Ograniczenia dolne przy silnych założeniach złożonościowych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Arkadiusz Socała
Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

1 Wprowadzenie

Chcielibyśmy móc rozwiązywać szybko problemy kombinatoryczne, które pojawiają się w badaniach teoretycznych, jak również w prawdziwym życiu. Niestety, dla wielu z nich nie znamy efektywnych algorytmów. Pojawia się więc naturalne pytanie, czy jest tak dlatego, że jest to niemożliwe, a może tylko nie znamy jeszcze do tego odpowiednich narzędzi? Aby odpowiedzieć na to pytanie musimy zrozumieć jaka jest przyczyna tego, że dany problem jest trudny. Jednym z podejść do badania tego zagadnienia może być próba zredukowania innego, potencjalnie lepiej zbadanego problemu do naszego problemu docelowego. Taka redukcja ukazuje, że docelowy problem ma wystarczającą siłę wyrazu, aby uchwycić trudność problemu źródłowego. Jeśli rozmiar zredukowanej instancji jest wystarczająco mały, zazwyczaj będziemy mogli wyprowadzić z tego interesujące wnioski na temat zależności pomiędzy złożonościami czasowymi tych dwóch problemów.

To podejście jest powszechnie w użyciu dla problemów NP-trudnych. Na przykład można zredukować w czasie wielomianowym n-wierzchołkową instancję problemu 3-CNF-SAT do równoważnej, $n^{O(1)}$-wierzchołkowej instancji problemu 3-Coloring. Na konsekwencje tej redukcji można spojrzeć na dwa sposoby. Po pierwsze, oznacza to, że jeżeli $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, to 3-Coloring nie ma algorytmu działającego w czasie wielomianowym. Jednakże nawet jeśli nie wierzymy, że $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ taka redukcja niesie ze sobą ważną informację: zamiast pracować nad wielomianowym algorytmem dla problemu 3-Coloring powinniśmy raczej skupić się na strukturalnie prostszym problemie 3-CNF-SAT.

W tej rozprawie badamy redukcje o mocniejszych własnościach niż klasyczne redukcje wielomianowe. Na przykład można zauważyć, że klasyczna redukcja z problemu 3-CNF-SAT do problemu 3-Coloring przekształca wejściową formułę φ w graf o $O(|\varphi|)$ wierzchołkach, czyli rozmiar wyjściowej instancji jest nie tylko wielomianowy, ale liniowy. Oznacza to, że algorytm działający w czasie $2^{o(n)}$ dla problemu 3-Coloring implikowałby algorytm działający w czasie $2^{o(|\varphi|)}$ dla problemu 3-CNF-SAT. Znów możemy to zinterpretować na dwa sposoby. Po pierwsze jest to wskazówka dla badaczy, aby studiować raczej problem 3-CNF-SAT bezpośrednio, niż próbować poprawić algorytm działający w czasie $2^{O(n)}$ dla problemu 3-Coloring, gdyż ten drugi problem obejmuje całą trudność problemu 3-CNF-SAT, lecz w bardziej zawikłanej postaci. Z drugiej strony, jeżeli ktoś wierzy, że nie istnieje algorytm rozwiązujący problem 3-CNF-SAT w czasie $2^{o(|\varphi|)}$, to również nie powinien mieć wówczas nadziei na algorytm rozwiązujący problem 3-Coloring w czasie $2^{o(n)}$. To przekonanie może być sformułowane jako hipoteza, która wzmacnia $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ i mówi, że nie istnieje algorytm rozwiązujący problem 3-CNF-SAT w czasie $2^{o(|\varphi|)}$. Impagliazzo, Paturi i Zane [24, 25] pokazali, że jest to równoważne odrobinę słabszemu sformułowaniu.

Hipoteza 1 (Exponential Time Hypothesis (ETH) [24])**.** *Istnieje stała $c > 0$, taka że nie istnieje deterministyczny algorytm rozwiązujący problem* 3-CNF-SAT *w czasie* $O^*(2^{cn})$.[1]

Od tego czasu ETH stało się standardowym założeniem do dowodzenia ograniczeń dolnych (zob. [30]).

