Miara i zbieżność: specjalne podzbiory prostej i ich uogólnienia
Autoreferat

Michał Korch

27 września 2017

W mojej pracy doktorskiej ([35]) prezentuję różne pojęcia dotyczące specjalnych podzbiorów prostej oraz ich właściwości, w szczególności te związane z miarą lub zbieżnością. Poszukuję odpowiedzi na otwarte pytania w tym temacie oraz rozważam uogólnienia znanych faktów na większe liczby kardynalne, tj. w uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ, dla nieprzeliczalnej regularnej liczby kardynalnej κ, wraz z topologią generowaną przez zbiory przedłużeń funkcji częściowych.

W niniejszym dokumencie przedstawiam motywację, która stoi za moimi badaniami oraz zamieszczam przegląd głównych wyników mojej pracy.

1 Motywacja oraz wprowadzenie

Przełomowy, ale już klasyczny, pomysł Georga Cantora ([11]), polegający na rozróżnieniu przeliczalnych i nieprzeliczalnych podzbiorów prostej rzeczywistej, może być uznany za jeden z pierwszych podziałów rodziny wszystkich podzbiorów prostej na dwie klasy: zbiorów małych i zbiorów większych. Pozostałe dwa klasyczne pojęcia to zbiory pierwszej kategorii (przeliczalne sumy zbiorów nigdzie gęstych, wprowadzone w [1], klasa zbiorów pierwszej kategorii będzie oznaczana przez $\mathcal{M}$) i zbiory miary zero względem miary Lebesgue'a ([5] i [45], oznaczane przez $\mathcal{N}$). W szczególności, we wszystkich tych trzech pojęciach, cała prosta rzeczywista nie jest małym zbiorem. Oczywiście, zbiory przeliczalne są zarówno zbiorami pierwszej kategorii, jak i miary zero. Z drugiej strony, można łatwo znaleźć podział całej prostej rzeczywistej na dwa zbiory, z których jeden jest pierwszej kategorii, a drugi jest miary zero.

Warto również zauważyć, że pojęcia powiązane z miarą i kategorią przejawiają pewne cechy dualności. W niektórych przypadkach ta dualność jest pełna, lecz czasem się załamuje. To stanowi istotną motywację w mojej pracy. Motywacja ta polega na poszukiwaniu miarowych odpowiedników znanych pojęć i właściowści związanych z kategorią. Wprowadzenie do teorii miary i kategorii czytelnik może znaleźć w [61].

Trzeba także odnotować, że w przypadku wielu rozważań w teorii mnogości prostej rzeczywistej, nie ma znaczenia którą z przestrzeni: prostą rzeczywistą $\mathbb{R}$, odcinek jednostkowy $\boldsymbol{I}$, przestrzeń Cantora 2^ω, czy przestrzeń Baire'a ω^ω weźmiemy jako podstawę do badań. Jest tak, ponieważ, jeśli X, Y to dowolne dwie spośród wyżej wymienionych przestrzeni, to istnieje homeomorfizm $f\colon X \setminus Q_X \to Y \setminus Q_Y$, gdzie Q_X, Q_Y są przeliczalne oraz $f[N] \in \mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N \in \mathcal{N}$ i $f[M] \in \mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M \in \mathcal{M}$ (patrz np. [9]). Fakt ten w szczególności uzasadnia stosowanie tego samego oznaczenia

$\mathcal{N}$ dla ideałów zbiorów miary zero we wszystkich tych przestrzeniach oraz $\mathcal{M}$ dla ideału zbiorów pierwszej kategorii we wszystkich tych przestrzeniach.

W szczególności, w mojej rozprawie z reguły pracuję w **przestrzeni Cantora** 2^ω, która jest przeliczalnym produktem dwu-punktowych dyskretnych przestrzeni. Wobec tego, bazowe domknięto-otwarte zbiory w 2^ω są wyznaczone przez skończone ciągi $w \in 2^{<\omega}$. Zbiór wyznaczony przez $w \in 2^{<\omega}$ jest oznaczony $[w]$, oraz

$$[w] = \{f \in 2^\omega : f \restriction \mathrm{len}(w) = w\}.$$

Zbiór $T \subseteq 2^{<\omega}$ jest **drzewem**, jeśli dla każdego $t \in T$ oraz $s \subseteq t$, mamy $s \in T$. Drzewo T jest przycięte, jeśli dla każdego $t \in T$, istnieje $s \in T$ takie, że $t \subsetneq s$. Jeśli P jest zbiorem domkniętym w 2^ω, to istnieje przycięte drzewo $T_P \subseteq 2^{<\omega}$, o tej właściwości, że zbiór wszystkich nieskończonych gałęzi T_P (oznaczany przez $[T_P]$) jest równy P. Jeśli T jest przyciętym drzewem, to zbiór $[T]$ jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $w \in T$, istnieją $w', w'' \in T$ takie, że $w \subseteq w', w \subseteq w''$, ale $w' \nsubseteq w''$ i $w'' \nsubseteq w'$. Takie drzewo będziemy nazywać **drzewem doskonałym**. Skończony ciąg $w \in T_P$ jest **punktem rozgałęzienia** zbioru doskonałego P, jeśli $w^\frown 0, w^\frown 1 \in T_P$. Zbiór wszystkich punktów rozgałęzień zbioru P oznaczamy $\mathrm{Split}(P)$.

Jeśli P jest doskonałym podzbiorem 2^ω to przez $h_P : 2^\omega \to P$ oznaczamy homeomorfizm zadany przez izomorfizm porządkowy $2^{<\omega}$ i $\mathrm{Split}(P)$. Homeomorfizm ten nazywamy **homeomorfizmem kanonicznym zbioru** P.

Wktótce pojawiły się kolejne, jeszcze bardziej precyzyjne pojęcia małych pozbiorów prostej. W szczególności klasy zbiorów doskonale pierwszej kategorii i uniwersalnie miary zero odgrywają tu istotną rolę. Zbiór jest **doskonale pierwszej kategorii**, jeśli jest pierwszej kategorii względem każdego zbioru doskonałego (w sensie topologii podprzestrzeni). Tutaj takie zbiory oznaczane będą przez $\mathrm{P}\mathcal{M}$ (definicja po raz pierwszy została sformułowana w [47]). Zbiór jest **uniwersalnie miary zero**, jeśli jest miary zero względem dowolnej skończonej ciągłej miary borelowskiej. Zbiory takie będą oznaczane tu przez $\mathrm{U}\mathcal{N}$ (ta właściwość była rozważana w [73]).

Klasy te były uważane poniekąd za dualne (patrz [51]), jednakże można także zaobserwować pewne istotne różnice. Na przykład, klasa zbiorów uniwersalnie miary zero jest zamknięta na operację brania produktów (patrz [51]), lecz jest niesprzeczne z ZFC, że nie jest tak w przypadku klasy zbiorów doskonale pierwszej kategorii (patrz [62] i [65]).

W [79], P. Zakrzewski udowodnił, że dwie zdefiniowane wcześniej (patrz [24] i [23]) klasy zbiorów, mniejsze niż klasa $\mathrm{P}\mathcal{M}$, są sobie równe i mają właściwości dualne do $\mathrm{U}\mathcal{N}$. W związku z tym, zaproponował, by nazywać takie zbiory **uniwersalnie pierwszej kategorii** (oznaczane przez $\mathrm{U}\mathcal{M}$). Zbiór $A \subseteq 2^\omega$ jest uniwersalnie pierwszej kategorii, jeśli każdy obraz A względem borelowskiego izomorfizmu jest pierwszej kategorii w 2^ω.

W pracy [56] autorzy wprowadzili pojęcie zbiorów doskonale pierwszej kategorii w sensie tranzytywnym (oznaczane tutaj przez $\mathrm{P}\mathcal{M}'$), które okazało się byś silniejsze niż klasyczne pojęcie zbiorów doskonale pierwszej kategorii. Zbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest **doskonale pierwszej kategorii w sensie tranzytywnym**, jeśli dla każdego doskonałego zbioru P, istnieje zbiór $F \supseteq X$ typu F_σ taki, że dla każdego t, zbiór $(F+t) \cap P$ jest pierwszej kategorii w P. Dalsze właściwości zbiorów $\mathrm{P}\mathcal{M}'$ były rozważane w [55], [57], [59] i [58], lecz ciągle istnieją pewne pytania otwarte związane z właściwościami tej klasy. To pojęcie jest też motywowane jego relacją z algebraicznymi sumami zbiorów należących to różnych klas małych podzbiorów 2^ω, i przez oczywisty fakt, że zbiór $X \subseteq 2^\omega$ jest doskonale pierwszej kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru doskonałego P, istnieje zbiór $F \supseteq X$ typu F_σ taki, że $F \cap P$ jest pierwszej kategorii w P.

Zbiór A jest **silnie miary zero**, jeśli dla każdego ciągu dodatnich $\varepsilon_n > 0$, istnieje ciag otwartych zbiorów $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ takich, że diam$A_n < \varepsilon_n$ dla $n \in \omega$ oraz $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Oznaczam klasę takich zbiorów przez S$\mathcal{N}$. Definicja zostałapo raz pierwszy sformułowana w [6], i w tej pracy **Borel** postawił **hiptezę**, że wszystkie zbiory S$\mathcal{N}$ są przeliczalne. Hipoteza ta okazała się być niezależna od ZFC (patrz [44]).

Galvin, Mycielski and Solovay (w [22]) udowodnili, że zbiór $A \in$ S$\mathcal{N}$ (w 2^ω) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru pierwszej kategorii B, istnieje $t \in 2^\omega$ taki, że $A \cap (B + t) = \varnothing$. Zatem można rozważać dualną klasę zbiorów. Zbiór A jest **silnie pierwszej kategorii** (oznaczamy przez S$\mathcal{M}$), jeśli dla każdego zbioru miary zero B, istnieje $t \in 2^\omega$ takie, że $A \cap (B + t) = \varnothing$.

Powiemy, że zbiór $L \subseteq 2^\omega$ jest **zbiorem κ-Łuzina**, jeśli dla każdego zbioru pierwszej kategorii X, $|L \cap X| < \kappa$, lecz $|L| \geq \kappa$. Zbiór $\aleph_1$-Łuzina jest po prostu nazwywany **zbiorem Łuzina**. Pojęcie to zostało niezależnie wprowadzone w [47] oraz [49]. Istnienie zbioru Łuzina jest niezależne od ZFC. Łatwo zobaczyć, że zakładając hipotezę continuum (CH), taki zbiór istnieje. Podobnie jest, gdy $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \aleph_1$ (patrz [9]).

Podobnie, nieprzeliczalny zbiór $S \subseteq 2^\omega$ jest **zbiorem Sierpińskiego** (zaproponowano w [71]), jeśli dla każdego zbioru miary zero X, $S \cap X$ jest zbiorem przeliczalnym.

Powyższe klasy można ustawić w dwie serie coraz mniejszych rodzin: dla kategorii i dla miary, co zostało pokazane w Tabeli 1.

kategoria	P$\mathcal{M}$	$\supseteq$	U$\mathcal{M}$	$\supseteq$	P$\mathcal{M}'$	$\supseteq$	S$\mathcal{M}$	$\supseteq$	zbiory Sierpińskiego
miara			U$\mathcal{N}$		$\supseteq$		S$\mathcal{N}$	$\supseteq$	zbiory Łuzina

Tabela 1: Klasy specjalnych podzbiorów prostej rzeczywistej.

W końcu, zbiór A jest nazywany **addytywnie miary zero** ($A \in \mathcal{N}^*$), jeśli dla każdego zbioru miary zero X, $A + X$ jest miary zero. Zbiór A jest **addytywnie pierwszej kategorii** ($A \in \mathcal{M}^*$), jeśli dla każdego zbioru pierwszej kategorii X, $A + X$ jest pierwszej kategorii (patrz np. [78] i [4]).

Mimo że teoria specjalnych podzbiorów prostej jest relatywnie dobrze rozwinięta, dwie klasy zbiorów związane z kategorią pozostały bez swojego miarowego dualnego odpowiednika. Motywacją dla pierwszej części mojej rozprawy jest znalezienie takich klas zbiorów, które mogą grać rolę dualną do tych klas.

Innym pojęciem rozważanym w mojej rozprawie jest pojęcie zbieżności ciągu funkcji rzeczywistych. Ciąg $\langle f_n \rangle_{n\in\omega}$ funkcji $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ jest **zbieżny punktowo** ($f_n \to f$) na zbiorze $A \subseteq \boldsymbol{I}$ do funkcji $f\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$, jeśli dla każdego $x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Innymi słowy, jeśli

$$\forall_{x\in A} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n\in\omega} \forall_{m\geq n} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n\in\omega} \forall_{m\geq n} \forall_{x\in A} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

mówimy, że ciąg $\langle f_n \rangle_{n\in\omega}$ **zbiega jednostajnie** na zbiorze $A \subseteq \boldsymbol{I}$ do f ($f_n \rightrightarrows f$).

