Autoreferat rozprawy doktorskiej

Marcin Chałupnik

Luty 2003

W mojej pracy badam własności homologiczne reprezentacji grupy liniowej. Podstawowe narzędzie techniczne jakim się posługuję: funktory ściśle wielomianowe w sensie [FS] jest wynikiem długiego procesu ewolucji idei matematycznych, dlatego chciałbym zacząć od opisania powodów jakie doprowadziły do jego wprowadzenia.
Aby oczekiwać interesującej teorii reprezentacji grupy $GL_n(\mathbf{k})$ warto wyposażyć ją w dodatkową strukturę. W sytuacji gdy $\mathbf{k}$ jest dowolnym ciałem, jedyną naturalną strukturą jaka się nasuwa jest struktura grupy algebraicznej. Tą drogą poszedł Schur w swoim słynnym doktoracie [S]. Rozważał on reprezentacje $GL_n(\mathbf{k})$ o wartościach w skończenie wymiarowych przestrzeniach nad $\mathbf{k}$, dla których homomorfizm strukturalny $GL_n(\mathbf{k}) \longrightarrow GL_N(\mathbf{k})$ jest opisany jednorodnymi formułami wielomianowymi ustalonego stopnia d. Kluczowa dla sukcesu tego podejścia była obserwacja, że tak uzyskana kategoria jest izomorficzna z kategorią skończenie wymiarowych reprezentacji pewnej algebry łącznej $S_{n,d}(\mathbf{k})$, nazywanej algebrą Schura. Reprezentacje tej algebry są od stu lat badane z wieloma sukcesami (patrz np. [Ma]), przy czym rzecz naturalna, ważną rolę w tych badaniach odgrywają metody geometrii algebraicznej.
Tym niemniej z punktu widzenia algebry homologicznej (dla której interesujący jest przypadek ciała $\mathbf{k}$ dodatniej charakterystyki) kategoria modułów nad algebrą Schura pozostaje nadal beznadziejnie skomplikowana. W szczególności do niedawna były znane jedynie nieliczne obliczenia grup Ext (głównie Ext^1) w tej kategorii, przy czym były one uzyskiwane dosyć prymitywnymi metodami. Przełom przyniosły prace z połowy lat 90-ych inspirowane topologią algebraiczną. Otóż autorzy [HLS] próbując zrozumieć niestabilne moduły nad algebrą Steenroda wprowadzili kategorię $\mathcal{F}$, której obiektami są funktory

z kategorii skończenie wymiarowych przestrzeni nad ciałem skończonym $\mathbf{k}$ do kategorii przestrzeni nad $\mathbf{k}$, zaś morfizmami transformacje funktorów. Jak wykazała następna praca [FLS], w $\mathcal{F}$ są możliwe efektywne obliczenia Extów. Co ważne zaś, kategoria ta jest ściśle związana z kategorią $GL_n(\mathbf{k})$–modułów, ponieważ dla każdego n, na przestrzeni $F(\mathbf{k}^n)$ działa grupa $\mathrm{Aut}(\mathbf{k}^n) = GL_n(\mathbf{k})$. Następnym pomysłem, tym razem pochodzącym od Friedlandera i Suslina ([FS]) było zmodyfikowanie kategorii funktorów zgodnie z ideami Schura tak, aby można było w niej stosować metody geometrii algebraicznej. Ta udoskonalona kategoria: kategoria $\mathcal{P}_d$ jednorodnych funktorów ściśle wielomianowych stopnia d i ich transformacji, jest kategorią roboczą w mojej pracy. Mówiąc w wielkim skrócie, aby określić jednorodny funktor ściśle wielomianowy stopnia d należy: po pierwsze dla każdej skończenie wymiarowej przestrzeni V wybrać skończenie wymiarową przestrzeń $F(V)$, po drugie zaś dla każdej pary skończenie wymiarowych przestrzeni V, W, wybrać jednorodne przekształcenie wielomianowe stopnia d z $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V,W)$ do $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(F(V), F(W))$ tak, aby był spełniony odpowiedni warunek zgodności. W sytuacji gdy ciało $\mathbf{k}$ jest nieskończone, o funktorze ściśle wielomianowym można myśleć po prostu jako o funktorze, który działa na morfizmach wielomianowo. Jednak gdy $\mathbf{k}$ jest skończone, pojawia się subtelna różnica wynikająca z istnienia wielomianów mających jedynie zerowe ewaluacje (precyzyjne definicje można znaleźć w [FS], rozdz. 2 lub w paragrafie 1.1 mojej pracy).

