Krystian Kazaniecki

Analytic properties of operators on the non-reflexive spaces of smooth functions

Autoreferat

Moja rozprawa doktorska składa się z rezultatów, które uzyskałem badając własności operatorów na nierefleksywnych przestrzeniach funkcji gładkich. W dziedzinie analizy funkcjonalnej jednymi z najbardziej interesujących przykładów przestrzeni są przestrzenie funkcji analitycznych (n.p. przestrzenie Hardy'ego) i przestrzenie funkcji gładkich (n.p. przestrzenie Sobolewa, przestrzenie Biesowa). W odróżnieniu od przestrzeni Hardy'ego, gdzie własności operatorów są dobrze zbadane, nasza wiedza na temat własności operatorów w nierefleksywnych przestrzeniach Sobolewa jest wciąż niezadowalająca. Praca składa się z czterech części. Każda z nich dotyczy innej własności wcześniej wspomnianych operatorów. Poniżej opiszemy zawartość każdego z rozdziałów.

Anizotropowe nie-nierówności Ornsteina

W pierwszej części rozprawy badamy istnienie oszacowań a priori pomiędzy operatorami różniczkowymi w normie L^1. Niech T_j będą operatorami różniczkowymi ze stałymi współczynnikami, stopnia co najwyżej m, tzn.

$$T_j = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_{j,\alpha}\partial^\alpha.$$

Dla wymiaru $d \geqslant 2$ rozważamy problem istnienia poniższego oszacowania

$$\|T_1 f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sum_{j=2}^{\ell} \|T_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \tag{1}$$

ze stałą nie zależną od funkcji $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Od tego momentu "$a \lesssim b$" będzie oznaczać, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $a \leqslant cb$ jednostajnie, gdzie znaczenie słowa jednostajnie będzie jasno wynikać z kontekstu. Przez $a \simeq b$ będziemy rozumieć, że $a \lesssim b$ i $b \lesssim a$.
W refleksywnym przypadku $1 < p < \infty$ znanych jest dużo oszacowań a priori wcześniej wspomnianego typu. Na przykład z teorii operatorów Calderona-Zygmunda (eg. [19]) wynika poniższe oszacowanie

$$\|\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f\|_p \lesssim \|\Delta f\|_p$$

dla $1 < p < \infty$. W przypadku nierefleksywnym powyższa nierówność nie zachodzi. K. deLeeuw i H. Mirkil [4] znaleźli warunki konieczne i dostateczne dla przypadku $p = \infty$. Oszacowanie a priori (1) dla $p = \infty$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathscr{F}(T_0) = \sum_{j=2}^{\ell} \mathscr{F}(T_j)\,\mathscr{F}(\mu_j)\,,$$

gdzie $\mathscr{F}(\cdot)$ oznacza transformację Fouriera, a μ_j są miarami ograniczonymi. Kwestia oszacowań w przypadku $p = 1$ jest znacznie bardziej skomplikowana niż dla $p = \infty$. W swojej pracy [16] D. Ornstein rozważał przypadek $p = 1$ dla operatorów różniczkowych jednorodnych stopnia m, tzn.

$$T_j = \sum_{|\alpha|=m} a_{j,\alpha}\partial^\alpha.$$

Udowodnił, że nierówność

$$\|T_1 f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sum_{j=2}^{\ell} \|T_j f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}$$

jest spełniona tylko w przypadku trywialnym, czyli $T_1 \in \operatorname{span}\{T_j\}$. Jego dowód jest bardzo techniczy i zawiły. Ostatnio pojawiły się nowe dowody tego twierdzenia, które są łatwiejsze do zrozumienia [3], [12], [11].

Niech Λ będzie afiniczną hiperprzestrzenią w $\mathbb{R}^d$, która przecina wszystkie dodatnie półosie. Będziemy nazywali taką podprzestrzeń *wzorcem jednorodności.* Nazwiemy operator różniczkowy Λ-jednorodnym jeśli

$$T_j = \sum_{\alpha\in\Lambda} a_{j,\alpha}\partial^\alpha$$

Celem tej części pracy jest wykazanie anizotropowej wersji twierdzenia Ornsteina.

Twierdzenie. *Niech Λ będzie wzorcem jednorodności w $\mathbb{R}^d$oraz $\{T_j\}_{j=1}^{\ell}$ będą Λ-jednorodnymi operatorami różniczkowymi. Załóżmy, że wszystkie jednomiany które występują w T_j mają tą samą parzystość stopnia. Jeśli*

$$\|T_1 f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sum_{j=2}^{\ell} \|T_j f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \tag{2}$$

jest spełniona dla każdej funkcji $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, to T_1 jest kombinacją liniową pozostałych T_j.