Ciąg $\langle f_n \rangle_{n\in\omega}$ funkcji $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ **zbiega quasi-normalnie** (pojęcie wprowadzono w [13], a potem w [8], patrz także [9]) na zbiorze $A \subseteq \boldsymbol{I}$ ($f_n \xrightarrow{QN} f$) do funkcji $f\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$, jeśli istnieje ciąg $\langle \varepsilon_i \rangle_{i\in\omega} \in (0,\infty)^\omega$ taki, że $\varepsilon_i \to 0$, oraz

$$\forall_{x\in A} \exists_{n\in\omega} \forall_{m\geq n} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon_m.$$

Istotna część rozważań w mojej rozprawie jest związana ze znanym twierdzeniem Jegorowa, które wiąże ze sobą pojęcia związane ze zbieżnością i miarą. Przypomnijmy, że klasyczne **twierdzenie Jegorowa** (po raz pierwszy wykazane w [16], patrz także np. [61]) mówi, że mając dany ciąg mierzalnych w sensie Lebesgue'a funkcji (ograniczamy nasze rozważania do rzeczywistych funkcji $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$), który jest punktowo zbieżny na $\boldsymbol{I}$ oraz $\varepsilon > 0$, można znaleźć mierzalny zbiór $A \subseteq \boldsymbol{I}$ taki, że $m(A) \geq 1 - \varepsilon$ oraz ciąg zbiega na A jednostajnie.

Interesujące wydają się być próby uogólnienia twierdzenia Jegorowa. Istnieją dwa potencjalne sposoby takiego uogólnienia. Pierwszy polega na rozważeniu innych pojęć zbieżności ciągu funkcji. W szczególności, możemy rozważyć zbieżność ciągu funkcji względem danego ideału I na ω. **Ideał** I na zbiorze X to rodzina podzbiorów X taka, że

a) jeśli $A \in I$, oraz $B \subseteq A$, to $B \in I$,

b) jeśli $A, B \in I$, to $A \cup B \in I$,

c) $X \notin I$.

Mając dany ideał I na ω oraz ciąg $\langle x_n \rangle_{n \in \omega} \in \mathbb{R}^\omega$ mówimy, że ciąg ten **zbiega** do punktu $x \in \mathbb{R}$ **względem ideału** I ($x_n \to_I x$), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\{n \in \omega : |x_n - x| > \varepsilon\} \in I.$$

Takie pojęcie było po raz pierwszy rozważane w [29] (patrz także [38], oraz [60]).

Warto zauważyć, że klasyczna zbieżność to po prostu zbieżność względem ideału $\mathrm{Fin} = [\omega]^{<\omega}$.

Analogicznie do klasycznej zbieżności, dostajemy różne pojęcia zbieżności ciągu $\langle f_n \rangle_{n \in \omega}$ funkcji $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ względem ideału I na ω, które zostały wprowadzone w [2] oraz [14]:

ideałowa zbieżność punktowa, $f_n \to_I f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{x \in A} \{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in I,$$

ideałowa zbieżność quasi-normalna, $f_n \xrightarrow{QN}_I f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\langle \varepsilon_i \rangle_{i \in \omega} \in (0, \infty)^\omega$ such that $\varepsilon_i \to_I 0$ oraz

$$\forall_{x \in A} \{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in I,$$

ideałowa zbieżność jednostajna, $f_n \rightrightarrows_I f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{B \in I} \forall_{x \in A} \{n \in \omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq B.$$

I^***-punktowa zbieżność,** $f_n \to_{I^*} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$, istnieje $M = \{m_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$, $m_{i+1} > m_i$ dla $i \in \omega$ takie, że $\omega \setminus M \in I$ oraz $f_{m_i}(x) \to f(x)$,

I^***-quasi-normalna zbieżność,** $f_n \xrightarrow{QN}_{I^*} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $M = \{m_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$, $m_{i+1} > m_i$ dla $i \in \omega$ takie, że $\omega \setminus M \in I$ oraz $f_{m_i} \xrightarrow{QN} f$ on A,

I^***-jednostajna zbieżność,** $f_n \rightrightarrows_{I^*} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $M = \{m_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$, $m_{i+1} > m_i$ dla $i \in \omega$ takie, że $\omega \setminus M \in I$ oraz $f_{m_i} \rightrightarrows f$ on A.

Mając dane dwa pojęcia zbieżności względem ideału, można zapytać, czy klasyczne twierdzenie Jegorowa zachodzi dla tych dwóch zbieżności, w takim sensie, czy słabsza zbieżność implikuje silniejszą na podzbiorze o dowolnie dużej mierze. Odpowiedź często bywa negatywna, jak w przypadku zbieżności jednostajnej i punktowej dla wielu analitycznych P-ideałów (patrz [53, Twierdzenie 3.4]). Można jednak rozważać inne rodzaje zbieżności, np. zbieżność równo-ideałową (definicja w [53] i [54]). I na przykład, w przypadku analitycznych P-ideałów, tak zwane słabe twierdzeine Jegorowa dla ideałów (pomiędzy zbieżnością równo-ideałową, a punktową ideałową) zostało dowiedzione przez N. Mrożka (patrz [53, Twierdzenie 3.1]).

Założenie o mierzalności w twierdzeniu Jegorowa wydaje się odgrywać istotną rolę. Jest zatem interesujące, czy można je usunąć z klasycznego twierdzenia Jegorowa. Zdanie, które mówi, że dla dowolnego ciągu funkcji $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$, który jest punktowo zbieżny, i $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór $A \subseteq \boldsymbol{I}$ taki, że $m^*(A) \geq 1 - \varepsilon$ oraz ten ciąg zbiega jednostajnie na A, jest nazywane **uogólnionym stwierdzeniem Jegorowa**. T. Weiss w swoich notatkach (patrz [77]) udowodnił, że jest ono niezależne od ZFC, a fakt ten został użyty w [15]. Następnie R. Pinciroli zbadał dokładnie metodę T. Weissa (patrz [63]). Na przykład powiązał uogólnione stwierdzenie Jegorowa ze współczynnikami kardynalnymi: $\mathrm{non}(\boldsymbol{\mathcal{N}})$, $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{d}$. W szczególności udowodnił, że $\mathrm{non}(\boldsymbol{\mathcal{N}}) < \mathfrak{b}$ implikuje, że uogólnione stwierdzenie Jegorowa jest prawdziwe, natomiast, gdy np. $\mathrm{non}(\boldsymbol{\mathcal{N}}) = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, zdanie to jest fałszywe.

Wobec tego motywacją następnej części mojej rozprawy jest połączenie obu idei i zbadanie uogólnionego stwierdzenia Jegorowa (bez założenia o mierzalności) w przypadku różnych pojęć zbieżności ideałowych ([34]).

Ponieważ teoria mnogości prostej rzeczywistej jest już relatywnie dobrze poznana, w ostatnich latach zaczęto intensywnie rozwijać teorię uogólnionych przestrzeni Cantora i Baire'a (patrz, np. [46], [20], [21], [41], [42], [69], [70], [17], [18], [19] i wiele innych). Ważną częścią tych rozważań jest próba przeniesienia rezultatów z teorii mnogości prostej rzeczywistej na te przestrzenie (listę otwartych pytań można znaleźć w [43]). Pomimo intensywnego rozwoju tej teorii, nie są mi znane istotne badania w temacie specjalnych podzbiorów przestrzeni 2^κ. Znane wyniki dotyczą przede wszystkim ideału zbiorów silnie miary zero (patrz [25] oraz [26]).

Uogólnienie teorii specjalnych podzbiorów prostej na przypadek uogólnionej przestrzeni Cantora jest główną motywacją drugiej połowy mojej rozprawy.

Rozważamy przestrzeń 2^κ, nazywaną **κ-przestrzenią Cantora (lub uogólnioną przestrzenią Cantora)**, wraz z tak zwaną ograniczoną topologią, której bazą jest $\{[x] \colon x \in 2^{<\kappa}\}$, gdzie dla $x \in 2^{<\kappa}$,

$$[x] = \{f \in 2^\kappa \colon f \restriction \mathrm{dom} x = x\}.$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, ta baza ma moc κ. To założenie okazuje się być bardzo wygodne przy pracy z uogólnioną przestrzenią Cantora i w związku z tym obowiązuje w całej rozprawie, chyba że zaznaczono inaczej (patrz np. [20]).

Zbiór $T \subseteq 2^{<\kappa}$ jest **drzewem**, jeśli dla każdego $t \in T$ oraz $\alpha < \mathrm{len}(t)$, także $t \restriction \alpha \in T$. Gałąź w drzewie to maksymalny łańcuch. Jeśli T jest drzewem, niech

$$[T]_\kappa = \{x \in 2^\kappa \colon \forall_{\alpha < \kappa} x \restriction \alpha \in T\}.$$

Łatwo zauważyć, że zbiór A jest domknięty, wtedy i tylko wtedy, gdy $A = [T]_\kappa$ dla pewnego drzewa $T \subseteq 2^{<\kappa}$.

Wierzchołek $s \in T \subseteq 2^{<\kappa}$ jest nazywany **punktem rozgałęzienia** T, jeśli $s^\frown 0, s^\frown 1 \in T$.

Rodzina **zbiorów κ-borelowskich** to najmniejsza rodzina podzbiorów 2^κ, do której należą wszystkie zbiory otwarte, oraz która jest zamknięta na operację dopełnienia oraz przecięcia podrodzin o mocy κ.

Powiemy, że zbiór jest **κ-pierwszej kategorii**, jeśli jest sumą co najwyżej κ wielu zbiorów nigdzie gęstych (w sensie ograniczonej topologii). Zauważmy, ze także uogólnienie twierdzenia Baire'a jest prawdziwe w 2^κ, mianowicie 2^κ nie jest κ-pierwszej kategorii (patrz [76, twierdzenie xv]). Rodzina wszystkich zbiorów κ-pierwszej kategorii w 2^κ będzie oznaczana przez $\boldsymbol{\mathcal{M}}_\kappa$.

Nie wszystkie wyniki teorii mnogości prostej rzeczywistej mogą być łatwo przeniesione na przypadek 2^κ. Jedną z głównych przeszkód jest pojęcie zwartości. Powiemy, że przestrzeń topologiczna X jest **κ-zwarta** (lub κ-Lindelöfa), jeśli z każdego otwartego pokrycia X można wybrać podpokrycie o mocy mniejszej niż κ (patrz [52], [27]). Oczywiście przestrzeń Cantora 2^ω jest ω-zwarta (tj. zwarta w klasycznym sensie). Ale nie jest zawsze prawdą, że 2^κ jest przestrzenią κ-zwartą. Przypomnijmy, że liczba kardynalna κ jest słabo zwarta, jeśli jest nieprzeliczalna i dla każdego dwu-kolorowego kolorowania zbioru wszystkich dwu-elementowych podzbiorów κ, istnieje zbiór homogeniczny $H \subseteq \kappa$ mocy κ (tj. taki, że każdy dwu-elementowy podzbiór H ma ten sam kolor w rozważanym kolorowaniu) (patrz np. [28]). Warto przypomnieć także, że każa słabo zwarta liczba kardynalna jest silnie nieosiągalna. Można dowieść, że uogólniona przestrzeń Cantora 2^κ jest κ-zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy κ jest słabo zwartą liczbą kardynalną (patrz [52]). A nawet, co więcej, uogólniona przestrzeń Cantora 2^κ oraz uogólniona przestrzeń Baire'a κ^κ są homeomorficzne, jeśli liczba kardynalna κ nie jest słabo zwarta.

Druga duża różnica dotyczy pojęcia zbioru doskonałego. Zbiór $P \subseteq 2^\kappa$ jest **doskonały**, jeśli jest domknięty i nie ma punktów izolowanych. Drzewo $T \subseteq 2^{<\kappa}$ jest **doskonałe**, jeśli dla każdego $t \in T$, istnieje $s \in T$ takie, że $t \subseteq s$ oraz $s \in \mathrm{Split}(T)$. Można zauważyć, że $P \subseteq 2^\kappa$ jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy T_P jest doskonałym drzewem.

Ale powiemy, że doskonałe drzewo T jest **κ-doskonałe**, jeśli dla każdej porządkowej liczby granicznej $\beta < \kappa$, oraz $t \in 2^\beta$, takiego, że $t{\restriction}\alpha \in T$, mamy $t \in T$. Zauważ, że każde κ-doskonałe drzewo jest izomorficzne porządkowo z $2^{<\kappa}$. Zbiór $P \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-doskonały**, jeśli $P = [T]_\kappa$ dla κ-doskonałego drzewa T. Oczywiście, κ-doskonały zbiór jest doskonały. Z drugiej strony, odwrotna implikacja nie zachodzi.

W 2^ω każdy nieprzeliczalny zbiór analityczny zawiera zbiór doskonały. Z drugiej strony, uogólnienie tego faktu dla 2^κ może nie być prawdziwe nawet dla domkniętych zbiorów. Może istnieć nawet doskonały zbiór, który nie zawiera zbioru κ-doskonałego (patrz np. [43]).

