelowym przykładem jest potok gradientowy funkcjonału całkowitego wahanja

$$\operatorname{TV}(u) = \int |\nabla u|, \quad (1)$$

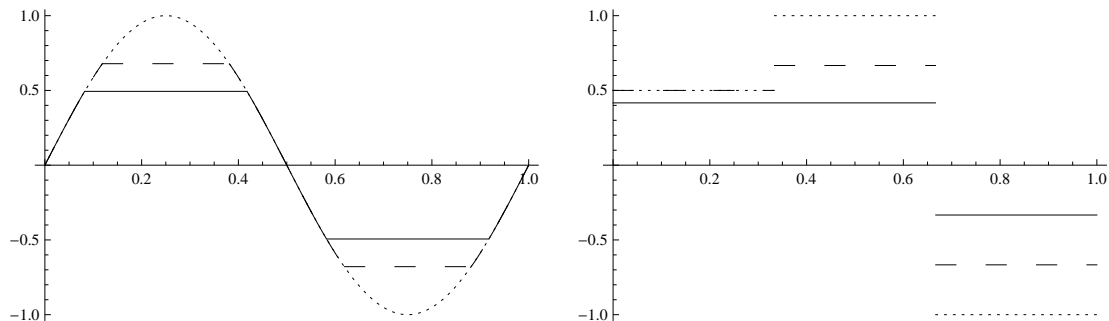
któremu odpowiada równanie

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1}\nabla u). \quad (2)$$

Zauważmy, że równanie to ma sens dopóki u jest różniczkowalną funkcją o nieznikającym gradientie. W ogólności potrzebne jest wprowadzenie dość skomplikowanego osłabionego pojęcia rozwiązania. Sytuacja jest podobna również w wypadku innych bardzo singularnych równań.

Zanim przedstawimy wyniki rozprawy, przypomnijmy własności rozwiązań równania (2) w przypadku jednego wymiaru przestrzennego x , gdzie przyjmuje ono zładnie prostą postać

$$u_t = (\operatorname{sgn} u_x)_x. \quad (3)$$



Rysunek 1: Dwa przykłady rozwiązań równania (3). Kropkowane linie oznaczają u_0 , linie przerywane: $u(1/18, \cdot)$, linie ciągłe: $u(1/9, \cdot)$.

Rysunek 1 przedstawia dwa przykłady rozwiązań (3) na odcinku z okresowym warunkiem brzegowym i daną początkową u_0 . W pierwszym przykładzie, u_0 jest funkcją ciągłą która raz zmienia monotoniczność. W drugim, u_0 jest funkcją schodkową. Bazując na tych przykładach, przedyskutujemy typowe własności rozwiązań (3), które są obecne również w wyższych wymiarach.

Ograniczona regularność. Jak widać w pierwszym przykładzie, najwyższy poziom regularności na skali Sobolewa/Höldera jaki jest propagowany przez ewolucję to $W^{1,\infty}/C^{0,1}$. Istotnie, nawet jeśli u_0 (niebędąca funkcją stałą) jest klasy C^∞ , to istnieją chwile $t > 0$ takie, że $u_x(t, \cdot)$ ma skokowe nieciągłości.

(Prawie) brak wygładzania. Funkcja schodkowa z drugiego przykładu pozostaje funkcją schodkową w trakcie ewolucji, przy czym dla małych $t > 0$ nie jest stała. Nie ma zatem natychmiastowego wygładzania ponad BV .

Fasety. W obu przykładach, w wykresach $u(t, \cdot)$, $t > 0$ pojawiają się płaskie fragmenty, *fasety*. Fasety mogą być propagowane z danej początkowej u_0 lub tworzone z lokalnych ekstremów u_0 w trakcie ewolucji. W każdym razie, lokalnie (dopóki któraś ich para się nie połączy) są dobrze zdefiniowanymi funkcjami czasu.

Nielokalność. W obszarze faset (gdzie $u_x(t, \cdot) = 0$) ewolucja jest nielokalna, tzn. wartość $u_t(t, x)$ dla x z takiego obszaru zależy od zachowania $u(t, \cdot)$ poza małym otoczeniem x .

Jesteśmy teraz gotowi, by przedstawić nowe wyniki zawarte w rozprawie.