Jak stwierdziliśmy wyżej, liniowa redukcja z problemu 3-CNF-SAT do problemu 3-Coloring pokazuje, że znany algorytm rozwiązujący problem 3-Coloring w czasie $O(1.33^n)$ [5] jest w zasadzie optymalny (z dokładnością do stałych). Ta sama sytuacja zachodzi dla wielu NP-zupełnych problemów grafowych, to znaczy znamy dla nich algorytmy działające w czasie $2^{O(n)}$ i przy założeniu ETH są one optymalne. Oczywiście jest tak w przypadku problemów pytających o zbiór wierzchołków, jak Clique, czy Vertex Cover; lub bardziej ogólnie, dla problemów, dla których istnieją certyfikaty o $O(n)$ bitach, sprawdzalne w czasie wielomianowym (lub podwykładniczym). Ale są też algorytmy działające w czasie $2^{O(n)}$ dla pewnych problemów, dla których takie certyfikaty nie są znane, w szczególności na przykład dla problemów Hamiltonicity [23] i Graph Coloring [27]. Jednak dla pewnych problemów algorytmy działające w czasie $2^{O(n)}$ nie są znane, na przykład dla problemu Channel Assignment, który jest uogólnieniem problemu Graph Coloring takim, że z każdą krawędzią uv w grafie związana jest pewna liczba całkowita w, która oznacza, że kolory wierzchołków u i v muszą różnić się przynajmniej o w. Najlepszy znany algorytm dla problemu Channel Assignment działa w czasie $2^{O(n \log n)}$. Jak możemy udowodnić, że jest on optymalny? W niniejszej rozprawie prezentujemy między innymi redukcję z problemu 3-CNF-SAT do problemu Channel Assignment, która przekształca instancję problemu 3-CNF-SAT o n zmiennych (i $O(n)$ klauzulach, co zostanie uzasadnione później) w instancję problemu Channel Assignment rozmiaru $O(n/\log n)$. Ta kompresja jest ważną własnością naszej redukcji i odróżnia ją od wielu klasycznych redukcji NP-trudnościowych. Wnioskujemy stąd, że hipotetyczny algorytm rozwiązujący problem Channel Assignment w czasie $2^{o(n \log n)}$ implikowałby algorytm rozwiązujący problem 3-CNF-SAT w czasie $2^{o(n)}$. Jeśli założymy ETH, uzyskujemy, że problem Channel Assignment nie może być rozwiązany w czasie $2^{o(n \log n)}$ i że obecnie znany algorytm jest w zasadzie optymalny. Warto zauważyć, że choć nasza redukcja działa w czasie wielomianowym, to mogłaby równie dobrze działać w czasie $2^{o(n)}$ i wówczas wciąż, połączona z algorytmem rozwiązują-

[1] Notacja O^* pomija czynniki wielomianowe względem rozmiaru wejścia.

cym problem Channel Assignment w czasie $2^{o(n \log n)}$, rozwiązywałaby problem 3-CNF-SAT w czasie $2^{o(n)}$.

W rozprawie koncentrujemy się głównie na takich redukcjach kompresujących rozmiar instancji, które wykluczają algorytmy działające w czasie $2^{O(n)}$. Poprzez badanie tych zależności staramy się odkryć strukturę trudności pomiędzy problemami NP-trudnymi. Ta młoda dziedzina na pograniczu algorytmiki i teorii złożoności jest znana pod nazwą *złożoności drobnoziarnistej*.

Wspomnijmy również silniejszą wersję ETH znaną pod nazwą Strong Exponential Time Hypothesis (SETH) [24, 25], która mówi, że dla każdego $\varepsilon < 1$ istnieje $k > 3$, takie że k-CNF-SAT nie może być rozwiązany w czasie $O^*(2^{\epsilon n})$. Istotnie, nawet algorytm obalający tę silniejszą wersję byłby przełomem. Założenie SETH może być użyteczne na przykład jeśli zależy nam na stałej multiplikatywnej w wykładniku, to znaczy jeżeli naszym celem jest udowodnienie ograniczenia dolnego dla pewnego problemu, które byłoby postaci $\Omega^*(2^{cn})$ dla pewnej konkretnej wartości stałej $c > 0$.

Pomimo że nie poświęcimy wiele czasu problemom wielomianowym w tej rozprawie, to warto wspomnieć, że krajobraz złożoności drobnoziarnistej problemów, które są rozwiązywalne w czasie wielomianowym, jest również bardzo ciekawy. Mamy trzy główne założenia, które są używane do pokazywania wielomianowych ograniczeń dolnych na złożoności czasowe:

- wspomniane powyżej założenie Strong Exponential Time Hypothesis (SETH),
- założenie APSP, które mówi, że problemu All Pairs Shortest Paths nie można rozwiązać w czasie $O(n^{3-\delta}(\log M)^{O(1)})$ dla żadnego $\delta > 0$, oraz
- założenie 3SUM, które mówi, że problemu 3SUM nie można rozwiązać w czasie $O(n^{2-\delta})$ dla żadnego $\delta > 0$.