Można również badać pojęcia zbieżności ciągów funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, i rozważać pojęcia specjalnych podzbiorów związanych z tą zbieżnością. A także, w końcu, można badać możliwość wprowadzenia twierdzenia Jegorowa w 2^κ.

2 Struktura rozprawy

Moja rozprawa składa się z dwóch zasadniczych części:

(a) wyniki związane z prostą rzeczywistą (rozdziały 2–3),

Rozdział 2. Rozważam specjalne podzbiory przestrzeni Cantora 2^ω. Teoria specjalnych podzbiorów jest oczywiście już znacząco rozwinięta (patrz [51] i [9]). W tej pracy wprowadzam dwie, do tej pory nierozważane, klasy takich zbiorów: klasę zbiorów doskonale miary zero oraz klasę zbiorów doskonale miary zero w sensie tranzytywnym. Te klasy mogą odgrywać rolę dualną po stronie miary do odpowiednich klas zbiorów po stronie kategorii ([36]). Badam właściwości tych klas i, mimo że główny problem, czy klasy zbiorów doskonale miary zero i uniwersalnie miary zero są niesprzecznie różne, pozostaje nierozwiązany, to dowodzę twierdzeń powiązanych z tym pytaniem i rozważam ich wersje po stronie kategorii.

Rozdział 3. Badam problemy związane z twierdzeniem Jegorowa, które łączy ze sobą właściwości związane ze zbieżnością i miarą. Twierdzenie Jegorowa może być uogólnione na przypadek zbieżności ideałowej (patrz np. [53]), natomias T. Weiss udowodnił ([77]), że uogólnione stwierdzenie Jegorowa (tj. twierdzenie bez założenia o mierzalności) jest niesprzeczne z ZFC. Łącząc oba pomysły, dowodzę, że uogólnione stwierdzenie Jegorowa i jego zaprzeczenie są niesprzeczne z ZFC dla różnych przypadków zbieżności ideałowych ([34]).

(b) uogólnienia dla 2^κ (rozdziały 4-8).

Rozdział 4. Wiele klasycznych pojęć specjalnych podzbiorów w 2^ω może być uogólniona na przypadek uogólnionej przestrzeni Cantora 2^κ. Mimo że teoria uogólnionej przestreni Cantora 2^κ była w ostatnim czasie znacząco rozwijana (patrz np. [43]), to teoria specjalnych podzbiorów 2^κ wydaje się być w znacznej części pomiajana w tych rozważaniach. W niniejszej pracy badam te klasy zbiorów w takim przypadku ([37]). Okazuje się, że wiele właściwości zachodzących w 2^ω można łatwo wykazać dla 2^κ, choć czasem niezbędne są dodatkowe teoriomnogościowe założenia.

Rozdział 5. Zajmuję się mniej znanymi klasami małych zbiorów w 2^κ.

Rozdział 6. Rozważam różne rodzaje zbieżności κ-ciągów funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$ i badam właściwości specjalnych podzbiorów 2^κ związanych ze zbieżnością ([33]). Łączę te właściwości z właściwościami wyboru podciągów.

Rozdział 7. Rozważam także zbieżność względem ideału na κ.

Rozdział 8. Na koniec, łącząc właściwości związane z miarą i ze zbieżnością w 2^κ, rozważam możliwość wprowadzenia twierdzenia Jegorowa w przestrzeni 2^κ. Ponieważ nie jest znana metoda konstrukcji miary w przestrzeni 2^κ, która spełniałaby wszystkie sensowne wymagania, rozważam właściwości, które są niezbędne do udowodnienia odpowiednika twierdzenia Jegorowa. Kwestię istnienia odpowiedniej funkcji miarowej spełniającej dodatkowe założenia zostawiam jako pytanie otwarte. Przy pewnych dodatkowych założeniach każdy zbiór κ-silnie miary zero jest miary zero względem takiej funkcji. Badam także ideałową wersję Tw. Jegorowa w 2^κ.

Rozdział 1 zawiera wprowadzenie oraz przedstawia pojęcia niezbędne do zrozumienia pracy, natomiast rozdział 9 składa się z podsumowania oraz komentarzy dotyczące możliwości dalszych badań i otwartych problemów.

3 Przegląd wyników pracy

3.1 Prosta rzeczywista

Teoria specjalnych podzbiorów prostej oraz teoria zbieżności ciągów funkcji rzeczywistych są relatywnie dobrze rozwinięte. W mojej rozprawie przedstawiam wyniki związane z dwoma tematami: zbiorami doskonale miary zero (rozdział 2) oraz uogólnionym stwierdzeniem Jegorowa dla ideałów (rozdział 3).

Idea skonstruowania zbiorów doskonale miary zero pochodzi z obserwowanej dualności pomiędzy miarą i kategorią oraz braku dualnego odpowiednika klasy zbiorów doskonale pierwszej kategorii. Zaproponowaliśmy takie pojęcie.

Zaczynamy od zdefiniowania kanonicznej miary na zbiorze doskonałym $P \subseteq 2^\kappa$. Niech $A \subseteq P$ będzie takie, że $h_P^{-1}[A]$ jest zbiorem mierzalnym w 2^ω, gdzie $h_P\colon 2^\omega \to P$ jest kanonicznym homeomorfizmem na P. Definiujemy

$$\mu_P(A) = m(h_P^{-1}[A]).$$

Miara μ_P jest nazywana **kanoniczną miarą na** P. Zbiór A taki, że $\mu_P(A \cap P) = 0$ będzie nazywany P**-miary zero**.

Powiemy, ze zbiór $A \subseteq 2^\omega$ jest **doskonale miary zero,** jeśli jest P-miary zero dla każdego doskonałego zbioru $P \subseteq 2^\omega$. Klasa wszystkich zbiorów doskonale miary zero będzie oznaczana przez P$\boldsymbol{\mathcal{N}}$.

W rozprawie badam właściwości tej klasy. Niestety, odpowiedź na główne otwarte pytanie, czy jest niesprzeczne z ZFC, że istnieje zbiór doskonale miary zero, który nie jest uniwersalnie miary zero, pozostaje bez odpowiedzi. W szczególności, nie wiemy, czy klasa zbiorów doskonale miary zero jest zamknięta na branie produktów.

Wszystkie znane rozwiązania dualnego problemu używają funkcji Łuzina lub podobnych pomysłów. **Funkcja Łuzina** $\mathcal{L}\colon \omega^\omega \to 2^\omega$ jest ciągłą różnowartościową funkcją o mierzalnej funkcji odwrotnej. W dodatku, jeśli L jest zbiorem Łuzina, to $\mathcal{L}[L]$ jest doskonale pierwszej kategorii. Funkcja ta została zdefiniowana w [48], i dokładnie opisana w [72].

Próbując znaleźć odpowiedź na powyższy problem, pokazaliśmy, że jeśli istnieje miarowy odpowiednik funkcji Łuzina, to nie może być skonstruowany w analogiczny sposób.

Stwierdzenie 1 *Niech* $\mathcal{S}\colon \omega^\omega \to 2^\omega$ *będzie funkcją taką, że istnieje system zbiorów* $\langle P_s : s \in \omega^{<\omega}\rangle$ *taki, że dla* $s \in \omega^{<\omega}$, $P_s \subseteq 2^\omega$ *jest zbiorem doskonałym, i dla* $n, m \in \omega$*:*

(a) $n \neq m \Rightarrow P_{s^\frown n} \cap P_{s^\frown m} = \emptyset$,

(b) $P_{s^\frown n} \subseteq P_s$,

(c) $diam(P_s) \leq 1/2^{len(s)}$,

oraz $\mathcal{S}(x)$ *jest jedynym elementem* $\bigcap_{n\in\omega} P_{x\restriction n}$. *Wtedy istnieje zbiór doskonały* $Q \subseteq 2^\omega$ *taki, że*

$$m\left(\mathcal{S}^{-1}[\bigcup\{P_s : s \in \omega^{<\omega} \wedge \mu_Q(P_s) = 0\}]\right) < 1.$$

W powyższym stwierdzeniu rozważamy ω^ω wraz z miarą m taką, że

$$m([w]) = \prod_{i=0}^{\mathrm{len}(w)-1} \frac{1}{2^{w(i)+1}},$$

gdzie $w \in \omega^{<\omega}$.

Także, jeśli klasa P$\mathcal{N}$ jest zamknięta ze względu na obrazy homeomorfizmów, to U$\mathcal{N}$ = P$\mathcal{N}$.

Twierdzenie 2 *Jeśli kasa P$\mathcal{N}$ jest zamknięta ze względu na obrazy homeomorfizmów na 2^ω, to U$\mathcal{N}$ = P$\mathcal{N}$.*

W końcu, rozważamy także prostsze klasy doskonałych podzbiorów, w przypadku których analogiczne problemy mogą zostać rozwiązane.

Punkt rozgałęzienia jest na poziomie $i \in \omega$, jeśli istnieje i punktów rozgałęzienia poniżej niego. Zbiór punktów rozgałęzienia w P na poziomie i będzie oznaczany przez $\mathrm{Split}_i(P)$. Niech

$$s_i(P) = \min\{\mathrm{len}(w) : w \in \mathrm{Split}_i(P)\},$$

a także

$$S_i(P) = \max\{\mathrm{len}(w) : w \in \mathrm{Split}_i(P)\}.$$

Doskonały zbiór P jest nazywany **zbalansowanym doskonałym** zbiorem, jeśli $s_{i+1}(P) > S_i(P)$ dla każdego $i \in \omega$. Ta definicja uogólnia pojęcie zbiorów jednorodnie doskonałych, które występuje w [7].

Zbiór P jest **jednorodnie doskonały**, jeśli dla każdego $i \in \omega$, albo $2^i \cap T_P \subseteq \mathrm{Split}(P)$, albo $2^i \cap \mathrm{Split}(P) = \varnothing$.

Zbiór, który jest P-miary zero dla każdego zbalansowanego (odpowiednio, jednorodnie) doskonałego zbioru P będzie nazywany **zbalansowanie doskonale miary zero** (odpowiednio, **jednorodnie miary zero**). Klasa takich zbiorów będzie oznaczana przez bP$\mathcal{N}$ (odpowiednio, uP$\mathcal{N}$).

Dostajemy następujące twierdzenie, którego dowód nosi pewne podobieństwo do wyniku Recława ([65]).

Twierdzenie 3 *Jeśli istnieje zbiór Sierpińskiego, to istnieją $X, Y \in b\mathrm{P}\mathcal{N}$, takie, że $X \times Y \notin u\mathrm{P}\mathcal{N}$.*

Następnie badamy odpowiedniki małych zbiorów, które są rozważane przez Bartoszyńskiego ([4]), względem kanonicznej miary na zbiorze doskonałym. Prezentuję dwa podejścia, z których drugie wydaje się być bardziej obiecujące. W tym podejściu definicja zbioru małego w P ma charakter dość techniczny, wobec czego zostaje tu pominięta. W szczególności, pokazuję, że każdy podzbiór zbioru doskonałego P, który jest P-miary zero, może być przedstawiony jako suma dwóch zbiorów małych w P.

Stwierdzenie 4 *Jeśli $X \subseteq P$ jest P-miary zero, to $X \subseteq A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, A_2 są małe w P.*

Badamy także addytywne właściwości zbiorów małych w P.

Stwierdzenie 5 *Niech $X \subseteq P$ będzie zbiorem małym w P oraz Y będzie addytywnie miary zero. Wtedy $X + Y$ jest P-miary zero.*

W końcu konstruujemy odpowiednik (P$\mathcal{N}'$) dualny do klasy zbiorów doskonale pierwszej kategorii w sensie tranzytywnym (P$\mathcal{M}'$). Powiemy, że X jest **doskonale miary zero w sensie tranzytywnym**, jeśli dla każdego zbioru doskonałego P, istnieje zbiór $G \supseteq X$ typu G_δ taki, że dla każdego t, zbiór $(G + t) \cap P$ jest P-miary zero.

Wiadome jest, że każdy zbiór silnie pierwszej kategorii jest P$\mathcal{M}'$, oraz każdy zbiór P$\mathcal{M}'$ jest uniwersalnie pierwszej kategorii, a także jest niesprzeczne z ZFC, że te inkluzje są właściwe. Dowodzimy części analogicznych wyników po stronie miary.

Twierdzenie 6 *Każdy zbiór silnie miary zero jest doskonale miary zero w sensie tranzytywnym.*

Przy pewnych teorio-mnogościowych założeniach, istnieje zbiór uniwersalnie miary zero, który nie jest P$\mathcal{N}'$.

Twierdzenie 7 *Jeśli istnieje zbiór uniwersalnie miary zero o mocy $\mathfrak{c}$, to istnieje $Y \in U\mathcal{N} \setminus bP\mathcal{N}' \subseteq U\mathcal{N} \setminus P\mathcal{N}'$.*

Pozostałe dwa problemy: czy istnieje zbiór P$\mathcal{N}'$, który nie jest S$\mathcal{N}$, oraz czy każdy zbiór P$\mathcal{N}'$ jest U$\mathcal{N}$, pozostają nierozstrzygnięte.

