# Komputerowo wspomagane badanie zbiorów częściowo uporządkowanych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

**Marcin Peczarski**

17 listopada 2006 r.

## 1 Wstęp

Komputer może być niezwykle pomocnym narzędziem w pracy badawczej. W naukach matematycznych komputer może służyć do znajdowania obiektów ekstremalnych, czyli obiektów posiadających największą lub najmniejszą wartość jakiejś cechy w badanej klasie obiektów. Do tego sposobu korzystania z komputera należy zaliczyć wszelkiego rodzaju rekordy ustanawiane i publikowane od czasu do czasu. Komputer może wspomagać pracę badawczą już na etapie formułowania nowych definicji lub hipotez. Możliwość szybkiej weryfikacji sensowności formułowanych tez umożliwia unikanie długotrwałego brnięcia w ślepe uliczki rozumowań. Analiza uzyskiwanych wyników obliczeń może prowadzić do zauważenia nowych własności, których wcześniej nie udawało się uchwycić, co umożliwia definiowanie kolejnych pojęć i stawianie kolejnych hipotez. Komputer może też zostać wykorzystany do dowodzenia twierdzeń.

Referowana rozprawa wpisuje się w nurt badań wspomaganych komputerowo. Korzystamy w pełni ze wspomnianych wyżej technik. Koncentrujemy się na badaniu własności zbiorów częściowo uporządkowanych związanych z sortowaniem za pomocą porównań. Inspiracją do podjęcia badań w tym kierunku były otwarte problemy postawione przez Donalda Knutha w książce *The Art of Computer Programming* [8, rozdz. 5.3.1, zad. 35, 36], [9, rozdz. 7.2.1.2, zad. 89].

Przypomnijmy definicję przedmiotu badań.

**Definicja 1.1** Zbiorem częściowo uporządkowanym (ang. poset) *nazywamy parę* $(X, <)$, *gdzie* $<$ *jest dwuargumentową, przeciwzwrotną i przechodnią relacją na niepustym zbiorze* $X$*, który nazywamy* zbiorem bazowym*.*

Dla skrócenia zapisu, będziemy często pomijać przymiotnik częściowy, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Rozważamy tylko skończone zbiory uporządkowane. Należy wyraźnie zaznaczyć, że dla zbiorów nieskończonych rozważane pojęcia mogą nie mieć sensu, a prezentowane fakty mogą być fałszywe. Przez $P + xy$ oznaczamy zbiór uporządkowany $P$, którego relacja została rozszerzona o parę $(x, y)$ różnych elementów i domknięta przechodnio. Przez $P + uv + xy$ oznaczamy $(P + uv) + xy$. Szczególnie interesują nas następujące charakterystyki liczbowe zbiorów uporządkowanych: *liczba rozszerzeń liniowych*, *liczba porównań zawsze wystarczająca do posortowania* i *współczynnik zbalansowania*.

**Definicja 1.2** Rozszerzeniem liniowym *zbioru uporządkowanego* $(X, <)$ *nazywamy permutację jego zbioru bazowego* $(x_1, x_2, \ldots, x_{|X|})$ *spełniającą warunek: jeśli* $x_i < x_j$*, to* $i < j$*.*

Rozszerzenie liniowe zbioru uporządkowanego $(X, r)$ wyznacza wzajemnie jednoznacznie jego topologiczne posortowanie, czyli zbiór liniowo uporządkowany $(X, l)$, taki że $r \subseteq l$. Liczbę rozszerzeń liniowych zbioru uporządkowanego $P$ oznaczamy przez $e(P)$. Jeśli $x < y$ w $P$, to oczywiście $P + xy = P$ i $e(P + xy) = e(P)$. Jeśli natomiast $y < x$, to $P + xy$ jest niezdefiniowany, ale przyjmujemy konwencję, że wtedy $e(P + xy) = 0$.

