Afiniczne krzywe algebraiczne z zerową charakterystyką Eulera
na płaszczyźnie zespolonej *autoreferat rozprawy doktorskiej*

MACIEJ BORODZIK

Niewiele obiektów w matematyce jest tak prostych, jak wielomiany. Uczą się o nich już uczniowie w szkołach. Mają wszystkie własności funkcji ciągłych, różniczkowalnych, a nawet analitycznych. Ich bogata, a zarazem sztywna struktura sprawia, że z jednej strony odważamy się stawiać pytania, które w przypadku funkcji słabszych klas byłyby bardzo proste, z drugiej zaś niektóre pytania, proste w przypadku innych klas funkcji, stają się bardzo trudne w przypadku wielomianów.

Dla przykładu, z dokładnością do dyfeomorfizmu jest jeden dwuwymiarowy torus. W przypadku torusów zespolonych, każdy daje się otrzymać jako iloraz $\mathbb{C}/M$, gdzie M jest pewną kratą w $\mathbb{C}$ (grupą izomorficzną z $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$), przy czym nie każde dwie kraty są równoważne (lemat Schwartza). Szczęśliwie, w tym przypadku klasyfikacja analityczna jest równoważna algebraicznej. Ale nie jest to regułą, jak pokazują chociażby powierzchnie K3. Dodajmy, że mówimy o obiektach gładkich. Gdy dopuszczamy osobliwości, różnice są daleko większe.

Badanie różnic pomiędzy klasami dyfeomorfizmów, izomorfizmów analitycznych i izomorfizmów algebraicznych danych obiektów jest zadaniem głębokim i wysoce nietrywialnym.

Dlatego też niezwykłe jest na pierwszy rzut oka twierdzenie Abyankhara, Moha i Suzukiego. Mówi ono, że każda krzywa algebraiczna w $\mathbb{C}^2$ dyfeomorficzna z dyskiem jest algebraicznie izomorficzna z prostą. Co ciekawe, przestaje ono pracować, gdy dopuścimy krzywe analityczne. Ponadto, krzywe homeomorficzne z dyskiem nie są izomorficzne z prostą. Mianowicie, twierdzenie Zaidenberga – Lina mówi, że każda krzywa algebraiczna w $\mathbb{C}^2$ homeomorficzna z dyskiem, jest izomorficzna z krzywą postaci (t^p, t^q), dla p i q względnie pierwszych liczb naturalnych. Naturalnie, w przypadku analitycznym i to twierdzenie to nie zachodzi.

Jednym z głównych problemów na drodze ku dowodzeniu twierdzeń tego typu jest brak ogólnych metod postępowania. Owszem, dowodów twierdzenia Abyankhara — Moha – Suzukiego jest kilkanaście. Twierdzenie Zaidenberga – Lina również doczekało się kilku alternatywnych dowodów. Jednakże w dowodach tych trudno dostrzec jakąś generalną metodę postępowania z krzywymi algebraicznymi w $\mathbb{C}^2$. O ile badanie własności lokalnych krzywej — czyli kiełka gładkiej bądź osobliwej krzywej algebraicznej — jest zagadnieniem dobrze zbadanym, o tyle przejście od analizy lokalnej do globalnej nastręcza dużych trudności ze względu na brak stosownych narzędzi. Do nielicznych należą formuła na genus, lub równoważne twierdzenie Poincarégo–Hopfa oraz nierówność Bogomolova, Miyaoki i Yau (BMY). Jak do tej pory, stosowanie tej ostatniej doprowadziło do wielu interesujących rezultatów, które jednak nie są na razie na miarę oczekiwań.

W rozprawie uzyskano wyniki w pewnym stopniu uogólniające twierdzenie Zaidenberga–Lina. Dotyczą one klasyfikacji krzywych algebraicznych na płaszczyźnie, których charakterystyka Eulera wynosi 0. Tutaj omówię główne założenia tej pracy.

Pierwszą część stanowi pogłębiona analiza lokalna kiełka osobliwości krzywej algebraicznej z jedną składową. Kiełek taki, z dokładnością do topologicznej równoważności, jest wyznaczany przez ciąg charakterystyczny określony jako $(n; m_1, \dots, m_l)$, gdzie $m_1 < \dots < m_l$ oraz, jeśli $n_1 = NWD(n, m_1)$ i $n_{i+1} = NWD(n_i, m_{i+1})$, to $n_{l-1} \neq 1 = n_l$. Osobliwość jest wtedy topologicznie równoważna $x = t^n$, $y = t^{m_1} + t^{m_2} + \dots + t^{m_l}$. Wszystkie niezmienniki topologiczne dają się wyrazić za pomocą ciągu charakterystycznego. W szczególności można wyznaczyć np. liczbę Milnora takiej osobliwości.

W pracy doktorskiej, która jest kompilacją prac [BoZo1] i [BoZo2], wprowadzamy nowy niezmiennik topologiczny, kowymiar. Mierzy on, jak często spotykana jest konkretne osobliwość. Mianowicie, dla ustalonego n szukamy warunków na współczynniki szeregu $y(t) = \sum \psi_i t^i$, żeby osobliwość (t^n, y) była typu $(n; m_1, \dots, m_l)$. Podobny kowymiar można zdefiniować dla kiełków osobliwości złożonych tj. mających więcej niż jedną składową. Znajdujemy bardzo eleganckie oszacowanie wiążące ze sobą liczbę Milnora, kowymiar i krotność osobliwości w punkcie.

