Autoreferat rozprawy doktorskiej

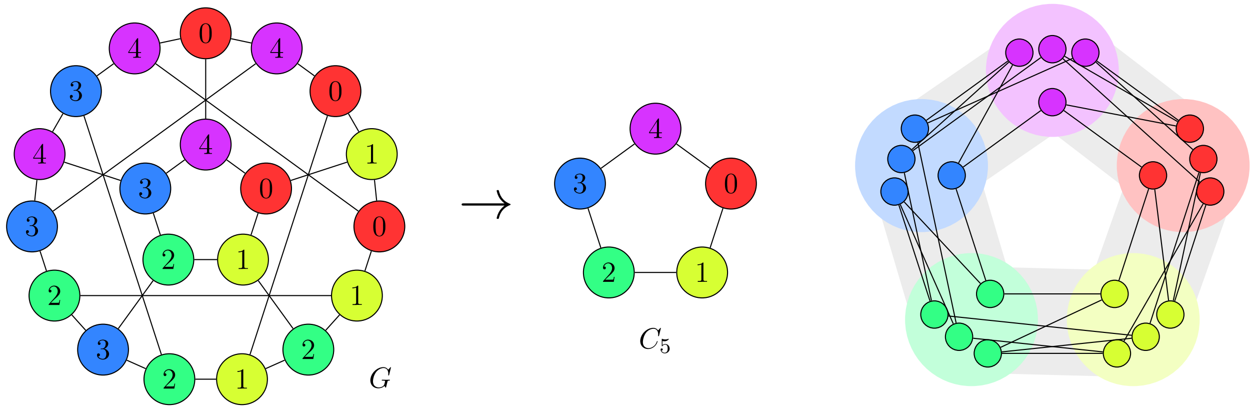
Topologia przestrzeni rozwiązań problemów kombinatorycznych

Marcin Wrochna

1 Wprowadzenie

Tematem rozprawy są kolorowania i homomorfizmy grafów, „ścieżki” między kolorowaniami, hipoteza Hedetniemi'ego o kolorowaniu produktów grafów oraz nowe zastosowania topologii w teorii grafów.

Homomorfizm f z grafu G do grafu H, oznaczany $f : G \to H$, to funkcja ze zbioru wierzchołków $V(G)$ do $V(H)$ taka, że dla każdej krawędzi uv w G, $f(u)f(v)$ jest krawędzią w H. Uogólnia to pojęcie kolorowania, które można zdefiniować jako homomorfizm w klikę K_n) (graf pełny na n wierzchołkach). Homomorfizm w graf H nazywamy więc też H-kolorowaniem; patrz Rysunek 1.

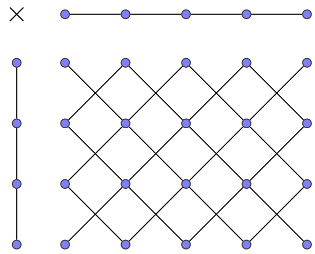


Rysunek 1 Homomorfizm z grafu G do grafu C_5 (cyklu długości 5), przedstawiony jako C_5-kolorowanie G oraz jako „zanurzenie” G w C_5.

Homomorfizmy grafów są zatem badane przez kombinatoryków z podobnych pobudek co klasyczne kolorowania i ich warianty. Służą także do formalnego zdefiniowania idei „pasowania do wzorca” w różnych kontekstach, jak np. w teorii granic grafów [Lov12]. W informatyce ich znaczenie wynika ze spojrzenia na nie jako na problemy spełniania więzów (CSP, *constraint satisfaction problems*) [Bod17; HN08]. Pytanie of istnienie homomorfizmu z G do H można mianowicie przedstawić następująco. Każdemu wierzchołkowi v grafu G odpowiada zmienna, której chcemy przydzielić wartość $f(v)$ ze zbioru $V(H)$. Krawędziom zaś odpowiadają więzy: każda krawędź uv grafu G stawia wymaganie, by para wartości $f(u)$, $f(v)$ była w relacji $E(H)$ (relacji sąsiedztwa wierzchołków w grafie H). Homomorfizm $G \to H$ jest niczym innym jak rozwiązaniem tej instancji CSP. W ogólności problemy spełniania więzów mają więcej relacji w swoich więzach oraz relacje o większej arności, mogą więc wyrażać szeroką gamę problemów kombinatorycznych. Niemniej większość pytań i technik znajdujących zastosowanie w ogólnych problemach spełniania więzów można już postawić i zaprezentować na homomorfizmach grafów, stąd też nasze nimi zainteresowanie.

Pierwotnym motywem i być może główną zaletą badania homomorfizmów jest jednak ich bogata struktura, w sensie teorii porządków i teorii kategorii, która daje więcej narzędzi, użytecznych nawet w pytaniach dot. klasycznych kolorowań [HN04]. Zaczynając najprościej, możemy rozważyć następującą relację: piszemy $G \to H$ gdy istnieje jakikolwiek homomorfizm z G do H. Definiuje to praporządek na grafach (inaczej mówiąc częściowy porządek na klasach równoważności grafów, gdzie dwa grafy nazywamy *homomorficznie równoważnymi* jeśli $G \to H$ oraz $H \to G$). Gdybyśmy zachcieli badać nie tylko istnienie homomorfizmów, ale też ich złożenia, jedyność, itp., rozważalibyśmy *kategorię grafów*, gdzie obiektami są grafy, zaś strzałkami sa homomorfizmy.

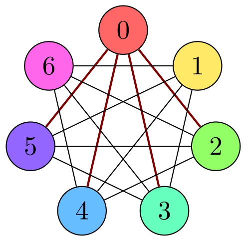
Porządek grafów ma strukturę kraty rozdzielnej: suma rozłączna dwóch grafów daje ich kres górny (najmniejsze z ograniczeń górnych), tzn. $G \uplus H \to I$ wtw gdy $G \to I$ oraz $H \to I$ (dla wszystkich grafów G, H, I). Dualnie, kres dolny (największe z ograniczeń dolnych) jest dany przes produkt tensorowy grafów $G \times H$, zdefiniowany jako graf na zbiorze wierzchołków $V(G) \times V(H)$, z krawędzią między (g, h) a (g', h') gdy gg' i hh' są krawędziami odpowiednio G i H (jak na rysunku). Nie trudno sprawdzić, że produkt spełnia równoważność: $I \to G \times H$ wtw gdy $I \to G$ oraz $I \to H$. Istotnie, własność ta definiuje produkt tensorowy (z dokładnością do homomorficznej równoważności; spełnia też kategoryjną definicję produktu, który jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu grafów). Uzasadnione jest więc nazywanie go po prostu *produktem*, przynajmniej w kontekście homomorfizmów.



$P_4 \times P_5$

Kieruje nas to wprost ku pytaniu centralnemu dla tej rozprawy: **które grafy są „pierwsze”?** To jest, będziemy nazywać graf K *multiplikatywnym* jeśli nie można go rozłożyć (z dokładnością do homomorficznej równoważności) jako nie-trywialny produkt dwóch grafów (tj. taki, że G ani H nie są same już równoważne K). Prostsza lecz równoważna definicja mówi, że K jest multiplikatywne wtw gdy $G \times H \to K$ implikuje $G \to K$ lub $H \to K$, dla wszystkich grafów G, H. W teorii krat takie elementy K nazywa się $\wedge$-pierwszymi (*meet-prime* albo *meet-irreducible*).

Pytanie to Hedetnimi zadał już ponad 50 lat temu: postawił hipotezę, że wszystkie kliki K_n są multiplikatywne [Hed66]. Hipoteza ta jest równoważna łudząco prostemu stwierdzeniu, że $\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$, dla wszystkich grafów G, H. Mimo lat badań, znane są jedynie bardzo częściowe wyniki. W szczególności jedyne grafy, o których wiemy że są multiplikatywne to K_3, ogólniej cykle nieparzystej długości C_n i jeszcze ogólniej kliki okrężne (*circular clique*) $K_{p/q}$ dla $\frac{p}{q} < 4$ (przykład na rysunku obok). Dowody przedstawili odpowiednio El-Zahar i Sauer [ES85], Häggkvist et al. [Häg+88] oraz Tardif [Tar05]. Dowód Tardifa różni się istotnie od pozostałych; zakłada prawdziwość wyniku dla cykli i rozszerza go przez zastosowanie odpowiednich konstrukcji (funktorów w kategorii grafów, do których wrócimy później).



