Streszczenie rozprawy

Języki regularne indukujące rozpoznawalne i bezgwiazdkowe języki śladów

Krystyna Stawikowska
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki

1. Wprowadzenie

Klasyczna teoria języków formalnych to teoria monoidów wolnych skończenie generowanych. Pojawienie się maszyn wieloprocesorowych i programów współbieżnych - zrodził potrzebę pojawienia się matematycznych modeli systemów współbieżnych, z których najpopularniejszym są dziś sieci Petriego (1962). Jako model opisu zachowań tych sieci, Mazurkiewicz zaproponował w [8] w roku 1977 ślady (*traces*), czyli elementy monoidu ilorazowego - nazwanego monoidem śladów (*trace monoid*) – otrzymanego jako iloraz monoidu wolnego przez kongruencję, opartą na relacji niezależności (współbieżności) akcji systemu obliczeniowego.

Jednym z głównych działów klasycznej teorii języków formalnych jest teoria języków regularnych, z podstawowym twierdzeniem Kleene'go mówiącym, że w monoidach wolnych skończenie generowanych klasy języków rozpoznawanych przez automaty skończone i języków definiowanych przez wyrażenia racjonalne są równe. W monoidach śladów klasa języków rozpoznawalnych jest właściwą podklasą klasy języków racjonalnych. W pracy badane są pewne podklasy języków regularnych, które indukują rozpoznawalne języki śladów – iteracyjnie spójne języki słów i ich związki z językami o skończonym stopniu rozproszenia.

Języki bezgwiazdkowe, czyli języki opisane przez wyrażenia podobne do wyrażeń racjonalnych, ale z dopełnieniem zastępującym gwiazdkę, odgrywają ważną rolę w teorii języków słów. Najważniejsze wyniki to twierdzenie Schützenbergera (1965) o aperiodyczności i twierdzenie McNaughtona i Papperta (1971) o definiowalności w logice 1-go rzędu. Wyniki te przenoszą się na bezgwiazdkowe języki śladów, jednak ich dowody dla śladów są znacznie bardziej skomplikowane. W pracy przedstawione są nowe – uproszczone i uzupełnione dowody znanych twierdzeń dla śladów oraz dwie nowe charakteryzacje bezgwiazdkowych języków śladów – leksykograficzna i wykorzystującą zdefiniowaną w pracy nową operację – bezgwiazdkową gwiazdkę.

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. W rozdziałach 2 i 3 przedstawione zostały podstawowe pojęcia i fakty, wykorzystywane w pracy, dotyczące monoidów, w szczególności wolnych (rozdział 2) i monoidów śladów (rozdział 3). Zasadniczą część rozprawy stanowią rozdziały 4-6, pracę kończy podsumowanie.

2. Rozpoznawalne języki śladów a regularne języki słów

Języki rozpoznawalne opisują zachowania systemów współbieżnych o skończonej liczbie stanów. Z drugiej strony, wyrażenia racjonalne prosto opisują, jak język jest zbudowany. Stąd jednym z centralnych tematów teorii śladów są języki racjonalne, rozpoznawalne i związki między nimi. Znanym wynikiem jest sposób opisu rozpoznawalnych języków śladów za pomocą tzw. wyrażeń iteracyjnie spójnych oraz twierdzenie o spłaszczeniu (spłaszczenie przyporządkowuje językowi śladów indukujący go, domknięty względem relacji niezależności, język słów), że rozpoznawalne języki śladów reprezentują domknięte języki słów.

Rozdział 4 poświęcony jest językom słów indukującym rozpoznawalne języki śladów. Dokładniej badane są dwie klasy takich języków - języki iteracyjnie spójne i języki o skończonym stopniu rozproszenia. Głównym wynikiem tego rozdziału jest

Twierdzenie 1. Każdy język iteracyjnie spójny ma skończony stopień rozproszenia.

oraz przykład pokazujący, że klasa iteracyjnie spójnych języków słów nie jest zamknięta względem różnicy teoriomnogościowej, w przeciwieństwie do iteracyjnie spójnych języków śladów, które zamknięte są na wszystkie operacje boolowskie.

3. Bezgwiazdkowe języki śladów i słów

Podzbiór dowolnego monoidu M nazywamy bezgwiazdkowym, jeśli można go zbudować z atomów ($\emptyset$ i $\{m\}$ dla $m \in M$) za pomocą operacji sumy mnogościowej, złożenia i dopełnienia. Najważniejsze wyniki w monoidach wolnych dotyczące języków bezgwiazdkowych to twierdzenie Schützenbergera (1965) o aperiodyczności i twierdzenie McNaughtona i Paperta (1971) o definiowalności w logice 1-go rzędu. Wyniki te przenoszą się na bezgwiazdkowe języki śladów, jednak ich dowody dla śladów są znacznie bardziej skomplikowane. Tym zagadnieniom poświęcony jest rozdział 6.

W rozdziale 5 omówione zostały bezgwiazdkowe języki słów. Przypomniane zostały najważniejsze definicje i fakty oraz przedstawiona została nowa operacja, wykorzystywana w dalszej części rozprawy - bezgwiazdkowa gwiazdka. Jest to klasyczna gwiazdka Kleene'go, ale stosowana jedynie, gdy wynik tej operacji jest językiem bezgwiazdkowym, i nieokreślona w przeciwnym przypadku. Okazuje się, że operacja ta może skutecznie zastąpić operację dopełnienia w konstrukcji bezgwiazdkowych języków słów:

Twierdzenie 2. Język słów jest bezgwiazdkowy wtw jest on konstruowalny z atomów za pomocą operacji sumy mnogościowej, złożenia i bezgwiazdkowej gwiazdki.