Taki mniej więcej stan rzeczy zastałem kiedy zacząłem się interesować reprezentacjami grupy liniowej. Moją uwagę przykuła zwłaszcza praca [FLS], która wraz z następującymi po niej [FS] i [FFSS] pokazała, że w kategorii funktorów możliwe są obliczenia Extów, które używając tradycyjnego języka wydawały się bardzo trudne. Ponadto w pracach [Be], [FS], [FFSS], [K1], [K2] zbadano dość dokładnie związki kategorii funktorów z dotychczasowymi podejściami do reprezentacji grupy liniowej. We wszystkich tych pracach dawały się jednak wyraźnie oddzielić dwa wątki: z jednej strony dowodzono bardzo ogólne twierdzenia dotyczące własności kategorii $\mathcal{F}$, jej związków z reprezentacjami itd, z drugiej zaś prowadzono z sukcesami obliczenia grup Ext. Jednak wszystkie konkretne obliczenia dotyczyły funktorów bardzo szczególnej postaci: tzw. funktorów eksponencjalnych ([FFSS], str. 670), takich jak potęgi symetryczne i zewnętrzne (eksponencjalność potęg symetrycznych oznacza, że $S^n(V \oplus W) = \bigoplus_{i+j=n} S^i(V) \otimes S^j(W)$). Ponieważ jednak własność ekponencjalności jest szczególnym przypadkiem tzw. Formuły Rozkładu (por.

paragraf 1.3 mojej pracy), która dotyczy znacznie szerszej klasy funktorów (funktorów Weyla i Schura), więc uznałem, że jest szansa na znacznie uogólnienie obliczeń w kategorii funktorów pod warunkiem wykorzystania w większym stopniu narzędzi teorii reprezentacji. Tak więc w centrum mojej uwagi znalazły się funktory Weyla i Schura, choć później okazało się (jak często się zdarza w takich sytuacjach), że część obliczeń daje się rozciągnąć na zupełnie dowolne funktory (Tw. 2.7 w mojej pracy).
Zanim przejdę do omówienia najważniejszych wyników mojej pracy, chciałbym omówić jeszcze jedną kwestię. Ponieważ moim ostatecznym celem są obliczenia Extów w kategorii $GL_n(\mathbf{k})$–modułów dla $\mathbf{k}$ charakterystyki $p > 0$, więc powinniśmy dokładniej przyjrzeć się związkowi między Extami w tej kategorii, oraz w kategorii $\mathcal{P}_d$. Teoretyczne dokonania [Be] i [FFSS] (patrz też twierdzenia 1.2 i 1.7 w mojej pracy) można zamknąć w następującym stwierdzeniu:

Twierdzenie (Betley, Franjou–Friedlander–Scorichenko–Suslin)

Dla dowolnych $F, G \in \mathcal{P}_d$, naturalne odwzorowanie:

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(F^{(i)}, G^{(i)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{Gl_n(\mathbf{k})}(F(\mathbf{k}^n), G(\mathbf{k}^n))$$

jest izomorfizmem dla dostatecznie dużych: ciała skończonego $\mathbf{k}$, oraz liczb n, i.

Dopisek $^{(i)}$ oznacza i–krotne skręcenie Frobeniusa funktora tzn. i–krotne złożenie go z funktorem przypisującym przestrzeni ją samą ale z działaniem ciała indukowanym przez automorfizm Frobeniusa. Konieczność uwzględnienia tego skręcenia trudno heurystycznie wyjaśnić, choć jest to zjawisko znane w matematyce co najmniej od [CKPS], natomiast sens pozostałych założeń jest w miarę jasny. Wzięcie dużego ciała wynika oczywiście z tego, że im większe ciało $\mathbf{k}$ tym więcej informacji algebrogeometrycznej zawierają punkty $\mathbf{k}$–wymierne, zaś wzięcie dużej liczby n bierze się stąd, że kategoria funktorów dobrze opisuje reprezentacje $GL_n(\mathbf{k})$ jedynie dla dużych n (sukces kategorii funktorów bierze się prawdopodobnie właśnie z tego, że w naturalny sposób przybliża reprezentacje $GL_n(\mathbf{k})$ dla dużych n, a jak wielokrotnie zaobserwowano teoria reprezentacji grupy liniowej dla dużego n pod pewnymi względami się upraszcza). A zatem aby obliczyć Ext między dwoma reprezentacjami (dla dużego n i dużego ciała skończonego), trzeba znaleźć odpowiadające im funktory ściśle wielomianowe i obliczyć Ext między ich skręceniami w kat-