Można być zaskoczonym widząc założenie SETH na powyższej liście, ponieważ sformułowanie założenia SETH dotyczy wykładniczej złożoności czasowej problemu k-CNF-SAT. Jednak istnieje redukcja z problemu k-CNF-SAT do wielomianowego problemu Orthogonal Vectors, która daje wielomianowe ograniczenie dolne na złożoność czasową problemu Orthogonal Vectors przy założeniu SETH [39]. W konsekwencji kolejne redukcje mają możliwość wychodzenia z problemu Orthogonal Vectors, zamiast bezpośrednio z problemu k-CNF-SAT. Dobrym przykładem jest wynik z 2014 roku autorstwa Backursa i Indyka, który mówi, że problem Edit Distance nie może być rozwiązany w czasie $O(n^{2-\delta})$ dla żadnego $\delta > 0$ przy założeniu SETH. Drugie założenie jest związane z klasą problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym zwaną klasą podsześciennej równoważności z problemem All Pairs Shortest Paths [40, 2]. W tej klasie albo każdy z problemów ma algorytm rozwiązujący go w czasie $O(n^{3-\delta}(\log M)^{O(1)})$ dla pewnego $\delta > 0$ zależnego od problemu, albo żaden z nich nie ma. Ważnym problemem w tej klasie jest problem Negative Edge-Weighted Triangle [40] ponieważ jest on bardzo wygodnym punktem wyjścia do kolejnych redukcji. Również ostatnie z tych trzech założeń implikuje wiele wielomianowych ograniczeń dolnych na złożoności czasowe [22]. Naturalnym pytaniem jest pytanie, jakie są zależności pomiędzy tymi trzema założeniami. Czy jedno z założeń implikuje któreś z pozostałych? W roku 2016 Carmosino, Gao, Impagliazzo, Mihajlin, Paturi i Schneider pokazali, że przy założeniu NSETH (ko-niedeterministycznej wersji SETH) takie redukcje z problemu k-CNF-SAT do problemów All Pairs Shortest Paths oraz 3SUM nie mogą istnieć [8]. Podczas gdy założenie NSETH może być prawdziwe lub nie, jest to z pewnością przeszkoda ukazująca, że udowodnienie tych dwóch zależności (o ile istnieją) może być trudne. Innym podejściem do połączenia w jakiś sposób tych trzech założeń jest znalezienie takiego problemu, że jeżeli *którekolwiek* z (najlepiej) trzech założeń jest prawdziwe, to wówczas ten pośredni problem jest również trudny. Przykładem takiego problemu, który łączy dwa różne założenia, a dokładnie założenie APSP oraz założenie 3SUM, jest Zero Weight Triangle [35, 40], a dla połączenia wszystkich trzech założeń mamy problemy Single Source Flow i Triangle Collection [3].

W rozprawie prezentujemy kilka przykładów ograniczeń dolnych opartych na ETH oraz jeden przykład redukcji z problemu All Pairs Shortest Paths do problemu rozwiązywalnego w czasie wielomianowym.

2 Wyniki

Dowodzimy, że przy założeniu Exponential Time Hypothesis nie istnieje algorytm działający w czasie

- $2^{o(n \log n)}$ (razy czynnik wielomianowy względem rozmiaru instancji w bitach) dla problemu Channel Assignment,
- $2^{o(n\sqrt{\log n})}$ dla problemu Subgraph Isomorphism,
- $2^{o(n^{3/2})}$ dla problemu Rainbow k-Coloring (dla żadnego $k \geqslant 2$),
- $f(b) \cdot 2^{o(\log b)\cdot n}$ dla problemu $(a{:}b)$-coloring (dla żadnego obliczalnego $f(b)$),
- $O^*(2^{o(d \log d)})$ dla problemu Minimax Approval Voting.

W szczególności są to pierwsze ograniczenia dolne, które wykluczają istnienie algorytmów rozwiązujących te problemy w czasie $O^*(c^n)$ (lub $O^*(c^d)$ w przypadku problemu Minimax Approval Voting) dla dowolnej stałej c. Ponadto w przypadku problemów Channel Assignment, $(a{:}b)$-coloring oraz Minimax Approval Voting nasze ograniczenia dolne są dokładne, czyli pokazują, że obecnie znane algorytmy są optymalne (przy założeniu ETH).

Podajemy również ograniczenie dolne innego rodzaju. Pokazujemy, że poprawienie najlepszego znanego algorytmu dla problemu 4-OPT Detection (problemu związanego z problemem komiwojażera), implikowałoby poprawę algorytmu dla problemu All Pairs Shortest Paths. W dalszej części autoreferatu omawiamy pokrótce każdy z wyników.