Ortotropowy potok całkowitego wahania na płaszczyźnie

Jak widzieliśmy na Rysunku 1, klasa funkcji kawałkami stałych jest zachowywana przez jednowymiarowy potok całkowitego wahania. Ta obserwacja pojawia się już w pracy [18]. Można powiedzieć nawet więcej: przypuśćmy, że

$$u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_0^k \mathbf{1}_{F^k},$$

gdzie $\{F^k : k \in \mathbb{Z}_n\}$ jest rozkładem dziedziny na odcinki o rozłącznych wnętrzach. Wówczas istnieją ciągle, kawałkami afiniczne funkcje $u^k : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$u(t, \cdot) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k(t) \mathbf{1}_{F^k} \tag{4}$$

dla $t > 0$. Opisując sytuację jakościowo, fasety mogą się *łączyć*, ale nie mogą się *zginać* ani *łamać*. Innymi słowy, jeśli $u_{0,x} = 0$ na otwartym odcinku U , to $u_x(t, \cdot) = 0$ na U dla wszystkich $t > 0$.

Już w dwóch wymiarach sytuacja jest bardziej skomplikowana i silnie zależy od wyboru generalizacji (3). Są co najmniej dwaj naturalni kandydaci. Poza *izotropowym* potokiem całkowitego wahania (2) (gdzie $|\cdot|$ oznacza normę euklidesową), można również rozważać

ortotropowy potok całkowitego wahanania dany równaniem

$$u_t = (\operatorname{sgn} u_{x_1})_{x_1} + (\operatorname{sgn} u_{x_2})_{x_2}, \quad (5)$$

który powstaje jako potok najszybszego spadku ortotropowego funkcjonału całkowitego wahanania

$$\operatorname{TV}_1(u) = \int |u_{x_1}| + |u_{x_2}|. \quad (6)$$

Potok ten może powodować łamanie faset, tj. zbiór skoków u może powiększać się w trakcie ewolucji (por. np. [21, Przykład 4]). Mimo to, zachodzi pewna generalizacja wzoru (4). Ustalmy teraz jako dziedzinę przestrzenną prostokąt $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ z warunkami brzegowymi Neumanna. Taki wybór jest naturalny dla zastosowań w obrazowaniu, jest również spójny z kartezjańską symetrią (5). Niech $a^0, a^1, \dots, a^m, b^0, b^1, \dots, b^n \in \mathbb{R}$, gdzie $0 = a^0 < a^1 < \dots < a^m = a$, $0 = b^0 < b^1 < \dots < b^n = b$ i oznaczmy

$$F^{ij} = [a^i, a^{i+1}] \times [b^j, b^{j+1}]$$

dla $i = 0, \dots, m-1$ i $j = 0, \dots, n-1$. Przy danych $u_0^{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$ niech

$$u_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} u_0^{ij} \mathbf{1}_{F^{ij}}, \quad (7)$$

i oznaczmy przez u rozwiązanie równania (5) na $]0, \infty[\times \Omega$ z warunkami brzegowymi Neumanna i daną początkową u_0 . W Rozdziale 2 rozprawy dowodzimy

Twierdzenie 1. *Istnieją funkcje ciągłe $u^{ij}: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla $t \geq 0$*

$$u(t, \cdot) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} u^{ij}(t) \mathbf{1}_{F^{ij}}.$$

Funkcje u^{ij} są skończenie kawałkami afinicznymi, tj. istnieją chwile $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ takie, że u^{ij} są afiniczne na $[t_l, t_{l+1}]$ dla $l = 0, \dots, k-1$ i stałe na $[t_k, \infty[$, $i = 0, \dots, m-1$, $j = 0, \dots, n-1$.

Dowód Twierdzenia 1 opiera się na analizie klasy geometrycznych problemów optymalizacyjnych dla tzw. ilorazów typu Cheegera. Dowodzimy, że ilorazy te są minimalizowane przez wielokąty o bokach równoległych do boków Ω (dalej *wielokąty prostokątne*). Ważnym punktem dowodu jest to, że ze względu na strukturę ilorazów Cheegera, możemy skonstruować przybliżone minimizery należące do skończonej klasy wielokątów danej przez u_0 . Ponieważ zbiór wielokątów prostokątnych o ograniczonej wartości ilorazu Cheegera nie jest domknięty, ta skończoność jest kluczowa. Następnie używamy tego wyniku, by skonstruować poziomicę $u(t, \cdot)$ dla $t > 0$. Przenosimy również Twierdzenie 1 na przypadek $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Ponieważ operator $(\operatorname{sgn} u_{x_1})_{x_1} + (\operatorname{sgn} u_{x_2})_{x_2}$ jest monotoniczny, operator rozwiązania $u_0 \mapsto u(t, \cdot)$ jest ciągły na $L^2(\Omega)$. Łatwo sprawdzić, że zbiór funkcji postaci (7) jest gęsty w $L^2(\Omega)$. Przeto nie tylko konstruujemy jawne rozwiązania problemu Neumanna dla (5) dla danej początkowej postaci (7), ale również zapewniamy naturalne przybliżenie dla rozwiązania z dowolnym warunkiem początkowym. Wynik ten jest istotnie mocniejszy niż to, co można udowodnić w przypadku izotropowym. Możemy z niego wyprowadzić, że ciągłość jest zachowywana przez potok całkowitego wahanania na prostokącie.