$K_{7/2}$

W rozprawie używamy topologii by pokazać nowy, jednorodny dowód dla wszystkich tych przypadków.

1 Twierdzenie. *Dla* $\frac{p}{q} < 4$, *graf* $K_{p/q}$ *jest multiplikatywny.*

Co więcej, podobnym zastosowaniem topologii wykazujemy, że wszystkie grafy bez kwadratów (bez cykli długości cztery jako podgrafów) są multiplikatywne, odpowiadając na pytanie Tardifa zawarte w jego przeglądzie nt. hipotezy Hedetniemi'ego [Tar08].

2 Twierdzenie. *Każdy graf bez kwadratów jest multiplikatywny.*

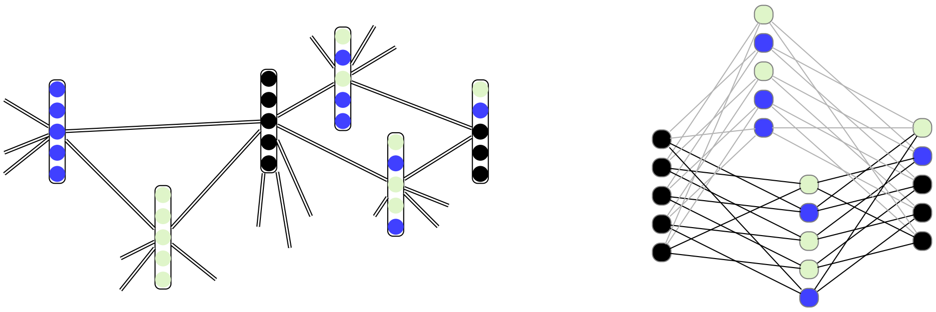
Dalece rozszerza to rodzinę znanych grafów „pierwszych”, w szczególności dając pierwsze przykłady o liczbie chromatycznej > 4 (ponieważ grafy bez cykli długości ≤ 4 mogą mieć dowolnie wysoką liczbę chromatyczną, jak wynika ze znanego dowodu Erdösa).

2 Ścieżki w przestrzeni homomorfizmów

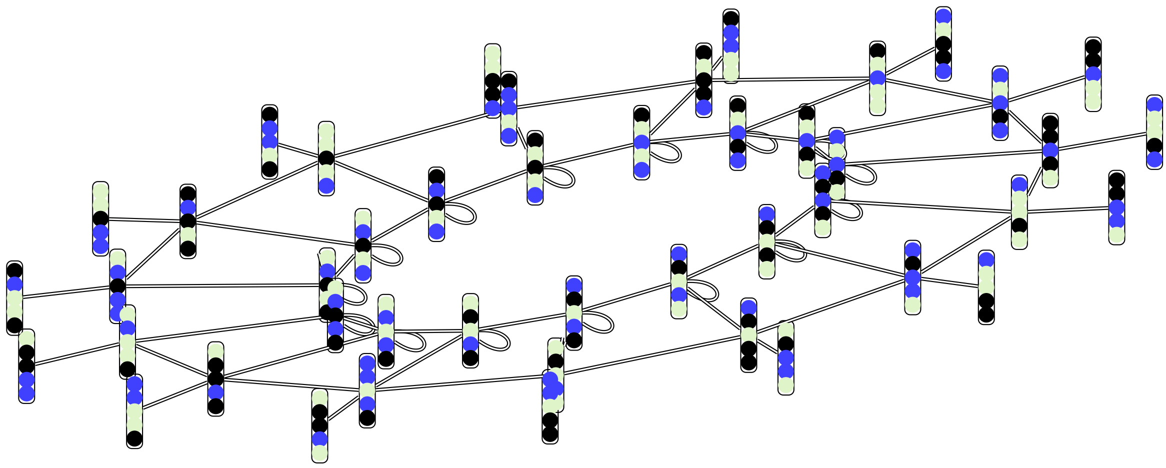
Metodę dowodu w Twierdzeniach 1 i 2 być może najlepiej wyjaśnić wprowadzajac pojęcie *grafu wykładniczego*. Dla grafów K i G, graf K^G ma wierzchołek dla każdej funkcji $V(G) \to V(K)$ (nie tylko dla homomorfizmów); dwie funkcje f, g są sąsiednie w K^G jeśli dają razem K-kolorowanie grafu $G \times K_2$, to znaczy: $f(u)g(v) \in E(K)$ dla każdego $uv \in E(G)$. Kluczowy fakt o grafie wykładniczym to to, że homomorfizmy z produktów $G \times H \to K$ odpowiadają homomorfizmom $H \to K^G$ (dla każdego H); patrz Rysunek 2 i 3. Tak jak poprzednio, własność ta definiuje już graf jednoznacznie i daje kracie grafów dodatkową strukturę (tzw. *algebry Heytinga*).

Dzięki tej relacji z produktem, pytanie o multiplikatywność grafu K jest równoważne następującemu: czy graf K^G jest K-kolorowalny, dla każdego G nie-K-kolorowalnego? Istota podejścia w oryginalnym dowodzie El-Zahara i Sauera oraz tych zawartych w rozprawie polega na badaniu niezmienników odwzorowań między grafami, które charakteryzują spójne składowe grafu wykładniczego K^G, następnie znajdując K-kolorowanie każdej składowej zależnie od tych niezmienników. Jak się okazuje, kluczowe niezmienniki są topologiczne, co sprecyzujemy później.

Kolejnym tematem rozprawy jest więc charakteryzacja spójnych składowych, inaczej mówiąc opis ścieżek, w grafach wykładniczych. Jako że krawędzie w K^G odpowiadają K-kolorowaniom grafu $G \times K_2$, zaś pętle w K^G odpowiadają K-kolorowaniom grafu G, o graf wykładniczym można już myśleć jako o przestrzeni homomorfizmów. Można to ukonkretnić odwołując się do bliskich związków z *kompleksem Hom*, który w naturalny sposób definiuje przestrzeń topologiczną

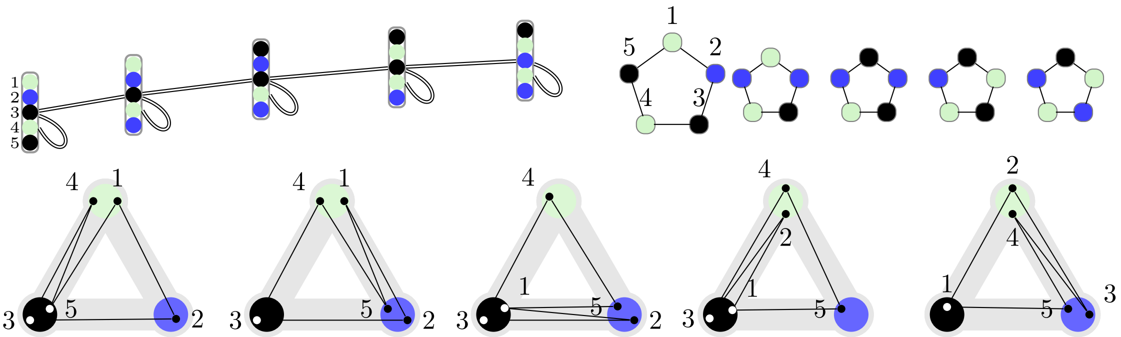


Rysunek 2 Left: a subgraph of the exponential graph $K_3^{C_5}$; each vertex is represented as a column vector $V(K_3)^5$. Right: a K_3-coloring of $C_4 \times C_5$ corresponding to the C_4 subgraph visible in the exponential graph.