2.1 Channel Assignment

Badamy złożoność czasową problemu Channel Assignment. W tym problemie dany jest graf (V, E) oraz funkcja $w : E \to \mathbb{N}$.[2] Przypisanie $c : V \to \mathbb{Z}$ nazywamy *właściwym* gdy dla każdej krawędzi uv zachodzi $|c(u) - c(v)| \geqslant w(u, v)$. Liczba $(\max_{v \in V} c(v) - \min_{v \in V} c(v) + 1)$ jest nazywana *rozpiętością* przypisania c. Celem jest znalezienie właściwego przypisania o minimalnej rozpiętości. Zauważmy, że przypadek szczególny, gdy wartości w są ograniczone przez jeden odpowiada klasycznemu problemowi kolorowania grafu.

Problemem otwartym jest pytanie czy istnieje algorytm rozwiązujący problem Channel Assignment w czasie $O(c^n)$ (razy czynnik wielomianowy względem rozmiaru instancji w bitach), gdzie n jest liczbą wierzchołków. Na to pytanie udzielamy odpowiedzi negatywnej. Dokładnie, pokazujemy, że w standardowym modelu Word RAM nie istnieje algorytm rozwiązujący problem Channel Assignment w czasie $2^{o(n \log n)}$ (razy czynnik wielomianowy względem rozmiaru instancji w bitach) przy założeniu Exponential Time Hypothesis. Obecnie najlepszy znany algorytm działa w czasie $O^*(n!) = 2^{O(n \log n)}$, a więc nasze ograniczenie dolne jest dokładne.

2.2 Subgraph Isomorphism

Subgraph Isomorphism jest bardzo podstawowym problemem grafowym, w którym dane są dwa grafy G i H, a zadaniem jest sprawdzić, czy G jest podgrafem H. Pomimo swej prostej definicji problem Subgraph Isomorphism okazuje się być bardzo ogólny i w szczególności uogólnia problemy takie jak problem kliki, problem kolorowania, problem szukania cyklu Hamiltona, problem pakowania zbiorów oraz problem przepustowości. Jednakże dla wszystkich tych problemów istnieją algorytmy rozwiązujące je w czasie $2^{O(n)}$, a więc naturalnym i często stawianym w przeszłości pytaniem było pytanie, czy istnieje algorytm rozwiązujący w czasie $2^{O(n)}$ problem Subgraph Isomorphism. W swej monografii Fomin i Kratsch [20] wyszczególniają to pytanie jako problem otwarty pośród kilku innych.

Naszym wynikiem jest redukcja z problemu 3-CNF-SAT tworząca podwykładniczą liczbę podliniowych instancji problemu Subgraph Isomorphism. W szczególności nasza redukcja implikuje ograniczenie dolne postaci $2^{\Omega(n\sqrt{\log n})}$ na złożoność czasową problemu Subgraph Isomorphism przy założeniu ETH.

Zasadnicza cześć naszej redukcji składa się z dwóch kroków. Najpierw przetwarzamy wstępnie i paczkujemy zmienne i klauzule formuły będącej w postaci 3-CNF-SAT w grupki rozmiaru logarytmicznego. Przy czym grupowanie to nie jest dowolne, aby w rezultacie uzyskać tylko ograniczoną interakcję pomiędzy grupami. W drugim kroku pokonujemy techniczną trudność kodowania wartościowań jako permutacji przy pomocy prostego lecz użytecznego schematu zgadywania rozmiarów przeciwobrazów w dowolnym mapowaniu, dzięki czemu przekształcamy dowolne mapowanie do bijekcji.

[2] Dokładnie dany jest zbiór V oraz symetryczna funkcja $w : V^2 \to \mathbb{N}$ (zakładamy, że $0 \in \mathbb{N}$), ale wygodnie jest myśleć o tym jako o grafie o zbiorze wierzchołków V, w którym krawędzie odpowiadają dodatnim wartościom w.

W połączeniu te rezultaty pokazują, że istnieją klasy grafów, które są istotnie trudniejsze do wyszukiwania niż kliki, czy cykle Hamiltona.

Następnie pokazujemy prostą redukcję, która daną instancję problemu Graph Homomorphism, przekształca na pojedynczo wykładniczą liczbę instancji problemu Subgraph Isomorphism. W konsekwencji, używając niedawnego, niezależnego wyniku Fomina i innych [19, 11], którzy pokazali trudność problemu Graph Homomorphism, przenosimy trudność problemu Graph Homomorphism na problem Subgraph Isomorphism, uzyskując dokładne ograniczenie dolne postaci $2^{\Omega(n \log n)}$ przy założeniu Exponential Time Hypothesis.