egorii $\mathcal{P}_d$. I tak np. głównym wynikiem obliczeniowym [FS] było wyznaczenie grup $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{p^i}}(I^{(i)}, I^{(i)})$, ($I$ oznacza funktor identycznościowy) co prowadzi do obliczenia $Ext^*_{GL_n(\mathbf{k})}(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^n) = H^*(GL_n(\mathbf{k}), M_n(\mathbf{k}))$ z działaniem $GL_n(\mathbf{k})$ na macierzach przez sprzężenie, co jest trudnym, wciąż nieopublikowanym wynikiem Boekstedta.
Bezpośrednią inspirację dla mojej pracy stanowił jednak artykuł [FFSS]. Uogólniając metody [FS] obliczono w nim min. $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(D^{d(i)}, S^{d(i)})$, gdzie $D^d(V) := (V^{\otimes d})^{\Sigma_d}$ oznacza funktor d–tej potęgi podzielonej, zaś $S^d(V) := (V^{\otimes d})_{\Sigma_d}$ funktor d–tej potęgi symetrycznej (nad ciałem dodatniej charakterystyki te funktory nie są izomorficzne). Interesujący był już sam wynik. Otóż jeśli oznaczymy przez A_i grupę $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{p^i}}(I^{(i)}, I^{(i)})$ (jest to przestrzeń jednowymiarowa w gradacjach parzystych mniejszych niż $2p^i$, oraz zerowa poza nimi), to łatwo obliczyć $B_i = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(I^{\otimes d(i)}, I^{\otimes d(i)})$ wraz ze strukturą Σ_d–bimodułu ($B_i = (A_i)^{\otimes d} \otimes \mathbf{k}[\Sigma_d]$, struktura Σ_d–bimodułu jest dana formułą: $\sigma.a_1 \otimes \ldots \otimes a_d \otimes e_\tau.\lambda = a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(d)} \otimes e_{\sigma\tau\lambda}$). Okazuje się, że $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(D^{d(i)}, S^{d(i)}) = {}_{\Sigma_d}(B_i)_{\Sigma_d}$, a więc uzyskujemy te grupy z $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(I^{\otimes d(i)}, I^{\otimes d(i)})$ przez zastosowanie dokładnie tych samych operacji algebraicznych tzn. koniezmienników, których użyliśmy aby otrzymać funktory D^d i S^d z potęgi tensorowej (po lewej stronie niezmienniki zamieniły się na koniezmienniki ponieważ Ext zależy od pierwszej współrzędnej kontrawariantnie). W tej sytuacji wydało mi się bardzo naturalne pytanie o to dla jakiej klasy funktorów tego rodzaju opis Extów ma miejsce. Temu problemowi poświęcony jest drugi rozdział mojej pracy (rozdział pierwszy zawiera wstępne informacje z algebry homologicznej i teorii reprezentacji, w szczególności znacznie bardziej szczegółowo omówione są fakty jakie naszkicowałem w dotychczasowej części autoreferatu).

Narzędziem, które pozwala precyzyjnie formułować wyniki rozdziału 2 jest pojęcie injektywnej, oraz projektywnej symetryzacji funktora ściśle wielomianowego F (Definicja 2.1). Jest to addytywny, $\mathbf{k}$–liniowy funktor $f : \{[\Sigma_d]\text{–mod}\} \longrightarrow \{\mathbf{k}\text{–mod}\}$ taki, że $f(V^{\otimes d}) = F(V)$, który spełnia dodatkowo pewien warunek techniczny nieco inny w przypadku injektywnym i projektywnym. Pierwsze ważne twierdzenie rozdziału 2, mówi:

Twierdzenie 2.7 *Dla dowolnego $F \in \mathcal{P}_d$, oraz dowolnego diagramu μ*

wielkości d:

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(D^{\mu(i)}, F^{(i)}) = f^{in}(s^\mu(B_i)).$$

Oznaczenia użyte w sformułowaniu twierdzenia mają następujący sens: D^μ oznacza $D^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes D^{\mu_k}$ dla diagramu Younga μ wielkości d, f^{in} jest dowolną symetryzacją injektywną F, zaś s^μ jest oczywistą symetryzacją injektywną funktora S^μ. Samą formułę rozumiemy tak, że najpierw stosujemy s^μ do lewej Σ_d–struktury B_i, a następnie f^{in} do prawej. Oczywiście Twierdzenie 2.7 (i wszystkie następne) może być przetłumaczone na język $GL_n(\mathbf{k})$–modułów jako obliczenie grup $\mathrm{Ext}^*_{GL_n(\mathbf{k})}(D^d(\mathbf{k}^n), F(\mathbf{k}^n))$ dla dużego ciała skończonego $\mathbf{k}$ i liczby n. Kolejne twierdzenie daje prosty, abstrakcyjny warunek na to aby dla $F, G \in \mathcal{P}_d$, Ext między skręceniami wyrażał się w sposób czysto algebraiczny przez B_i:

Twierdzenie 2.8 *Załóżmy, że* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{P}_d}(F \circ I^{\oplus p^i}, G) = 0$ *dla* $n > 0$. *Wówczas:*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(F^{(i)}, G^{(i)}) = (f^{pr\#}, g^{in})(B_i).$$

W powyższej formule $(f^{in}, g^{pr\#})$ oznacza pewną nieco bardziej skomplikowaną operację algebraiczną (patrz str. 43), wyznaczoną jednoznacznie przez symetryzacje f^{in}, g^{pr} (g^{pr} jest z kolei symetryzacją projektywną G). Najważniejszym przykładem funktorów spełniających założenia Twierdzenia 2.8 są funktory Weyla i Schura stowarzyszone odpowiednio z diagramami Younga μ, λ wielkości d. W tej konkretnej sytuacji opis Extów się upraszcza i przyjmuje postać:

Twierdzenie 2.9

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^i}}(W^{(i)}_\mu, S^{(i)}_\lambda) = s_\lambda(s_\mu(B_i)),$$

gdzie s_μ, s_λ oznaczają oczywiste symetryzacje funktorów Schura. Pod koniec rozdziału zajmuję się rozmaitymi przykładami pokazującymi granice stosowalności Twierdzenia 2.8, oraz wskazującymi na związki pojęcia symetryzacji z kros–efektami funktora i funktorem Schura w sensie [Ma] (nie mylić z S_λ). Metody jakich używam w tym rozdziale mają dosyć ogólny charakter i opierają się w gruncie rzeczy na klasycznych związkach między reprezentacjami grupy liniowej i symetrycznej wynikających z działania ich obu na potędze tensorowej przestrzeni.
Rozdział 3 ma zupełnie inny charakter. Poświęcony jest badaniu koho-

mologii wprowadzonego przeze mnie kompleksu Schura–De-Rhama. Kompleks ten jest teorioreprezentacyjnym uogólnieniem klasycznego ciągu De–Rhama, który był kluczowym narzędziem technicznym w [FLS], [FS], [FFSS]. Używam go w następnym rozdziale do dalszych obliczeń grup Ext. Jednakże obiekt, który miał być jedynie narzędziem technicznym okazał się być bardzo ciekawy sam w sobie. Kompleks Schura–De-Rhama $\mathbf{S}_\lambda$ jest kompleksem funktorów ściśle wielomianowych stowarzyszonym z dowolnym diagramem Younga λ. Jego definicja jest formalnie podobna do definicji znanego od dawna kompleksu Schura, lecz jego kohomologie są bardzo ciekawe. Jak dotąd udało mi się zrozumieć je jedynie częściowo, na szczęście w zakresie wystarczającym do zastosowań jakie miałem na myśli. Języku do ich opisu dostarcza kombinatoryka używana klasycznie do opisu struktury blokowej reprezentacji grupy symetrycznej (również kategorii $\mathcal{P}_d$). Wykazuję najpierw:

Fakt 3.3 *Jeśli λ ma nietrywialny p–rdzeń to $\mathbf{S}_\lambda$ jest acykliczny.*

Natomiast gdy rdzeń λ jest pusty to udało mi się opisać kohomologie w sytuacji gdy p–iloraz λ składa się dokładnie z jednego diagramu μ (używam wtedy oznaczenia $\lambda = F(\mu)$):

Twierdzenie 3.7

$$H^*(\mathbf{S}_{F(\mu)}) = \mathbf{S}_\mu.$$

Dowód Twierdzenia 3.7 jest dosyć skomplikowany i wymaga głębokiego wniknięcia w kombinatorykę diagramów Younga, odpowiedniość między p–haczykami w diagramie i pudełkami w p–ilorazie itp. Tym niemniej twierdzenie i jego dowód rzuca, jak sądzę, nowe światło na kombinatorykę stosowaną dotąd w zupełnie innej sytuacji. Rozdział kończą spekulacje dotyczące hipotetycznych związków kohomologii $\mathbf{S}_\lambda$ z p–ilorazem w sytuacji ogólnej.
W rozdziale 4 uzbrojony w kompleks Schura–De-Rhama wracam do problemu obliczania grup Ext. Próbuję w nim uogólnić Tw. 2.9 na przypadek diagramów różnej wielkości. Główny wynik tego rozdziału, Twierdzenie 4.9, daje oczekiwany opis grup $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^{i+j}}}(W_\mu^{(i+j)}, S^{(i)}_{F^j(\lambda)})$ dla diagramów μ, λ wielkości d (F^j oznacza j–krotne zastosowanie operacji F, która powiększa diagram p–krotnie):