Rysunek 3 One of the three connected components of the exponential graph $K_3^{C_5}$. The 15 looped vertices in the central cycle correspond to homomorphisms from C_5 to K_3 that 'wind' once clockwise around K_3. Note that consecutive ones only differ at one row.

zawierającą zbiór wszystkich homomorfizmów między danymi grafami. Dla grafów G, K, przestrzeń $\mathrm{Hom}(G, K)$ jest zdefiniowana jako kompleks symplicjalny którego wierzchołkami są wszystkie homomorfizmy $G \to K$, zaś ścianą jest każdy zbiór homomorfizmów, które można dowolnie ze sobą mieszać znów otrzymując homomorfizm (tzn. zbiór σ jest ścianą jeśli $f(u)g(v) \in E(K)$ dla wszystkich $f, g \in \sigma$ oraz $uv \in E(G)$). Graf wykładniczy i kompleks Hom zasadniczo opisują te same informacje; przykładowo, dwa homomorfizmy są połączone krzywą w $\mathrm{Hom}(G, K)$ wtw gdy są połączone ścieżką na zapętlonych wierzchołkach w K^G (Dochtermann nazywa tę relację $\times$-homotopią, jako kombinatoryczny odpowiednik homotopii [Doc09a; Doc09b; DS12]). Jeszcze inną, równoważną definicją osiągalności przez ścieżki między homomorfizmami jest prostsze pojęcie *przekolorowywania*. K-przekolorowanie grafu G to ciąg K-kolorowań grafu G, w którym kolejne kolorowania różnią się na tylko jednym wierzchołku grafu G, patrz Rysunek 4.



Rysunek 4 Ścieżka między homomorfizmami $C_5 \to K_3$, jako ścieżka na zapętlonych wierzchołkach w $K_3^{C_5}$, jako K_3-przekolorowanie grafu C_5 oraz jako ciąg „zanurzeń" C_5 w K_3.

Przekolorowania są badane w teorii grafów i algorytmice jako przykład *rekonfiguracji*: procesu zmiany systemu, zazwyczaj rozwiązania jakiegoś problemu spełniania więzów, przez małe kroki. Celem jest tu lepsze zrozumienie przestrzeni rozwiązań, w szczególności tego jak rozwiązania można zmieniać takim procesem lokalnego przeszukiwania by algorytmicznie znajdować lepsze (np. aby stopniowo spełniać coraz więcej więzów) lub by pobierać losową próbkę rozwiązań (np. aby oszacować ich liczbę). Podobne ścieżki między rozwiązaniami badane są dla problemów SAT lub ogólnych problemów spełniania więzów, jak i wielu innych, jak na przykład rekonfiguracja zbiorów niezależnych [HD05; KMM12; BKW14; LM18] albo najkrótszych ścieżek [KMM11; Bon13] (patrz też: przeglądy w [Nis17; IS17]).

Podobne procesy analizowane są także w fizyce statystycznej jako modele systemów cząstek, które przejawiają interesujące przemiany fazowe (choć zazwyczaj na wysoce regularnych grafach jak np. kraty, za to z bardziej ilościowymi pytaniami). W języku fizyki kolorowania odpowiadają *antyferromagnetycznemu modelowi Pottsa w temperaturze zerowej*, zaś przekolorowywanie odpowiada *dynamice Glaubera*, patrz [BW02]. Intuicje fizyczne w zamian zainspirowały nowe metody w teorii grafów [BW02] i algorytmice: przeglądy na ten temat można znaleźć w [FV07; Jer98]. W szczególności szeroko badano przestrzenie kolorowań losowych grafów (i ogólniej, przestrzenie rozwiązań losowych instancji problemów spełniania więzów), np. by wyznaczyć próg gęstości przy którym losowy graf staje się k-kolorowalny, lub przy którym przestrzeń kolorowań staje się na tyle spójna, że można po niej łatwo nawigować algorytmami; patrz np. niedawny postęp w [Mol12]. Zainspirowane fizyką techniki Survey Propagation i Belief Propagation to jedne z najskuteczniejszych heurystyk do znajdowania kolorowań losowych grafów; omówienie można znaleźć w [Bra+06].

Aby scharakteryzować spójne składowe przestrzeni homomorfizmów rozważamy następujący problem algorytmiczny: mając dany graf G i dwa jego K-kolorowania, czy można K-przekolorować jedno w drugie (równoważnie: czy są połączone ścieżką w $\mathrm{Hom}(G, K)$)? Dla klasycznych k-kolorowań, tj. dla $K = K_k$, problem ten jest obliczeniowo trudny (NP-trudny, a nawet PSPACE-zupełny) dla $k \geq 4$ [BC09], zaś rozwiązywalny w czasie wielomianowym dla $k \leq 3$ [CHJ11]. Ten ostatni, pozytywny wynik jest zaskakujący, bowiem pytanie o istnienie jakiegokolwiek 3-kolorowania jest podstawowym przykładem problemu NP-trudnego. Wyjaśnienie tego przez ogólniejszy wynik, tj. jak znajdowanie ścieżek między danymi rozwiązaniami może być proste kiedy znajdowanie samych rozwiązań jest trudne, było jedną z motywacji autora przy badaniu przekolorowań.

W rozprawie algorytmicznie charakteryzujemy ścieżki między K-kolorowaniami dla każdego grafu K bez kwadratów, uogólniając wielomianowy algorytm dla 3-kolorowań (przypadek $K = K_3$). Zauważmy, że problem istnienia K-kolorowania danego grafu G jest NP-trudny dla każdego nie-dwudzielnego grafu K, jak mówi znane twierdzenie Hell'a i Nešetřil'a [HN90].

1 Twierdzenie. *Mając dany graf G, graf K bez kwadratów oraz homomorfizmy $\alpha, \beta : G \to K$, można znaleźć ścieżkę między α i β (jeśli istnieje) w czasie $\mathcal{O}(|E(G)| \cdot |V(G)| + |E(K)|)$.*

Istotnie, charakteryzacja pozwala zasadniczo opisać wszystkie możliwe ścieżki pomiędzy danymi K-kolorowaniami. W szczególności, daje to wielomianowy algorytm także dla znajdowania *najkrótszych* ścieżek, uogólniając algorytm dla 3-kolorowań dany przez Johnsona et al. [Joh+16]. Pozwala to także otrzymać wyniki mówiące o istnieniu kolorowań, tak jak w następujących wnioskach, które łatwą wynikają z technicznego sformułowania charakteryzacji.

2 Wniosek. *Każdy graf bez cykli długości podzielnej przez 3 jest 3-kolorowalny.*

3 Wniosek. *Rozważmy rodzinę grafów nie zawierających cykli długości podzielnej przez 3 jako* indukowanych *podgrafów. Przypuśćmy, że następująca hipoteza jest prawdziwa: każdy graf G w rodzinie ma krawędź, której usunięcie daje znów graf w rodzinie. Wtedy każdy graf w rodzinie jest 3-kolorowalny.*

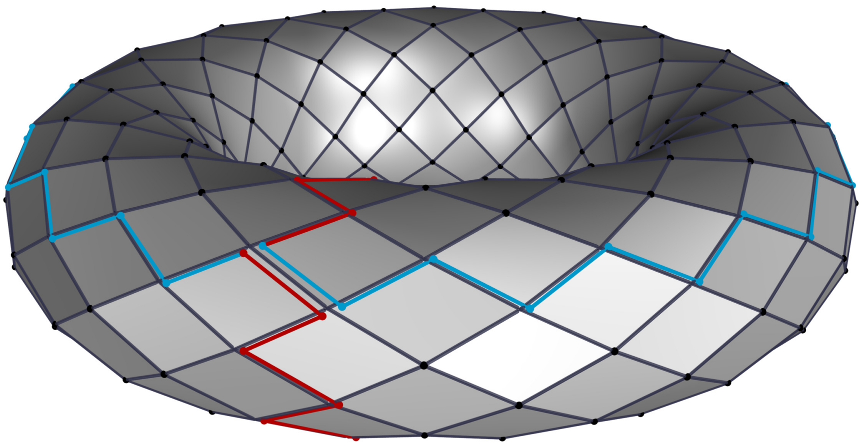
Pierwszy wniosek wynika już z silniejszych twierdzeń o strukturze grafów bez cykli o długości podzielnej przez 3: Chen and Saito [CS94] pokazali, że w takim grafie zawsze istnieje wierzchołek stopnia 2, patrz także [Gau17]. Drugi, jak zaobserwowała Bonamy [Dvo+16], wynika z zupełnie analogicznego zastosowania naszej charakteryzacji; hipoteza pozostaje otwarta, choć Bonamy et al. [BCT14] wykazali, że rodzina ta ma ograniczoną liczbę chromatyczną. Co ciekawe, związane jest to z zupełnie innym połączeniem między kolorowaniami a kombinatoryką, które postawili jako hipotezę Kalai i Meshulam, patrz [BCT14]. Po tych wynikach uzyskano ogólniejsze twierdzenia o kolorowaniach grafów bez zadanych długości cykli mod k, patrz [Bre+16; SS16; SS17].