2.3 Rainbow k-Coloring

W problemie Rainbow k-Coloring pytamy, czy krawędzie danego grafu mogą być pokolorowane przy pomocy k kolorów w taki sposób, że każda para wierzchołków jest połączona tęczową ścieżka, czyli taką, której wszystkie krawędzie są parami różnych kolorów. Najlepszy znany algorytm dla tego problemu działa w czasie $2^{\Theta(n^2)}$ dla każdego ustalonego k, gdzie n jest liczbą wierzchołków. Nasz wynik mówi, że nie istnieje algorytm rozwiązujący problem Rainbow k-Coloring w czasie $2^{o(n^{3/2})}$ przy założeniu ETH.

Mamy nadzieję, że nasze techniki pokazywania takich ograniczeń dolnych mogą rzucić trochę światła na złożoność klasycznego problemu kolorowania krawędziowego, dla którego pytanie o istnienie algorytmu rozwiązującego go w czasie $2^{O(n)}$ jest ważnym problemem otwartym.

2.4 $(a{:}b)$-coloring

W problemie *multikolorowania*, znanym również jako $(a{:}b)$-*kolorowanie* lub *kolorowanie b-krotne*, dany jest graf G oraz zbiór a kolorów, natomiast zadaniem jest przypisać każdemu wierzchołkowi G podzbiór b kolorów tak, aby sąsiednie wierzchołki otrzymały rozłączne podzbiory. To naturalne uogólnienie klasycznego problemu kolorowania (przypadek $b = 1$) jest równoważne znajdowaniu homomorfizmu w graf Knesera $KG_{a,b}$ i daje relaksacje zbliżające się do ułamkowej liczby chromatycznej.

Badamy złożoność decydowania czy graf posiada $(a{:}b)$-kolorowanie. Pokazujemy, że dla tego problemu nie istnieje algorytm rozwiązujący go w czasie $f(b) \cdot 2^{o(\log b) \cdot n}$, dla żadnego obliczalnego $f(b)$, przy założeniu ETH. Algorytm działający w czasie $(b + 1)^n \cdot n^{O(1)}$ autorstwa Nederlofa [34] pokazuje, że ograniczenie to jest dokładne. Bezpośrednim wnioskiem z naszego wyniku jest to, że nie istnieje algorytm rozwiązujący problem Graph Homomorphism w czasie $2^{O(n+h)}$ przy założeniu ETH, nawet gdy wymagamy, aby graf docelowy był grafem Knesera.

Kluczowym składnikiem naszej redukcji trudnościowej jest użycie *macierzy detekcji* Lindströma [29], które, zgodnie z naszą najlepszą wiedzą, nie zostały wcześniej użyte do dowodzenia ograniczeń dolnych na złożoności problemów. Jako wynik poboczny dowodzimy optymalność (przy założeniu ETH) algorytmów Abasiego i innych [1] oraz Gabizona i innych [21] dla problemu wykrywania, czy wielomian dany jako obwód arytmetyczny zawiera jednomian stopnia k, w którym każda zmienna ma stopień co najwyżej r.

2.5 Minimax Approval Voting

Jednym z centralnych problemów sztucznej inteligencji i obliczeniowego wyboru społecznego jest agregowanie preferencji indywidualnych agentów (zob. przegląd autorstwa Conitzera [10]). W rozprawie koncentrujemy się na *wyborze z wieloma zwycięzcami*, gdzie celem jest wybór k-elementowego podzbioru ze zbioru kandydatów. Do danych preferencji agentów dotyczących kandydatów możemy stosować różne reguły głosowania z wieloma zwycięzcami w celu wyboru podzbioru kandydatów reprezentującego preferencje wszystkich agentów. Ten scenariusz pojawia się w różnych sytuacjach: państwa wybierają członków parlamentu lub społeczności wybierają komitety [9], silniki wyszukiwarek internetowych wybierają strony do wyświetlenia w odpowiedzi na zapytanie [17], linie lotnicze wybierają filmy dostępne na pokładzie [36, 18], firmy wybierają grupę produktów podlegających promocji [31], i inne. W rozprawie badamy regułę głosowania nazywaną Minimax Approval Voting (MAV), wprowadzoną przez Bramsa i innych [7].