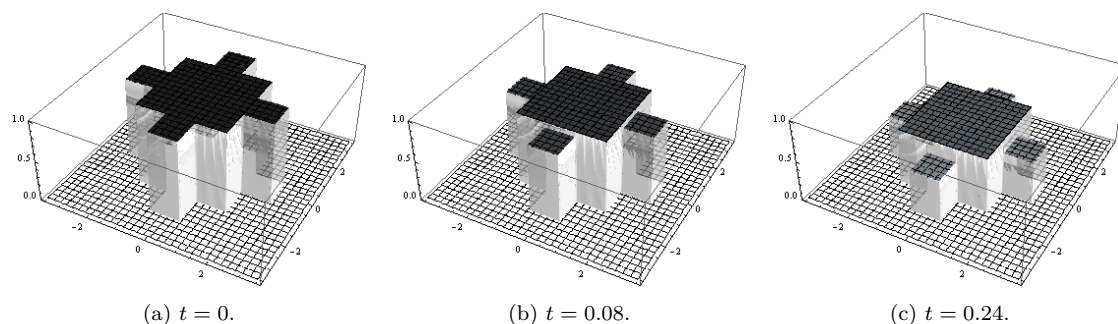
Twierdzenie 2. Niech Ω będzie prostokątem i niech u będzie rozwiązaniem (5) na $]0, \infty[\times \Omega$ z warunkami brzegowymi Neumanna i daną początkową $u_0 \in C(\Omega)$. Wówczas $u(t, \cdot) \in C(\Omega)$ dla każdego $t > 0$. Co więcej, jeśli $\omega_1, \omega_2: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ są funkcjami ciągłymi takimi, że

$$|u_0(x_1, x_2) - u_0(y_1, y_2)| \leq \omega_1(|x_1 - y_1|) + \omega_2(|x_2 - y_2|)$$

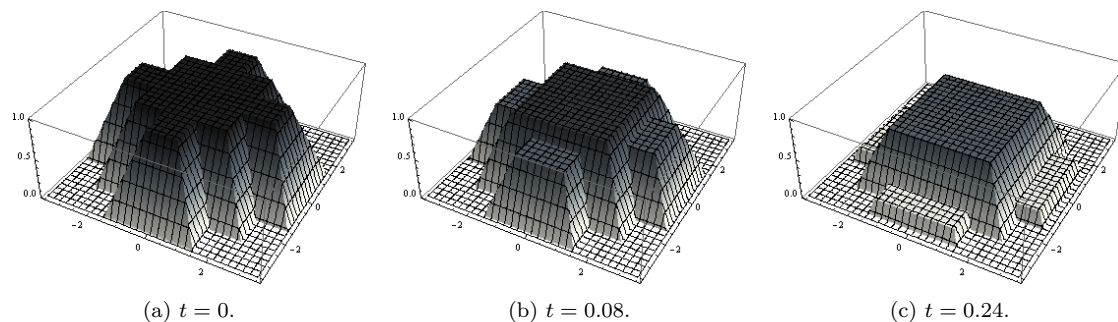
dla każdych $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \Omega$, to zachodzi

$$|u(t, (x_1, x_2)) - u(t, (y_1, y_2))| \leq \omega_1(|x_1 - y_1|) + \omega_2(|x_2 - y_2|)$$

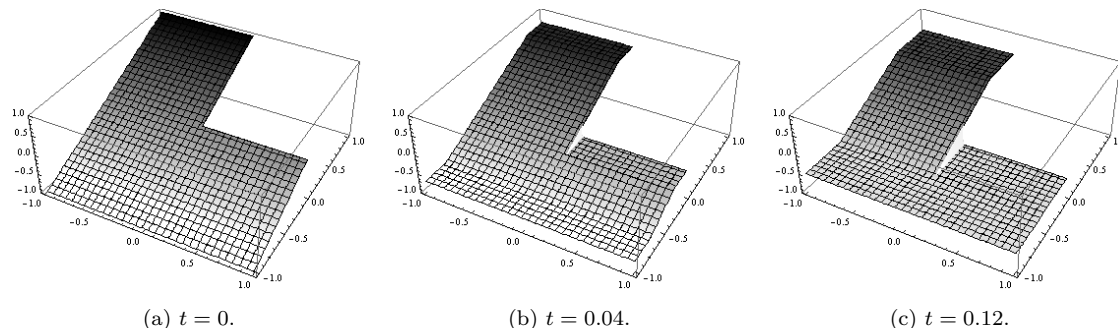
dla każdych $t > 0, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \Omega$.