Ponieważ genezą rozważań klasy P$\mathcal{M}'$ są jej addytywne właściwości, rozważamy także addytywne właściwości klasy P$\mathcal{N}'$.

Twierdzenie 8 *Niech $X \in P\mathcal{N}'$, oraz niech Y będzie zbiorem $SR^{\mathcal{N}}$. Wtedy $X + Y \in P\mathcal{N}$.*

W powyższym twierdzeniu, zbiór Y jest $SR^{\mathcal{N}}$, jeśli dla każdego borelowskiego zbioru $H \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ takeigo, że $H_x = \{y \in 2^\omega : \langle x, y\rangle \in H\}$ jest miary zero dla każdego $x \in 2^\omega$, $\bigcup_{x\in Y} H_x$ jest także miary zero ([3])

Nie mniej, główne pytanie, czy jeśli $A \in$ S$\mathcal{M}$, oraz $B \in$ P$\mathcal{N}'$, to $A + B$ jest zbiorem s_0 pozostaje nierozwiązane. Zbiór A jest s_0-zbiorem, jeśli dla każdego zbioru doskonałego P, istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \cap A = \varnothing$ (patrz [50]).

W rozdziale 3 rozważamy drugi z tematów w teorii mnogości prostej rzeczywistej, a który dotyczy uogólnień twierdzenia Jegorowa. Wiadomo, że twierdzenie Jegorowa bez założenia o mierzalności (tak zwane uogólnione stwierdzenie Jegorowa) jest niesprzeczne z ZFC (patrz [77]), podobnie, jak i jego zaprzeczenie. Także ideałowa wersja twierdzenia Jegorowa (z założeniem o mierzalności) była badana dla różnych rodzajów zbieżności ideałowych (patrz np. [53]). Wobec tego, w mojej rozprawie badam uogólnione stwierdzenie Jegorowa w przypadku różnych pojęć ideałowej zbieżności.

Zaczynamy od uogólnienia metody Pinciroliego (patrz [63]). Mając dane ciąg funkcji $f_n : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$ oraz zbiór $A \subseteq \boldsymbol{I}$, rozważmy pewne pojęcie zbieżności $f_n \looparrowright f$ on A. Niech $\mathcal{F} \subseteq \{\langle f_n\rangle_{n\in\omega} : \forall_{n\in\omega} f_n : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}\}$ będzie dowolną rodziną ciągów funkcji.

Rozważamy dwie właściwości zachodzące pomiędzy $\mathcal{F}$ i $\looparrowright$:

($H^{\Rightarrow}(\mathcal{F}, \looparrowright)$) Istnieje $o : \mathcal{F} \to (\omega^\omega)^{\boldsymbol{I}}$, takie, że dla każdego $F \in \mathcal{F}$ i dowolnego $A \subseteq \boldsymbol{I}$, jeśli $o(F)[A]$ jest ograniczony w $(\omega^\omega, \leq)$, to $F \looparrowright 0$ na A.

($H^{\Leftarrow}(\mathcal{F}, \looparrowright)$) Istnieje ko-finalna funkcja $o : \mathcal{F} \to (\omega^\omega)^{\boldsymbol{I}}$, taka, że dla każdego $F \in \mathcal{F}$ i dowolnego $A \subseteq \boldsymbol{I}$, jeśli $F \looparrowright 0$ na A, to $o(F)[A]$ jest ograniczony w $(\omega^\omega, \leq)$.

Mamy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 9 *Załóżmy, że non($\mathcal{N}$) $< \mathfrak{b}$, oraz $H^{\Rightarrow}(\mathcal{F}, \looparrowright)$. Wtedy dla każdego $\langle f_n\rangle_{n\in\omega} \in \mathcal{F}$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje $A \subseteq \boldsymbol{I}$ taki, że $m^*(A) \geq 1 - \varepsilon$ oraz $f_n \looparrowright 0$ na A.*

Twierdzenie 10 *Załóżmy, że non($\mathcal{N}$) $= \mathfrak{c}$, oraz że istnieje zbiór $\mathfrak{c}$-Łuzina. Jeśli $H^{\Leftarrow}(\mathcal{F}, \looparrowright)$, to istnieje $\langle f_n\rangle_{n\in\omega} \in \mathcal{F}$ oraz $\varepsilon > 0$, takie, że dla każdego $A \subseteq \boldsymbol{I}$ takiego, że $m^*(A) \geq 1 - \varepsilon$, $f_n \not\looparrowright 0$ na A.*

Dzięki temu, dowodzimy, że zarówno uogólnione stwierdzenie Jegorowa dla ideałów, jak i jego zaprzeczenie są niesprzeczne z ZFC dla różnych pojęć zbieżności względem ideału.

Twierdzenie 11 *Ideałowa wersja uogólnionego stwierdzenia Jegorowa oraz jego negacja są niesprzeczne z ZFC dla następujących pojęć zbieżności ideałowych:*

(a) pomiędzy ideałową punktową i równo-ideałową zbieżnością dla analitycznych P-ideałów,

(b) pomiędzy ideałową punktową i jednostajną ideałową zbieżnością dla przeliczalnie generowanych ideałów,

(c) pomiędzy punktową-I^* jednostajną-I^* zbieżnością dla przeliczalnie generowanych ideałów,

(d) pomiędzy ideałową punktową i jednostajną ideałową zbieżnością dla ideałów postaci Fin^{α}, $\alpha < \omega_1$.

Dodatkowo dowodzę twierdzenia Jegorowa (z założeniem o mierzalności) w przypadkach, gdy nie było to dowiedzione uprzednio ((b) i (c)).

Twierdzenie 12 *Jeśli $I \subseteq 2^{\omega}$ jest przeliczalnie generowanym ideałem, oraz $f_n\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$, $n \in \omega$ są funkcjami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a, oraz $f_n \to_I 0$ i $\varepsilon > 0$, to istnieje mierzalny zbiór $B \subseteq \boldsymbol{I}$ taki, że $m(B) \leq \varepsilon$ oraz $f_n \rightrightarrows_I 0$ na $\boldsymbol{I} \setminus B$.*

Twierdzenie 13 *Jeśli $I \subseteq 2^{\omega}$jest przeliczalnie generowanym ideałem, oraz $f_n\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$, $n \in \omega$ są funkcjami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a, oraz $f_n \to_{I^*} 0$ i $\varepsilon > 0$, to istnieje mierzalny zbiór $B \subseteq \boldsymbol{I}$ taki, że $m(B) \leq \varepsilon$ i $f_n \rightrightarrows_{I^*} 0$ na $\boldsymbol{I} \setminus B$.*

Powyższe uogólnienie metody Pinciroliego daje wymienione wyżej kombinatoryczne właściwości oznaczone jako $(H^{\Rightarrow}(\mathcal{F}, \nrightarrow))$ i $(H^{\Leftarrow}(\mathcal{F}, \nrightarrow))$, które implikują, że uogólnione stwierdzenie Jegorowa (odpowiednio, jego negacja) jest niesprzeczna z ZFC. Następnie, M. Repický ([67]) przeprowadził dalsze uogólnienie moich rozważań, badając klasy ideałów spełniających powyższe warunki. Wprowadził także analogiczną właściwość $(M^{\Rightarrow}(\mathcal{F}, \nrightarrow))$, która implikuje twierdzenie Jegorowa (z założeniem o mierzalności) względem takiego ideału.

Niemniej, badania w tym zakresie muszą być kontynuowane, by odpowiedzieć na pozostające nadal pytania otwarte.

3.2 W uogólnionej przestrzeni Cantora

W kolejnych rozdziałach badamy uogólnioną przestrzeń Cantora 2^{κ}, gdzie κ jest nieprzeliczalną regularną liczbą kardynalną.

W rozdziale 4 wprowadzamy proste klasy specjalnych podzbiorów 2^{κ}, które są uogólnieniami pojęć opisanych w [51] oraz [9]:

(a) zbiory λ-κ-Łuzina. Zbiór $L \subseteq 2^{\kappa}$ taki, że $|L| \geq \lambda$, oraz, jeśli $X \subseteq 2^{\kappa}$ jest dowolnym zbiorem κ-pierwszej kategorii, to $|X \cap L| < \lambda$ nazywamy **zbiorem λ-κ-Łuzina**. Zbiór κ^{+}-κ-Łuzina nazywany jest po prostu **zbiorem Łusina dla κ**. Dowodzimy, że taki zbiór istnieje przy odpowiednich teorio-mnogościowych założeniach .

Twierdzenie 14 *Jeśli $\lambda = cov(\mathcal{M}_{\kappa}) = cof(\mathcal{M}_{\kappa})$, to istnieje zbiór λ-κ-Łuzina.*

W szczególności, istnieje przy założeniu CH_{κ}.

(b) zbiory κ-silnie miary zero. Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-silnie miary zero** (S$\boldsymbol{\mathcal{N}}_\kappa$), jeśli dla każdego ciągu $\langle \xi_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$, istnieje ciąg $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ taki, że $x_\alpha \in 2^{\xi_\alpha}$, $\alpha < \kappa$ and $A \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa}[x_\alpha]$ (patrz także [25] i [26]). Dowodzimy implikacji analogicznej do jednej z implikacji z twierdzenia
Galvina-Mycielskiego-Solowaya.

Stwierdzenie 15 *Niech A będzie zbiorem, takim że dla każdego zbioru nigdzie gęstego F, istnieje $x \in 2^\kappa$ takie, że $(x + A) \cap F = \emptyset$. Wtedy, A jest $S\boldsymbol{\mathcal{N}}_\kappa$.*

Odwrotna implikacja może być dowiedziona, jeśli κ jest słabo zwartą liczbą kardynalną.

Twierdzenie 16 *Załóżmy, że κ jest słabo zwartą liczbą kardynalną, oraz $A \subseteq 2^\kappa$ jest $S\boldsymbol{\mathcal{N}}_\kappa$. Wtedy, dla każdego zbioru κ-pierwszej kategorii F, istnieje $x \in 2^\kappa$ taki, że $(x + A) \cap F = \emptyset$.*

(c) κ^+-skoncentrowany (zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **λ-skoncentrowany na zbiorze** $B \subseteq 2^\kappa$ dla $\kappa < \lambda \leq 2^\kappa$, jeśli dla każdego zbioru otwartego G takiego, że $B \subseteq G$, mamy $|A \setminus G| < \lambda$), i dowodzę następujących inkluzji związanych z tą klasą.

Stwierdzenie 17 *Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest zbiorem Łuzina dla κ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| > \kappa$ oraz jest on κ^+-skoncentrowany na każdym gęstym zbiorze $D \subseteq 2^\kappa$ takim, że $|D| = \kappa$.*

Stwierdzenie 18 *Jeśli zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest κ^+-skoncentrowany na zbiorze B takim, że $|B| \leq \kappa$, to $A \in S\boldsymbol{\mathcal{N}}_\kappa$.*

W takim razie, każdy zbiór Łuzina dla κ jest κ-silnie miary zero.

(d) κ-doskonale κ-pierwszej kategorii (zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest nazywany **κ-doskonale κ-pierwszej kategorii** (P$_{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{\mathcal{M}}_\kappa$), jeśli dla każdego zbioru κ-doskonałego $P \subseteq 2^\kappa$, $A \cap P$ jest κ-pierwszej kategorii w P), doskonale κ-pierwszej kategorii (zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest nazywany **doskonale κ-pierwszej kategorii** (P$\boldsymbol{\mathcal{M}}_\kappa$), jeśli dla każdego zbioru doskonałego $P \subseteq 2^\kappa$, $A \cap P$ jest κ-pierwszej kategorii w P), oraz κ-λ zbiory (zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-λ-zbiorem**, jeśli dla każdego $B \subseteq A$ takiego, że $|B| \leq \kappa$ istnieje ciąg $\langle B_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$, gdzie $B_\alpha \subseteq 2^\kappa$ są otwarte oraz $\bigcap_{\alpha<\kappa} B_\alpha \cap A = B$), i pośród innych właściwości, dowodzimy, co następuje.

Stwierdzenie 19 *Każdy κ-λ-zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest doskonale κ-pierwszej kategorii.*

Z drugiej strony nie wiemy czy istnieje zbiór doskonale κ-pierwszej kategorii o mocy większej niż κ, w każdym modelu ZFC.

(e) κ-σ-zbiory. Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest nazywany **κ-σ-zbiorem**, jeśli dla każdego ciągu domkniętych zbiorów $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$, istnieje ciąg otwartych zbiorów $\langle G_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ takich, że

$$A \cap \bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha = A \cap \bigcap_{\alpha<\kappa} G_\alpha.$$

Dowodzimy, że każdy taki zbiór jest doskonale κ-pierwszej kategorii,

(f) κ-Q-zbiory. Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-Q-zbiorem**, jeśli dla każdego zbioru $B \subseteq A$, istnieje ciąg domkniętych zbiorów $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ taki, że

$$A \cap \bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha = B.$$

Oczywiście κ-Q-zbiór jest κ-σ-zbiorem.