Sortowanie topologiczne zbioru uporządkowanego, nazywane dalej po prostu sortowaniem, polega na znalezieniu jednego z jego rozszerzeń liniowych. Interesuje nas sortowanie za pomocą porównań. Wykonanie porównania na zbiorze uporządkowanym $P$ to wybranie dwóch jego elementów, powiedzmy $x$ i $y$, a następnie zapytanie wyroczni o ich kolejność. Wyrocznia udziela jednej z dwóch odpowiedzi $x < y$ albo $y < x$. Wykonanie porównania powiększa naszą wiedzą o poszukiwanym rozszerzeniu liniowym. Jeśli odpowiedź brzmi $x < y$, to po wykonaniu porównania stan naszej wiedzy reprezentuje zbiór uporządkowany $P + xy$. Jeśli odpowiedź brzmi $y < x$, to $P + yx$. Przy czym wyrocznia zawsze udziela odpowiedzi niesprzecznej z naszą dotychczasową wiedzą. Sortowanie kończy się, gdy otrzymamy zbiór liniowo uporządkowany. Przez $S(P)$ oznaczamy minimalną liczbę porównań zawsze wystarczającą do posortowania $P$. Mamy następującą *teorio-informacyjną dolną granicę* dla sortowania

$$S(P) \geqslant \log_2 e(P).$$

**Definicja 1.3** Współczynnikiem zbalansowania *zbioru uporządkowanego $P = (X, r)$ nazywamy*

$$b(P) = \max_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{\min\{e(P + xy), e(P + yx)\}}{e(P)}.$$

*Jeśli $|X| = 1$, to przyjmujemy $b(P) = 0$.*

Istotną rolę w prowadzonych badaniach mają następujące pojęcia.

**Definicja 1.4** *Zbiory uporządkowane $P_1$ i $P_2$ nazywamy* przystającymi*, jeśli $P_1$ i $P_2$ są izomorficzne lub $P_1$ jest izomorficzny ze zbiorem uporządkowanym dualnym do $P_2$.*

**Definicja 1.5** *Jeśli $(X_1, r_1)$ i $(X_2, r_2)$ są zbiorami uporządkowanymi i $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, to ich* sumą liniową *nazywamy zbiór uporządkowany $(X_1 \cup X_2, r_1 \cup r_2 \cup X_1 \times X_2)$.*

**Lemat 1.1** *Jeśli zbiory uporządkowane $P_1$ i $P_2$ są przystające, to $e(P_1) = e(P_2)$, $S(P_1) = S(P_2)$ i $b(P_1) = b(P_2)$.*

**Lemat 1.2** *Jeśli zbiór uporządkowany $P$ jest sumą liniową $P_1$ i $P_2$, to $e(P) = e(P_1) \cdot e(P_2)$, $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$ i $b(P) = \max\{b(P_1), b(P_2)\}$.*

W rozprawie rozważamy pewne szczególne klasy zbiorów uporządkowanych.

**Definicja 1.6** Półporządkiem (ang. semiorder) *nazywamy zbiór uporządkowany $(X, <)$ spełniający dla każdych $a, b, c, d \in X$ następujące warunki:*

- *jeśli $a < b$ i $c < d$, to zachodzi co najmniej jedna z relacji $a < d$ lub $c < b$;*
- *jeśli $a < b$ i $b < c$, to zachodzi co najmniej jedna z relacji $a < d$ lub $d < c$.*

**Definicja 1.7** *Zbiór uporządkowany nazywamy* $k$-cienkim (ang. $k$-thin)*, jeśli każdy jego element jest nieporównywalny z co najwyżej $k$ innymi jego elementami.*

Uzyskane w rozprawie wyniki zostały podzielone na trzy części:

- hipoteza o złotym podziale,
- najgorzej zbalansowane zbiory częściowo uporządkowane,
- sortowanie z minimalną liczbą porównań.

## 2 Hipoteza o złotym podziale

W tej części rozprawy formułujemy nową hipotezę dotyczącą zbiorów uporządkowanych [18]. Znaczenie tej hipotezy wynika z tego, że jej prawdziwość implikuje prawdziwość bardzo znanej hipotezy 1/3–2/3 oraz ciasną górną granicę dla sortowania zbiorów uporządkowanych.

