Algorytmiczne problemy ścieżkowe w grafach planarnych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Łukasz Kowalik

Styczeń 2005

Tematem rozprawy są algorytmy dla wybranych problemów ścieżkowych w grafach planarnych i ich zastosowania. Pojęcie *problemy ścieżkowe* odnosi się do zagadnień związanych z projektowaniem algorytmów wyszukujących w grafach ścieżki o zadanych własnościach. Koncentrujemy się przede wszystkim na wyszukiwaniu najkrótszych ścieżek oraz ścieżek o zadanej długości. Jest to jeden z najważniejszych, najbardziej naturalnych i najintensywniej badanych obszarów algorytmicznej teorii grafów. Problemy ścieżkowe pojawiają się jako podproblemy w wielu innych ważnych zagadnieniach algorytmiki (dobrymi przykładami są maksymalny przepływ i najliczniejsze skojarzenie). Efektywne algorytmy dla problemów ścieżkowych są także istotne w licznych zastosowaniach praktycznych, takich jak projektowanie architektury i protokołów dla sieci komputerowych, czy optymalizacja transportu w sieciach połączeń drogowych. Grafy, będące abstrakcjami tych oraz innych występujących w rzeczywistości sieci, bardzo często są planarne lub *bliskie* grafom planarnym. Dlatego nasze rozważania ograniczyliśmy do tej szczególnie interesującej klasy grafów, co pozwoliło na wykorzystanie ich specyficznych własności.

Wyrocznie najkrótszych ścieżek W praktyce często spotyka się sytuację, w której serwer przechowujący informacje o strukturze grafu (sieci) musi szybko przetwarzać duże ilości zapytań. Skupimy się na zapytaniach postaci: *znajdź najkrótszą ścieżkę łączącą wybraną parę wierzchołków*. Naturalnym podejściem jest wstępne przetworzenie grafu (*preprocessing*) w taki sposób, aby otrzymać strukturę danych, z której pomocą można szybko obsługiwać nadchodzące zapytania.

Współczesne sieci bywają tak rozległe, że nie można zaakceptować podejścia polegającego na obliczeniu w fazie wstępnej wyników wszystkich możliwych zapytań. Badacze dążą więc do uzyskania możliwie krótkiego czasu odpowiedzi na zapytania, zachowując jednocześnie akceptowalną złożoność czasową i pamięciową fazy tworzenia struktury danych. Niemniej jednak, rezultaty w tej dziedzinie mają często formę kompromisu pomiędzy tymi wielkościami. Dla przykładu, Hristo Djidjev [3] podał strukturę danych zajmującą pamięć rozmiaru $\mathcal{O}(n^{4/3})$ i umożliwiającą przetwarzanie jednego zapytania w czasie $\mathcal{O}(n^{1/3} \log n)$. Gdy czas przetworzenia zapytania jest stały lub bliski stałemu, taką strukturę przyjęło się nazywać *wyrocznią* (ang. *oracle*).

Ścieżki ograniczonej długości W rozprawie dużo miejsca poświęcamy przetwarzaniu zapytań specjalnej postaci, zaproponowanej po raz pierwszy przez Davida Eppsteina [5]:

> *Sprawdź, czy dwa zadane wierzchołki grafu są odległe o nie więcej niż k i jeśli tak, zwróć odpowiednią najkrótszą ścieżkę.*

Liczba k jest ustaloną stałą, natomiast przetwarzany graf jest niezorientowanym grafem planarnym bez wag na krawędziach. Eppstein proponuje dwie struktury danych umożliwiające przetwarzanie opisanych zapytań. Przy pierwszym podejściu struktura danych zajmuje pamięć rozmiaru liniowego, lecz czas przetwarzania zapytań wynosi $\mathcal{O}(\log n)$, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu. Przy drugim podejściu zapytania obsługiwane są w czasie stałym, lecz rozmiar pamięci zajmowanej przez strukturę danych rośnie do $\mathcal{O}(n \log n)$. Zauważmy, że w pierwszej wersji optymalny jest rozmiar struktury, natomiast w drugiej optymalny jest czas przetwarzania zapytań. Nie sposób uniknąć tu naturalnego pytania: czy można skonstruować wyrocznię, dla której *oba* te parametry są optymalne? Okazuje się, że jest to możliwe.