Badamy także uogólnienia właściwości selekcji pokryć dla 2^κ (pierwsze systematyczne badanie właściwości selekcji pokryć na prostej rzeczywistej można znaleźć w [68]).

Rodzina otwartych podzbiorów $\mathcal{U}$ zbioru X jest nazywana **κ-pokryciem** X, jeśli dla każdego $A \in [X]^{<\kappa}$ istnieje $U \in \mathcal{U}$ taki, że $A \subseteq U$. Pokrycie takie jest **γ-κ-pokryciem**, jeśli $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ oraz

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \bigcap_{\alpha<\beta<\kappa} U_\beta.$$

Rodzina wszystkich κ-pokryć zbioru X będzie oznaczana przez $\Omega_\kappa(X)$, natomiast rodzina wszystkich κ-γ-pokryć – przez $\Gamma_\kappa(X)$. Rodzina wszystkich otwartych pokryć o liczności κ zbioru X będzie oznaczana przez $\mathcal{O}_\kappa(X)$. Zbiór X będzie pomijany w tym oznaczeniu, jeśli jest jasny z kontekstu. Wszystkie rozważane pokrycia są właściwe, tj. zbiór X nigdy nie jest elementem swojego pokrycia.

$X \subseteq 2^\kappa$ jest nazywany **κ-γ-zbiorem**, jeśli dla każdego otwartego κ-pokrycia $\mathcal{U}$ zbioru X, istnieje ciąg $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \mathcal{U}^\kappa$ taki, że $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ jest κ-γ-pokryciem.

Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są rodzinami otwartych pokryć zbioru X, powiemy, że ma on **właściowść** $S_1^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jeśli dla każdego ciągu $\langle \mathcal{U}_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \mathcal{A}^\kappa$, istnieje ciąg $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ taki, że $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$, dla każdych $\alpha < \kappa$ oraz $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

Dowodzimy następujących faktów.

Twierdzenie 20 *Zbiór $X \subseteq 2^\kappa$ taki, że $|X| \geq \kappa$ jest κ-γ-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia właściwość $S_1^\kappa(\Omega_\kappa, \Gamma_\kappa)$.*

Pokrycie $\mathcal{U}$ zbioru X jest **właściwie mocy** κ, jeśli dla każdego $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\kappa}$, $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Powiemy, że zbiór X spełnia **właściwość** $U_{<\kappa}^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jeśli dla każdego ciągu $\langle \mathcal{U}_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \mathcal{A}^\kappa$ pokryć właściwie mocy κ, istnieje $\langle \mathcal{V}_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ takie, że $\mathcal{V}_\alpha \in [\mathcal{U}_\alpha]^{<\kappa}$ dla każdego $\alpha < \kappa$, oraz $\{\bigcup \mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

Zbiór X ma **właściowość κ-Hurewicza**, jeśli spełnia warunek $U_{<\kappa}^\kappa(\mathcal{O}_\kappa, \Gamma_\kappa)$.

Stwierdzenie 21 *Jeśli X spełnia $S_1^\kappa(\Gamma_\kappa, \Gamma_\kappa)$, to ma właściwość κ-Hurewicza.*

Wobec tego, każdy κ-γ-zbiór ma właściowość κ-Hurewicza. Z drugiej strony, dowodzimy, że każdy zbiór λ-κ-Łuzina nie ma takiej właściwości.

Stwierdzenie 22 *Jeśli $\kappa < \lambda \leq 2^\kappa$, oraz $L \subseteq 2^\kappa$ jest zbiorem λ-κ-Łuzina, to L nie ma właściwości κ-Hurewicza.*

Z drugiej strony, ma on właściwość κ-Mengera. Zbiór ma **właściwość κ-Mengera**, jeśli spełnia warunek $U_{<\kappa}^\kappa(\mathcal{O}_\kappa, \mathcal{O}_\kappa)$.

Stwierdzenie 23 *Niech $L \subseteq 2^\kappa$ będzie zbiorem Łuzina na κ. Wtedy L ma właściwość κ-Mengera.*

Zbiór ma **właściwość κ-Rothbergera**, jeśli spełnia warunek $S_1^\kappa(\mathcal{O}_\kappa, \mathcal{O}_\kappa)$. Oczywiście ta właściwość implikuje właściwość κ-Mengera.

Oczywiście, jeśli zbiór ma właściwość κ-Rothbergera, to jest κ-silnie miary zero.

Stwierdzenie 24 *Jeśli $A \subseteq 2^\kappa$ ma właściowość κ-Rothbergera, to A jest κ-silnie miary zero.*

Prawdziwy jest także następujący fakt.

Stwierdzenie 25 *Jeśli $A \subseteq 2^\kappa$ jest κ^+-skoncentrowany na zbiorze $B \subseteq 2^\kappa$ takim, że $|B| \leq \kappa$, to A ma właściwość κ-Rothbergera.*

W takim razie cała przestrzeń 2^κ nie ma tej właściwości.

Z drugiej strony, dostajemy, co następuje.

Twierdzenie 26 *Każdy κ-γ-zbiór o mocy $\geq \kappa$ ma właściwość κ-Rothbergera.*

W szczególności, cała przestrzeń 2^κ nie może być κ-γ-zbiorem.

W rozdziale 5, badamy w 2^κ odpowiedniki mniej znanych klas specjalnych podzbiorów. Wprowadzamy:

(a) X-małe zbiory, podążając za ideą małycch zbiorów w $\omega_1^{\omega_1}$ zaprezentowaną w [25]. Jeśli $X \subseteq \kappa$, to zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **X-mały**, jeśli istnieje ciąg $\langle a_\alpha \rangle_{\alpha \in X} \in (2^\kappa)^X$ taki, że

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in X} [a_\alpha \upharpoonright \alpha].$$

Warto zauważyć, że A jest $\mathrm{S}\mathcal{N}_\kappa$, jeśli jest X-małym zbiorem dla każdego zbioru $X \in [\kappa]^\kappa$. Niech $\lambda < \kappa$. Powiemy, że zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **λ-X-mały** dla pewnego zbioru $X \subseteq \kappa$, jeśli istnieje $\langle a_{\alpha,\beta} \rangle_{\alpha \in X, \beta < \lambda} \in ((2^\kappa)^X)^\lambda$ taki, że

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in X} \bigcup_{\beta < \lambda} [a_{\alpha,\beta} \upharpoonright \alpha].$$

Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ nazywany jest **małym w** 2^κ, jeśli istnieją $\lambda < \kappa$ takie, że A jest λ-$\{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$-małym zbiorem. Oczywiście każdy zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ taki, że $|A| < \kappa$ jest mały w 2^κ.

Dowodzimy następujących właściwości tej klasy zbiorów.

Stwierdzenie 27 *Niech $A \subseteq 2^\kappa$ będzie małym zbiorem w 2^κ. Wtedy $A \in S\mathcal{N}_\kappa$.*

Stwierdzenie 28 *Załóżmy $\diamondsuit_\kappa$. Jeśli C jest domkniętym nieograniczonym podzbiorem κ, to 2^κ jest C-małym zbiorem.*

Stwierdzenie 29 *Załóżmy, że $V = L$. Wtedy 2^κ jest X-mały dla każdego stacjonarnego zbioru $X \subseteq \kappa$.*

Pokazujemy także, że każdy zbiór mały w 2^κ jest nigdzie gęsty.

Stwierdzenie 30 *Każdy zbiór mały w 2^κ jest nigdzie gęsty.*

Lecz odwrotna implikacja nie zachodzi.

Stwierdzenie 31 *Istnieje nigdzie gęsty zbiór $A \subseteq 2^\kappa$, który nie jest κ-silnie miary zero.*

(b) zbiory addytywnie κ-pierwszej kategorii (zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ nazwiemy **addytywnie κ-pierwszej kategorii**, jeśli dla każdego κ-pierwszej kategorii zbioru F, $A + F$ jest także κ-pierwszej kategorii), i dowodzimy kombinatorycznej charakteryzacji takich zbiorów dla silnie nieosiągalnej liczby kardynalnej κ.

Stwierdzenie 32 *Załóżmy, że κ jest silnie nieosiągalną liczbą kardynalną, oraz $X \subseteq 2^\kappa$. Wtedy X jest addytywnie κ-pierwszej kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rosnącego ciągu $\langle \xi_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ istnieje ciąg $\langle \eta_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ oraz $z \in 2^\kappa$, takie, że*

$$X \subseteq \left\{x \in 2^\kappa : \exists_{\alpha<\kappa} \forall_{\alpha<\beta<\kappa} \exists_{\gamma<\kappa} \left(\eta_\beta \leq \xi_\gamma < \xi_{\gamma+1} \leq \eta_{\beta+1} \wedge \forall_{\xi_\gamma \leq \delta < \xi_{\gamma+1}} x(\delta) = z(\delta)\right)\right\}.$$

Ta charakteryzacja implikuje, że każdy zbiór addytywnie κ-pierwszej kategorii jest κ-doskonale κ-pierwszej kategorii.

Stwierdzenie 33 *Załóżmy, że κ jest silnie nieosiągalną liczbą kardynalną. Wtedy każdy zbiór addytywnie κ-pierwszej kategorii jest κ-doskonale κ-pierwszej kategorii.*

(c) zbiory κ-CR_0 (uogólnienie pojęcia zbiorów CR_0 zaproponowanych w [64]). Dla $\alpha < \kappa$, $s \in 2^\alpha$ oraz $S \in [\kappa \setminus \alpha]^\kappa$, niech

$$[s, S] = \{x \in 2^\kappa : s^{-1}[\{1\}] \subseteq x^{-1}[\{1\}] \subseteq s^{-1}[\{1\}] \cup S \wedge |x^{-1}[\{1\}] \cap S| = \kappa\}.$$

Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **zbiorem κ-CR_0**, jeśli dla każdego $\alpha < \kappa$, $s \in 2^\alpha$ oraz $S \in [\kappa \setminus \alpha]^\kappa$, istnieje $S' \in [S]^\kappa$ taki, że $[s, S'] \cap A = \varnothing$.

W szczególności dowodzimy, co następuje.

Stwierdzenie 34 *Załóżmy, że κ jest słabo nieosiągalną liczbą kardynalną. Wtedy każdy κ-γ-zbiór, który nie jest domknięty w 2^κ jest κ-CR_0.*

Z drugiej strony, nie jesteśmy w stanie określić addytywności klasy zbiorów κ-CR_0.

(d) κ-T'-zbiory (uogólnienie pojęcia T'-zbiorów, patrz [55], a także [66]). Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest nazywany **κ-T'-zbiorem** jeśli istnieje ciąg liczb kardynalnych $\langle \lambda_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ taki, że dla każdego rosnącego ciągu $\langle \delta_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$, w którym $\delta_0 = 0$ oraz $\delta_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \delta_\beta$ dla granicznych liczb α, istnieje ciąg $\langle \eta_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ oraz zbiory

$$H_\alpha \in \left[2^{\delta_{\eta_\alpha+1} \setminus \delta_{\eta_\alpha}}\right]^{\leq \lambda_{\eta_\alpha}},$$

dla każdego $\alpha < \kappa$ takie, że

$$A \subseteq \{x \in 2^\kappa : \forall_{\beta<\kappa} \exists_{\beta<\alpha<\kappa} x \restriction (\delta_{\eta_\alpha+1} \setminus \delta_{\eta_\alpha}) \in H_\alpha\}.$$

Dowodzimy różnych charakteryzacji tego pojęcia. Klasa κ-T'-zbiorów stanowi ideał.

Stwierdzenie 35 *Załóżmy, że κ jest słabo nieosiągalną liczbą kardynalną. Wtedy klasa κ-T'-zbiorów stanowi κ^+-zupełny ideał podzbiorów 2^κ.*

Ponadto, algebraiczna suma dwóch κ-T'-zbiorów jest ciągle κ-T'-zbiorem.

Stwierdzenie 36 *Jeśli $A, B \subseteq 2^\kappa$ są κ-T'-zbiorami, to $A+B$ jest także κ-T'-zbiorem.*

Dostajemy także następujące związki z innymi klasami specjalnych podzbiorów.

Stwierdzenie 37 *Załóżmy, że κ jest silnie nieosiągalną liczbą kardynalną. Wtedy każdy κ-γ-zbiór jest κ-T'-zbiorem.*

Stwierdzenie 38 *Załóżmy, że κ jest silnie nieosiągalną liczbą kardynalną. Wtedy każdy κ-T'-zbiór jest addytywnie κ-pierwszej kategorii.*

Wobec tego, jeśli κ jest silnie nieosiągalną liczbą kardynalną, każdy κ-γ-zbiór jest addytywnie κ-pierwszej kategorii. Przy pewnych dodatkowych założeniach, tej implikacji nie można odwrócić.