**Hipoteza 2.1 (o złotym podziale)** *Dla każdego zbioru uporządkowanego $P$, nie będącego łańcuchem, możemy wskazać takie dwa kolejne porównania, że niezależnie od ich wyniku zachodzi nierówność*

$$t_0 \geqslant t_1 + t_2,$$

*gdzie $t_0$ oznacza liczbę rozszerzeń liniowych $P$, a $t_1$ i $t_2$ oznaczają odpowiednio liczbę rozszerzeń liniowych po pierwszym porównaniu i po obu porównaniach.*

Hipotezę 1/3–2/3 sformułował po raz pierwszy Kislicyn w 1968 [7], ale nie została ona zauważona przez szersze grono badaczy. Później hipotezę tę sformułował niezależnie Fredman około 1975, ale opublikował ją dopiero Linial w 1984 [12]. Przy przyjętych przez nas definicjach hipoteza 1/3–2/3 głosi, że jeśli zbiór uporządkowany nie jest łańcuchem, to jego współczynnik zbalansowania wynosi co najmniej 1/3. Do dziś hipoteza ta pozostaje nierozwiązana. Została natomiast udowodniona dla szczególnych przypadków: zbiory uporządkowane szerokości dwa – Linial [12], półporządki – Brightwell [1], 5-cienkie zbiory uporządkowane – Brightwell i Wright [4, 28], zbiory uporządkowane o dostatecznie dużej liczbie elementów minimalnych lub maksymalnych – Komlós [11] i zbiory uporządkowane wysokości dwa – Trotter i in. [24]. Udowodniono też nieco słabsze wersje tej hipotezy z mniejszymi ograniczeniami współczynnika zbalansowania wynoszącymi odpowiednio: 3/11 – Kahn i Saks [6], $(5-\sqrt{5})10$ – Brightwell i in. [3]. Łatwo jest udowodnić, że zachodzi następujący fakt.

**Fakt 2.1** *Prawdziwość hipotezy o złotym podziale implikuje prawdziwość hipotezy* 1/3–2/3.

Jak już wspomniano we wstępie, liczba porównań potrzebnych i zawsze wystarczających do posortowania zbioru uporządkowanego $P$ spełnia nierówność $S(P) \geqslant \log_2 e(P)$. Z drugiej strony jesteśmy zainteresowani znalezieniem najmniejszej takiej stałej $R_0$, że dla każdego zbioru uporządkowanego $P$ zachodzi $S(P) \leqslant R_0 \log_2 e(P)$. Brightwell postawił hipotezę [2], że $R_0 = 1/\log_2 \varphi \approx 1{,}4404$, gdzie $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ jest stałą złotej proporcji. Zostało to udowodnione tylko dla zbiorów uporządkowanych szerokości dwa [12]. W ogólnym przypadku znane jest tylko oszacowanie $1/\log_2 \varphi \leqslant R_0 \leqslant 2{,}1226$ [2].

Niech $F_n$ oznacza $n$-tą liczbę Fibonacciego, rozpoczynając od $F_1 = F_2 = 1$. W rozprawie dowodzimy następujących stwierdzeń.

**Fakt 2.2** *Jeśli hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa i $e(P) < F_{n+3}$, to $S(P) \leqslant n$.*

**Fakt 2.3** *Jeśli hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa, to stała $R_0$ ma wartość*

$$\sup_P \frac{S(P)}{\log_2 e(P)} = \frac{1}{\log_2 \varphi}.$$

Głównym narzędziem stosowanym przy badaniu hipotezy o złotym podziale jest sformułowane w rozprawie pojęcie trójki zbalansowanej.

**Definicja 2.1** *Trójkę różnych elementów $(x, y, z)$ zbioru uporządkowanego $P$ nazywamy* zbalansowaną, *jeśli*

$$e(P + xy + yz) \leqslant \max\{e(P + yx), e(P + zy)\} \leqslant \tfrac{1}{2} e(P).$$

**Lemat 2.1** *Jeżeli w zbiorze uporządkowanym $P$ istnieje zbalansowana trójka $(x, y, z)$, to $P$ nie jest kontrprzykładem dla hipotezy o złotym podziale.*

Hipotezy o złotym podziale, podobnie jak hipotezy 1/3–2/3, nie udało się udowodnić w ogólności. W rozprawie dowodzimy następujących twierdzeń.

**Twierdzenie 2.1** *Hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa dla zbiorów uporządkowanych szerokości dwa.*

**Twierdzenie 2.2** *Hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa dla dowolnego półporządku nie będącego łańcuchem.*

**Twierdzenie 2.3** *Gdy $n$ dąży do nieskończoności, to ułamek $n$-elementowych zbiorów uporządkowanych spełniających hipotezę o złotym podziale dąży do* 1.