Nowa wyrocznia W oparciu o nasz artykuł [10] w rozdziale pierwszym przedstawiamy wyrocznię o rozmiarze liniowym, konstruowaną w czasie liniowym i umożliwiającą przetwarzanie zapytań w czasie stałym. W dalszej kolejności prezentujemy istotne rozszerzenia i uogólnienia wprowadzonej struktury danych, opisane w naszej kolejnej pracy [9]. W szczególności pokazujemy, w jaki sposób aktualizować strukturę wyroczni po dodaniu lub usunięciu krawędzi, a także po wykonaniu innych naturalnych operacji na grafie. W ten sposób nasza wyrocznia zyskuje unikalną możliwość pracy w środowisku dynamicznym. Złożoność czasowa aktualizowania wyroczni po usunięciu krawędzi wynosi $\mathcal{O}(1)$, natomiast po wstawieniu krawędzi $\mathcal{O}(\log^k n)$. Pokazujemy również, że niewielkie modyfikacje struktury wyroczni pozwalają na jej wykorzystanie do zorientowanych grafów planarnych, bez pogorszenia złożoności czasowej i pamięciowej. Oprócz najkrótszych ścieżek, rozważamy także wyszukiwanie ścieżek o zadanej długości, uzyskując analogiczne wyniki.

Twierdzenie strukturalne Efektywność zaproponowanej wyroczni opiera się na następującym twierdzeniu, które wydaje się zasługiwać na osobną uwagę. Pokazujemy mianowicie, że dla dowolnej stałej k można tak zorientować krawędzie grafu planarnego, niektórym z nich nadając oba kierunki, że stopnie wychodzące wierzchołków w tak otrzymanym grafie są ograniczone oraz jeśli wierzchołki u i v są połączone ścieżką w oryginalnym grafie, to w grafie zorientowanym istnieją dwie ścieżki, pierwsza od u do pewnego wierzchołka x oraz druga od v do x i takie, że suma ich długości wynosi dokładnie k. Wcześniej znany był jedynie szczególny przypadek tego twierdzenia mówiący, że krawędzie dowolnego grafu planarnego można tak zorientować, aby stopnie wychodzące wierzchołków były nie większe niż 3.

Kolorowanie grafów bez trójkątów W rozdziale drugim rozprawy opisujemy interesujące zastosowanie przedstawionej wcześniej wyroczni ścieżek o ograniczonej długości. Okazuje się, że nasza struktura danych może zostać użyta w kolorowaniu grafów, dziedzinie pozornie mało związanej z problemami ścieżkowymi. W problemie kolorowania grafu należy przypisać wierzchołkom grafu *kolory* tak, aby końce każdej krawędzi otrzymały inne kolory. Tematyka kolorowania wierzchołków grafów planarnych budzi ogromne zainteresowanie badaczy już od drugiej połowy XIX wieku. Odkąd twierdzenie o czterech barwach zostało udowodnione najważniejsze otwarte problemy poznawcze w tej dziedzinie dotyczą kolorowania z użyciem jedynie trzech kolorów. Od 1959 roku znane jest twierdzenie Grötzscha [6], które mówi, że wierzchołki dowolnego grafu planarnego nie zawierającego trójkątów (tj. cykli długości 3) można pokolorować trzema kolorami. Dla badaczy zajmujących się algorytmiczną teorią grafów było jasne, że istniejące dowody tego twierdzenia odpowiadają wielomianowym algorytmom. Skonstruowanie efektywnego algorytmu, tj. bliskiego algorytmowi liniowemu, pozostawało jednak problemem otwartym. Okazało się, że użycie wyroczni ścieżek o ograniczonej długości pozwala przezwyciężyć kluczowe trudności na drodze do tego celu. Po zmodyfikowaniu dowodu twierdzenia i opracowaniu dodatkowych technik algorytmicznych udało się skonstruować algorytm o złożoności $\mathcal{O}(n \log n)$. Rozdział drugi zawiera dokładny opis tego algorytmu, a jego treść odpowiada naszemu artykułowi [8].