Mianowicie, w problemie decyzyjnym Minimax Approval Voting dany jest multizbiór $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ słów długości m nad alfabetem $\{0, 1\}$ (zwanych również głosami) i dwie liczby całkowite k i d. Pytaniem w problemie jest, czy istnieje słowo $s \in \{0, 1\}^m$ o dokładnie k jedynkach taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ odległość Hamminga pomiędzy s oraz s_i spełnia $\mathcal{H}(s, s_i) \leqslant d$. Pokazujemy, że nie istnieje algorytm rozwiązujący problem Minimax Approval Voting w czasie $O^*(2^{o(d \log d)})$ pod założeniem ETH. To oznacza, że algorytm działający w złożoności $O^*(d^{2d})$ autorstwa Misry i innych [33] jest zasadniczo optymalny.

Czytelnik zaznajomiony z problemami tekstowymi może zauważyć, że problem Minimax Approval Voting jest ściśle powiązany z klasycznym problemem NP-trudnym zwanym Closest String, dla którego dane jest n słów nad alfabetem Σ i celem jest znalezienie słowa minimalizującego maksymalną odległość Hamminga do danych słów. W rzeczy samej, LeGrand i inni [28] pokazali, że problem Minimax Approval Voting jest NP-trudny poprzez redukcję z problemu Closest String nad alfabetem binarnym.

Te dwa problemy wydają się być podobne, ale mimo to istnieje rozbieżność pomiędzy stanem wiedzy dla problemów Closest String i Minimax Approval Voting. Najlepszy znany algorytm FPT dla problemu Closest String, podany przez Ma i innych [32], działa w czasie $O^*(2^{O(d)} \cdot |\Sigma|^d)$. Jednak, choć w problemie Minimax Approval Voting alfabet jest binarny, żaden algorytm działający w czasie $O^*(2^{O(d)})$ nie jest znany. Nasze ograniczenie dolne pokazuje, że rzeczywiście, w tym sensie problem Minimax Approval Voting jest trudniejszy niż problem Closest String.

2.6 k-OPT Optimization

Dla zadanej trasy komiwojażera H w grafie G k-ruchem nazywamy operację, która usuwa k krawędzi z H i dodaje k krawędzi z G w taki sposób, że powstaje nowa trasa komiwojażera H'. Popularna heurystyka dla problemu komiwojażera, o nazwie k-OPT, znajduje lokalne optimum startując z dowolnej trasy komiwojażera H, a następnie poprawiając ją sekwencją k-ruchów.

Do 2016 roku jedynym znanym algorytmem do znajdywania poprawiającego k-ruchu dla zadanej trasy było rozwiązanie naiwne w czasie $O(n^k)$. Niedawno de Berg, Buchin, Jansen i Woeginger [16] pokazali algorytm działający w czasie $O(n^{\lfloor 2/3k \rfloor + 1})$, który został następnie poprawiony do $O(n^{(1/4+\epsilon_k)k})$, gdzie $\lim \epsilon_k = 0$, przez Cygana, Kowalika i Socałę [13]. Ten ostatni wynik daje poprawę czasu działania dla każdego $k \geqslant 5$.

Pokazujemy, że dla przypadku $k = 4$ poprawa algorytmu działającego w czasie $O(n^3)$ autorstwa de Berga i innych oznaczałaby duży przełom: algorytm znajdujący poprawiający k-ruch w czasie $O(n^{3-\epsilon})$ dla jakiegokolwiek $\epsilon > 0$ implikowałby algorytm rozwiązujący problem All Pairs Shortest Paths w czasie $O(n^{3-\delta})$ dla pewnego $\delta > 0$.

3 Artykuły

Większość rozprawy pochodzi z następujących artykułów:

- Arkadiusz Socała, *Tight Lower Bound for the Channel Assignment Problem.* ACM Trans. Algorithms, 2016 [38]. Wersja konferencyjna tej publikacji ukazała się w Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA, 2015 [37].

- Marek Cygan, Jakub Pachocki, Arkadiusz Socała, *The Hardness of Subgraph Isomorphism.* CoRR, 2015 [15]. Niektóre z twierdzeń zostały zawarte w połączonym artykule *Tight bounds for Graph Homomorphism and Subgraph Isomorphism* autorstwa Cygana, Fomina, Golovneva, Kulikova, Mihajlina, Pachockiego i Socały i opublikowane w Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA, 2016 [11]. Jego wersja czasopismowa [12] jest obecnie przyjęta do czasopisma *Journal of the ACM (JACM).*

- Łukasz Kowalik, Juho Lauri, Arkadiusz Socała, *On the Fine-Grained Complexity of Rainbow Coloring.* Proceedings of the 24th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2016) [26].

- Marthe Bonamy, Łukasz Kowalik, Michał Pilipczuk, Arkadiusz Socała, Marcin Wrochna, *Tight lower bounds for the complexity of multicoloring.* CoRR, 2016 [6]. Praca ta jest obecnie przyjęta na konferencję the 25th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2017).