Za pomocą komputera weryfikujemy prawdziwość następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.4** *Hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa dla zbiorów uporządkowanych zawierających co najwyżej* 11 *elementów i nie będących łańcuchami.*

Ukoronowaniem rozważań nad hipotezą o złotym podziale jest wspomagany komputerowo dowód poniższego twierdzenia [20].

**Twierdzenie 2.5** *Hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa dla* 6*-cienkich zbiorów uporządkowanych, które nie są łańcuchami.*

Zastosowana metoda dowodzenia jest udoskonaleniem metody użytej przez Brightwella i Wrighta w dowodzie hipotezy 1/3–2/3 dla 5-cienkich zbiorów częściowo uporządkowanych [4, 28]. Idea dowodu polega na tym, aby dla ustalonego $k$ najpierw wygenerować skończoną liczbę konfiguracji w ten sposób, że każdy $k$-cienki zbiór uporządkowany, mówiąc nieformalnie, zawiera jedną z tych konfiguracji, a następnie wskazać dla każdej z tych konfiguracji świadka stwierdzającego, że jeśli $k$-cienki zbiór uporządkowany zawiera taką konfigurację, to nie może być kontrprzykładem dla rozważanej hipotezy. Pozostawiamy niezmienioną zasadniczą ideę generowania konfiguracji i znajdowania świadków, ale dla jej zrealizowania stosujemy odmienne algorytmy. Zalety prezentowanego w rozprawie podejścia są następujące:

- Dowodzimy ogólniejszej tezy – hipotezy o złotym podziale, z której wynika zarówno prawdziwość hipotezy 1/3–2/3, jak i ciasna górna granica dla sortowania, gdyż klasa $k$-cienkich zbiorów uporządkowanych jest zamknięta ze względu na wykonywanie porównań.

- Upraszczamy definicję konfiguracji. Konfiguracja nie zawiera pomocniczego porządku liniowego.

- Stosujemy inny, prosty i nierekurencyjny algorytm generowania konfiguracji. Wyraźnie oddzielamy fazę generowania konfiguracji od fazy poszukiwania świadków, co czyni prezentowaną metodę bardziej przejrzystą.

- Stosujemy zupełnie odmienny algorytm znajdowania świadka. W zasadzie algorytm ten musi być inny, bo dowodzimy innej tezy. Nie korzystamy z pojęcia 2-separowalności. Używamy natomiast pojęcia trójki zbalansowanej.

- W algorytmie znajdowania świadka nie korzystamy z programowania liniowego. Zastosowana przez Wrighta procedura rozwiązywania zagadnienia programowania liniowego używa arytmetyki zmiennopozycyjnej. Związane z tym powstawanie błędów numerycznych i konieczność zaokrąglania już danych wejściowych stanowią dużą niedogodność i potencjalne źródło otrzymania fałszywego wyniku. W prezentowanych algorytmach korzystamy tylko z arytmetyki stałopozycyjnej, co gwarantuje możliwość dokładnego wykonania wszystkich obliczeń.

- Wykonana implementacja prezentowanej metody jest prostsza od implementacji opisanej w [28]. Dzięki temu łatwiej jest nabrać przekonania, że rzeczywiście w wyniku wykonania programu komputerowego dostajemy dowód twierdzenia. Implementacja wykonana przez Wrighta to kilka niezależnych programów napisanych głównie w języku BCPL (łącznie ponad 2500 linii). Wyjątkiem jest program rozwiązujący zagadnienie programowania liniowego napisany w języku FORTRAN i korzystający z biblioteki procedur numerycznych. Implementacja prezentowanej tu metody to pojedynczy program zawierający około 1600 linii w języku C. Języki BCPL i C mają podobną siłę wyrazu, gdyż BCPL jest „dziadkiem" C. Liczba wierszy jest więc miarodajnym porównaniem wielkości kodu w tych językach.