Aby powiedzieć więcej o samej charakteryzacji i kolejnych wynikach musimy naszkicować używany w pracy związek grafów z przestrzeniami topologicznymi.

3 The topology of graphs

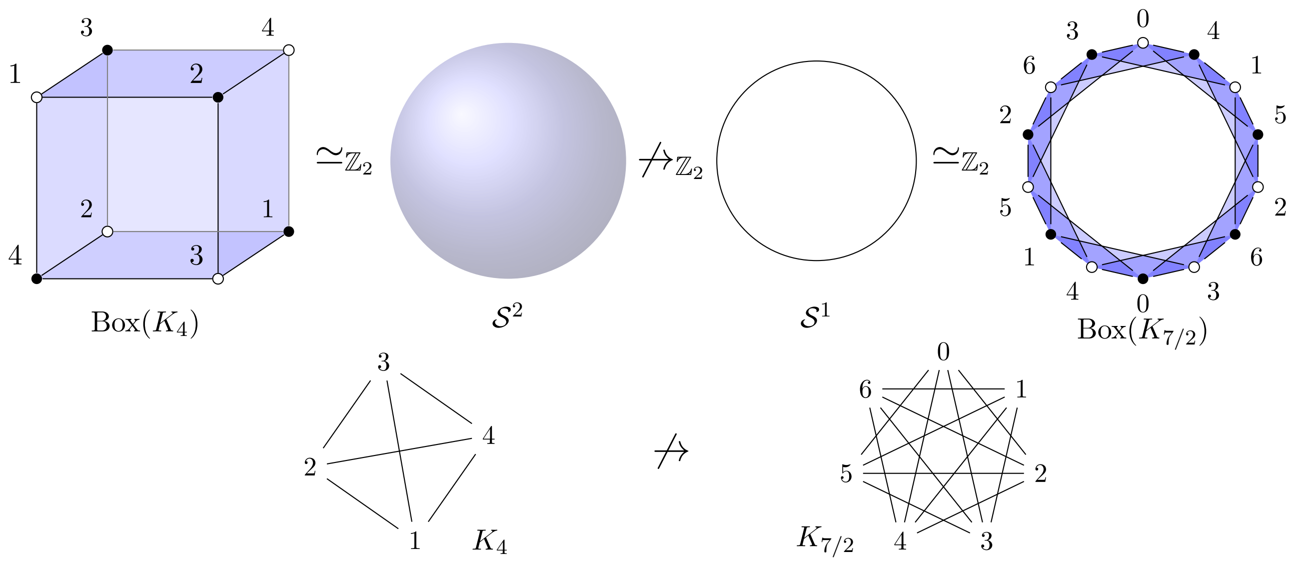
Sam fakt, że topologię można zastosować do czysto kombinatorycznych problemów, jest dość zaskakujący; istotnie, niewiele jest znanych przykładów. Najsłynniejszym jest prawdopodobnie dowód hipotezy Knesera autorstwa Lovásza [Lov78], dający dokładne dolne ograniczenie na liczbę chromatyczną tzw. grafów Knesera. Związek między topologią a kolorowaniami czy ogólniej, homomorfizmami (po pewnym rozwinięciu w dalszych badaniach, patrz np. książka Matouška [Mat08]), zadany jest tu przez *kompleks pudełkowy* (*box complex*), dla którego znajdujemy w rozprawie nowe zastosowania.

Kompleks pudełkowy to konstrukcja przyporządkowująca grafowi przestrzeń topologiczną. Intuicyjnie, kompleks $\mathrm{Box}(G)$ powstaje z grafu $G \times K_2$, widzianego jako kompleks symplicjalny, tj. krawędzie stają się kopiami odcinka $[0, 1]$. Dokleja się następnie kwadratowe ściany do każdego cyklu długości cztery i podobnie dokleja się wyżej-wymiarowe ściany do większych podgrafów dwudzielnych pełnych. Dla przykładu, kompleks pudełkowy kliki K_3 to $K_3 \times K_3 \simeq C_6$: cykl z 6 krawędziami i bez dodatkowych ścian; topologicznie jest on równoważny okręgowi. Ogólniej, kompleks pudełkowy kliki K_n okazuje się być równoważny $(n-2)$-wymiarowej sferze $\mathcal{S}^{n-2}$. Rysunek 5 przedstawia kolejny przykład.



Rysunek 5 Kompleks pudełkowy grafu $C_8 \times C_{17}$ jest torusem (produktem dwóch okręgów).

Co więcej, kompleks pudełkowy jest $\mathbb{Z}_2$-przestrzenią, tj. przestrzenią topologiczną z symetrią, zadaną przez ciągłą funkcję ν z przestrzeni w nią samą, t.że $\nu(\nu(x)) = x$ dla każdego punktu x. W kompleksie pudełkowym grafu G, symetria zamienia miejscami dwie strony grafu $G \times K_2$. Dla klik, otrzymana $\mathbb{Z}_2$-przestrzeń jest równoważna sferze z antypodalną symetrią $x \mapsto -x$. Kluczową własnością kompleksu pudełkowego jest to, że homomorfizm grafów $G \to H$ implikuje ciągłe odwzorowanie $\mathrm{Box}(G) \to \mathrm{Box}(H)$, które zachowuje symetrię (tj., $f(-x) = -f(x)$); nazywamy takie odwzorowanie krótko $\mathbb{Z}_2$-mapą. Technika Lovásza polega na użyciu wersji twierdzenia Borsuka-Ulama, która mówi, że nie istnieje $\mathbb{Z}_2$-mapa z wyżej-wymiarowej sfery w niżej-wymiarową: $\mathcal{S}^m \not\to_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{S}^n$ dla $m > n$. Wykazując, że $\mathrm{Box}(G)$ jest lub zawiera wyżej-wymiarową sferę niż $\mathrm{Box}(H)$, wnioskujemy, że nie może istnieć homomorfizm $G \to H$; patrz Rysunek 6. To właśnie pozwala otrzymać dokładne dolne ograniczenie na liczbę chromatyczną kilku rodzin grafów, np. grafów Knesera [Lov78], Schrijvera [Sch78], tzw. uogólnionych Mycielskianów, czy wreszcie kwadrangulacji (*quadrangulation*) płaszczyzny rzutowej [You96] i ogólnie przestrzeni rzutowych [KS15]. W rozprawie stosujemy kompleks pudełkowy na kilka nowych sposobów.



Rysunek 6 Komplex pudełkowy kliki K_4 jest pustym sześcianem, równoważnym sferze; dla $K_{7/2}$ jest to okrąg. Nie istnieje zatem homomorfizm $K_4 \to K_{7/2}$.

