# STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ "WIERNA REPREZENTACJA ZESPOLONA 2-ZWARTEJ GRUPY $DI(4)$"

KRZYSZTOF ZIEMIAŃSKI

## 1. $p$-Zwarte grupy

1.1. **Grupy Liego i przestrzenie pętli.** Niech $G$ będzie zwartą grupą Liego i niech $EG$ będzie ściągalną przestrzenią z wolnym działaniem grupy $G$. Przestrzeń orbit $BG := EG/G$ nazywamy *przestrzenią klasyfikującą* grupy $G$; jej typ homotopijny nie zależy od wyboru $EG$. W przeciwieństwie do $G$, przestrzeń $BG$ nie posiada struktury różniczkowej, ani nawet algebraicznej. Podstawową własnością wiążącą $G$ i $BG$ jest istnienie słabej homotopijnej równoważności $\Omega BG \to G$. Obserwacja ta motywuje następującą definicję:

**Definicja 1.** *Przestrzenią pętli* nazywamy CW-kompleks $X$ wraz z przestrzenią z punktem wyróżnionym $BX$ i słabą homotopijną równoważnością $\Omega BX \to X$. Jeśli $X$ jest skończony, to mówimy, że przestrzeń pętli jest *skończona*.

Przestrzeń $BX$ nazywamy tradycyjnie *przestrzenią klasyfikującą* $X$, co może prowadzić do nieporozumień ponieważ to $BX$ wyznacza $X$ (a nie na odwrót, jak w przpadku grup Liego). Oczywiście każda grupa Liego jest skończoną przestrzenią pętli, ale tych drugich jest znacznie więcej. Na przykład grupa $SU(2) \simeq S^3$ posiada nieprzeliczalnie wiele struktur przestrzeni pętli [R] (tj. istnieje nieprzeliczalnie wiele parami nierównoważnych homotopijnie przestrzeni, których przestrzeń pętli jest równoważna $S^3$).

1.2. **$p$-Zwarte grupy.** Dwyer i Wilkerson [DW2] zdefiniowali $p$-zwarte grupy, które są blisko związane ze skończonymi przestrzeniami pętli. Podstawową różnicą jest rozważanie jedynie części typu homotopijnego przestrzeni klasyfikującej związanego z daną liczbą pierwszą $p$. W definicji $p$-zwartej grupy korzysta się z konstrukcji Bousfielda i Kana [BK], która przyporządkowuje przestrzeni topologicznej $Y$ jej *$p$-uzupełnienie* $Y^\wedge_p$, które można traktować jak część typu homotopijnego $Y$ związanego z $p$. Jeśli $Y^\wedge_p$ jest słabo homotopijnie równoważna $Y$, to mówimy, że przestrzeń $Y$ jest *$p$-zupełna*. Przy pewnych założeniach na przestrzeń

$Y$ zachodzi $\pi_i(Y_p^\wedge) \cong \pi_i(Y) \otimes \mathbb{Z}_p^\wedge$, gdzie $\mathbb{Z}_p^\wedge$ oznacza pierścień liczb $p$-adycznych.

**Definicja 2.** Przestrzeń pętli $X$ nazywamy *$p$-zwartą grupą*, jeśli przestrzeń $X$ jest $p$-skończona (tj. ma skończone homologie o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_p$), a przestrzeń $BX$ jest $p$-zupełna.

1.3. **Przykłady $p$-zwartych grup.** Jeśli $G$ jest zwartą grupą Liego taką, że grupa składowych jest skończoną $p$-grupą, to jej $p$-uzupełnienie $G_p^\wedge$ jest $p$-zwartą grupą z przestrzenią klasyfikującą $(BG)_p^\wedge$. W szczególności, jeśli $G$ jest $k$-wymiarowym torusem $(S^1)^k$, otrzymujemy $p$-zwarty torus, który jest przestrzenią Eilenberga-McLane'a $K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 1)^k$, a jego przestrzenią klasyfikująca jest $K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2)^k$. Istnieje wiele przykładów $p$-zwartych grup, które nie są $p$-uzupełnieniami zwartych grup Liego.

1.4. **Homomorfizmy.** Wiele pojęć dotyczących zwartych grup Liego można uogólnić na $p$-zwarte grupy. Na przykład każdy homomorfizm grup Liego $f : G \to H$ zadaje przekształcenie ich przestrzeni klasyfikujących $Bf : BG \to BH$, dlatego *homomorfizmem $p$-zwartych grup* $f : X \to Y$ nazywamy dowolne przekształcenie $Bf : BX \to BY$ (oczywiście zadaje ono przekształcenie $f : X \cong \Omega BX \xrightarrow{\Omega Bf} \Omega BY \cong Y$). Jeśli $Bf$ i $Bg$ są homotopijne, to homomorfizmy $f$ i $g$ nazywamy sprzężonymi. Jeśli $f : G \to H$ jest monomorfizmem grup Liego, to przy odpowiednim wyborze modeli przestrzeni klasyfikujących $Bf$ jest rozwłóknieniem z włóknem $H/G$. Analogicznie, homomorfizm $p$-zwartych grup $f$ jest *monomorfizmem*, jeśli homotopijne włókno $Bf$ jest skończone w sensie homologicznym, tj. jeśli jego homologie ze współczynnikami w $\mathbb{F}_p$ są skończone.