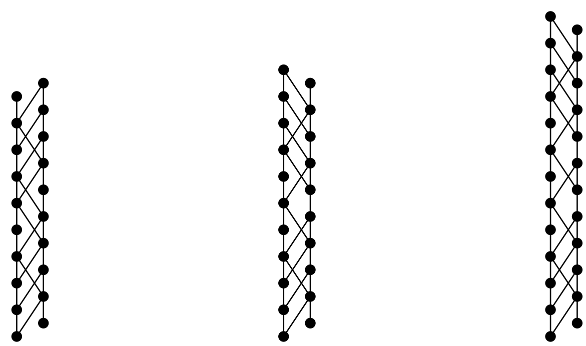
Implementacja prezentowanej w rozprawie metody została wykonana całkowicie niezależnie i nie korzysta w żadnym miejscu z algorytmów lub kodu źródłowego opisanych w [28]. Zastosowany algorytm jest ogólny i może być użyty do dowodzenia hipotezy o złotym podziale dla $k$-cienkich zbiorów uporządkowanych dla dowolnego $k \geqslant 2$. Ograniczenie stanowi jego złożoność obliczeniowa.

## 3 Najgorzej zbalansowane zbiory częściowo uporządkowane

Dość naturalnym problemem, który pojawia się przy badaniu hipotezy 1/3–2/3 i hipotezy o złotym podziale, jest pytanie o wartości, jakie może przyjmować współczynnik zbalansowania zbioru uporządkowanego. W rozprawie zajmujemy się poszukiwaniem zbiorów uporządkowanych o najmniejszej wartości współczynnika zbalansowania w różnych klasach takich zbiorów. Dowolny łańcuch ma współczynnik zbalansowania 0. Znamy też 3-elementowy zbiór uporządkowany o współczynniku zbalansowania wynoszącym 1/3. Podejrzewamy, że nie ma zbiorów uporządkowanych o współczynniku zbalansowania pomiędzy 0 a 1/3, wierząc w prawdziwość hipotezy o złotym podziale. Uzyskane wyniki raczej wzmacniają tę wiarę, gdyż spośród zbadanych zbiorów uporządkowanych najmniejsze wartości współczynnika zbalansowania, będące najbliżej 1/3, okazują się mieć zbiory uporządkowane szerokości dwa. Dla takich zbiorów uporządkowanych udowodniliśmy, że kontrprzykładami nie są. Wiemy też, że współczynnik zbalansowania zbioru uporządkowanego będącego sumą liniową jest równy maksymalnemu ze współczynników zbalansowania składników tej sumy. Zatem precyzyjnie należy postawić pytanie o $n$-elementowy zbiór uporządkowany o najmniejszej wartości współczynnika zbalansowania i nie będący sumą liniową innych zbiorów uporządkowanych.

Pytanie o to, jak źle może być zbalansowany zbiór uporządkowany, ma też związek z sortowaniem. Dość naturalną, choć nie zawsze optymalną, strategią sortowania zbioru uporządkowanego jest wskazywanie podziału zbioru rozszerzeń liniowych na możliwie równoliczne podzbiory. Gdy rozważamy przypadek pesymistyczny, to złośliwy przeciwnik, starając się utrudnić nam zadanie, będzie wybierał podzbiór o większej mocy. Współczynnik zbalansowania określa, jak bliski idealnemu (na równoliczne podzbiory) podział możemy wskazać.

W rozprawie przedstawiamy osiągnięte rekordy w poszukiwaniu najgorzej zbalansowanych zbiorów uporządkowanych. Wyłaniające się podczas prowadzenia eksperymentów komputerowych regularności doprowadziły do zdefiniowania nowej klasy takich źle zbalansowanych zbiorów częściowo uporządkowanych, które zostały nazwane *drabinami z powyłamywanymi szczeblami*. Wśród przeszukanych zbiorów uporządkowanych najgorzej zbalansowanymi okazują się być właśnie drabiny z powyłamywanymi szczeblami, których przykłady przedstawia poniższy rysunek.



$L_{20,1,5,8,11,15}$ $L_{21,1,5,8,9,12,16}$ $L_{25,1,5,8,9,12,13,16,20}$

# 4 Sortowanie z minimalną liczbą porównań

Problem wyznaczenia minimalnej liczby porównań $S(n)$ zawsze wystarczającej do posortowania $n$ elementów jest jednym z fundamentalnych problemów w teorii sortowania. Steinhaus postawił ten problem w *Kalejdoskopie matematycznym* [23], nazywając go problemem turniejowym [5]. Stąd bywa też nazywany problemem Steinhausa [27, str. 215]. Knuth poświęcił duży fragment swojej klasycznej już książki *The Art of Computer Programming* [8] problemowi optymalnego sortowania.