- Marek Cygan, Łukasz Kowalik, Arkadiusz Socała, Krzysztof Sornat, *Approximation and Parameterized Complexity of Minimax Approval Voting*. Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2017 [14].

- Marek Cygan, Łukasz Kowalik, Arkadiusz Socała, *Improving TSP tours using dynamic programming over tree decomposition*. CoRR, 2017 [13]. Praca ta jest obecnie przyjęta na konferencję the 25th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2017).

Literatura

[1] H. Abasi, N. H. Bshouty, A. Gabizon, and E. Haramaty. On r-simple k-path. In *MFCS 2015*, volume 8635 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–12. Springer, 2014. 6

[2] A. Abboud, F. Grandoni, and V. V. Williams. Subcubic equivalences between graph centrality problems, APSP and diameter. In P. Indyk, editor, *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2015, San Diego, CA, USA, January 4-6, 2015*, pages 1681–1697. SIAM, 2015. 3

[3] A. Abboud, V. V. Williams, and H. Yu. Matching triangles and basing hardness on an extremely popular conjecture. In R. A. Servedio and R. Rubinfeld, editors, *Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on Theory of Computing, STOC 2015, Portland, OR, USA, June 14-17, 2015*, pages 41–50. ACM, 2015. 4

[4] A. Backurs and P. Indyk. Edit distance cannot be computed in strongly subquadratic time (unless SETH is false). In R. A. Servedio and R. Rubinfeld, editors, *Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on Theory of Computing, STOC 2015, Portland, OR, USA, June 14-17, 2015*, pages 51–58. ACM, 2015.

[5] R. Beigel and D. Eppstein. 3-coloring in time $\mathrm{o}(1.3289^{\mathrm{n}})$. *J. Algorithms*, 54(2):168–204, 2005. 2

[6] M. Bonamy, L. Kowalik, M. Pilipczuk, A. Socała, and M. Wrochna. Tight lower bounds for the complexity of multicoloring. *CoRR (To appear in the proceedings of The 25th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2017)*, abs/1607.03432, 2016. 8

[7] S. J. Brams, D. M. Kilgour, and M. R. Sanver. A Minimax Procedure for Electing Committees. *Public Choice*, 132(3-4):401–420, 2007. 7

[8] M. L. Carmosino, J. Gao, R. Impagliazzo, I. Mihajlin, R. Paturi, and S. Schneider. Nondeterministic extensions of the strong exponential time hypothesis and consequences for non-reducibility. In M. Sudan, editor, *Proceedings of the 2016*

ACM Conference on Innovations in Theoretical Computer Science, Cambridge, MA, USA, January 14-16, 2016, pages 261–270. ACM, 2016. 4

[9] J. R. Chamberlin and P. N. Courant. Representative Deliberations and Representative Decisions: Proportional Representation and the Borda Rule. *American Political Science Review*, 77:718–733, 9 1983. 7

[10] V. Conitzer. Making Decisions Based on the Preferences of Multiple Agents. *Commun. ACM*, 53(3):84–94, 2010. 7

[11] M. Cygan, F. V. Fomin, A. Golovnev, A. S. Kulikov, I. Mihajlin, J. Pachocki, and A. Socała. Tight bounds for Graph Homomorphism and Subgraph Isomorphism. In *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2016, Arlington, VA, USA, January 10-12, 2016*, pages 1643–1649, 2016. 6, 8

[12] M. Cygan, F. V. Fomin, A. Golovnev, A. S. Kulikov, I. Mihajlin, J. W. Pachocki, and A. Socała. Tight lower bounds on graph embedding problems. *Journal of the ACM (JACM)*, (to appear), 2017. 8

[13] M. Cygan, L. Kowalik, and A. Socała. Improving TSP tours using dynamic programming over tree decomposition. *CoRR (To appear in the proceedings of the 25th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2017)*, abs/1703.05559, 2017. 8, 9

[14] M. Cygan, L. Kowalik, A. Socała, and K. Sornat. Approximation and parameterized complexity of minimax approval voting. In S. P. Singh and S. Markovitch, editors, *Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence, February 4-9, 2017, San Francisco, California, USA.*, pages 459–465. AAAI Press, 2017. 9

[15] M. Cygan, J. Pachocki, and A. Socała. The hardness of subgraph isomorphism. *CoRR*, abs/1504.02876, 2015. 8

[16] M. de Berg, K. Buchin, B. M. P. Jansen, and G. J. Woeginger. Fine-grained complexity analysis of two classic TSP variants. In *ICALP*, volume 55 of *LIPIcs*, pages 5:1–5:14. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016. 8