Po pierwsze, stosunkowo łatwo można pokazać, że ścieżki między homomorfizmami implikują homotopie (ciągłe przekształcenia) między odpowiadającymi $\mathbb{Z}_2$-mapami (Dochtermann [Doc09a] pokazuje dalekie uogólnienia). Charakteryzacja stojąca a algorytmem w Twierdzeniu 1 zasadniczo mówi, że odwrotna implikacja także jest prawdziwa (pewien techniczny warunek jest dodatkowo potrzebny). Innymi słowy, jeśli zamiast sztywnego procesu przekolorowywania pozwolimy dowolnie wyginać i rozciągać homotopiami nasze odwzorowania miedzy grafami, to najistotniejsze przeszkody dla przekolorowań stają się widoczne jako topologiczne niezmienniki. Opis tych niezmienników wymagałby kilku definicji z topologii algebraicznej (tzw. grupy fundamentalnej kompleksu pudełkowego), w tym autoreferacie możemy jednak wyrazić następujący wariant otrzymanej charakteryzacji:

1 Twierdzenie. *Niech G będzie grafem, H grafem bez kwadratów. Dwa homomorfizmy $\alpha, \beta : G \to H$ są osiąglane jeden z drugiego wtw gdy odpowiadające im ciągłe odwzorowania* $\mathrm{Box}(G) \to \mathrm{Box}(H)$ *oraz* $\mathrm{Hom}(C_n, G) \to \mathrm{Hom}(C_n, H)$ *są homotopijne dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

Po drugie, używamy podobnych narzędzi w dowodach multiplikatywności w Twierdzeniach 1 i 2. Pewien niezmiennik używany w pierwotnym dowodzie El-Zahara i Sauera dla K_3, jak i w jego uogólnieniu przez Häggkvista et al. dla nieparzystych cykli, okazuje się być niezmiennikiem topologicznym: jest to parzystość liczby nawinięć pewnych cykli, w odwzorowaniach międy kompleksami pudełkowymi. Do pewnego stopnia było to wcześniej wiadome, ale sformalizowanie tego połączenia pozwala otrzymać w rozprawie bardziej intuicyjny argument w kluczowym kroku, w którym wykazuje się różność tych parzystości; pozwala to też uogólnić metodę do grafów $K_{p/q}$, dając dowód istotnie inny od dowodu Tardifa. Użycie ogólniejszego niezmiennika topologicznego na miejsce samej parzystości liczby nawinięć (mianowicie dokładny typ homotopijny) pozwala zaś uzyskać dowód „pierwszości" dla wszystkich grafów bez kwadratów.

Po trzecie i ostatnie, pokazujemy, że użycie topologii może być nieuniknione, gdyż hipoteza Hedetniemi'ego implikuje analogiczną hipotezę w topologii; niezależnie udowodnił to Matsushita [Mat17]. Ściślej mówiąc, dla $\mathbb{Z}_2$ przestrzeni X niech $\mathrm{ind}(X)$ będzie najmniejszym $n \in \mathbb{N}$ t.że istnieje $\mathbb{Z}_2$-mapa z X do sfery $\mathcal{S}^n$ (jest to parametr analogiczny do liczby chromatycznej grafu).

2 Twierdzenie. *Jeśli hipoteza Hedetniemi'ego jest prawdziwa, tj.* $\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$ *dla wszystkich G, H, to* $\mathrm{ind}(X \times Y) = \min(\mathrm{ind}(X), \mathrm{ind}(Y))$ *dla wszystkich $\mathbb{Z}_2$-przestrzeni X, Y.*

Ogólniej:

3 Twierdzenie. *Jeśli K jest multiplikatywnym grafem ($G \times H \to K$ implikuje $G \to K$ lub $H \to K$), to $\mathbb{Z}_2$-przestrzeń $Z = \mathrm{Box}(K)$ jest multiplikatywna, tj. $X \times Y \to_{\mathbb{Z}_2} Z$ implikuje $X \to_{\mathbb{Z}_2} Z$ lub $Y \to_{\mathbb{Z}_2} Z$.*

Zatem zamiast hipotezy Hedetniemi'ego łatwiej powinno być wpierw znaleźć dowód topologicznego wariantu, przynajmniej teoretycznie rzecz biorąc. Nowy dowód Twierdzenia 1 w rozprawie unaocznia, że główny znany przypadek hipotezy Hedetniemi'ego, tj. multiplikatywność kliki K_3, to zasadniczo tylko dowód multiplikatywności okręgu $\mathcal{S}^1$, z paroma kombinatorycznymi dodatkami. Możemy więc mieć nadzieję, że wszelkie dowody topologicznego wariantu podobnie da się rozszerzyć do grafów.

Z drugiej strony, mało co wskazuje na prawdziwość topologicznego wariantu. Istotnie, dowód dla K_3 czy $\mathcal{S}^1$ opiera się na faktach w jedno-wymiarowej topologii, które nie uogólniają się do wyższych wymiarów. Można zatem też mieć nadzieję na znalezienie topologicznych kontrprzykładów, które od razu stanowiły by tym samym refutację także dla hipotezy Hedetniemi'ego. Jak wyszczególniono w rozprawie, kilka kandydatów narzuca się w dziedzinie topologii, a trudno było by do nich dojść z punktu widzenia samej teorii grafów. Dalszy postęp może jednak wymagać bardziej zaawansowanego użycia topologii algebraicznej.

Dowód Twierdzeń 2 i 3 w rozprawie znacząco różni się od dowodu Matsushita'y. Jego metoda daje silniejsze i bardziej eleganckie połączenie między kategorią grafów i kategorią $\mathbb{Z}_2$-przestrzeni. W rozprawie zaś dowodzimy nowe wyniki o pewnych konstrukcjach na grafach, które mogą być interesujące same w sobie, o czym piszemy dalej.

4 Odwrotne potęgi grafów

W ostatni rozdziale rozprawy rozważamy trzy rodziny operacji na grafach, $\Lambda_k, \Gamma_k, \Omega_k$, parametryzowane nieparzystą liczbą naturalną k. Podpodział $\Lambda_k(H)$ grafu H otrzymujemy przez zastąpnienie każdej krawędzi w H ścieżką o długości k. Potęgę $\Gamma_k(H)$ grafu H otrzymujemy przez połączenie krawędzią tych wierzchołków, które są połączone spacerem (ang. *walk*) długości dokładnie k (inaczej mówiąc macierz sąsiedztwa H jest brana do k-tej potęgi; nie jest to jednak to samo co łączenie wierzchołków w odległości co najwyżej k).

Trzecią operację, $\Omega_k(H)$, można zdefiniować (z dokładnością do homomorficznej równoważności) przez następującą własność: $G \to \Omega_k(H)$ wtw gdy $\Gamma_k(G) \to H$, dla każdego grafu G. Dla przykładu, trzecia potęga grafu G jest n-kolorowalna (ma homomorfizm w klikę K_n) wtw gdy $G \to \Omega_3(K_n)$. Własność taką nazywamy *połączeniem Galois* w teorii krat lub parą *sprzężonych funktorów* w wąskiej (ang. *thin*) kategorii grafów. W tym sensie Ω_k jest odwrotnością (prawym sprzeżeniem) Γ_k. Ta sama własność zachodzi dla Λ_k po lewej i Γ_k po prawej: $\Lambda_k(G) \to H$ wtw gdy $G \to \Gamma_k(H)$.

Sprzężenie różnych konstrukcji na grafach jest podstawowym narzędziem w dowodzie znanego twierdzenia Hella i Nešetřila (charakteryzującego złożoność problemu istnienia H-kolorowania, dla ustalonego H) [HN90], w szczególności sprzężenie Γ_k do Λ_k jest użyte w pierwszym z wielu kroków dowodu. Konstrukcja Ω_k została niejawnie użyta przez Gyárfás et al. [GJS04] by odpowiedzieć na pytanie o n-chromatyczne grafy z „silnie niezależnymi klasami kolorów": wykazali, że $\Omega_3(K_n)$ jest przykładem grafu n-chromatycznego, którego trzecia potęga jest nadal tylko n-chromatyczna. Konstrukcji użyto też w pewnym twierdzeniu o dualności homomorfizmów Häggkvista i Hella [HH93]. Tardif [Tar05] użył iteracji Ω_3 i Γ_3 by rozszerzyć wynik o multiplikatywności cykli do grafów $K_{p/q}$. Iterowanie Ω_3 k-krotnie jest równoważne zastosowaniu Ω_{3^k}; operacje Ω_k dla ogólnego nieparzystego k można więc widzieć jako gładszy sposób wyrażania takich iteracji. Po raz piewszy rozważali je Hajiabolhassan i Taherkhani [HT10], dowodząc np. charakteryzacji okrężnej liczby chromatycznej (*circular chromatic number*) w terminach klasycznej liczby chromatycznej (czy wręcz samej 3-kolorowalności) podpodziałów.