Rysunek 2: Evolucja funkcji schodkowej pod działaniem ortotropowego potoku całkowitego wahanja na płaszczyźnie.



Rysunek 3: Evolucja funkcji ciągłej pod działaniem ortotropowego potoku całkowitego wahanja na płaszczyźnie.



Rysunek 4: Skokowa nieciągłość powstająca pod działaniem ortotropowego potoku całkowitego wahanja na niewypukłej dziedzinie.

Fasety w jednostajnie parabolicznym równaniu

W Rozdziale 3 badamy rozwiązania równania

$$u_t = u_{xx} + \frac{\alpha}{2}(\operatorname{sgn} u_x)_x \quad \text{na }]0, \infty[\times \mathbb{T}. \quad (8)$$

Tu \mathbb{T} oznacza standardowy jednowymiarowy torus, który utożsamiamy z odcinkiem jednostkowym $[0, 1]$ z okresowym warunkiem brzegowym. Prawa strona równania (8) to inne oznaczenie na $\mathcal{L}u$, gdzie \mathcal{L} jest maksymalnym monotonicznym operatorem na $L^2(\mathbb{T})$ powstającym jako ujemna podróżniczka wypukłego, półciągłego z dołu funkcjonału. Oznaczamy jego minimalną selekcję przez \mathcal{L}^0 .

Okazuje się, że podobnie jak w przypadku potoku całkowitego wahania, w wykresach $u(t, \cdot)$, $t > 0$ pojawiają się płaskie fasety. Teraz jednak ich ewolucja jest nietrywialna i występuje rodzaj współzawodnictwa pomiędzy fasetującym działaniem operatora 1-Laplace'a $(\operatorname{sgn} u_x)_x$ i wygładzaniem na skutek obecności laplasjanu [22]. Dowodzimy, że fasety są dobrze zdefiniowanymi funkcjami czasu oraz są „ $\frac{3}{4}$ -ciągłe” (por. treść Twierdzenia 3).

Przypominamy, że na \mathbb{T} jest naturalny cykliczny porządek, który jest relacją trójargumentową. Używamy notacji $a < b < c$ ($a, b, c \in \mathbb{T}$) na jej oznaczenie. Jest naturalne, by oznaczać uporządkowane rodziny n punktów lub podzbiorów \mathbb{T} elementami cyklicznej grupy $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ składającej się z liczb $0, \dots, n-1$ z dodawaniem modulo n . Oznaczamy przez $\mathfrak{F}(\mathbb{T})$ zbiór (niepustych) domkniętych odcinków w \mathbb{T} . Wraz z odległością Hausdorffa, tworzy on zupełną przestrzeń metryczną. Wprowadzamy również komplementarne oznaczenie $\mathfrak{J}(\mathbb{T})$ na zbiór niepustych otwartych odcinków w \mathbb{T} . Dowodzimy

Twierdzenie 3. *Przypuśćmy, że $u_0 \in D(\mathcal{L})$ nie jest funkcją stałą i spełnia $\mathcal{L}^0 u_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$. Istnieje liczba m_0 taka, że $2m_0 \leq \alpha^{-2} \|\mathcal{L}^0 u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$ oraz ciąg chwil*

$$0 = t_0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m_0}$$

takich, że dla $m = 0, \dots, m_0 - 1$ i $k \in \mathbb{Z}_{2(m_0-m)}$ istnieją funkcje

$$I_m^k: [t_m, t_{m+1}[\rightarrow \mathfrak{J}(\mathbb{T}), \quad F_m^k: [t_m, t_{m+1}[\rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{T})$$

spełniające dla $t \in [t_m, t_{m+1}[$:

- $\{I_m^k(t), F_m^k(t) : k \in \mathbb{Z}_{2(m_0-m)}\}$ jest rozkładem \mathbb{T} na rozłączne odcinki oraz

$$I_m^k(t) < F_m^k(t) < I_m^{k+1}$$

dla $k \in \mathbb{Z}_{2(m_0-m)}$;

- $u_x = 0$ na $F_m^k(t)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{2(m_0-m)}$, jeśli $t \neq 0$ to $u_x > 0$ na $I_m^k(t)$ dla k parzystych i $u_x < 0$ dla k nieparzystych;
- $|F_m^k(t)| \geq \alpha^2 \|\mathcal{L}^0 u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^{-2}$;
- zachodzi

$$F_m^k(t) = \limsup_{s \rightarrow t^-} F_m^k(s) \quad (\text{dla } t \neq t_m) \quad \text{oraz} \quad F_m^k(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} F_m^k(s)$$

w sensie zbieżności Kuratowskiego (równoważnie, F_m^k jest lewostronnie półciągła z góry i prawostronnie ciągła względem metryki Hausdorffa);