(e) κ-v_0-zbiory (uogólnienie pojęcia v_0-zbiorów, które były badane w [39]). κ-Doskonały zbiór P jest **κ-doskonałym zbiorem Silvera**, jeśli dla każdego $\alpha < \kappa$ oraz dowolnego $i \in \{0,1\}$,

$$\exists_{s \in 2^\alpha \cap T_P} s^\frown i \in T_P \Rightarrow \forall_{s \in 2^\alpha \cap T_P} s^\frown i \in T_P.$$

Powiemy, że zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-v_0-zbiorem**, jeśli dla każdego κ-doskonałego zbioru Silvera $P \subseteq 2^\kappa$, istnieje κ-doskonały zbiór Silvera $Q \subseteq P$ taki, że $A \cap Q = \varnothing$. Pojęcie κ-v_0 zbiorów było rozważane w [42].

W mojej rozprawie badam związki tej klasy zbiorów z innymi klasami specjalnych podzbiorów w 2^κ.

Stwierdzenie 39 *Załóżmy, że κ jest słabo zwartą liczbą kardynalną. Wtedy każdy κ-doskonale κ-pierwszej kategorii zbiór w 2^κ jest κ-v_0-zbiorem.*

Stwierdzenie 40 *Każdy κ-silnie miary zero zbiór w 2^κ jest κ-v_0-zbiorem.*

Pozostawiam, jako temat do dalszych badań klasy κ-l_0-zbiorów oraz κ-m_0-zbiorów odpowiadające odpowiednio forsingom Lavera i Millera (będące uogólnieniami pojęć, które były badane w [40]).

W rozdziale 6, wprowadzamy i badamy pojęcia zbieżności κ-ciągów funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$. Rozważamy κ-jednostajną zbieżność, κ-quasi-normalną zbieżność oraz κ-punktową zbieżność.

Ciąg $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$ jest **κ-punktowo zbieżny** do funkcji $f\colon 2^\kappa \to 2^\kappa$ ($f_\alpha \to_\kappa f$) na zbiorze $A \subseteq 2^\kappa$, jeśli

$$\forall_{x \in A} \forall_{\beta<\kappa} \exists_{\gamma<\kappa} \forall_{\gamma \leq \alpha < \kappa} f_\alpha(x) \in [f(x) \restriction \beta].$$

Podobnie powiemy, że ciąg funkcji **zbiega κ-jednostajnie** do $f\colon 2^\kappa \to 2^\kappa$ ($f_\alpha \rightrightarrows_\kappa f$) na zbiorze $A \subseteq 2^\kappa$, jeśli

$$\forall_{\beta<\kappa}\exists_{\gamma<\kappa}\forall_{x\in A}\forall_{\gamma\leq\alpha<\kappa} f_\alpha(x) \in [f(x)\restriction\beta].$$

W końcu powiemy, że ciąg $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$ **zbiega κ-quasi-normalnie** do funkcji $f\colon 2^\kappa \to 2^\kappa$ ($f_\alpha \xrightarrow{QN}_\kappa f$) na $A \subseteq 2^\kappa$, jeśli istnieje nieograniczony niemalejący ciąg $\langle \xi_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ taki, że

$$\forall_{x\in A}\exists_{\beta<\kappa}\forall_{\beta\leq\alpha<\kappa} f_\alpha(x) \in [f(x)\restriction\xi_\alpha].$$

Poszczególne rodzaje zbieżności łączą implikacje, podobnie jak w standardowym przypadku.

Stwierdzenie 41 *Jeśli ciąg $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$ zbiega κ-jednostajnie do $f\colon 2^\kappa \to 2^\kappa$, to $f_\alpha \xrightarrow{QN}_\kappa f$.*

Stwierdzenie 42 *Jeśli ciąg $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$ zbiega κ-quasi-normalnie do funkcji $f\colon 2^\kappa \to 2^\kappa$, to $f_\alpha \to_\kappa f$.*

Podaję również przykłady ciągów funkcji, które rozróżniają te rodzaje zbieżności. Podobnie, jak w standardowym przypadku, mamy następujący fakt.

Stwierdzenie 43 *Niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, oraz $f\colon 2^\kappa \to 2^\kappa$. Następujące warunki są równoważne*

(1) $f_\alpha \xrightarrow{QN}_\kappa f$ on $A \subseteq 2^\kappa$,

(2) istnieje ciąg $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{P}(2^\kappa))^\kappa$ taki, że $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ i dla każdego $\beta < \kappa$, $f_\alpha \rightrightarrows_\kappa f$ na A_β,

(3) istnieje ciąg $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{P}(2^\kappa))^\kappa$ taki, że $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, $A_\alpha \subseteq A_\beta$ dla każdego $\alpha < \beta < \kappa$, $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha = A_\beta$ dla każdej granicznej liczby porządkowej $\beta < \kappa$ oraz dla każdego $\beta < \kappa$, $f_\alpha \rightrightarrows_\kappa f$ on A_β.

Z drugiej strony, dowodzimy następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 44 *Niech $A \subseteq 2^\kappa$, oraz $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ dla $\lambda < \mathfrak{b}_\kappa$. Jeśli ciąg $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ funkcji $A \to 2^\kappa$ zbiega κ-quasi normalnie na A_α to $f\colon A \to 2^\kappa$, dla każdego $\alpha < \lambda$, to $f_\alpha \xrightarrow{QN}_\kappa f$ na A.*

W końcu, dowodzimy, że κ-jednostajnie zbieżny ciąg ciągłych funkcji zbiega do ciągłej funkcji.

Stwierdzenie 45 *Niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, oraz $A \subseteq 2^\kappa$. Załóżmy, że $f_\alpha \rightrightarrows_\kappa f$ na A, gdzie $f\colon A \to 2^\kappa$. Wtedy f jest ciągła na A.*

Badamy także specjalne podzbiory 2^κ powiązane ze pojęciem zbieżności ciągu funkcji, tj. κ-QN-zbiory, κ-wQN-zbiory i κ-mQN-zbiory.

Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-QN-zbiorem,** jeśli każdy ciąg $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ ciągłych funkcji $A \to 2^\kappa$ taki, że $f_\alpha \to_\kappa \mathbf{0}$ na A, zbiega także κ-quasi-normalnie ($f_\alpha \xrightarrow{QN}_\kappa \mathbf{0}$ na A).

Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-słabo QN-zbiorem (κ-wQN-zbiorem),** jeśli dla każdego ciągu $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ ciągłych funkcji $A \to 2^\kappa$, takich, że $f_\alpha \to_\kappa \mathbf{0}$ on A, istnieje rosnący ciąg $\langle \xi_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ taki, że $f_{\xi_\alpha} \xrightarrow{QN}_\kappa \mathbf{0}$ na A.

Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **κ-mQN-zbiorem,** jeśli dla każdego ciągu $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ ciągłych funkcji $A \to 2^\kappa$, takich, że $f_\alpha \to_\kappa \mathbf{0}$ na A, i dla każdego $x \in A$ oraz $\alpha < \beta < \kappa$

$$\bigcup\{\gamma < \kappa \colon \forall_{\delta<\gamma} f_\alpha(x)(\delta) = 0\} \leq \bigcup\{\gamma < \kappa \colon \forall_{\delta<\gamma} f_\beta(x)(\delta) = 0\},$$

zbiega także κ-quasi-normalnie ($f_\alpha \xrightarrow{QN}_\kappa \mathbf{0}$ na A).

W mojej rozprawie przedstawiam właściwości tych klas oraz dowodzę, że każdy κ-wQN-zbiór jest κ-doskonale κ-pierwszej kategorii.

Stwierdzenie 46 *Jeśli $X \subseteq 2^\kappa$ jest κ-wQN-zbiorem, to X jest κ-doskonale κ-pierwszej kategorii.*

Następnie charakteryzujemy κ-wQN-zbiory κ-QN-zbiory przy pomocy właściwości selekcji κ-ciągów.

Twierdzenie 47 *Następujące warunki są równoważne.*

(1) X jest κ-wQN-zbiorem,

(2) $C_p^\kappa(X)$ ma właściwość selekcji κ-ciągów,

(3) $C_p^\kappa(X)$ ma właściwość $\kappa - (\alpha_2)$,

(4) $C_p^\kappa(X)$ ma właściwość $\kappa - (\alpha_3)$,

(5) $C_p^\kappa(X)$ ma właściwość $\kappa - (\alpha_4)$.

Twierdzenie 48 *Następujące warunki są równoważne.*

(1) X jest κ-QN-zbiorem,

(2) $C_p^\kappa(X)$ ma właściwość $\kappa - (\alpha_1)$.

W powyższych twierdzeniach $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ to następujące właściwości. Jeśli dla każdego systemu $\langle f_{\alpha,\beta} \rangle_{\alpha,\beta<\kappa} \in (C_p^\kappa(X))^{\kappa\times\kappa}$, takie, że dla każdego $\alpha < \kappa$, $\langle f_{\alpha,\beta} \rangle_{\beta<\kappa}$ zbiega κ-punktowo do $\mathbf{0}$, istnieje $\langle g_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in (C_p^\kappa(X))^\kappa$, takie, że $g_\alpha \to_I \mathbf{0}$, oraz

- dla każdego $\alpha < \kappa$,
$$|\{f_{\alpha,\beta} \colon \beta \in \kappa\} \setminus \{g_\beta \colon \beta < \kappa\}| < \kappa,$$
to $C_p^\kappa(X)$ ma **właściwość** $\kappa - (\alpha_1)$,

- dla każdego $\alpha < \kappa$,
$$|\{f_{\alpha,\beta} \colon \beta \in \kappa\} \cap \{g_\beta \colon \beta < \kappa\}| = \kappa,$$
to $C_p^\kappa(X)$ ma **właściwość** $\kappa - (\alpha_2)$,

- $$\left|\{\alpha < \kappa : \left|\{f_{\alpha,\beta} : \beta \in \kappa\} \cap \{g_\beta : \beta < \kappa\}\right| = \kappa\}\right| = \kappa,$$

  to $C_p^\kappa(X)$ ma **właściwość** $\kappa - (\alpha_3)$,

- $$\left|\{\alpha < \kappa : \{f_{\alpha,\beta} : \beta \in \kappa\} \cap \{g_\beta : \beta < \kappa\} \neq \varnothing\}\right| = \kappa,$$

  to $C_p^\kappa(X)$ ma **właściwość** $\kappa - (\alpha_4)$.

Natomiast $C_p^\kappa(X)$ ma **właściwość κ-selekcji ciągów**, jeśli dla każdego systemu ciągów $\langle f_{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta<\kappa} \in (C_p^\kappa(X))^{\kappa\times\kappa}$ takiego, że $\langle f_{\alpha,\beta}\rangle_{\beta<\kappa}$ zbiega κ-punktowo do $\mathbf{0}$ dla każdego $\alpha < \kappa$, istnieją ciągi $\langle \xi_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}, \langle \delta_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ takie, że $f_{\xi_\alpha,\delta_\alpha} \to_\kappa \mathbf{0}$.

Relacja pomiędzy tymi klasami specjalnych podzbiorów a właściwościami selekcji pokryć będzie przedmiotem dalszych badań.

Następnie, w rozdziale 7, badamy pojęcie κ-I-zbieżności oraz κ-I^*-zbieżności ciągu punktów z 2^κ dla ideału I na κ.

Jeśli I jest ideałem na κ, to powiemy, że ciąg $\langle x_\alpha\rangle \in (2^\kappa)^\kappa$ **κ-zbiega do punktu** $x \in 2^\kappa$ **względem ideału** I ($x_\alpha \to_{\kappa-I} x$), jeśli dla każdego $\beta < \kappa$

$$\{\alpha < \kappa : x_\alpha \notin [x \upharpoonright \beta]\} \in I.$$

Podobnie, ciąg $\langle x_\alpha\rangle \in (2^\kappa)^\kappa$ **κ-I^*-zbiega do punktu** $x \in 2^\kappa$ ($x_\alpha \to_{\kappa-I^*} x$), jeśli istnieje zbiór $B \in I$ taki, że $x_{\eta_\alpha} \to_I x$, gdzie $\{\eta_\alpha : \alpha < \kappa\} = \kappa \setminus B$ jest rosnącym indeksowaniem.

Ideał I na κ jest **κ-generowany**, jeśli istnieje ciąg $\langle C_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ elementów I taki, że dla każdego $A \in I$, istnieje $\alpha < \kappa$, że $A \subseteq C_\alpha$.

Jeśli $\lambda \leq \kappa$, powiemy, że ideał I na κ jest **λ-zupełny**, jeśli dla każdego $\mu < \lambda$, oraz $\mathcal{A} \in [I]^\mu$, $\bigcup \mathcal{A} \in I$.

Zaczynamy od udowodnienia pewnych prostych właściowości. Oczywiście I^*-zbieżność implikuje I-zbieżność, ale implikację tę można odwrócić tylko, jeśli I jest κ-P-ideałem.

Stwierdzenie 49 *Niech I będzie κ-zupełnym ideałem κ. Następujące warunki są równoważne:*

(1) Dla każdego ciągu $\langle x_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (2^\kappa)^\kappa$, i $x \in 2^\kappa$, $x_\alpha \to_{\kappa-I} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_\alpha \to_{\kappa-I^*} x$.