Drugim etapem jest przejście od analizy lokalnej do globalnej. Dokonuje się ono równolegle na dwa sposoby. Po pierwsze, na krzywej C zadanej przez $F(x, y) = 0$ określamy pole hamiltonowskie X_F. Jest ono styczne do C i nie znika poza punktami osobliwymi krzywej. Ma też bieguny na przecięciach krzywej z linią w nieskończoności. Kiedy przeciągniemy to pole na normalizację krzywej i wymnożymy je przez pewną funkcję skalarną żeby zlikwidować bieguny, otrzymamy pole wektorowe v na gładkiej powierzchni Riemanna. Jako, że krzywa była wymierna, powierzchnia ta jest po prostu dwuwymiarową sferą.

Dla danego punktu osobliwego krzywej, suma indeksów pola v na przeciwobrazach przy normalizacji, wyraża się w terminach liczby Milnora i ilości gałęzi. Dokładniej, wynosi ona $\mu + r - 1$ (r — ilość gałęzi). Wielkość tę oznaczamy 2δ i nazywamy podwojoną liczbą punktów podwójnych ukrytych w punkcie osobliwym. Definicja ta uzasadniona jest po pierwsze przez to, że dla prostego samoprzecięcia mamy 2. Poza tym, jeśli weźmiemy punkt osobliwy i generyczne zaburzenie krzywej w klasie krzywych wymiernych, to punkt osobliwy rozpadnie się na dokładnie δ punktów podwójnych. Jako że pracujemy wyłącznie w klasie krzywych wymiernych, wielkość ta jest o wiele bardziej naturalna, niż liczba Milnora, która wymaga stosowania zaburzeń wykraczających poza klasę krzywych wymiernych.

Podobnie możemy badać indeks pola wektorowego v w punktach będących przeciwobrazami punktów w nieskończoności krzywej C. Jest on ściśle powiązany z liczbą Milnora ewentualnej osobliwości w nieskończoności, oraz z rzędami funkcji x i y parametryzujących krzywą C. Indeks w nieskończoności jest prawie zawsze ujemny.

Suma indeksów pola v musi wynosić 2. W naszym przypadku oznacza to, że krzywa, która ma mieć ograniczoną liczbę samoprzecięć, może mieć albo mały co do modułu indeks w nieskończoności (co bardzo ogranicza jej stopień), albo dużą liczbę punktów podwójnych ukrytych w punktach osobliwych w swojej skończonej części. I tu dochodzimy do drugiego przejścia od analizy lokalnej do globalnej.

A mianowicie, im większa liczba Milnora osobliwości, tym większy kowymiar. Fundamentalne, udowodnione przez H. Żołądka twierdzenie szacuje sumę kowymiarów osobliwości przez wymiar przestrzeni parametrycznych krzywych, inaczej mówiąc przez liczbę parametrów. Oznacza to, że krzywa bez punktów osobliwych znajduje się pomiędzy młotem a kowadłem. Z jednej strony musi mieć punkty osobliwe z dużą liczbą Milnora, a więc z dużym kowymiarem, z drugiej zaś suma jej kowymiarów nie jest za duża. W związku z tym jest szansa, że da się znaleźć wszystkie pierścienie bez punktów podwójnych, lub też krzywe z jednym punktem w nieskończoności i jednym punktem podwójnym.

W istocie, dzięki opisanym oszacowaniom, udaje się to zrobić. Wyliczenie to jest jednak żmudne. Znaleziono 21 przypadków krzywych wielomianowych z jednym punktem w nieskończoności i jednym samoprzecięciem. Wśród nich jest 16 nieskończonych serii oraz 5 przypadków szczególnych. Poza tym, mamy 23 przypadki pierścieni — czyli krzywych izomorficznych z $\mathbb{C}^*$. W tym zawiera się 18 serii i 5 przypadków szczególnych. W jednej z tych serii mamy rodzinę zależną od ciągłych parametrów. W tych 23 przypadkach zawiera się siedem serii i dwa przypadki szczególne pierścieni gładkich.

Pokazanie, że lista ta jest kompletna wymaga odrzucenia kilkudziesięciu potencjalnych kandydatów. W związku z tym trudno jest mieć nadzieję na jakieś rozszerzenie wyniku i na przykład klasyfikację pierścieni z jednym samoprzecięciem. Złożoność obliczeniowa takiego problemu byłaby bowiem bardzo duża.

Wydaje się więc, że klasyfikacja krzywych afinicznych, dla których $\chi = 0$ jest najbardziej złożonym problemem dostępnym tymi metodami.

LITERATURA

[BoZo1] M. Borodzik, H. Żołądek *Complex algebraic plane curves via Poincaré–Hopf formula. I. Parametric lines.* preprint, 2004.

[BoZo2] M. Borodzik, H. Żołądek *Complex algebraic plane curves via Poincaré–Hopf formula. II. Parametric annuli.* preprint, 2005.