Ponadto, dla $m = 1, \dots, m_0$ istnieje $k \in \mathbb{Z}_{2(m_0-m)}$ takie, że

$$\limsup_{t \rightarrow t_m^-} F_m^k(t) \cap \limsup_{t \rightarrow t_m^-} F_m^{k+1}(t) \neq \emptyset \quad (9)$$

i zachodzi

$$u(t, \cdot) \equiv \int_{\mathbb{T}} u_0 \quad \text{for } t \geq t_{m_0}, \quad t_{m_0} \leq (\alpha\pi)^{-1} \left\| u_0 - \int_{\mathbb{T}} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{T})}. \quad (10)$$

Ważnym składnikiem dowodu Twierdzenia 3 jest regularność, którą otrzymujemy dla u :

$$u_{tx} \in L^2(]0, \infty[\times \mathbb{T}), \quad u_{xx} \in L^\infty(]0, \infty[\times \mathbb{T}),$$

skąd wynika hölderowska ciągłość u_x . Co więcej, mamy też $\mathcal{L}^0 u(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{T})$, $t > 0$ dla każdego rozwiązania z warunkiem początkowym $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$. Przeto, Twierdzenie 3 opisuje generyczne zachowanie rozwiązań równania (8).

Lokalne oszacowanie dla potoku całkowitego wahania krzywych

Niech $I =]a, b[$ będzie odcinkiem otwartym. W Rozdziale 4 rozważamy potok całkowitego wahania na funkcjach z I w przestrzeni euklidesową \mathbb{R}^n , któremu odpowiada układ

$$\mathbf{u}_t = (|\mathbf{u}_x|^{-1} \mathbf{u}_x)_x \quad \text{na }]0, \infty[\times I, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_x = 0 \quad \text{na }]0, \infty[\times \partial I. \quad (12)$$

Przypuśćmy, że u jest rozwiązaniem (11, 12) z daną początkową $\mathbf{u}_0 \in BV(I, \mathbb{R}^n)$. Zasadniczą własnością \mathbf{u} jako krzywej najszybszego spadku całkowitego wahania jest, że

$$\int_I |\mathbf{u}_x(t, \cdot)| \leq \int_I |\mathbf{u}_{0,x}|$$

dla $t > 0$. Okazuje się, że oszacowanie to może być zlokalizowane w niezwykle silny sposób.

Twierdzenie 4. *Dla pw. $t > 0$ zachodzi $|\mathbf{u}_x(t, \cdot)| \leq |\mathbf{u}_{0,x}|$ w sensie miar borelowskich na I , tj.*

$$\int_A |\mathbf{u}_x(t, \cdot)| \leq \int_A |\mathbf{u}_{0,x}| \quad (13)$$

dla każdego borelowskiego $A \subset I$.

Jest to uogólnienie analogicznego wyniku znanego w przypadku skalarnym $n = 1$ [1, 2]. Pociąga ono również kilka obserwacji znanych w przypadku skalarnym, np. nierozrastanie się zbioru skoków \mathbf{u} , niepowiększanie się samych skoków i utrzymywanie się faset. Ponadto, natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 4 jest, że jeśli \mathbf{u}_0 należy do jakiejkolwiek podprzestrzeni $BV(I, \mathbb{R}^n)$ zdefiniowanej poprzez ograniczenie na $|\mathbf{u}_{0,x}|$, takiej jak $W^{1,p}(I, \mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ albo $SBV(I, \mathbb{R}^n)$, to $\mathbf{u}(t, \cdot)$ należy do tej samej podprzestrzeni dla pw. $t > 0$.

Regularny 1-harmoniczny potok przekształceń

Niech Ω będzie otwartą, ograniczoną, lipschitzowską dziedziną w \mathbb{R}^m . Niech \mathcal{N} będzie zupełną, spójną, gładką n -wymiarową podrozmaitością w \mathbb{R}^N . Dla danego $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$, oznaczamy przez $\pi_{\mathbf{p}}$ rzut prostopadły na $T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$. Rozważamy potok najszybszego spadku względem odległości L^2 funkcjonału $\text{TV}_{\Omega}^{\mathcal{N}}$: funkcjonału całkowitego wahanía obciętego do funkcji o wartościach w \mathcal{N} , danego dla gładkiego \mathbf{u} wzorem

$$\text{TV}_{\Omega}^{\mathcal{N}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|. \quad (14)$$

Na odcinku czasu $]0, T[$ potok ten jest dany układem równań

$$\mathbf{u}_t = \pi_{\mathbf{u}} \left(\text{div} \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) \quad \text{na }]0, T[\times \Omega, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\Omega} \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} = \mathbf{0} \quad \text{na }]0, T[\times \partial\Omega. \quad (16)$$

Naszym głównym celem w Rozdziale 5 jest teoria dobrego postawienia dla tego potoku. Podkreślmy, że w przeciwieństwie do poprzednich rozdziałów, dobre postawienie nie wynika z klasycznej teorii nieliniowych półgrup, gdyż przestrzenie funkcji o wartościach w \mathcal{N} nie są nawet liniowe.