1.5. **Centralizatory.** Niech $f : X \to Y$ będzie homomorfizmem $p$-zwartych grup. *Centralizatorem $X$ w $Y$* nazywamy przestrzeń pętli $\Omega\,\mathrm{map}(BX, BY)_{Bf}$ (niekoniecznie jest to $p$-zwarta grupa). W przeciwieństwie do powyższych definicji, motywowanych przez elementarne własności przestrzeni klasyfikujących grup Liego, źródłem tej definicji jest bardzo ważne

**Twierdzenie 1** (Dwyer-Zabrodsky). *Jeśli $P$ jest skończoną $p$-grupą, a $G$ zwartą grupą Liego, to dla dowolnego homomorfizmu $f : P \to G$ przekształcenie*

$$BC_G(P) \longrightarrow \mathrm{map}(BP, BG)_{Bf}$$

*dołączone do homomorfizmu $C_G(f(P)) \times P \to G$ indukuje izomorfizm na homologiach o współczynnikach $\mathbb{F}_p$ (a więc słabą homotopijną równoważność na $p$-uzupełnieniach).*

Wobec powyższego pojęcie centralizatora dla $p$-zwartych grup pokrywa się z klasycznym o ile podgrupa jest skończoną $p$-grupą. Twierdzenie Dwyera-Zabrodskiego można uogólnić na szersze klasy grup (np. grupy $p$-toryczne, $p$-dyskretne toryczne).

1.6. **Torus maksymalny.** *Torusem* w $p$-zwartej grupie $X$ nazywamy monomorfizm $i : T \to X$, gdzie $T$ jest $p$-zwartym torusem. Podobnie jak zwarte grupy Liego, każda $p$-zwarta grupa posiada wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do sprzężenia *torus maksymalny* [DW2] $i_X : T_X \to X$ posiadający następującą własność uniwersalną: dla każdego torusa $i : T \to X$ w $X$ istnieje homomorfizm $p$-zwartych grup $j : T \to T_X$ taki, że $i$ jest sprzężone z $i_X \circ j$. Grupa automorfizmów $T_X$ zachowujących monomorfizm $i_X$ nazywamy *grupą Weyla* $W_X$. Jest to grupa skończona działająca na $BT_X \simeq K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2)^r$ i działanie to zadaje reprezentację $W_X \to GL_r(\mathbb{Z}_p^\wedge)$.

1.7. **Reprezentacje zespolone $p$-zwartych grup.** Reprezentacją zespoloną grupy Liego $G$ nazywamy działanie $G$ na skończenie wymiarowej przestrzeni zespolonej lub, równoważnie, dowolny homomorfizm $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Jeśli $G$ jest zwarta, można zakładać, że obraz $\varphi$ zawiera się w grupie unitarnej. Analogicznie,

**Definicja 3.** *Reprezentacją* $p$-zwartej grupy $X$ nazywamy homomorfizm ($p$-zwartych grup) $\varphi : X \to U(n)_p^\wedge$ (czyli dowolne przekształcenie $BX \to BU(n)_p^\wedge$). Reprezentację nazywamy *wierną*, jeśli $\varphi$ jest monomorfizmem.

Twierdzenie Petera-Weyla powiada, że każda zwarta grupa Liego posiada wierną reprezentację zespoloną. Interesujące jest pytanie, czy analogiczną własność mają $p$-zwarte grupy, tj. czy prawdziwa jest

**Hipoteza 1.** *Każda $p$-zwarta grupa posiada wierną reprezentację zespoloną.*

Dla nieparzystych $p$ hipoteza została udowodniona przez Castellanę [C], która skonstruowała dla $p$-zwartej grupy $X$ reprezentację wymiaru $\dim X$, która jest uogólnieniem reprezentacji dołączonej zwartej grupy Liego. Istnieją mocne przesłanki, że jedyną prostą 2-zwartą grupą, która nie jest uzupełnieniem zwartej grupy Liego (dla których prawdziwość hipotezy jest oczywista) jest $DI(4)$, zdefiniowana przez Dwyera i Wilkersona [DW1]. Głównym rezultatem niniejszej pracy jest następujące

**Twierdzenie 2.** *Istnieje wierna reprezentacja zespolona $DI(4)$ wymiaru $2^{46}$.*

Ponieważ $DI(4)$ nie ma nietrywialnych podgrup normalnych, wystarczy wykazać, że istnieje nietrywialne przekształcenie $BDI(4) \to (BU(2^{46}))^\wedge_2$. Okazuje się że metod z pracy [C] nie da się uogólnić na przypadek $DI(4)$, gdyż *nie istnieje* reprezentacja $DI(4)$ wymiaru $\dim DI(4) = 45$.