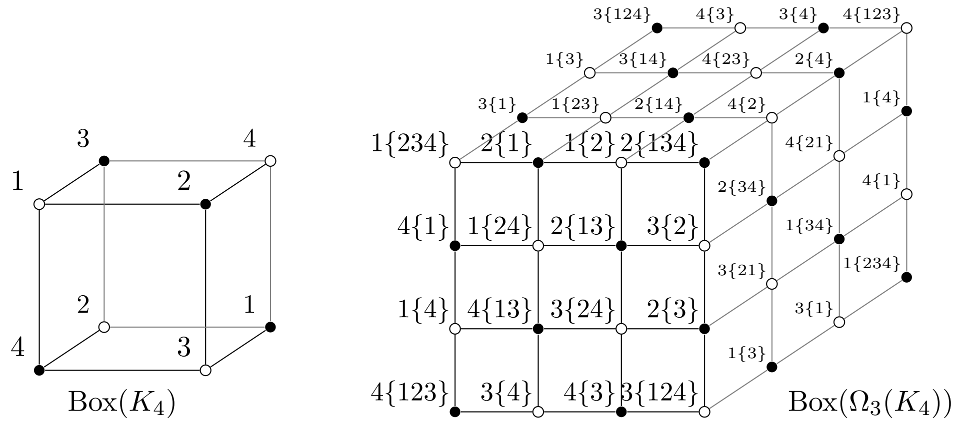
Operacje Λ_k, Γ_k, Ω_k są także najprostszymi przykładami tzw. lewego, centralnego i prawego funktora Pultra, odpowiednio, czyli pewnej ogólniejszej konstrukcji sprzężonych funktorów [Pul70]. Inne przykładu to produkty grafów sprzężone do grafów wykładniczych oraz tzw. *konstrukcja grafu łuków* (*arc graph construction*, patrz eg. [Ror+16]), także kluczowe w zastosowaniach do hipotezy Hedetniemi'ego [PR81; Tar08]. Odsyłamy czytelnika do przeglądu o funktorach na grafach [FT18], skupionego wokół hipotezy Hedetniemi'ego, oraz do pracy [FT15] rozważającej kiedy funktor może mieć jednocześnie lewe i prawe sprzężenie.

W rozprawie pokazujemy, że operacje Ω_k mają także niezwykłe topologiczne własności, zachowując się podobnie do podziału barycentrycznego. Zachowują mianowicie topologię odpowiadającą grafowi i uszczegóławiają jego geometrię, pozwalając na przybliżenie każdego ciągłego odwzorowania między kompleksami pudełkowymi przez homomorfizmu grafów; Rysunek 7 pokazuje (szczególnie prosty) przykład.

Formalnie (tu p_k jest pewnym naturalnym homomorfizmem $\Omega_k(G) \to G$):

1 Twierdzenie. (Równoważność) *$\mathrm{Box}(G)$ i $\mathrm{Box}(\Omega_k(G))$ są $\mathbb{Z}_2$-homotopijnie równoważne, dla każdego nieparzystego k. Co więcej, p_k indukuje $\mathbb{Z}_2$-homotopijną równoważność.*

2 Twierdzenie. (Przybliżanie) *Z $\mathrm{Box}(G)$ do $\mathrm{Box}(H)$ istnieje $\mathbb{Z}_2$-mapa wtw gdy dla pewnego nieparzystego k, istnieje homomorfizm z $\Omega_k(G)$ do H.*



Rysunek 7 Kompleks pudełkowy kliki K_4 oraz grafu $\Omega_3(K_4)$.

Co więcej, dla każdej $\mathbb{Z}_2$-mapy $f : \mathrm{Box}(G) \to_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Box}(H)$, istnieje nieparzyste k i homomorfizm $\Omega_k(G) \to H$, który indukuje mapę $\mathbb{Z}_2$-homotopijną z $p_k \circ f$.

Csorba [Cso08] pokazał kontrukcję wykazującą, że dla każdej $\mathbb{Z}_2$-przestrzeni zadanej przez kompleks symplicjalny istnieje graf o równoważnym kompleksie pudełkowym (patrz także uogólnienia do symetrii innych niż $\mathbb{Z}_2$ i kompleksów homomorfizmów w [DS12]).

3 Twierdzenie. (Uniwersalność, [Cso08]) *Dla każdego $\mathbb{Z}_2$-kompleksu X, istnieje graf G taki, że X i $\mathrm{Box}(G)$ są $\mathbb{Z}_2$-homotopijnie równoważne.*

W sumie te trzy twierdzenia pokazują, że teoria homotopii $\mathbb{Z}_2$-przestrzeni jest w dużej mierze odzwierciedlona w grafach, przy pomocy funktorów Ω_k jako połączenia. (Równoważnie, we wszystkich naszych wynikach „dla pewnego nieparzystego k" można zastąpić przez „dla dostatecznie dużego nieparzystego k", zaś Ω_k przez iteracje $\Omega_3(\dots(\Omega_3(G))\dots)$ operacji Ω_3). To połączenie właśnie pozwala udowodnić Twierdzenia 2 i 3. Wykazujemy także słabszą odwrotną implikację, która jednocześnie stanowi kombinatoryczną charakteryzację multiplikatywnych $\mathbb{Z}_2$-przestrzeni:

4 Twierdzenie. *Niech Z będzie $\mathbb{Z}_2$-przestrzenią, zaś K grafem o rówoważnym kompleksie pudełkowym. Z jest multiplikatywna, tj. $X \times Y \to_{\mathbb{Z}_2} Z$ implikuje $X \to_{\mathbb{Z}_2} Z$ lub $Y \to_{\mathbb{Z}_2}$ dla wszystkich X, Y, wtw gdy K spełnia co następuje: $G \times H \to K$ implikuje istnienie nieparzystego k t.że $\Omega_k(G) \to K$ lub $\Omega_k(H) \to K$, dla wszystkich G, H.*

Istnienie konstrukcji spełniających powyższe twierdzenia o równoważności i przybliżaniu wynika już z pracy Dochtermanna i Schultza [DS12, Proposition 4.7]. Zasadniczo pomysł polega na przejściu z przestrzeni do kompleksu pudełkowego, wielokrotnemu zastosowaniu podziału barycentrycznego i powróceniu do grafów przez twierdzenie o uniwersalności. Konstrukcja ta jest jednak *ad hoc* i żmudna do bezpośredniego opisania, nie da się opisać przez iterację pojedyńczej konstrukcji na grafach, nie jest też jasne czy powstałe operacje na grafach mają lewe sprzężenie, co utrudniłoby udowodnienie Twierdzeń 2, 3 i 4.

Przykładem zastosowania naszego twierdzenia o równoważności, konkretnie dla operacji Ω_k, jest fakt, że bezpośrednio wynika z niego twierdzenie Gyárfása et al. [GJS04] (wykazane także w [ST06] oraz [BS05]), mówiące że $\Omega_k(K_n)$ jest przykładem grafu n-chromatycznego, którego k-ta potęga nadal jest tylko n-chromatyczna (z czego wynika też, że nie zawierał cykli nieparzystej długości $\leq k$). Twierdzenie 1 mówi ogólniej, że dla każdego grafu K, $\Omega_k(K)$ daje graf o tej samej topologii co K, ale którego k-tą potęgą jest K; wynika z tego następujący wniosek:

5 Wniosek. *Niech K będzie grafem o dokładnym topologicznym dolnym ograniczeniu na liczbę chromatyczną (np. graf Knesera, Schrijvera, uogólniony Mycielskiego, czy kwadrangulacja przestrzeni rzutowej). Dla każdego nieparzystego n, istnieje graf G t.że $\chi(G) \geq \chi(K)$, którego n-ta potęga jest jednak K-kolorowalna.*

Kończąc na innym zastosowaniu Ω_k, dowodzimy, że metody kombinatoryczne nadal można użyć do pokazania nowych grafów „pierwszych”; twierdzenie to powstało przy współpracy z Claudem Tardifem. Dowód jest podobny do pierwotnego podejścia Tardif dla grafów $K_{p/q}$: używa multiplikatywności grafów bez kwadratów by rozszerzyć ją do innych grafów przez zastosowanie sprzężenia Ω_3 i Γ_3. Argument nie używa topologii, jednak nieformalnym pomysłem za nim jest fakt, że grafy o talii > 12 (bez cykli o długości ≤ 12) są dokładnie tymi, dla których łatwo wykazać, iż K i trzecia potęga K mają tę samą topologię. Można mieć więc nadzieję, że zastosowanie operacji Ω_3 na trzeciej potędze takiego grafu da z powrotem ten sam graf; tak istotnie się dzieje, co pozwala wywniosować multiplikatywność trzeciej potęgi.