Wprowadzamy pojęcie *regularnego rozwiązania*, w którym wymagamy przestrzennej lipschitzowskości \mathbf{u} . Rozumiemy $\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|}$ jako multifunkcję

$$\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} : (t, \mathbf{x}) \mapsto \begin{cases} \frac{\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{|\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x})|} & \text{jeśli } \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \\ B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \times T_{\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}\mathcal{N} & \text{jeśli } \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

i żądamy, by układ (15, 16) był spełniony dla jej odpowiedniej selekcji.

Pojęcie to jest równoważne z tym rozważanym w [13], gdzie lokalne istnienie jest otrzymane przy założeniu małości danej początkowej w $W^{1,1+\varepsilon}(\Omega, \mathcal{N})$ i pewnych innych technicznych warunkach. Poza [13], istnienie potoku otrzymano tylko dla szczególnych \mathcal{N} w [10, 11, 5].

Na poprawność pojęcia regularnego rozwiązania wskazują wyniki o dobrym postawieniu, które otrzymujemy. Po pierwsze, regularne rozwiązania są jednoznaczne.

Twierdzenie 5. *Przypuśćmy, że $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ są dwoma regularnymi rozwiązaniami (15, 16) na $]0, T[, T \in]0, \infty[$ takimi, że $\mathbf{u}^1(0, \cdot) = \mathbf{u}^2(0, \cdot) = \mathbf{u}_0$. Wówczas $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{u}^2$.*

Dowód Twierdzenia 5 różni się od dowodów analogicznych wyników dla potoków p -harmicznych w [16, 7] w tym, że nie używamy ścisłej monotoniczności operatora p -Laplace'a (bo jej nie ma dla $p = 1$).

O ile Ω jest wypukła, jesteśmy w stanie skonstruować lokalne w czasie regularne rozwiązania (15, 16). Potrzebujemy założenia o wypukłości, gdyż jesteśmy zmuszeni do używania globalnych oszacowań na $\nabla \mathbf{u}$ w L^p . Lokalizacja tych oszacowań nie jest dostępna ze względu na silną degenerację operatora 1-Laplace'a $\text{div} \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|}$. Co więcej, przynajmniej w wypadku potoku anizotropowego całkowitego wahanía, istnieją przykłady niewypukłych, lipschitzowskich Ω , dla których klasy regularności $W^{1,p}(\Omega)$ nie są zachowywane przez potok (podajemy taki przykład w Rozdziale 2).

Sytuacja egzystencjalna rozwiązań zależy od krzywizny przekrojowej $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$ rozmaitości \mathcal{N} . Oznaczamy przez $K_{\mathcal{N}}$ kres górny $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$ po \mathcal{N} .

Twierdzenie 6. *Przypuśćmy, że Ω jest wypukła, zanurzenie \mathcal{N} w \mathbb{R}^N jest domknięte, oraz $K_{\mathcal{N}} < \infty$. Przy danym $\mathbf{u}_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathcal{N})$, oznaczmy $T_{\dagger} = (K_{\mathcal{N}} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^\infty})^{-1}$ jeśli $K_{\mathcal{N}} > 0$ oraz $T_{\dagger} = +\infty$ w przeciwnym razie. Istnieje regularne rozwiązanie \mathbf{u} układu (15, 16) na $[0, T_{\dagger}[$ z daną początkową \mathbf{u}_0 , spełniające nierówność energetyczną*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T_{\dagger}[} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)| + \int_0^{T_{\dagger}} \int_{\Omega} \mathbf{u}_t^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_0|. \quad (17)$$

Przynajmniej w wypadku warunków brzegowych Dirichleta, regularne rozwiązania (15) mogą wybuchnąć w skończonym czasie, jak pokazują przykłady w [4, 12]. W naszej sytuacji dowodzimy, że rozwiązania istnieją globalnie, pod warunkiem że obraz danej początkowej zawiera się w dostatecznie małej kuli geodezyjnej w \mathcal{N} . Co więcej, w takim wypadku rozwiązania stają się przekształceniami stałymi w skończonym czasie, podobnie jak w przypadku skalarnego potoku całkowitego wahania [14]. Zauważmy, że w przypadku niejednorodnych warunków brzegowych Dirichleta, ewolucja generycznej danej początkowej pod działaniem potoku 1-harmonicznego nie zatrzymuje się w skończonym czasie [15], w przeciwieństwie do ewolucji pod działaniem skalarnego potoku całkowitego wahania, przynajmniej na jednowymiarowej dziedzinie [17]. Oznaczmy przez $B_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}, R)$ geodezyjną kulę w \mathcal{N} o środku w $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$ i promieniu $R > 0$.