(2) I jest κ-P-ideałem.

Gdzie **κ-P-ideały** mają następujące właściwości.

Stwierdzenie 50 *Niech I będzie ideałem na κ. Następujące warunki są równoważne:*

(1) Dla każdego ciągu $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in I^\kappa$, istnieje $B \in I$ taki, że dla każdego $\alpha < \kappa$, $|A_\alpha \setminus B| < \kappa$.

(2) Dla każdego ciągu $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in I^\kappa$, istnieje ciąg $\langle B_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ taki, że $|A_\alpha \triangle B_\alpha| < \kappa$ dla każdego $\alpha < \kappa$ oraz $\bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha \in I$.

Stwierdzenie 51 *Jeśli I jest κ-zupełnym ideałem na κ, to jest κ-P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy*

(3) Dla każdego ciągu $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in I^\kappa$ parami rozłącznych zbiorów, istnieje ciąg $\langle B_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ taki, że $|A_\alpha \triangle B_\alpha| < \kappa$ dla każdego $\alpha < \kappa$, oraz $\bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha \in I$.

Rozważam także właściowści związane z właściwością κ-I-Cauchy'ego.

Pojęcia κ-I-zbieżności oraz κ-I^*-zbieżności ciągu punktów 2^κ pozwala rozważać różne rodzaje zbieżności ideałowej ciągu funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$.

Ciąg $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$ **względem ideału I na κ na zbiorze** $A \subseteq 2^\kappa$:

ideałowo κ-punktowo, $f_\alpha \to_{\kappa-I} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\xi<\kappa} \forall_{x\in A} \{\alpha < \kappa : f_\alpha(x) \notin [f(x)\restriction\xi]\} \in I,$$

ideałowo κ-quasi-normalnie, $f_\alpha \xrightarrow{QN}_{\kappa-I} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\langle \xi_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$, który jest κ-I-nieograniczony, oraz

$$\forall_{x\in A} \{\alpha < \kappa : f_\alpha(x) \notin [f(x)\restriction\xi_\alpha]\} \in I,$$

ideałowo κ-jednostajnie, $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\xi\in\kappa} \exists_{B\in I} \forall_{x\in A} \{\alpha < \kappa : f_\alpha(x) \notin [f(x)\restriction\xi]\} \subseteq B.$$

κ-I^*-punktowo, $f_\alpha \to_{\kappa-I^*} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in A$, istnieje $M = \{m_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \kappa$, $m_\beta \geq m_\alpha$ dla $\alpha < \beta < \kappa$ takie, że $\kappa \setminus M \in I$, oraz $f_{m_\alpha}(x) \to_\kappa f(x)$ na A,

κ-I^*-quasi-normalnie, $f_\alpha \xrightarrow{QN}_{\kappa-I^*} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $M = \{m_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \kappa$, $m_\beta \geq m_\alpha$ oraz dla każdego $\alpha < \beta < \kappa$ takie, że $\kappa \setminus M \in I$ oraz $f_{m_\alpha} \xrightarrow{QN}_\kappa f$ na A,

κ-I^*-jednostajnie, $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I^*} f$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $M = \{m_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \kappa$, $m_\beta \geq m_\alpha$ dla każdego $\alpha < \beta < \kappa$ takie, że $\kappa \setminus M \in I$ oraz $f_{m_\alpha} \rightrightarrows_\kappa f$ na A.

W powyższych definicjach, ciąg $\langle \xi_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in \kappa^\kappa$ jest **κ-I-nieograniczony**, jeśli dla każdego $\delta < \kappa$,

$$\{\alpha < \kappa : \xi_\alpha < \delta\} \in I.$$

W szczególności, κ-I-jednostajna zbieżność implikuje κ-I-quasi-normalną zbieżność, która za to implikuje κ-I-punktową zbieżność. Podobnie, κ-I^*-jednostajna zbieżność implikuje κ-I^*-quasi-normalną zbieżność, która to implikuje κ-I^*-punktową zbieżność. Wszystkie te implikacje nie mogą zostać odwrócone.

Dowodzę także następujących właściwości związanych ze zbieżnością.

Stwierdzenie 52 *Niech I będzie κ-zupełnym ideałem na κ. Jeśli ciąg $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{P}(2^\kappa))^\kappa$ jest taki, że $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, $A_\alpha \subseteq A_\beta$ dla każdego $\alpha < \beta < \kappa$, $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha = A_\beta$ dla granicznej liczby porządkowej $\beta < \kappa$ oraz dla każdego $\beta < \kappa$, $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I} f$ na A_β, to $f_\alpha \xrightarrow{QN}_{\kappa-I} f$ na całym zbiorze A.*

Implikacja odwrotna zachodzi dla κ-generowanych ideałów.

Stwierdzenie 53 *Niech I będzie κ-generowanym, κ-zupełnym ideałem na κ. Jeśli $f_\alpha \xrightarrow{QN}_{\kappa-I} f$ na $A \subseteq 2^\kappa$, to istnieje ciąg $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{P}(2^\kappa))^\kappa$ taki, że $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ oraz dla każdego $\beta < \kappa$, $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I} f$ na A_β.*

Podobnie otrzymujemy następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 54 *Jeśli I jest κ-dopuszczalnym κ-P-ideałem na κ oraz $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{P}(2^\kappa))^\kappa$ jest takie, że $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, $A_\alpha \subseteq A_\beta$ dla każdego $\alpha < \beta < \kappa$, $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha = A_\beta$ dla granicznej liczby porządkowej $\beta < \kappa$, oraz dla każdego $\beta < \kappa$, $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I^*} f$ na A_β, to $f_\alpha \xrightarrow{QN}_{\kappa-I^*} f$ na całym zbiorze A.*

Ta implikacja może być odwrócona nie tylko dla κ-P-ideałów.

Stwierdzenie 55 *Niech I będzie κ-zupełnym ideałem na κ. Jeśli $f_\alpha \xrightarrow{QN}_{\kappa-I^*} f$ na $A \subseteq 2^\kappa$, to istnieje ciąg $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{P}(2^\kappa))^\kappa$ taki, że $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ oraz dla każdego $\beta < \kappa$, $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I^*} f$ na A_β.*

W końcu dowodzimy, że ciągłość jest zachowana w jednostajnej granicy ciągu funkcji względem ideału.

Stwierdzenie 56 *Niech I będzie ideałem na κ oraz niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, oraz $A \subseteq 2^\kappa$. Załóżmy, że $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I} f$ na A, gdzie $f\colon A \to 2^\kappa$. Wtedy f jest ciągła na A.*

Stwierdzenie 57 *Niech I będzie ideałem na κ oraz niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, oraz $A \subseteq 2^\kappa$. Załóżmy, że $f_\alpha \rightrightarrows_{\kappa-I^*} f$ na A, gdzie $f\colon A \to 2^\kappa$. Wtedy f jest ciągła na A.*

Rozważam także κ-(I,J)-QN-zbiory oraz κ-(I,J)-wQN-zbiory oraz dowodzę ich podstawowych właściwości. Niemniej, klasy te będą przedmiotem dalszych moich badań.

W końcowym rozdziale (rozdział 8) rozważam możliwość wprowadzenia twierdzenia Jegorowa w 2^κ. By to osiągnąć, niezbędny jest odpowiednik miary w 2^κ. Ponieważ nie ma satysfakcjonującego pomysłu, jak taką miarę zdefiniować, proponuję pojęcie κ-proto-miary o właściwościach, które wystarczają do dowiedzenia odpowiednika twierdzenia Jegorowa.

Trójka $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ będzie nazywana **κ-proto-miarą**, jeśli

(1) $\langle \mathbb{L}, \leq\rangle$ jest porządkiem liniowym z najmniejszym elementem .

(2) $\mu\colon \mathcal{B}_\kappa \to \mathbb{L}$ jest funkcją zdefiniowaną na rodzinie κ-borelowskich podzbiorów 2^κ z wartościami w $\mathbb{L}$.

(3) Jeśli ciąg $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (\mathcal{B}_\kappa)^\kappa$ jest taki, że $\bigcap_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \varnothing$, i dla każdych $\alpha < \alpha' < \kappa$, $A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$, to dla każdego $\xi \in \mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$, istnieje $\delta \in \kappa$ taka, że $\mu(A_\delta) < \xi$,

(4) $L\colon (\mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}) \times \kappa \to \mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$,

(5) Dla każdego $\xi \in \mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$, jeśli $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa} \in (B_\kappa)^\kappa$ jest takie, że $\mu(A_\alpha) \leq L(\xi, \alpha)$ dla każdego $\alpha < \kappa$, to
$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\right) \leq \xi.$$

Otrzymujemy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 58 *Niech $\langle \mathbb{L}, \mu L\rangle$ będzie κ-proto-miarą, oraz niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem κ-mierzalnych funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, który jest κ-punktowo zbieżny na $X \in \mathcal{B}_\kappa$ do $\mathbf{0}$, oraz niech $\xi \in \mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$. Wtedy istnieje zbiór $A \subseteq X$ taki, że $A \in \mathcal{B}_\kappa$ oraz $\mu(X \setminus A) \le \xi$ oraz taki, że ciąg zbiega κ-jednostajnie na A.*

Twierdzenie 59 *Przypuśćmy, że I jest κ-generowanym κ-dopuszczalnym ideałem κ, oraz $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ jest κ-proto-miarą. Niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem κ-mierzalnych funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, który κ-I-punktowo zbiega na 2^κ do $\mathbf{0}$, oraz niech $\xi \in \mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$. Wtedy istnieje zbiór $A \in \mathcal{B}_\kappa$ taki, że $\mu(2^\kappa \setminus A) \le \xi$ oraz ciąg zbiega κ-I-jednostajnie na A.*

Twierdzenie 60 *Przypuśćmy, że I jest κ-generowanym κ-dopuszczalnym ideałem κ, oraz $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ jest κ-proto-miarą. Niech $\langle f_\alpha\rangle_{\alpha<\kappa}$ będzie ciągiem κ-mierzalnych funkcji $2^\kappa \to 2^\kappa$, który κ-I^*-punktowo zbiega na 2^κ do $\mathbf{0}$, oraz niech $\xi \in \mathbb{L} \setminus \{\min \mathbb{L}\}$. Wtedy istnieje zbiór $A \in \mathcal{B}_\kappa$ taki, że $\mu(2^\kappa \setminus A) \le \xi$ oraz ciąg zbiega κ-I^*-jednostajnie na A.*

κ-Proto-miara $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ jest **ciągła**, jeśli dla każdego $x \in 2^\kappa$, $\mu(\{x\}) = \min \mathbb{L}$. Jest **rosnąca**, jeśli dla każdych $A, B \in \mathcal{B}_\kappa$, takich, że $A \subseteq B$, $\mu(A) \le \mu(B)$. W końcu, jest ona **zawsze dodatnia**, jeśli dla każdego $s \in 2^{<\kappa}$, $\mu([s]) > \min \mathbb{L}$.

Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **miary zero względem** μ, jeśli istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}_\kappa$ taki, że $A \subseteq B$ oraz $\mu(B) = \min \mathbb{L}$. Rodzina wszystkich zbiorów miary zero względem μ w 2^κ jest oznaczana przez $\mathcal{N}_\mu$. Zbiór $A \subseteq 2^\kappa$ jest **μ-mierzalny**, jeśli istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}_\kappa$ taki, że $A \triangle B$ jest miary zero względem μ.

Jeśli $\lambda \le 2^\kappa$ jest liczbą kardynalną, to powiemy, że κ-proto-miara $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ jest **λ-miary zero zupełna**, jeśli dla każdej liczby porządkowej $\beta < \lambda$, oraz ciągu $\langle A_\alpha\rangle_{\alpha<\beta}$ zbiorów miary zero względem μ, $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ jest także miary zero względem μ. κ-Proto-miara jest **dobra miary zero**, jeśli dla każdych $A, B \in \mathcal{B}_\kappa$, jeśli A jest miary zero względem μ, to $\mu(A \cup B) = \mu(B)$.

κ-Proto-miara $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ jest **bazowo niezmiennicza na przesunięcia**, jeśli dla każdego $\alpha < \kappa$, oraz $t, s \in 2^\alpha$, $\mu([s]) = \mu([t])$.

Rozważamy także właściwości κ-proto-miary i dowodzimy, że każdy zbiór κ-silnie miary zero jest miary zero względem μ przy pewnych dodatkowych założeniach.

Stwierdzenie 61 *Załóżmy, że $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ jest rosnącą, ciągłą, dobrą miary zero, κ^+-miary zero zupełną, bazowo niezmienniczą na przesunięcia κ-proto-miarą. Wtedy każdy zbiór κ-silnie miary zero jest miary zero względem μ.*

Stwierdzenie 62 *Niech κ będzie słabo zwartą liczbą kardynalną. Załóżmy, że $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$ rosnącą, ciągłą i dobrą miary zero κ-proto-miarą. Wtedy każdy zbiór κ-silnie miary zero jest miary zero względem μ.*

Mimo że pewne proste κ-proto-miary istnieją, nie byłem w stanie znaleźć bardziej złożonych przykładów. Nie wiem w szczególności, czy istnieje nietrywialna κ-proto-miara $\langle \mathbb{L}, \mu, L\rangle$, która jest

(a) rosnąca, ciągła oraz dobra miary zero.