1.8. **2-Zwarta grupa $DI(4)$.** Własnością wyznaczającą jednoznacznie $DI(4)$ jest to, że pierścień kohomologii o współczynnikach $\mathbb{F}_2$ przestrzeni klasyfikującej $BDI(4)$ jest algebrą niezmienników Dicksona

$$\mathbb{F}_2[t_1, t_2, t_3, t_4]^{\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)},$$

gdzie generatory $t_i$ leżą w gradacji 1. Algebra $H^*(BDI(4); \mathbb{F}_2)$ jest również algebrą wielomianową. Jej generatorami są elementy $c_8$, $c_{12}$, $c_{14}$, $c_{15}$ (gdzie indeks wskazuje gradację danego generatora). Działanie algebry Steenroda na $H^*(BDI(4); \mathbb{F}_2)$ jest wyznaczone przez relacje $Sq^4 c_8 = c_{12}$, $Sq^2 c_{12}$, $Sq^1 c_{14} = c_{15}$. Grupa Weyla $W_{DI(4)}$ jest izomorficzna z grupą $\{\pm 1\} \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, a działanie $W_{DI(4)}$ na torusie maksymalnym zadaje reprezentację $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}^\wedge_2)$, która jest jednostronną odwrotnością redukcji modulo 2. 2-Zwarta grupa $DI(4)$ zawiera podgrupę $Spin(7)^\wedge_2$ taką, że torus maksymalny $Spin(7)^\wedge_2$ jest również torusem maksymalnym $DI(4)$. Okazuje się, że nie istnieje (algebraiczna) reprezentacja grupy Liego $Spin(7)$ taka, że jej 2-uzupełnienie przedłuża się do wiernej reprezentacji $DI(4)$.

## 2. Rozkłady homotopijne

Bardzo użyteczny narzędziem do badania przestrzeni klasyfikujących grup Liego są rozkłady homotopijne. Są one również pomocne przy konstruowaniu i badaniu $p$-zwartych grup.

2.1. **Homotopijne granice proste.** Niech $\mathcal{C}$ będzie małą kategorią (tj. taką, że klasa jej obiektów jest zbiorem), a $F$ dowolnym funktorem z $\mathcal{C}$ w kategorię przestrzeni topologicznych **Sp**. Oczywiście istnieje granica prosta $\mathrm{colim}_{\mathcal{C}} F$, ale ta konstrukcji nie ma dobrych homotopijnych własności (tj. granice proste homotopijnie rónoważnych funktorów mogą nie być homotopijnie równoważne). W teorii homotopii używa się raczej *homotopijnej granicy prostej* $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}\, F$, której własności są znacznie lepsze. Istnieje przekształcenie $\mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}}\, F \to \mathrm{colim}_{\mathcal{C}} F$, które w wielu przypadkach jest słabą homotopijną równoważnością. Homotopijna granica prosta *nie jest* granicą prostą ani w kategorii przestrzeni topologicznych, ani w jej kategorii homotopii.

2.2. **Teoria przeszkód.** Niech dany będzie funktor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Sp}$, przestrzeń topologiczna $Z$ oraz rodzina przekształceń $\{f_C : F(C) \to Z\}_{C\in\mathcal{C}}$. Załóżmy, że rodzina $\{f_C\}$ jest *homotopijnie zgodna*, tj. dla każdego morfizmu $c : C \to C'$ w $\mathcal{C}$ przekształcenia $f_C$ oraz $f_{C'} \circ F(c)$ są homotopijne. Można postawić pytanie, czy rodzinę $\{f_C\}$ można przedłużyć do przekształcenia $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} F \to Z$. Określmy, dla $i \geqslant 1$, rodzinę funktorów kontrawariantnych na $\mathcal{C}$ o wartościach w kategorii grup:

$$\Pi_i^f(C) := \pi_i(\operatorname{map}(F(C), Z)_{f_C}).$$

Załózmy, że wartości funktora $\Pi_1^f$ są abelowe. Wówczas:

- Jeśli dla $i \geqslant 1$ grupy $H^{i+1}(\mathcal{C}; \Pi_i^f)$ są trywialne, to istnieje rozszerzenie $\{f_C\}$ do przekształcenia $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} F \to Z$.
- Jeśli dla $i \geqslant 1$ grupy $H^i(\mathcal{C}; \Pi_i^f)$ są trywialne, to rozszerzenie $\{f_C\}$ do przekształcenia $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} F \to Z$ jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do homotopii (o ile istnieje).

*Uwaga.* Grupy $H^i$ to grupy kohomologii kategorii o współczynnikach w funktorze (jest to wspólne uogólnienie kohomologii grup i kohomologii przestrzeni topologicznych).

2.3. **Rozkłady homotopijne.** Niech $p$ ustaloną liczbą pierwszą, a $G$ zwartą grupą Liego lub $p$-zwartą grupą.

**Definicja 4.** *Rozkładem homotopijnym* przestrzeni klasyfikującej $BG$ nazywamy funktor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Sp}$ wraz z przekształceniem $\operatorname{hocolim}_{\mathcal{C}} F \to BG$, które indukuje izomorfizm na homologiach o współczynnikach w $\mathbb{F}_p$. Ponadto zakładamy, że $\mathcal{C}$ jest skończoną EI-kategorią (tj. taką, że każdy endomorfizm jest izomorfizmem) oraz że wartości $F$ są przestrzeniami klasyfikującymi grup Liego (lub $p$-zwartych grup).

Rozkłady homotopijne są więc przedstawieniami danej przestrzeni klasyfikującej w postaci homotopijnej granicy prostej przestrzeni klasyfikujących prostszych grup z dokładnością do homologicznej równoważności. (Rozkłady homotopijne dla których zadana homologiczna równoważność jest homotopijną równoważnością są zazwyczaj niezbyt użyteczne). W pracy występują dwa rodzaje rozkładów homotopijnych: *rozkład centralizatorowy*, w którym występują przestrzenie klasyfikujące centralizatorów elementarnych abelowych $p$-podgrup danej $p$-zwartej grupy, oraz *rozkład na podgrupy $p$-uparte*, w którym występują przestrzenie klasyfikujące pewnych $p$-torycznych podgrup danej grupy Liego.