Twierdzenie 7. *Niech $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{N}$, $\mathbf{u}_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathcal{N})$ i niech \mathbf{u} będzie regularnym rozwiązaniem (15, 16) na $[0, T[$ z daną początkową \mathbf{u}_0 . Przypuśćmy, że $\mathbf{u}_0(\Omega) \in B_g(\mathbf{p}_0, R)$, $R > 0$. Istnieje*

- liczba $R_* = R_*(\mathcal{N}, \mathbf{p}_0) > 0$ taka, że jeśli $R < R_*$, to $\mathbf{u}(t, \Omega) \in \overline{B_{\mathcal{N}}(\mathbf{p}_0, R)}$ dla $t \in]0, T[$,
- liczby $\tilde{R}_* = \tilde{R}_*(\mathcal{N}, \mathbf{p}_0) \in]0, R_*[$, $C = C(\Omega, \mathcal{N}, \mathbf{p}_0) > 0$ oraz punkt $\mathbf{u}_* \in \mathcal{N}$ takie, że jeśli $R < \min\left(\tilde{R}_*, \frac{T}{C}\right)$, to $\mathbf{u}(t, \cdot) \equiv \mathbf{u}_*$ dla $t \in]CR, T[$.

W szczególnym przypadku $K_{\mathcal{N}} \leq 0$, rozwiązania nie wybuchają dla żadnej lipschitzowskiej danej początkowej i możemy otrzymać globalne istnienie. Ze względu na szczególnie prostą topologię rozmaitości riemannowskich z $K_{\mathcal{N}} \leq 0$, nie musimy zakładać istnienia domkniętego zanurzenia \mathcal{N} w \mathbb{R}^N w tym wypadku.

Twierdzenie 8. *Przypuśćmy, że Ω jest wypukła i $K_{\mathcal{N}} \leq 0$. Niech $\mathbf{u}_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathcal{N})$. Istnieje regularne rozwiązanie \mathbf{u} układu (15, 16) na $[0, \infty[$ z daną początkową \mathbf{u}_0 spełniającą nierówność energetyczną (17). Istnieją $T_* = T_*(\mathbf{u}_0) \in [0, \infty[$ oraz $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_*(\mathbf{u}_0) \in \mathcal{N}$ takie, że $\mathbf{u}(t, \cdot) \equiv \mathbf{u}_*$ dla $t \geq T_*$. Ponadto,*

$$\operatorname{ess\,sup}_{t > 0} \|\nabla \mathbf{u}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Wzmiankujemy, że w przypadku skalarnym powyższe oszacowanie w $W^{1,\infty}$ wynika z Wniosku 5.6 w [3]. Jednakże metody używane w tej pracy nie dają się w prosty sposób zaadaptować do problemów wektorowych.

Regularny potok 1-harmoniczny, który tu rozważamy, jest ciągły względem czasoprzestrzeni, więc potrafi generować homotopie. Z tego powodu uważamy, że warto omówić w Rozdziale 5 również przypadek, gdy dziedzina jest zwartą, orientowalną rozmaitością riemannowską (\mathcal{M}, γ) . Adaptujemy pojęcie regularnego rozwiązania do tej sytuacji i otrzymujemy analogiczne wyniki o lokalnym istnieniu i jednoznaczności. Z drugiej strony, ze względu na nietrywialną topologię zwartych rozmaitości, mogą istnieć punkty stacjonarne potoku, które

nie są przekształceniami stałymi i zachowanie potoku po długim czasie może się różnić od opisanego w Twierdzeniu 7.

Problem znalezienia przekształcenia 2-harmonicznego (tzn., z grubsza, punktu stacjonarnego potoku 2-harmonicznego) homotopijnego z danym przekształceniem był pierwotną motywacją do badania potoku 2-harmonicznego przekształceń między różnaitościami riemannowskimi w [6]. W pracy tej, autorzy skonstruowali globalnie istniejący potok i rozwiązali problem homotopii przy założeniu, że $K_{\mathcal{N}} \leq 0$. Analogiczny wynik został później otrzymany w [7] dla potoku p -harmonicznego, $p > 1$. W rozprawie otrzymujemy globalne istnienie potoku 1-harmonicznego jeśli $K_{\mathcal{N}} \leq 0$ i rozwiązujemy problem homotopii dla przekształceń 1-harmonicznych przy dodatkowym założeniu, że tensor Ricciego \mathcal{M} jest nieujemny.