Dowód tej charakteryzacji wykorzystuje twierdzenie Schützenbergera oraz klasyczną konstrukcję McNaughtonai Yamady (1960) wyrażeń regularnych dla języków rozpoznawalnych przez automaty skończone.

Skuteczność tej operacji w pełni pokazuje rozdział 6 o bezgwiazdkowych językach śladów. Podstawowym wynikiem tego rozdziału, jest lemat o domknięciu złożenia domkniętych języków bezgwiazdkowych:

Lemat 3. Domknięcie złożenia domkniętych języków bezgwiazdkowych jest językiem bezgwiazdkowym.

Wnioskiem z lematu 3 jest twierdzenie o spłaszczeniu dla bezgwiazdkowych języków śladów, istotnie wykorzystywane w kolejnych dowodach:

Twierdzenie 4. Język śladów jest bezgwiazdkowy wtw jego spłaszczenie jest bezgwiazdkowym językiem słów.

Lemat 3 pozwolił też znacznie uprościć dowód znanego twierdzenia Guaiany, Restivo i Salemi ([4], 1992) o aperiodyczności bezgwiazdkowych języków śladów.

Języki leksykograficzne, czyli zbiory słów leksykograficznie minimalnych w swoich śladach, odgrywają ważną rolę w teorii rozpoznawalnych języków śladów. Wiadomo, że klasa języków indukowanych przez regularne języki leksykograficzne to dokładnie klasa rozpoznawalnych języków śladów. Analogiczne twierdzenie zachodzi również dla języków bezgwiazdkowych w dowolnym monoidzie śladów:

Twierdzenie 5. Język śladów jest bezgwiazdkowy wtw jego leksykograficzna reprezentacja jest bezgwiazdkowym językiem słów wtw jest on definiowalny w logice 1-go rzędu.

Dowód pierwszej równoważności w przypadku monoidów przechodnio-zorientowanych wykorzystuje metody teorii automatów i rozumowania kombinatoryczne. Dowód ogólny, dla dowolnych monoidów śladów, poprowadzony został z wykorzystaniem technik logiki 1-go rzędu dla śladów (Ebinger i Muscholl [2], 1996), klasycznego twierdzenia McNaughtona i Paperta (1971) i wcześniej uzyskanych wyników rozprawy.

Podsumowując wyżej omówione wyniki, możemy sformułować ogólną wszechstronną charakteryzację podzbiorów bezgwiazdkowych w dowolnych monoidach śladów:

T jest bezgwiazdkowy
wtw
$\cup T$ jest bezgwiazdkowy
wtw
$Lex(T)$ jest bezgwiazdkowy
wtw
T jest aperiodyczny
wtw
T jest definiowalny w logice 1-go rzędu.

Teraz, wykorzystując powyższą charakteryzację, pokazane zostało, że twierdzenie 5 (dla monoidów wolnych) jest prawdziwe w dowolnym monoidzie śladów:

Twierdzenie 6. Język śladów jest bezgwiazdkowy wtw jest on konstruowalny z atomów za pomocą operacji sumy mnogościowej, złożenia i bezgwiazdkowej gwiazdki.

W ostatnim rozdziale sformułowano kilka problemów otwartych, bezpośrednio związanych z tematyką pracy i uzyskanymi wynikami.

Większość wyników niniejszej rozprawy została opublikowana w pracach [7,10,11,12,13].

Wybrana literatura

[1] V. Diekert, G. Rozenberg (eds.): The Book of Traces. World Scientifc,1995.

[2] W. Ebinger, A. Muscholl: Logical defnability on infnite traces. Theoretical Computer Science 154(1), pp. 67-84, 1996.

[3] A. Gibons, W. Rytter: On the Decidability of Some Problems about Rational Subsets of Free Partially Commutative Monoids. Theoretical Computer Science 48(3), pp. 329-337, 1986.

[4] G. Guaiana, A. Restivo, S. Salemi: Star-free trace languages. Theoretical Computer Science 97, pp. 301-311, 1992.
[5] K. Hashiguchi: Recognizable Closures and Submonoids of Free Partially Commutative Monoids. Theoretical Computer Science 86, pp. 233-241, 1991.
[6] B. Klunder: Star-Connected Flat Languages and Automata. Fundamenta Informaticae 72(1-3), pp. 235-243, 2006.
[7] B. Klunder, E. Ochmański, K. Stawikowska: On Star-Connected Flat Languages. Fundamenta Informaticae 67(1-3), pp. 93-105, 2005
[8] A. Mazurkiewicz: Concurrent program schemes and their interpretations, DAIM Rep. PB-78, Aarhus Univ., Aarhus, 1977.
[9] E. Ochmański: Regular Behaviour of Concurrent Systems. Bulletin of EATCS 27, pp. 56-67, 1985.
[10] E. Ochmański, K. Stawikowska: On closures of lexicoraphic star-free languages, Proc. of AFL 2005, pp. 227-234, Institute of Informatics, University of Szeged, Węgry, 2005.
[11] E. Ochmański, K. Stawikowska: Star-free star and trace langueages. Fundamenta Informaticae 72(1-3), pp. 323-331, 2006.
[12] E. Ochmański, K. Stawikowska: A Star Operation for Star-Free Trace Languages, Proc. of DLT 2007, LNCS 4588, pp. 337-345, Springer 2007.
[13] K. Stawikowska, E. Ochmański: On Star-Free Trace Languages and their Lexicographic Representations. Proc. of the LATA2007, pp. 541-552, Universitat Rovira i Virgilli, Hiszpania, 2007.