2.4. **Konstrukcja 2-zwartej grupy $DI(4)$.** Przestrzeń $BDI(4)$ została skonstruowana [DW1] jako homotopijna granica prosta pewnego funktora (który zarazem jest jej rozkładem centralizatorowym). Opiszemy teraz w skrócie ten funktor. Niech $V$ będzie 4-wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}_2$ i niech $\mathcal{A}$ będzie kategorią, której obiektami są niezerowe podprzestrzenie $V$, zaś morfizmami monomorfizmy. Zdefiniujmy funktor

$$K : \mathcal{A} \ni X \mapsto \mathbb{F}_2[V]^{\{g \in GL(V) : \forall_{x \in X} g(x) = x\}} \in \mathbf{GrAlg_2},$$

gdzie $\mathbf{GrAlg_2}$ oznacza kategorię $\mathbb{F}_2$-algebr z gradacją. Okazuje się, że istnieje funktor $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Sp}$ taki, że $H^*(F; \mathbb{F}_2) \cong K$. Przestrzeń $BDI(4)$ jest 2-uzupełnieniem homotopijnej granicy prostej $F$. Wartościami funktora $F$ są uzupełnione przestrzenie klasyfikujące grup Liego (kolejno $Spin(7)$, $SU(2)^3/\{\pm1\}$, $T^3 \ltimes \{\pm1\}$ oraz $\{\pm1\}^4$). $BDI(4)$ jest homotopijną granicą prostą diagramu

(1)

$$\overset{GL_4(\mathbb{F}_2)}{\overset{\curvearrowright}{B\{\pm1\}^4}} \rightrightarrows \overset{GL_3(\mathbb{F}_2)}{\overset{\curvearrowright}{B(T^3 \ltimes \{\pm1\})^\wedge_2}} \rightrightarrows \overset{GL_2(\mathbb{F}_2)}{\overset{\curvearrowright}{B(SU(2)^3/\{\pm1\})^\wedge_2}} \rightrightarrows BSpin(7)^\wedge_2.$$

Diagram ten jest bardzo zbliżony do diagramu rozkładu centralizatorowego $BSpin(7)$ — występują w nim takie same przestrzenie, ale jest więcej morfizmów.

## 3. Homotopijne reprezentacje zwartych grup Liego

Opiszemy teraz ogólną metodę konstruowania przekształceń z $BG$ do 2-uzupełnienia $BU(n)$, gdzie $G$ jest grupą Liego. Przekształcenia takie będziemy nazywać *reprezentacjami homotopijnymi* grupy $G$. Będziemy mówić, że homotopijne reprezentacje są *izomorficzne*, jeśli odpowiednie przekształcenia sż homotopijne. Ponieważ z ogólnych własności $p$-uzupełnienia mamy równość $[BG, (BU(n))^\wedge_p] = [(BG)^\wedge_p, (BU(n))^\wedge_p]$, przekształcenia $(BG)^\wedge_p \to (BU(n))^\wedge_p$ również będziemy nazywać reprezentacjami homotopijnymi. Używać będziemy rozkładu homotopijnego na podgrupy $p$-uparte [JMO1], który wydaje się najbardziej użyteczny do tego celu.

3.1. **Reprezentacje grup $p$-torycznych.** Grupę Liego $P$ nazywamy *$p$-toryczną*, jeśli jest rozszerzeniem skończonej $p$-grupy przez torus. Każda grupa $p$-toryczna posiada gęstą podgrupę $P^\infty$, zwaną *dyskretną aproksymacją*, która jest rozszerzeniem skończonej $p$-grupy przez $p$-dyskretny torus $(\mathbb{Z}/p^\infty)^r$. Użyteczność dyskretnych aproksymacji wynika z następującej wersji wspomnianiego wcześniej twierdzenia Dwyera-Zabrodskiego:

**Twierdzenie 3.** *Niech $P$ będzie grupą $p$-toryczną, zaś $G$ zwartą grupą Liego. Wówczas istnieje bijekcja*

$$\operatorname{Rep}(P^\infty, G) \xrightarrow{B(-)^\wedge_p} [BP, (BG)^\wedge_p],$$

*gdzie* $\operatorname{Rep}(P^\infty, G) := \operatorname{Hom}(P^\infty, G)/\operatorname{Inn}(G)$. *Ponadto dla dowolnej reprezentacji $\varphi : P^\infty \to G$ przekształcenie*

$$BC_G(P) \to \operatorname{map}(BP, (BG)^\wedge_p)_{(B\varphi)^\wedge_p}$$

*indukuje homologii o współczynnikach w $\mathbb{F}_p$.*

W szczególności, dla $G = U(n)$ otrzymujemy, że każda homotopijna reprezentacja zespolona $P$ jest uzupełnieniem reprezentacji (w sensie algebraicznym) dyskretnej aproksymacji $P^\infty$. Okazuje się, że zbiór klas izomorfizmu homotopijnych reprezentacji grup, które nie są $p$-toryczne, nie ma tak prostego opisu.