(b) rosnąca, ciągła oraz κ-miary zero zupełna.

(c) ciągła i taka, że $\mathbb{L} = \mathbb{R}_\kappa$ (gdzie $\mathbb{R}_\kappa$ jest strukturą Sikorskiego-Klaua uogólnionych liczb rzeczywistych ([74], [75], [30], [31], [32], [12] and [10])), oraz taka, że dla każdej granicznej liczby porządkowej $\beta < \kappa$, oraz dowolnego ciągu $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\beta} \in (\mathcal{B}_\kappa)^\beta$ takiego, że dla $\alpha < \alpha' < \beta$, $A_\alpha \subseteq A_{\alpha'}$, mamy

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha\right) = \sup\{\mu(A_\alpha) : \alpha < \beta\}.$$

(d) ciągła oraz taka, że dla każdego $A \subseteq \mathbb{L}$, istnieje $\sup A \in \mathbb{L}$, oraz taka, że dla każdej granicznej liczby porządkowej $\beta < \kappa$, i każdego ciągu $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha<\beta} \in (\mathcal{B}_\kappa)^\beta$ takiego, że dla $\alpha < \alpha' < \beta$, $A_\alpha \subseteq A_{\alpha'}$, mamy

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha\right) = \sup\{\mu(A_\alpha) : \alpha < \beta\}.$$

(e) rosnąca, ciągła i bazowo niezmiennicza ze względu na przesunięcia.

Istnienie takiej κ-proto-miary jest istotnym zagadnieniem w świetle udowodnionych twierdzeń.

Podsumowując, jest możliwe budowanie teorii specjalnych podzbiorów oraz zbieżności w przestrzeni 2^κ, ale często niezbędne wydaje się przyjęcie dodatkowych założeń lub zdefiniowanie pojęć bardziej abstrakcyjnych lub skomplikowanych niż ich klasyczne odpowiedniki. Wobec tego, pozostaje nadal szerokie spektrum możliwości dalszych badań w tym temacie. Przedstawiana rozprawa doktorska stanowi, mam nadzieję, podstawę do takich badań w tych przypadkach.

Literatura

[1] René Baire. *Sur les fonctions de variables réelles.* PhD thesis, La Faculté des Sciences de Paris, 1899.

[2] Marek Balcerzak, Katarzyna Dems, and Andrzej Komisarski. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 328:715–729, 2007.

[3] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. Borel images of sets of reals. *Real Anal. Exchange*, 20:536–558, 1994.

[4] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set theory: on the structure of the real line.* Peters, 1995.

[5] Emile Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, 1898.

[6] Emilie Borel. Sur la classification des ensembles de mesure nulle. *Bull. Soc. Math. France*, 47:97–125, 1919.

[7] Jörg Brendle, Paul Larson, and Stevo Todorčević. Rectangular axioms, perfect set properties and decomposition. *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.*, 33:91–130, 2008.

[8] Zuzana Bukovská. Quasinormal convergence. *Math. Slovaca*, 41:137–146, 1991.

[9] Lev Bukovský. *The structure of the Real Line*, volume 71 of *Monografie matematyczne*. Birkhäuser, 2011.

[10] Andrea Cantini. On non-archimedean structures of D. Klaua. *Math. Nachr.*, 87:35–41, 1979.

[11] Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77:258–262, 1874.

[12] John Cowles and Robert LaGrange. Generalized archimedean fields. *Notre Dame J. Formal Logic*, 24:133–140, 1983.

[13] Akos Császár and Miklos Laczkovich. Discrete and equal convergence. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 10:463–472, 1975.

[14] Pratulananda Das and Debraj Chandra. Spaces not distinguishing pointwise and I-quasinormal convergence. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 54:83–96, 2013.

[15] Fausto Di Biase, Alexander Stokolos, Olof Svensson, and Tomasz Weiss. On the sharpness of the Stolz approach. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31:47–59, 2007.

[16] Dmitri Egorov. Sur les suites des fonctions mesurables. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 152:244–246, 1911.

[17] Sy-David Friedman. The higher descriptive set theory of isomorphism. lecture notes, 2010.

[18] Sy-David Friedman. Invariant descriptive set theory. lecture notes, 2013.

[19] Sy-David Friedman. Cardinal characteristics in the uncountable. lecture notes, 2014.

[20] Sy-David Friedman, Tapani Hyttinen, and Vadim Kulikov. *Generalized Descriptive Set Theory and Classification Theory*, volume 1081 of *Mem. Amer. Math. Soc.* 2014.

[21] Sy-David Friedman and Giorgio Laguzzi. A null ideal for inaccessibles. preprint, 2014.

[22] Frederick Galvin, Jan Mycielski, and Robert Solovay. Strong measure zero sets. *Notices Amer. Math. Soc.*, 26:A–280, 1973.

[23] Edward Grzegorek. Solution to a problem of Banach on σ-fields without continuous measures. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 28:7–10, 1980.

[24] Edward Grzegorek. Always of the first category sets. In *Proceedings of the 12th Winter School on Abstract Analysis, Section of Topology*, volume 6, pages 139–147. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 1984.

[25] Aapo Halko. *Negligible subsets of the generalized Baire space $\omega_1^{\omega_1}$*. PhD thesis, University of Helsinki, 1996.

[26] Aapo Halko and Saharon Shelah. On strong measure zero subsets of ${}^{\kappa}2$. *Fund. Math.*, 170:219–229, 2001.

[27] Henry H. Hung and Stelios Negrepontis. Spaces homeomorphic to $(2^\alpha)_\alpha$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79:143–146, 1973.

[28] Thomas Jech. *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[29] Miroslav Katětov. Products of filters. *Comment. Math. Univ. Caroln.*, 9:173–189, 1968.

[30] Dieter Klaua. Transfinite reelle Zahlenräume. *Wiss. Zeitschr. der Humboldt-Universitat, Berlin, Math. -Nat. R.*, 4:169–172, 1959.

[31] Dieter Klaua. Zur Struktur der reellen Ordinalzahlen. *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Math.*, 6:279–302, 1960.

[32] Dieter Klaua. Rational and real ordinal numbers. In *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, chapter IV.4, pages 259–276. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[33] Michał Korch. Convergence of sequences of functions on the generalized Cantor space 2^κ. in preparation, 2017.

[34] Michał Korch. Generalized Egorov's statement for ideals. *Real Anal. Exchange*, 42(2), 2017. to appear.

[35] Michał Korch. *Measure and convergence: special subsets of the real line and their generalizations.* PhD thesis, Univeristy of Warsaw, 2017. http://duch.mimuw.edu.pl/˜m_korch/wp-content/uploads/2017/09/mk-phd.pdf.

[36] Michał Korch and Tomasz Weiss. On the class of perfectly null sets and its transitive version. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 64:1–20, 2016.

[37] Michał Korch and Tomasz Weiss. Special subsets of the generalized Cantor space 2^κ. in preparation, http://duch.mimuw.edu.pl/˜m_korch/wp-content/uploads/2017/09/special-kappa.pdf, 2017.

[38] Pavel Kostyrko, Tibor Šalát, and Władysław Wilczyński. I-convergence. *Real Anal. Exchange*, 26:669–689, 2000.

[39] Marcin Kysiak, Andrzej Nowik, and Tomasz Weiss. Special subsets of the reals and tree forcing notions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135:2975–2982, 2007.

[40] Marcin Kysiak and Tomasz Weiss. Special subsets of the reals and tree forcing notions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132:251–259, 2004.

[41] Giorgio Laguzzi. *Arboreal Forcing Notions and Regularity Properties of the Real Line.* PhD thesis, Univeristy of Vienna, 2012.

[42] Giorgio Laguzzi. Generalized Silver and Miller measurability. *Math. Logic Quart.*, 61:91–102, 2015.

[43] Giorgio Laguzzi, Benedikt Löwe, and Ilya Sharankou. Questions on generalized Baire spaces. *Math. Logic Quart.*, 62:439–456, 2016.

[44] Richard Laver. On the consistency of Borel's conjecture. *Acta Math.*, 137:151–169, 1976.

[45] Henri Lebesgue. Intégrale, longuer, aire. *Annali di Mat.*, 7:231–359, 1902.

[46] Philipp Lücke, Luca Motto Ros, and Philipp Schlicht. The Hurewicz dichotomy for generalized Baire spaces. *Israel J. Math.*, 216:973–1022, 2016.

[47] Nicolas Lusin. Sur un problème de M. Baire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 158:1258–1261, 1914.

[48] Nicolas Lusin. Sur les ensembles toujours de première catégorie. *Fund. Math.*, 21:114–126, 1933.

[49] Paul Mahlo. Über Teilmengen des Kontinuums von dessen Mächtigkeit. *Sitzungber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig*, 65:283–315, 1913.

[50] Edward Marczewski. Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondabte d'ensembles. *Fund. Math.*, 24:17–34, 1935.

[51] Arnold Miller. Special subsets of the real line. In *Handbook of Set-Theoretic Topology*, chapter 5, pages 201–233. Elsevier, Amsterdam, 1984.

[52] Don Monk and Dana Scott. Additions to some results of Erdös and Tarski. *Fund. Math.*, 53(3):335–343, 1963/1964.

[53] Nikodem Mrożek. Ideal version of Egorov's theorem for analytic P-ideals. *J. Math. Anal. Appl.*, 349:452–458, 2009.

[54] Nikodem Mrożek. *Zbieżność ideałowa ciągów funkcyjnych.* PhD thesis, University of Gdańsk, 2010. (Polish).

[55] Andrzej Nowik. Remarks about a transitive version of perfectly meager sets. *Real Anal. Exchange*, 22:406–412, 1996.

[56] Andrzej Nowik, Marion Scheepers, and Tomasz Weiss. The algebraic sum of sets of real numbers with strong measure zero sets. *J. Symbolic Logic*, 63:301–324, 1998.

[57] Andrzej Nowik and Tomasz Weiss. The algebraic sum of a set of strong mesure zero and a perfectly meager set revisited. *East-West J. Math.*, 2:191–194, 2000.

[58] Andrzej Nowik and Tomasz Weiss. Not every Q-set is perfectly meager in transitive sense. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128:3017–3024, 2000.

[59] Andrzej Nowik and Tomasz Weiss. Strongly meager sets and their uniformly continuous images. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129:265–270, 2001.

[60] Fatih Nurray and William H. Ruckle. Generalized statistical convergence and convergence free spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 245:513–527, 2000.

[61] John C. Oxtoby. *Measure and Category.* Springer-Verlag, 1971.

[62] Janusz Pawlikowski. Products of perfectly meager sets and Lusin's function. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107:811–815, 1989.

[63] Roberto Pinciroli. On the independence of a generalized statement of Egoroff's theorem from ZFC after T. Weiss. *Real Anal. Exchange*, 32(1):225–232, 2006.

[64] Szymon Plewik. On completely Ramsey sets. *Fund. Math.*, 127:216–225, 1986.

[65] Ireneusz Recław. Products of perfectly meagre sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 112:1029–1031, 1991.

[66] Miroslav Repický. A family of permitted trigonometric thin sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125:137–144, 1997.

[67] Miroslav Repický. Ideal generalizations of Egoroff's theorem. preprint, 2017.

[68] Marion Scheepers. Combinatorics of open covers I: Ramsey theory. *Topology Appl.*, 69:31–62, 1996.

[69] Saharon Shelah. A parallel to the null ideal for inaccessible λ. preprint, 2012.

[70] Saharon Shelah and Shani Cohen. Generalizing random real forcing for inaccessible cardinals. preprint, 2016.

[71] Wacław Sierpiński. Sur l'hypothèse continue ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). *Fund. Math.*, 5:177–187, 1924.

[72] Wacław Sierpiński. *Hypothèse du continu*, volume 4 of *Monografie Matematyczne*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, Warszawa-Lwów, 1934.

[73] Wacław Sierpiński and Edward Marczewski. Remarque sur le problème de la mesure. *Fund. Math.*, 26:256–261, 1936.

[74] Roman Sikorski. On an ordered algebraic field. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Clase III*, 41:69–96, 1948.

[75] Roman Sikorski. On algebraic extensions of ordered fields. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 22:173–184, 1949.

[76] Roman Sikorski. Remarks on some topological spaces of high power. *Fund. Math.*, 37:125–136, 1950.

[77] Tomasz Weiss. A note on generalized Egorov's theorem. preprint, 2004.

[78] Tomasz Weiss. On meager additive and null additive sets in Cantor space 2^ω and in $\mathbb{R}$. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 57:91–99, 2009.

[79] Piotr Zakrzewski. Universally meager sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129:1793–1798, 2000.