Informacja o artykułach powiązanych z rozprawą

Zawartość rozprawy jest powiązana w różnym stopniu z kilkoma opublikowanymi i nieopublikowanymi artykułami, których (współ-)autorem jest autor rozprawy. Rozdział 2 bazuje na pracy [20]. Rozdział 3 jest częścią artykułu w przygotowaniu, którego poprzednią wersją jest [19]. Rozdział 4 jest wersją pracy [8], która została napisana przez autora rozprawy przed powstaniem [8]. Rozdział 5 pokrywa się z artykułem [9].

Praca autora nad składnikami rozprawy była częściowo finansowana z grantu Preludium nr 2014/13/N/ST1/02622 Narodowego Centrum Nauki.

Literatura

- [1] Matteo Bonforte and Alessio Figalli. Total variation flow and sign fast diffusion in one dimension. *J. Differential Equations*, 252(8):4455–4480, 2012.
- [2] Ariela Briani, Antonin Chambolle, Matteo Novaga, and Giandomenico Orlandi. On the gradient flow of a one-homogeneous functional. *Confluentes Math.*, 3(4):617–635, 2011.
- [3] Vicent Caselles, Antonin Chambolle, and Matteo Novaga. Regularity for solutions of the total variation denoising problem. *Rev. Mat. Iberoam.*, 27(1):233–252, 2011.
- [4] Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli, and Salvador Moll. Rotationally symmetric 1-harmonic maps from D^2 to S^2 . *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 32(4):533–554, 2008.
- [5] Agnese Di Castro and Lorenzo Giacomelli. The 1-harmonic flow with values into a smooth planar curve. *Nonlinear Anal.*, 143:174–192, 2016.
- [6] James Eells, Jr. and J. H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [7] Ali Fardoun and Rachid Regbaoui. Heat flow for p -harmonic maps between compact Riemannian manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, 51(6):1305–1320, 2002.
- [8] Lorenzo Giacomelli and Michał Łasica. A local estimate for vectorial total variation minimization in one dimension. *Nonlinear Anal.*, 181:141–146, 2019.
- [9] Lorenzo Giacomelli, Michał Łasica, and Salvador Moll. Regular 1-harmonic flow. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, to appear.
- [10] Lorenzo Giacomelli, José M. Mazón, and Salvador Moll. The 1-harmonic flow with values into S^1 . *SIAM J. Math. Anal.*, 45(3):1723–1740, 2013.
- [11] Lorenzo Giacomelli, Jose M. Mazón, and Salvador Moll. The 1-harmonic flow with values in a hyperoctant of the N -sphere. *Anal. PDE*, 7(3):627–671, 2014.

- [12] Lorenzo Giacomelli and Salvador Moll. Rotationally symmetric 1-harmonic flows from D^2 to S^2 : local well-posedness and finite time blowup. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(6):2791–2817, 2010.
- [13] Yoshikazu Giga, Yohei Kashima, and Noriaki Yamazaki. Local solvability of a constrained gradient system of total variation. *Abstr. Appl. Anal.*, (8):651–682, 2004.
- [14] Yoshikazu Giga and Robert V. Kohn. Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 30(2):509–535, 2011.
- [15] Yoshikazu Giga and Hirotoshi Kuroda. A counterexample to finite time stopping property for one-harmonic map flow. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 14(1):121–125, 2015.
- [16] Norbert Hungerbühler. m -harmonic flow. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(4):593–631 (1998), 1997.
- [17] Karolina Kielak, Piotr Bogusław Mucha, and Piotr Rybka. Almost classical solutions to the total variation flow. *J. Evol. Equ.*, 13(1):21–49, 2013.
- [18] R. Kobayashi and Y. Giga. Equations with singular diffusivity. *J. Statist. Phys.*, 95(5-6):1187–1220, 1999.
- [19] Michał Łasica. Analysis of solutions to a model parabolic equation with strongly singular diffusion. *Preprint, arXiv:1406.1775*.
- [20] Michał Łasica, Salvador Moll, and Piotr B. Mucha. Total variation denoising in l^1 anisotropy. *SIAM J. Imaging Sci.*, 10(4):1691–1723, 2017.
- [21] Salvador Moll. The anisotropic total variation flow. *Math. Ann.*, 332(1):177–218, 2005.
- [22] Piotr Bogusław Mucha and Piotr Rybka. A note on a model system with sudden directional diffusion. *Journal of Statistical Physics*, 146(5):975–988, 2012.