3.2. **Rozkład na podgrupy $p$-uparte.** Niech $G$ będzie zwartą grupą Liego. Niech $\mathcal{O}_p(G)$ będzie kategorią $G$-orbit postaci $G/P$, gdzie $P$ jest podgrupą $p$-toryczną. $p$-Toryczną podgrupę $P \subseteq G$ nazywamy *$p$-upartą*, jeśli jej grupa Weyla $W_G(P) := N_G(P)/P$ jest skończona i nie zawiera nietrywialnych normalnych $p$-podgrup. Niech $\mathcal{R}_p(G)$ będzie pełną podkategorią $\mathcal{O}_p(G)$ z obiektami postaci $G/P$, gdzie $P$ jest $p$-uparta. Funktor rozkładu $BG$ na podgrupy $p$-uparte jest określony na kategorii $\mathcal{R}_p(G)$, a jego wartość na obiekcie $G/P$ jest homotopijnie równoważna $(BP)^\wedge_p$.

3.3. **Reprezentacje $\mathcal{R}$-niezmiennicze.** Dla dowolnej zwartej grupy Liego $G$ kategoria $\mathcal{R}_p(G)$ zawiera dokładnie jeden obiekt *maksymalny* (tzn. nie posiadający, poza automorfizmami, morfizmów wychodzących z niego). Tym obiektem jest $G/N$, gdzie $N$ jest maksymalną $p$-toryczną podgrupą normalizatora torusa maksymalnego w $G$. Powiemy, że $n$-wymiarową reprezentacja zeespolona $\varphi$ grupy $N^\infty$ jest *$\mathcal{R}$-niezmienniczą*, jeśli przekształcenie $(B\varphi)^\wedge_2 : (BN^\infty)^\wedge_p \to (BU(m))^\wedge_p$ wyznacza pewną homotopijnie zgodną rodzinę przekształceń z diagramu rozkładu $BG$ w przestrzeń $(BU(m))^\wedge_p$. Rozstrzygnięcie, czy dana reprezentacja jest $\mathcal{R}$-niezmiennicza jest problemem czysto algebraicznym — wymaga zbadania charakterów reprezentacji $\operatorname{res}^{N^\infty}_{P^\infty} \varphi$ dla $p$-upartych podgrup $P$.

3.4. **Przeszkody do rozszerzenia reprezentacji $\mathcal{R}$-niezmienniczych.** Jeśli reprezentacja zespolona $\varphi$ grupy $N^\infty$ jest $\mathcal{R}$-niezmiennicza, to wyznacza ona homotopijnie zgodną rodzinę przekształceń z funktora rozkładu $BG$. Przeszkody do istnienia rozszerzenia $(B\varphi)^\wedge_p$ do przekształcenia $(BG)^\wedge_p \to BU(n)^\wedge_p$ leżą w grupach $H^{i+1}(\mathcal{C}; \Pi^\varphi_i)$ (por.

2.2). Zastosowanie tw. 3 oraz lematu Schura prowadzi do izomorfizmu funktorów $\Pi_2^\varphi \cong \Xi^\varphi$, gdzie $\Xi^\varphi(G/P)$ jest wolnym $\mathbb{Z}_p^\wedge$-modułem generowanym przez nieprzywiedlne reprezentacje $\mathrm{res}_{N^\infty}^{P^\infty} \varphi$, oraz $\Pi_1 = \Pi_3 = 0$. Ponadto, jak pokazali [JMO1], kohomologie kategorii $\mathcal{R}_p(G)$ o współczynnikach w dowolnym funktorze o wartościach w kategorii $\mathbb{Z}_p^\wedge$-modułów znikają powyżej pewnego wymiaru (nie zależącego od współczynników; najmniejsze takie ograniczenie dolne będziemy nazywać *p-wymiarem kohomologicznym* kategorii $\mathcal{R}_p(G)$). Te obserwacje pozwalają efektywnie wyliczać grupy przeszkód (a więc również klasyfikować homotopijne reprezentacje $G$), o ile $G$ nie jest zbyt duża. Zachodzi następujące

**Twierdzenie 4.** *Niech $G$ będzie zwartą grupą Liego, a $\varphi$ $\mathcal{R}$-niezmienniczą reprezentacją grupy $N^\infty$. Wówczas*

a. *Jeśli $H^3(\mathcal{R}_p(G); \Xi^\varrho) = 0$ oraz p-wymiar kohomologiczny kategorii $\mathcal{R}_p(G)$ jest nie większy niż 4, to $B\varrho_p^\wedge$ rozszerza się do przekształcenia $BG \to BU(m)_p^\wedge$,*
b. *Jeśli $H^2(\mathcal{R}_p(G); \Xi^\varrho) = 0$ oraz p-wymiar kohomologiczny kategorii $\mathcal{R}_p(G)$ jest nie większy niż 3, to $B\varrho_p^\wedge$ rozszerza się do przekształcenia $BG \to BU(m)_p^\wedge$ jednoznacznie (z dokładnością do homotopii).*

## 4. Zastosowanie: Homotopijne reprezentacje grup $Spin(7)$ i $SU(2)^3$

Zakładamy teraz, że $p = 2$.