[17] C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, and D. Sivakumar. Rank Aggregation Methods for the Web. In *Proceedings of the Tenth International World Wide Web Conference, WWW 2001*, pages 613–622, 2001. 7

[18] E. Elkind, P. Faliszewski, P. Skowron, and A. Slinko. Properties of Multiwinner Voting Rules. *Social Choice and Welfare*, 48(3):599–632, 2017. 7

[19] F. V. Fomin, A. Golovnev, A. S. Kulikov, and I. Mihajlin. Tight bounds for subgraph isomorphism and graph homomorphism. *CoRR*, abs/1507.03738, 2015. 6

[20] F. V. Fomin and D. Kratsch. *Exact exponential algorithms.* Springer Science & Business Media, 2010. 5

[21] A. Gabizon, D. Lokshtanov, and M. Pilipczuk. Fast algorithms for parameterized problems with relaxed disjointness constraints. In *ESA 2015*, volume 9294 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 545–556. Springer, 2015. 6

[22] A. Gajentaan and M. H. Overmars. On a class of o(n2) problems in computational geometry. *Comput. Geom.*, 5:165–185, 1995. 3

[23] M. Held and R. M. Karp. A dynamic programming approach to sequencing problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):196–210, 1962. 2

[24] R. Impagliazzo and R. Paturi. On the Complexity of k-SAT. *J. Comput. Syst. Sci.*, 62(2):367–375, 2001. 2, 3

[25] R. Impagliazzo, R. Paturi, and F. Zane. Which problems have strongly exponential complexity? *J. Comput. Syst. Sci.*, 63(4):512–530, 2001. 2, 3

[26] L. Kowalik, J. Lauri, and A. Socała. On the fine-grained complexity of rainbow coloring. In P. Sankowski and C. D. Zaroliagis, editors, *24th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2016, August 22-24, 2016, Aarhus, Denmark*, volume 57 of *LIPIcs*, pages 58:1–58:16. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016. 8

[27] E. L. Lawler. A note on the complexity of the chromatic number problem. *Information Processing Letters*, 5(3):66–67, 1976. 2

[28] R. LeGrand, E. Markakis, and A. Mehta. Some Results on Approximating the Minimax Solution in Approval Voting. In *6th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, AAMAS 2007*, pages 1193–1195, 2007. 7

[29] B. Lindström. On a combinatorial problem in number theory. *Canad. Math. Bull*, 8(4):477–490, 1965. 6

[30] D. Lokshtanov, D. Marx, and S. Saurabh. Lower bounds based on the Exponential Time Hypothesis. *Bulletin of the EATCS*, 105:41–72, 2011. 2

[31] T. Lu and C. Boutilier. Budgeted Social Choice: From Consensus to Personalized Decision Making. In *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 2011*, pages 280–286, 2011. 7

[32] B. Ma and X. Sun. More Efficient Algorithms for Closest String and Substring Problems. *SIAM Journal of Computing*, 39(4):1432–1443, 2009. 7

[33] N. Misra, A. Nabeel, and H. Singh. On the Parameterized Complexity of Minimax Approval Voting. In *Proceedings of the 2015 International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, AAMAS 2015*, pages 97–105, 2015. 7

[34] J. Nederlof. Inclusion exclusion for hard problems. Master's thesis, Department of Information and Computer Science, Utrecht University, 2008. Available at http://www.win.tue.nl/~jnederlo/MScThesis.pdf. 6

[35] M. Patrascu. Towards polynomial lower bounds for dynamic problems. In L. J. Schulman, editor, *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing, STOC 2010, Cambridge, Massachusetts, USA, 5-8 June 2010*, pages 603–610. ACM, 2010. 4

[36] P. K. Skowron, P. Faliszewski, and J. Lang. Finding a Collective Set of Items: From Proportional Multirepresentation to Group Recommendation. In *Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI 2015*, pages 2131–2137, 2015. 7

[37] A. Socała. Tight lower bound for the channel assignment problem. In *SODA*, 2015. 8

[38] A. Socała. Tight lower bound for the channel assignment problem. *ACM Trans. Algorithms*, 12(4):48:1–48:19, 2016. 8

[39] R. Williams. A new algorithm for optimal 2-constraint satisfaction and its lications. *Theor. Comput. Sci.*, 348(2-3):357–365, 2005. 3

[40] V. V. Williams and R. Williams. Subcubic equivalences between path, matrix and triangle problems. In *FOCS*, pages 645–654. IEEE Computer Society, 2010. 3, 4