6 Twierdzenie. *Dla każdego grafu K o talii > 12, trzecia potęga grafu K jest multiplikatywna.*

Publikacje związane z rozprawą

- *Square-free graphs are multiplicative*
  J. Comb. Theory, Ser. B 122 (2017), pp. 479–507.
  doi: 10.1016/j.jctb.2016.07.007. arXiv: 1601.04551.
- *Homomorphism Reconfiguration via Homotopy*
  Proc. STACS 2015 (32nd Int. Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science)
  Vol. 30. LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 730–742.
  doi: 10.4230/LIPIcs.STACS.2015.730. arXiv: 1408.2812.
- *On inverse powers of graphs and topological implications of Hedetniemi's conjecture*
  preprint, arXiv: 1712.03196.

Inne publikacje autora

W kolejności opublikowania na portalu arXiv.

- *Reconfiguring independent sets in claw-free graphs*
  z: Paul Bonsma, Marcin Kamiński
  Proc. SWAT 2014 (14th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory)
  Vol. 8503. LNCS. Springer, pp. 86–97. doi: 10.1007/978-3-319-08404-6_8. arXiv: 1403.0359.
- *Reconfiguration over tree decompositions*
  z: Amer E. Mouawad, Naomi Nishimura, Venkatesh Raman
  Proc. IPEC 2014 (9th Int. Symposium on Parameterized and Exact Computation)
  Vol. 8894. LNCS. Springer, pp. 246–257. doi: 10.1007/978-3-319-13524-3_21. arXiv: 1405.2447.
- *Reconfiguration in bounded bandwidth and treedepth*
  J. Computer and System Sciences 93 (2018), pp. 1–10.
  doi: 10.1016/j.jcss.2017.11.003. arXiv: 1405.0847.
- *Polynomial kernelization for removing induced claws and diamonds*
  z: Marek Cygan, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, Erik Jan van Leeuwen
  Theory of Computing Systems 60:4 (2017), pp. 615–636.
  doi: 10.1007/s00224-016-9689-x. arXiv: 1503.00704.

  Wersja konferencyjna:
  Proc. WG 2015 (41st Int. Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science)
  Vol. 9224. LNCS. Springer, pp. 440–455. doi: 10.1007/978-3-662-53174-7_31

- *Edge bipartization faster than 2^k*
  z: Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk
  Algorithmica (2017), pp. 1–50.
  doi: 10.1007/s00453-017-0319-z. arXiv: 1507.02168.

  Wersja konferencyjna:
  Proc. IPEC 2016 (11th Int. Symposium on Parameterized and Exact Computation)
  Vol. 26. LIPIcs. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 26:1–26:13.
  doi: 10.4230/LIPIcs.IPEC.2016.26.

- *On space efficiency of algorithms working on structural decompositions of graphs*
  z: Michał Pilipczuk
  ACM Trans. Comput. Theory (TOCT) 9:4 (2018), pp. 18:1–18:36.
  doi: 10.1145/3154856. arXiv: 1509.05896.

  Wersja konferencyjna:
  Proc. STACS 2016 (33rd Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science)
  Vol. 47, LIPIcs. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 57:1–57:15.
  doi: 10.4230/LIPIcs.STACS.2016.57.

- *Fully polynomial-time parameterized computations for graphs and matrices of low treewidth*
  z: Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Michał Pilipczuk, Saket Saurabh
  ACM Transactions on Algorithms (TALG), przyjęta do druku (2018).
  arXiv: 1511.01379.

  Wersja konferencyjna:
  Proc. SODA 2017 (28th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms)
  pp. 1419–1432. doi: 10.1137/1.9781611974782.92.

- *Linear kernels for edge deletion problems to immersion-closed graph classes*
  z: Archontia Giannopoulou, Michał Pilipczuk, Jean-Florent Raymond, Dimitrios M. Thilikos
  Proc. ICALP 2017 (44th Int. Colloquium on Automata, Languages, and Programming)
  Vol. 80, LIPIcs. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, pp.57:1–57:15.
  doi: 10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.57. arXiv: 1609.07780.

- *Cutwidth: obstructions and algorithmic aspects*
  z: Archontia Giannopoulou, Michał Pilipczuk, Jean-Florent Raymond, Dimitrios M. Thilikos
  Proc. IPEC 2016 (11th Int. Symposium on Parameterized and Exact Computation)
  Vol. 63, LIPIcs. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 15:1–15:13.
  doi: 10.4230/LIPIcs.IPEC.2016.15. arXiv: 1606.05975.

- *Tight lower bounds for the complexity of multicoloring*
  z: Marthe Bonamy, Łukasz Kowalik, Michał Pilipczuk, Arkadiusz Socała
  Proc. ESA 2017 (25th Annual European Symposium on Algorithms)
  Vol. 87, LIPIcs. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 18:1–18:14.
  doi: 10.4230/LIPIcs.ESA.2017.18. arXiv: 1607.03432.

- *On Directed Feedback Vertex Set parameterized by treewidth*
  z: Marthe Bonamy, Łukasz Kowalik, Jesper Nederlof, Michał Pilipczuk, Arkadiusz Socała
  preprint, arXiv: https://arxiv.org/abs/1707.01470.

- *Turing kernelization for finding long paths in graph classes excluding a topological minor*
  z: Bart M. P. Jansen, Marcin Pilipczuk
  Proc. IPEC 2017 (12th Int. Symposium on Parameterized and Exact Computation)
  przyjęta. arXiv: 1707.01797.

- *The step Sidorenko property and non-norming edge-transitive graphs*
  z: Daniel Král', Taísa L. Martins, Péter Pál Pach
  preprint, arXiv: 1802.05007.

Bibliografia

[BC09] P. S. Bonsma i L. Cereceda. "Finding Paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances". *Theor. Comput. Sci.* 410.50 (2009), s. 5215–5226.

[BCT14] M. Bonamy, P. Charbit i S. Thomassé. "Graphs with large chromatic number induce $3k$-cycles". *preprint* (2014). arXiv: 1408.2172.

[BKW14] P. Bonsma, M. Kaminski i M. Wrochna. "Reconfiguring Independent Sets in Claw-Free Graphs". *Proc. 14th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory, SWAT*. T. 8503. LNCS. 2014, s. 86–97. arXiv: 1403.0359.

[Bod17] M. Bodirsky. *Graph Homomorphisms and Universal Algebra. Course Notes*. 2017.

[Bon13] P. S. Bonsma. "The complexity of rerouting shortest paths". *Theor. Comput. Sci.* 510 (2013), s. 1–12. arXiv: 1009.3217.

[Bra+06] A. Braunstein, M. Mézard, M. Weigt i R. Zecchina. "Constraint satisfaction by Survey Propagation". *Computational Complexity and Statistical Physics*. Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity. Oxford University Press, 2006, s. 107. arXiv: cond-mat/0212451.

[Bre+16] R. C. Brewster, S. McGuinness, B. Moore i J. A. Noel. "A dichotomy theorem for circular colouring reconfiguration". *Theor. Comput. Sci.* 639 (2016), s. 1–13. arXiv: 1508.05573.