4.1. **Kategoria $\mathcal{R}_2(Spin(7))$.** Jak wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale, klasyfikacja homotopijnych reprezentacji $Spin(7)$ wymaga obliczenia grup kohomologii kategorii $\mathcal{R}_2(Spin(7))$ (o współczynnikach w funktorach $\Xi^\varrho$). Istnieją mocne narzędzia do wykonywania takich obliczeń [JMO1], zastosowanie ich wymaga jednak szczegółowego opisu kategorii. Dowód poniższego twierdzenia korzysta z prac [O1], [AF] i [JMO1]:

**Twierdzenie 5.** *(a) Kategoria $\mathcal{R}_2(Spin(7))$ jest EI-kategorią izomorficzną z $\mathcal{R}_2(O(7)$. Ponadto*

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{R}_2(Spin(7)) = \{N_i, K_i, M_i, \bar{M}_i\}_{i=0,1} \cup \{L_i\}_{i=0,1,3}.$$

*Grupa automorfizmów poszczególnych obiektów to*

$$\mathrm{Aut}(N_1) = 1, \qquad \mathrm{Aut}(N_0) \cong \mathrm{Aut}(L_3) \cong \mathrm{Aut}(K_1) \cong \Sigma_3$$

$$\mathrm{Aut}(L_1) \cong \Sigma_5, \qquad \mathrm{Aut}(L_0) \cong \Sigma_7, \qquad \mathrm{Aut}(K_0) \cong \mathrm{Aut}(\bar{M}_0) \cong \Sigma_3 \times \Sigma_3$$

$$\mathrm{Aut}(M_1) \cong \Sigma_3 \wr \Sigma_2, \qquad \mathrm{Aut}(M_0) \cong \Sigma_3 \wr \Sigma_2 \times \Sigma_3$$

*(b) Zbiór morfizmów jest generowany przez automorfizmy oraz włożenia zamieszczone na diagramie:*

$$\begin{tikzcd}
 & & N_1 & \\
L_3 \arrow[urr] & N_0 \arrow[ur] & K_1 \arrow[u] & \bar{M}_1 \arrow[ul] \\
L_1 \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & K_0 \arrow[u] \arrow[ur] & \bar{M}_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & M_1 \arrow[u] \arrow[ul] \\
L_0 \arrow[u] \arrow[ur] & & M_0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

*(c) Pełna podkategoria $\mathcal{R}_2(Spin(7))$ z obiektami $L_i$, $K_i$, $N_i$ jest naturalnie równoważna kategorii $\mathcal{R}_2(\Sigma_7)$. Pełna podkategoria z obiektami $M_i$, $\bar{M}_i$, $K_i$, $N_i$ jest naturalnie równoważna kategorii $\mathcal{R}_2(O(4)) \times \mathcal{R}_2(\Sigma_3)$.*

4.2. **Reprezentacje dyskretnych aproksymacji upartych podgrup $Spin(7)$.** Kolejnym krokiem niezbędnym do klasyfikacji homotopijnych reprezentacji $Spin(7)$ jest klasyfikacja reprezentacji zespolonych grup $P^\infty$, gdzie $P$ jest 2-upartą podgrupą w $Spin(7)$. Należy zwrócić uwagę, że w ogólności grupy $P^\infty$ nie są skończone, lecz jedynie lokalnie skończone (tzn. takie, że każda skończenie generowana podgrupa danej grupy jest skończona). Okazuje się jednak, że teoria reprezentacji grup lokalnie skończonych nie różni istotnie od teorii reprezentacji grup skończonych. Praca zawiera kompletną klasyfikację reprezentacji nieprzywiedlnych dyskretnych aproksymacji 2-upartych podgrup $Spin(7)$.

4.3. **Homotopijne reprezentacje $Spin(7)$.** Każda reprezentacja nieprzywiedlna dowolnej (lokalnie skończonej) podgrupy $Spin(7)$ zawierającej centrum jest albo *parzysta* (tj. jest przeciągnięciem reprezentacji pochodzącej z podgrupy $SO(7)$) lub *nieparzysta* (tj. jej obcięcie do centrum $Spin(7)$ jest sumą nietrywialnych parami izomorficznych reprezentacji). Wobec tego $\mathcal{R}$-niezmiennicza reprezentacja $\varphi$ grupy $N_1^\infty$ (dyskretnej aproksymacji 2-normalizatora torusa maksymalnego) jest sumą prostą reprezentacji parzystej $\varrho_{ev}$ i nieparzystej $\varrho_{od}$ (przy czy zarówno $\varrho_{ev}$ jak i $\varrho_{od}$ są $\mathcal{R}$-niezmiennicze).

**Twierdzenie 6.** *Niech $\varrho \cong \varrho_{ev} \oplus \varrho_{od}$ będzie $\mathcal{R}$-niezmienniczą reprezentacją $N_1^\infty$. Wówczas część nieparzysta $B(\varrho_{od})_2^\wedge$ rozszerza się do homotopijnej reprezentacji $Spin(7)$. Część parzysta $B(\varrho_{ev})_2^\wedge$ rozszerza się, jeśli spełnia pewne techniczne warunki.*

*Uwaga.* Nie znam przykładu $\mathcal{R}$-niezmienniczej reprezentacji parzystej, która nie spełnia warunków wspomnianych w powyższym twierdzeniu.