Twierdzenie 4.9

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp^{i+j}}}(W_\mu^{(i+j)}, S^{(i)}_{F^j_k(\lambda)}) = s_\lambda(s_\mu(B_{ij})),$$

gdzie Σ_d–bimoduł B_{ij} jest odpowiednią modyfikacją B_i (patrz str. 83). Podobnie jak w rozdziale 3, sytuacja dramatycznie się komplikuje gdy rozważamy diagramy o ilorazie złożonym z kilku diagramów. Sprawia to, iż problem obliczenia grup $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(W_\mu^{(i+j)}, S_\lambda^{(i)})$ dla dowolnych diagramów μ, λ pozostaje daleki od rozwiązania. Tym niemniej rozważania jakie prowadzę pod koniec rozdziału 4 sugerują pewien sposób systematycznego atakowania tego problemu, wyraźnie wskazując np. na jego związek z Formułą Littlewooda–Richardsona.

Moja praca powstała jako próba uogólnienia i usystematyzowania obliczeń grup Ext w kategorii funktorów. Wyniki 2–go i 4–go rozdziału można traktować jako daleko idące uogólnienie obliczeń [FFSS]. Oczywiście droga do pełnego zrozumienia Extów w kategorii $\mathcal{P}$ jest nadal daleka. Mam jednak nadzieję, że moja praca wykazała, iż obliczenia zapoczątkowane w [FLS] nie są izolowanym fenomenem specyficznym dla konkretnych funktorów ale, że można liczyć na strukturalne zrozumienie wielu Extów w tej kategorii. Zaś motywacji do dalszych obliczeń może dostarczyć choćby znana hipoteza Lusztiga dotycząca charakterów modularnych reprezentacji prostych $GL_n(\mathbf{k})$, którą można zredukować do obliczenia Ext^1 między funktorami prostymi spełniającymi pewien warunek leksykograficzny (patrz np. [Do]).
Nieoczekiwanie ciekawym problemem okazało się badanie kohomologii kompleksu Schura–De-Rhama. Szczególnie intrygujący wydał mi się język jakiego musiałem użyć do ich opisu (ucząc się go po drodze). Mam nadzieje, że dalsze badania pozwolą lepiej zrozumieć związki algebry homologicznej z kombinatoryką blokową, które obecnie wydają się dosyć tajemnicze. Problem opisu kohomologii $\mathbf{S}_\lambda$ w sytuacji ogólnej, czy też zrozumienie $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{dp}}(I^{\otimes d(1)}, S_\lambda)$ (Hipoteza 4.14) wydają się być dobrym punktem wyjścia do dalszych dociekań.

Literatura

[Be] S. Betley, *K–theory of finite fields*, K–Theory **17** (1999), no. 2, 103–111.

[CKPS] E. Cline, W. van der Kallen, B. Parshall, L. Scott, *Rational and generic cohomology*, Inventiones Math. **39** (1977), 143–163.

[Do] S. Donkin, *An introduction to the Lusztig conjecture*, Representations of reductive groups 173–187, Publ. Newton Institute, Cambrigde Univ. Press, 1998.

[FFSS] V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, *General Linear and Functor Cohomology over Finite Fields*, Annals of Math. **150** no. 2, (1999), 663–728.

[FLS] V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz, *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis,* Inventiones Math. **115**, (1994), 513–538.

[FS] E. Friedlander, A. Suslin, *Cohomology of finite group schemes over a field*, Inventiones Math. **127** (1997), 209–270.

[HLS] H. W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, *The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects*, Amer. J. Math. **115** (1995) no. 5, 1053–1106.

[K1] N. Kuhn, *Generic Representations of the Finite General Linear Groups and the Steenrod Algebra II*, K–Theory **8** (1994) no. 4, 395–428.

[K2] N. Kuhn, *Generic Representations of the Finite General Linear Groups and the Steenrod Algebra III*, K–Theory **9** (1995) no. 3, 273–303.

[Ma] S. Martin, Schur algebras and representation theory, Cambridge University Press, 1993.

[S] I. Schur *Uber eine Klasse on Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuorden lassen*, I. Schur Gesammelte Abhandlungen t. I (wyd. A. Brauer, H. Rohrbah), 1–71, Springer–Verlag, 1973.