Z teorio-informacyjnej dolnej granicy dla sortowania wynika, że $S(n) \geqslant \lceil \log_2 n! \rceil$. Wprowadźmy oznaczenie $C(n) = \lceil \log_2 n! \rceil$. Ford Jr i Johnson [5] odkryli algorytm (oznaczany dalej FJA), który wymaga liczby porównań bliskiej, a czasem dokładnie równej tej teoretycznej dolnej granicy. Dla $n \leqslant 11$ niezależnie odkryli tę metodę również Trybuła i Czen [25]. Oznaczmy przez $F(n)$ liczbę porównań wymaganą przez FJA do posortowania $n$ elementów. Dla $n \leqslant 11$ i $n = 20, 21$ zachodzi $F(n) = C(n)$, zatem FJA jest optymalny w tych przypadkach. Dla $n = 12, 13, \ldots, 19, 22$ zachodzi $F(n) = C(n) + 1$. Prowadząc wyczerpujące obliczenia komputerowe, Wells odkrył, że $S(12) = F(12) = 30$ [26, 27]. Knuth postawił problem znalezienia następnej wartości $S(13)$ w [8, rozdz. 5.3.1, zad. 35]. Przypuszczał on, że $S(13) = 33$ i $S(14) = 37$ [10]. W rozprawie przedstawiamy algorytmy, które posłużyły do komputerowego wyznaczenia następujących wartości: $S(13) = 34$, $S(14) = 38$, $S(15) = 42$ i $S(22) = 71$ [16, 17]. Badania te są kontynuacją badań prowadzonych w ramach pracy magisterskiej [15].

Okazuje się, że FJA jest optymalny dla $n \leqslant 15$ i $n = 20, 21, 22$. Z drugiej strony najmniejszą liczbą elementów, dla której znamy algorytm lepszy od FJA jest 47. Schulte Mönting [22] znalazł algorytm, który najpierw sortuje 5 elementów i 42 elementy za pomocą FJA, używając odpowiednio 7 i 171 porównań, a następnie scala posortowane ciągi za pomocą 22 dalszych porównań. Algorytm ten potrzebuje więc łącznie 200 porównań, podczas gdy FJA potrzebuje ich 201. Wiadomo, że FJA nie jest optymalny dla nieskończenie wielu wartości $n$, a wszystkie znane lepsze algorytmy są kombinacją sortowania i scalania

[13, 14]. W rozprawie przedstawiamy wyniki wyczerpującego przeszukiwania z użyciem komputera świadczące o tym, że 47 jest najmniejszą liczbą elementów, dla której istnieje algorytm typu: sortuj $m$ i $n-m$ elementów za pomocą FJA, a następnie scal posortowane ciągi, przy czym łączna liczba porównań jest mniejsza niż potrzebna do bezpośredniego posortowania $n$ elementów za pomocą FJA [19]. W rozprawie prezentujemy też algorytm zastosowany do wyznaczania minimalnej liczby porównań potrzebnych do scalenia dwóch posortowanych ciągów. Algorytm ten jest modyfikacją algorytmu użytego do wyznaczania wartości $S(n)$. Bez tych modyfikacji dokończenie obliczeń byłoby praktycznie niemożliwe.

# 5 Podsumowanie

Przedstawione w referowanej rozprawie obliczenia komputerowe zajęły łącznie około 10 lat czasu procesora. Uzyskane dane empiryczne stanowiły istotne wsparcie dla rozważań teoretycznych. Za najważniejsze wyniki niniejszej rozprawy można uznać: sformułowanie hipotezy o złotym podziale, zdefiniowanie pojęcia trójki zbalansowanej i udowodnienie hipotezy o złotym podziale dla 6-cienkich zbiorów częściowo uporządkowanych. Metodologia tego dowodu jest analogiczna do zastosowanej w słynnym dowodzie twierdzenia o czterech barwach. Wszystkie przedstawione wyniki istotnie rozszerzają naszą wiedzę o własnościach zbiorów częściowo uporządkowanych. Wyniki przeprowadzonych obliczeń stanowią też olbrzymi materiał badawczy, który umożliwia sformułowanie szeregu dalszych, wartych przebadania, hipotez.