4.4. **Homotopijne reprezentacje $SU(2)^n$.** Niech $L := SU(2)$, $p = 2$ i $N \subseteq SU(2)$ będzie normalizatorem torusa maksymalnego. Częściowa klasyfikacja homotopijnych reprezentacji grup $L^n$ jest podana w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 7.** *Niech $\varphi$ będzie $\mathcal{R}$-niezmienniczą reprezentacją grupy $(N^\infty)^n$. Wówczas:*
*(a) Jeśli $n \leqslant 3$, to $B\varphi_2^\wedge$ rozszerza się do $(BL^n)_2^\wedge$.*
*(b) Jeśli $n \leqslant 2$, to $B\varphi_2^\wedge$ rozszerza się jednoznacznie do $(BL^n)_2^\wedge$.*

Pozwala ono konstrukcję przykładów ilustrujących różnice pomiędzy reprezentacjami zespolonymi grup Lie a reprezentacjami homotopijnymi. Na przykład:

- Każda homotopijna reprezentacja nieprzywiedlna $L$ ma wymiar $\leqslant 4$ (podczas gdy istnieją reprezentacje nieprzywiedlne dowolne dużych wymiarów).
- Rozkład homotopijnej reprezentacji $L$ na reprezentacje nieprzywiedlne *nie jest* jednoznaczny.
- Homotopijna reprezentacja nieprzywiedlna grupy $L^2$ nie musi być iloczynem tensorowym nieprzywiedlnych reprezentacji $L$.

Najbardziej interesować nas będzie grupa $L^3$, gdyż występuje ona w rozkładzie homotopijnym $BDI(4)$. Z twierdzenia 7 wynika jedynie, że każdą $\mathcal{R}^3$-niezmienniczą reprezentację można rozszerzyć do reprezentacji homotopijnej $L^3$. Potrzebne nam będą jednak informacje o zbiorze rozszerzeń danej reprezentacji niezmienniczej.

**Twierdzenie 8.** *Niech $G = L^3$ i niech $\varphi$ będzie $\mathcal{R}$-niezmienniczą reprezentacją $(N^\infty)^3$. Wówczas zbiór klas homotopii rozszerzeń $B\varphi_2^\wedge$ do $(BG)_2^\wedge$ posiada strukturę wolnego i tranzytywnego $H^2(\mathcal{R}_2(G); \Xi^\varrho)$-zbioru, która jest zachowywana przez homotopijne automorfizmy przestrzeni $(BG)_2^\wedge$.*

Dowód tego twierdzenia wymaga konstrukcji podanej w następnej części.

4.5. **Operacje Adamsa na $BSU(2)^{\wedge}_2$.** *Operacją Adamsa* nazywamy przekształcenie $\psi_k : (BL)^{\wedge}_2 \to (BL)^{\wedge}_2$, gdzie $k \in (\mathbb{Z}^{\wedge}_2)^*$, którego obcięcie do przestrzeni klasyfikującej torusa maksymalnego (która jest homotopijnie równoważna $K(\mathbb{Z}^{\wedge}_2, 2)$) jest indukowane przez mnożenie przez $k$. Okazuje się (co udowodniono w [JMO2]), że dla każdego $k \in (\mathbb{Z}^{\wedge}_2)^*$ istnieje operacja Adamsa $\psi_k$, każdy homotopijny automorfizm $(BL)^{\wedge}_2$ jest operacją Adamsa, oraz $\psi_k$ jest homotopijne $\psi_l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = \pm l$. Wobec tego grupa $\Gamma$ klas homotopii automorfizmów przestrzeni $(BL)^{\wedge}_2$ jest izomorficzna $(\mathbb{Z}^{\wedge}_2)^*/\{\pm 1\}$. W niniejszej pracy dowodzę, działanie grupy $\Gamma$ można zrealizować na poziomie rozkładu homotopijnego $(BL)^{\wedge}_2$ na podgrupy 2-uparte.

**Twierdzenie 9.** *Istnieje funktor $F$ na kategorii $\mathcal{R}_2(L)$ o wartościach w kategorii przestrzeni z działaniem grupy $\Gamma$, który jest naturalnie równoważny z funktorem 2-upartego rozkładu homotopijnego $L$. Ponadto indukowane działanie grupy $\Gamma$ na $(\operatorname{hocolim} F)^{\wedge}_2$ jest zgodne z działaniem $\Gamma$ na $(BL)^{\wedge}_2$.*

## 5. Dowód głównego twierdzenia

5.1. **Reprezentacja grupy $N^\infty$.** Niech $G = Spin(7)$, $p = 2$, a $T$ będzie torusem maksymalnym $G$ i niech $N$ będzie maksymalną 2-toryczną podgrupą normalizatora torusa maksymalnego w $G$. Zauważmy, że $T$ jest również torusem maksymalnym w $DI(4)$. Niech $W$ oznacza grupę Weyla 2-zwartej grupy $DI(4)$. Oczywiście $W$ działa na 2-uzupełnionym torusie $(BT)^{\wedge}_2$, jak również na dyskretnej aproksymacji $T^\infty$ (choć działania tego nie da się zrealizować na $T$). Niech $\varrho$ będzie reprezentacją $T^\infty$ zadaną przez pierwiastek $(1, 0, 0)$, a $\theta$ jednowymiarową reprezentacją trywialną. Zdefiniujmy

$$\varphi := \operatorname{ind}_{T^\infty}^{N^\infty} \bigotimes_{w \in W/W_\varrho} (\theta \oplus w^* \varrho).$$

Reprezentacja $\varrho$ ma wymiar $m := 2^{46}$. W kolejnych krokach będziemy ją rozszerzać do 2-zwartej reprezentacji $DI(4)$.

5.2. **Homotopijna reprezentacja $Spin(7)$.** Obliczenie charakteru reprezentacji $\varphi$ pokazuje, że ta reprezentacja jest $\mathcal{R}$-niezmiennicza (dla $G$); spełnia ona również założenia twierdzenia 6. Wobec tego rozszerza się do homotopijnej reprezentacji $f : (BG)^{\wedge}_2 \to (BU(m)^{\wedge}_2$ grupy $G$.