[BS05] S. Baum i M. Stiebitz. "Coloring of graphs without short odd paths between vertices of the same color class" (2005). Manuscript.

[BW02] G. R. Brightwell i P. Winkler. "Hard Constraints and the Bethe Lattice: Adventures at the Interface of Combinatorics and Statistical Physics". *Proc. International Congress of Mathematicians, Vol. III*. Higher Ed. Press, 2002, s. 605–624. arXiv: math/0304468.

[CHJ11] L. Cereceda, J. van den Heuvel i M. Johnson. "Finding paths between 3-colorings". *J. Graph Theory* 67.1 (2011), s. 69–82.

[CS94] G. Chen i A. Saito. "Graphs with a Cycle of Length Divisible by Three". *J. Comb. Theory, Series B* 60.2 (1994), s. 277–292.

[Cso08] P. Csorba. "On the Simple $\mathbb{Z}_2$-homotopy Types of Graph Complexes and Their Simple $\mathbb{Z}_2$-universality". *Canad. Math. Bull.* 51.4 (2008), s. 535–544.

[Doc09a] A. Dochtermann. "Hom complexes and homotopy theory in the category of graphs". *Eur. J. Comb.* 30.2 (2009), s. 490–509. arXiv: math/0605275.

[Doc09b] A. Dochtermann. "Homotopy groups of Hom complexes of graphs". *J. Comb. Theory, Ser. A* 116.1 (2009), s. 180–194. arXiv: 0705.2620.

[DS12] A. Dochtermann i C. Schultz. "Topology of Hom complexes and test graphs for bounding chromatic number". *Israel J. Math.* 187.1 (2012), s. 371–417. arXiv: 0907.5079.

[Dvo+16] Z. Dvořák, B. Mohar, L. Postle i R. Thomas. *New Trends in Graph Coloring*. 2016.

[ES85] M. M. El-Zahar i N. Sauer. "The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4". *Combinatorica* 5.2 (1985), s. 121–126.

[FT15] J. Foniok i C. Tardif. "Digraph functors which admit both left and right adjoints". *Discrete Math.* 338.4 (2015), s. 527–535. arXiv: 1304.2204.

[FT18] J. Foniok i C. Tardif. "Hedetniemi's Conjecture and Adjoint Functors in Thin Categories". *Applied Categorical Structures* 26 (1 2018), s. 113–128. arXiv: 1608.02918.

[FV07] A. Frieze i E. Vigoda. "A survey on the use of Markov chains to randomly sample colourings". *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, 2007, s. 23.

[Gau17] G. Gauthier. "The structure of graphs with no cycles of length 0 (mod 3)". Prac. dokt. Princeton University, 2017.

[GJS04] A. Gyárfás, T. Jensen i M. Stiebitz. "On graphs with strongly independent color-classes". *J. Graph Theory* 46.1 (2004), s. 1–14.

[HD05] R. A. Hearn i E. D. Demaine. "PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation". *Theoretical Computer Science* 343.1-2 (2005), s. 72–96. arXiv: cs/0205005.

[Hed66] S. T. Hedetniemi. *Homomorphisms of graphs and automata*. Spraw. tech. University of Michigan, 1966.

[HH93] R. Häggkvist i P. Hell. "Universality of A-mote Graphs". *Eur. J. Comb.* 14.1 (1993), s. 23–27.

[HN04] P. Hell i J. Nešetřil. *Graphs and Homomorphisms*. T. 28. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford University Press, 2004.

[HN08] P. Hell i J. Nešetřil. "Colouring, constraint satisfaction, and complexity". *Computer Science Review* 2.3 (2008), s. 143–163.

[HN90] P. Hell i J. Nešetřil. "On the complexity of H-coloring". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 48.1 (1990), s. 92–110.

[HT10] H. Hajiabolhassan i A. Taherkhani. "Graph Powers and Graph Homomorphisms". *Electr. J. Comb.* 17.1 (2010).

[Häg+88] R. Häggkvist, P. Hell, D. J. Miller i V. Neumann-Lara. "On multiplicative graphs and the product conjecture". *Combinatorica* 8.1 (1988), s. 63–74.

[IS17] T. Ito i A. Suzuki. *Web Survey on Combinatorial Reconfiguration*. 2017.

[Jer98] M. Jerrum. "Mathematical Foundations of the Markov Chain Monte Carlo Method". *Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics*. T. 16. Algorithms and Combinatorics. Springer, 1998, s. 116–165.

[Joh+16] M. Johnson, D. Kratsch, S. Kratsch, V. Patel i D. Paulusma. "Finding Shortest Paths Between Graph Colourings". *Algorithmica* 75.2 (2016), s. 295–321. arXiv: 1403.6347.

[KMM11] M. Kamiński, P. Medvedev i M. Milanič. "Shortest paths between shortest paths". *Theor. Comput. Sci.* 412.39 (2011), s. 5205–5210. arXiv: 1008.4563.

[KMM12] M. Kamiński, P. Medvedev i M. Milanič. "Complexity of independent set reconfigurability problems". *Theor. Comput. Sci.* 439 (2012), s. 9–15. arXiv: 1008.4563.

[KS15] T. Kaiser i M. Stehlík. "Colouring quadrangulations of projective spaces". *J. Comb. Theory, Ser. B* 113 (2015), s. 1–17.

[LM18] D. Lokshtanov i A. E. Mouawad. "The complexity of independent set reconfiguration on bipartite graphs". *Proc. 29th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA*. 2018, s. 185–195. arXiv: 1707.02638.

[Lov12] L. Lovász. *Large Networks and Graph Limits*. T. 60. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2012.

[Lov78] L. Lovász. "Kneser's Conjecture, Chromatic Number, and Homotopy". *J. Comb. Theory, Ser. A* 25.3 (1978), s. 319–324.

[Mat08] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Universitext. Springer, 2008.

[Mat17] T. Matsushita. "$\mathbb{Z}_2$-indices and Hedetniemi's conjecture". *preprint* (2017). arXiv: 1710.05290.

[Mol12] M. Molloy. "The Freezing Threshold for k-colourings of a Random Graph". *Proc. 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC*. ACM, 2012, s. 921–930.

[Nis17] N. Nishimura. "Introduction to Reconfiguration". *Preprints* (2017). 2017090055.

[PR81] S. Poljak i V. Rödl. "On the arc-chromatic number of a digraph". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 31.2 (1981), s. 190 –198.

[Pul70] A. Pultr. "The right adjoints into the categories of relational systems". *Reports of the Midwest Category Seminar IV*. T. 137. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1970, s. 100–113.

[Ror+16] D. Rorabaugh, C. Tardif, D. Wehlau i I. Zaguia. "Iterated Arc Graphs". *preprint* (2016). arXiv: 1610.01259.

[Sch78] A. Schrijver. "Vertex-critical subgraphs of Kneser-graphs". *Nieuw Archief voor Wiskunde* 26.3 (1978), s. 454–461.

[SS16] P. Seymour i A. Scott. "Induced subgraphs of graphs with large chromatic number. IV. Consecutive holes". *preprint* (2016). arXiv: 1509.06563.

[SS17] A. Scott i P. Seymour. “Induced subgraphs of graphs with large chromatic number. X. Holes of specific residue”. *preprint* (2017). arXiv: 1705.04609.

[ST06] G. Simonyi i G. Tardos. “Local Chromatic Number, KY Fan’s Theorem, And Circular Colorings”. *Combinatorica* 26.5 (2006), s. 587–626.

[Tar05] C. Tardif. “Multiplicative graphs and semi-lattice endomorphisms in the category of graphs”. *J. Comb. Theory, Ser. B* 95.2 (2005), s. 338–345.

[Tar08] C. Tardif. “Hedetniemi’s conjecture, 40 years later”. *Graph Theory Notes of NY* 54 (2008), s. 46–57.

[You96] D. A. Youngs. “4-chromatic projective graphs”. *Journal of Graph Theory* 21.2 (1996), s. 219–227.