Praktyczne algorytmy wyszukiwania cykli W trzecim, ostatnim rozdziale rozprawy powracamy do problemów ścieżkowych. Naszą uwagę koncentrujemy na wyszukiwaniu w grafach planarnych krótkich cykli, o długości co najwyżej 6. Jest to dość naturalny problem, który dodatkowo znajduje liczne zastosowania w innych obszarach algorytmicznej teorii grafów, takich jak kolorowanie, czy też testowanie stopnia spójności grafu. W ostatnich latach powstały algorytmy, które dla dowolnej stałej k znajdują cykl długości k w czasie liniowym. Jeden z takich algorytmów otrzymujemy jako zastosowanie naszej wyroczni wyszukującej ścieżki zadanej długości. Niemniej jednak praktyczne znaczenie tych algorytmów wydaje się niewielkie ze względu na bardzo poważną zależność złożoności czasowej od wartości stałej k. Dlatego w ostatnim rozdziale zajmujemy się na konstruowaniem liniowych i w pełni praktycznych algorytmów wyszukiwania cykli o zadanych długościach. Przedstawiamy własne, nowe podejście do problemu, jak również rozwijamy wcześniejsze pomysły innych autorów [2, 1]. Zaimplementowaliśmy zamieszczone algorytmy i przeprowadziliśmy szereg testów potwierdzających ich praktyczną efektywność. Jako efekt uboczny naszych rozważań otrzymaliśmy także interesujące twierdzenie kombinatoryczne, które mówi, że maksymalna liczba cykli długości k w n-wierzchołkowym grafie planarnym wynosi $\Theta(n^{\lfloor k/2 \rfloor})$. Wcześniej podobny problem kombinatoryczny rozważał David Eppstein. Pokazał on [4], że graf H występuje $\mathcal{O}(n)$ razy jako podgraf dowolnego grafu planarnego G wtedy i tylko wtedy gdy H jest 3-spójny (zauważmy, że jedynym 3-spójnym cyklem jest trójkąt). Treść ostatniego rozdziału odpowiada naszemu artykułowi [7].

Literatura

[1] N. Chiba, T. Nishizeki. Arboricity and subgraph listing algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 14(1):210–223, 1985.

[2] M. Chrobak, D. Eppstein. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices. *Theoretical Computer Science*, 86(2):243–266, 1991.

[3] H. Djidjev. Efficient algorithms for shortest path queries in planar digraphs. *Proc. 22nd Int. Worksh. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 1996)*, strony 151–165, 1996.

[4] D. Eppstein. Connectivity, graph minors, and subgraph multiplicity. *J. Graph Theory*, 17:409–416, 1993.

[5] D. Eppstein. Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems. *J. Graph Algorithms & Applications*, 3(3):1–27, 1999.

[6] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz fur dreikreisfreie netze auf der kuzel. Raport instytutowy, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle Wittenberg, Math.-Nat. Reihe 8, 1959.

[7] Ł. Kowalik. Short cycles in planar graphs. H. Bodlaender, redaktor, *Proc. 29th Int. Worksh. Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2003)*, wolumen 2880 serii *Lecture Notes in Computer Science*, strony 284–296. Springer-Verlag, 2003.

[8] Ł. Kowalik. Fast 3-coloring triangle-free planar graphs. S. Albers, T. Radzik, redaktorzy, *Proc. 12th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2004)*, wolumen 3221 serii *Lecture Notes in Computer Science*, strony 436–447. Springer-Verlag, 2004.

[9] Ł. Kowalik, M. Kurowski. Oracles for bounded length shortest paths in planar graphs. *Przyjęte do druku w ACM Transactions on Algorithms*.

[10] Ł. Kowalik, M. Kurowski. Shortest path queries in planar graphs in constant time. *Proc. 35th Symposium on Theory of Computing*, strony 143–148. ACM, June 2003.