5.3. **$\mathcal{A}$-Niezmienniczość przekształcenia $f$.** Niech $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Sp}$ oznacza diagram rozkładu $BDI(4)$ opisany w 2.4. Należy udowodnić, że przekształcenie $f$ jest $\mathcal{A}$-niezmiennicze, (tj. zadaje homotopijnie zgodną rodzinę przekształceń z diagramu $F$ do przestrzeni $(BU(m)^{\wedge}_2)$.

Jedyną trudnością jest sprawdzenie, że przekształcenie $f$ obcięte do $B(SU(2)^3/\{\pm 1\})^\wedge_2$ jest $GL_2(\mathbb{F}_2)$-niezmiennicza (por. 2.4). Jest to wniosek z twierdzenia 8.

5.4. **Wierna reprezentacja zespolona $DI(4)$.** Grupy przeszkód do istnienia przedłużenia $f$ do $BDI(4)$ wyrażają się w terminach modułów Steinberga [O2], o ile grupy homotopii odpowiednich przestrzeni odwzorowań są abelowe. Ostatnią trudność stanowi udowodnienie, że grupa

$$\Pi_1^\varrho := \pi_1(\mathrm{map}((BSU(2)^3/\{\pm 1\})^\wedge_2, BU(m)^\wedge_2)_{B\varrho_1})$$

jest abelowa. Rozkład homotopijny $BSU(2)^3$ na 2-uparte podgrupy pozwala na przedstawienie powyższej przestrzeni odwzorowań w postaci homotopijnej granicy odwrotnej. Zastosowanie ciągu spektralnego Bousfielda [BK] zbiegającego do grup homotopii pozwala na udowodnienie abelowości powyższej grupy.

## Literatura


[Ag] J. Aguadé, *Constructing modular classifying spaces*, Isr. J. Math. **66** (1989), 23-40

[AF] J. L. Alperin and P. Fong, *Weights for Symmetric and General Linear Groups*, J. Alg. **131** (1990), 2-22

[B] A. K. Bousfield, *The localization of spaces with respect to homology*, Topology **14** (1975), 133-150

[BK] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 304. Springer, New York (1972)

[C] N. Castellana, *The homotopic adjoint representation for exotic p-compact groups*, to appear

[DK] W. G. Dwyer and D. M. Kan, *Centric maps and realization of diagrams in the homotopy category*, Proc. AMS **114** (1992), 575-584

[DW1] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, *A new finite loop space at the prime 2*, J. AMS **6** (1993), 37-63

[DW2] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, *Homotopy fixed point methods for Lie groups and finite loop spaces*, Ann. Math. **139** (1994), 395-442

[DW3] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson, *A cohomology decomposition theorem*, Topology **31** (1992), 433-443

[DZ] W. G. Dwyer, A. Zabrodsky, *Maps between classifying spaces*, Algebraic Topology, Barcelona 1996, Lecture Notes in Math. **1298**, Springer-Verlag, 106-119

[JM] S. Jackowski, J. McClure, *Homotopy decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups*, Topology **31** (1992), 113-132.

[JMO1] S. Jackowski, J. McClure and B. Oliver, *Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions*, Ann. Math. **135** (1992), 189-270

[JMO2] S. Jackowski, J. McClure and B. Oliver, *Self-homotopy equivalences of classifying spaces of compact connected Lie groups*, Fund. Math. 147 (1995), 99-126

[JO] A. Jeanneret and A. Osse, *The K-theory of p-compact groups*, Comm. Math. Helv., **72** (1997), 556-581

[M] J. M. Moller, *Homotopy Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **32** (1995), 413-428

[N1] D. Notbohm, *On the* 2*-compact group* $DI(4)$, J. Reine Angew. Math. **555** (2003), 163-185

[N2] D. Notbohm, *Classifying spaces of compact Lie groups and finite loop spaces*, Handbook of Algebraic Topology, North-Holland, Amsterdam (1995), 1049-1095

[O1] B. Oliver, *p-Stubborn subgroups of classical compact Lie groups*, J. Pure Appl. Algebra **92** (1994), 55-78

[O2] B. Oliver, *Higher limits via Steinberg representations*, Comm. Alg. **22** (1994), 1381-1393

[Q] D. Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear group over a finite field*, Ann. Math. **96** (1972), 552-586

[R] D. L. Rector, *Loop space structure on the homotopy type of* $S^{3l}$, Symposium on Algebraic Topology, Lecture Note in Math. **249**, Springer-Verlag (1971), 99-105

[S] J.-P. Serre *Représentations Linéaires des Groupes Finis*, Hermann, Paris, 1967

[St] R. Steinberg, *Prime power representations of finite linear groups*, Canad. J. Math. **8** (1956), 580-591

[V] B. B. Venkov, *Cohomology algebra for some classifying spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **127** (1959), 943-944

[W] Z. Wojtkowiak, *On maps from* $\operatorname{hocolim} F$ *to* $Z$, Algebraic Topology, Barcelona, 1986, Lecture Notes in Math. **1298**, Springer-Verlag, 1987, 227-236

[Z] K. Ziemiański, *Przyklady wiernych reprezentacji p-zwartych grup*, M. Sc. thesis, Uniwersytet Warszawski, 1997