Pełny kod źródłowy programów użytych do przeprowadzenia obliczeń, których wyniki zostały zamieszczone w referowanej rozprawie, można ściągnąć ze strony internetowej [21].

# Literatura


[1] G. Brightwell, Semiorders and the 1/3–2/3 conjecture, *Order* **5** (1989), 369–380.

[2] G. Brightwell, Balanced pairs in partial orders, *Discrete Mathematics* **201** (1999), 25–52.

[3] G. Brightwell, S. Felsner, W. T. Trotter, Balancing pairs and the cross-product conjecture, *Order* **12** (1995), 327–345.

[4] G. Brightwell, C. D. Wright, The 1/3–2/3 conjecture for 5-thin posets, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **5** (1992), 467–474.

[5] L. Ford, S. Johnson, A tournament problem, *American Mathematical Monthly* **66** (1959), 387–389.

[6] J. Kahn, M. Saks, Balancing poset extensions, *Order* **1** (1984), 113–126.

[7] S. S. Kislicyn, Konečnye častično uporâdočennye množestva i sootvetstvuûščie im množestva perestanovok, *Matematičeskie Zametki* **4** (1968), 511–518.

[8] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 3, Sorting and Searching, 2nd ed., Addison–Wesley, Reading, MA, 1998, *Sztuka programowania*, Tom 3, Sortowanie i wyszukiwanie, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2002.

[9] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Pre-Fascicle 2B, Generating All Permutations, Addison–Wesley, Reading, MA, 2002.

[10] D. E. Knuth, E. B. Kaehler, An experiment in optimal sorting, *Information Processing Letters* **1** (1972), 173–176.

[11] J. Komlós, A strange pigeon-hole principle, *Order* **7** (1990), 107–113.

[12] N. Linial, The information theoretic bound is good for merging, *SIAM Journal on Computing* **13** (1984), 795–801.

[13] G. K. Manacher, The Ford–Johnson algorithm is not optimal, *Journal of the Association for Computing Machinery* **26** (1979), 441–456.

[14] G. K. Manacher, T. D. Bui, T. Mai, Optimum combinations of sorting and merging, *Journal of the Association for Computing Machinery* **36** (1989), 290–334.

[15] M. Peczarski, *Optymalne sortowanie – eksperymenty*, Praca magisterska, Uniwersytet Warszawski, Warszawa, 2002.

[16] M. Peczarski, Sorting 13 elements requires 34 comparisons, In *Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms* (R. Möhring and R. Raman, eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 2461, 2002, 785–794.

[17] M. Peczarski, New results in minimum-comparison sorting, *Algorithmica* **40** (2004), 133–145.

[18] M. Peczarski, The gold partition conjecture, *Order* **23** (2006), 89–95.

[19] M. Peczarski, The Ford–Johnson algorithm still unbeaten for less than 47 elements, *Information Processing Letters*, ukaże się w 2007.

[20] M. Peczarski, The gold partition conjecture for 6-thin posets, manuskrypt złożony do recenzji.

[21] M. Peczarski, *Home Page*, http://www.mimuw.edu.pl/~marpe/.

[22] J. Schulte Mönting, Merging of 4 or 5 elements with $n$ elements, *Theoretical Computer Science* **14** (1981), 19–37.

[23] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, 2nd edn., Oxford University Press, 1950, 38–39, *Kalejdoskop matematyczny*, wyd. 7. (drugie polskie), Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa, 1954.

[24] W. T. Trotter, W. G. Gehrlein, P. C. Fishburn, Balance theorems for height-2 posets, *Order* **9** (1992), 43–53.

[25] S. Trybuła, P. Czen, *Calcutta Mathematical Society Golden Jubilee Commemoration* **2** (1959), 323–327.

[26] M. Wells, Applications of a language for computing in combinatorics, In *Information Processing 65 (Proceedings of the 1965 IFIP Congress)*, North-Holland, Amsterdam, 1966, 497–498.

[27] M. Wells, *Elements of Combinatorial Computing*, Pergamon Press, Oxford, 1971.

[28] C. D. Wright, *Combinatorial Algorithms*, Ph.D. thesis, Cambridge University, Cambridge, 1990.