Punkt wyjścia dowodu jest podobny jak w pracy [11]. Wprowadzamy pojęcie uogólnionej wypukłości rzędu jeden i anizotropowego gradientu ∇. Definiujemy funkcje Bellmana na odpowiedniej przestrzeni E zadaną wzorem

$$\boldsymbol{B}(e) = \inf_{\varphi\in C_0^\infty([0,1]^d)} \int\limits_{[0,1]^d} V(e + \nabla[\varphi](x))\, dx,$$

dla każdego $e \in E$. Badamy własności funkcji B i wykazujemy, że gdy $T_1 \notin \operatorname{span}\{T_j\}$ taka funkcja B nie istnieje. Ściślej mówiąc w tym wypadku funkcja B musi być jednorodna stopnia jeden, oraz wypukła ze względu na każdą współrzędną z osobna i musi zmieniać znak. Całe zagadnienie sprowadza się do wykazania poniższego twierdzenia.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest jednorodna stopnia jeden oraz wypukła ze względu na każdą współrzędną z osobna to F musi być nieujemna.*

W odróżnieniu od oryginalnego dowodu Ornsteina, nasze podejście skupia się na badaniu własności funkcji Bellmana zamiast konstruowania szczególnej funkcji przy użyciu technik martyngałowych.
Nawet w przypadku izotropowym przedstawiony tu dowód, jest jednym najprostszych istniejących. Rezultaty z tej części pracy pochodzą z artykułu [8].

Ciągłość mnożników Fouriera na jednorodnej przestrzeni Sobolewa

W trzecim rozdziale pracy badamy własności operatorów niezmienniczych na przesunięcia. Nazywamy przestrzeń $X(\mathbb{R}^n)$ niezmienniczą na przesunięcia, jeżeli dowolny operator przesunięcia jest izometrią na tej przestrzeni. Operator $T : X(\mathbb{R}^n) \to X(\mathbb{R}^n)$ nazwiemy niezmienniczym na przesunięcia jeśli dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$

$$T \circ \tau_v = \tau_v \circ T,$$

gdzie $\tau_v f(x) = f(x+v)$. Klasyczna charakteryzacja operatorów niezmienniczych na przesunięcia na $L^1(\mathbb{R}^n)$ stwierdza, że $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ jest niezmienniczy na przesunięcia wtedy i tylko wtedy gdy istnieje miara ograniczona μ taka, że $Tf = \mu * f$ dla każdej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ([20]). Transformata Fouriera skończonej miary jest funkcją ciągłą. Stąd, dla każdego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi tożsamość

$$\mathscr{F}(Tf) = m\mathscr{F}(f),$$

gdzie m jest pewną funkcją ciągłą. Niech $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń Sobolewa, tzn. uzupełnienie funkcji gładkich o zwartym nośniku na $\mathbb{R}^n$ względem normy

$$\|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Z twierdzenia Ornsteina [16] wynika, że zbiór operatorów niezmienniczych na przesunięcia na $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ jest większy niż klasa operatorów zadanych jako splot funkcji z miarami ograniczonymi [18]. Niech $T : W_1^1(\mathbb{R}^n) \to W_1^1(\mathbb{R}^n)$ będzie niezmienniczy na przesunięcia. Z ogólnej teorii operatorów niezmienniczych wynika istnienie $m \in L^\infty$ takich, że

$$\mathscr{F}(Tf) = m_T\mathscr{F}(f).$$

Jednakże $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ jest podzbiorem $L^1(\mathbb{R}^n)$. Zatem transformata Fouriera funkcji z przestrzeni Sobolewa $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją ciągłą. Stąd wynika, że wcześniej wspomniana funkcja m_T jest ciągła.
W przypadku jednorodnych przestrzeni Sobolewa problem jest delikatniejszej natury. Oznaczamy przez $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)$ przestrzeń funkcji różniczkowalnych w sensie dystrybucyjnym na $\mathbb{R}^n$ z całkowalnym gradientem. Określamy pół-normę na przestrzeni $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)$ wzorem

$$\|f\|_{\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ilorazowa przez funkcje stałe $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)/P_0$ z powyższą normą jest przestrzenią Banacha. Nadużywając notacji, oznaczamy tę przestrzeń Banacha przez $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)$.

Zwyczajowo przez $\mathscr{S}$ oznaczamy przestrzeń funkcji Schwartza. Niech T będzie operatorem niezmienniczym na przesunięcia na $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)$. Z ogólnej teorii operatorów niezmienniczych na przesunięcia wynika, że istnieje $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ takie, że

$$\mathscr{F}(Tf) = m\mathscr{F}(f) \qquad \forall f \in \mathscr{S}.$$

Takie funkcje m nazywamy mnożnikami Fouriera na $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^n)$. Oznaczamy przez $\mathscr{M}(\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d), \dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d))$ przestrzeń wszystkich takich m. Celem trzeciego rozdziału jest udowodnienie ciągłości funkcji z przestrzeni $\mathscr{M}(\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d), \dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d))$. Szczególny przypadek, gdy funkcja m jest jednorodna stopnia zero, tzn. $m(\lambda x) = m(x)$, był badany przez A. Bonami i S. Poornima [1], które wykazały, że taka funkcja m jest stała. Głównym rezultatem rozdziału trzeciego jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. *Jeżeli* $d \geqslant 2$ *i* $m \in \mathscr{M}(\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d), \dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d))$ *to* $m \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Warto zaznaczyć, że w naszym dowodzie używamy wyniku A. Bonami i B. Poornimy. Zawartość rozdziału trzeciego pochodzi z artykułu [10].

Izomorfizm między przestrzeniami wielomianów trygonometrycznych

Jednym z narzędzi użytych w dowodzie ciągłości mnożników Fouriera $m \in \mathscr{M}(\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d), \dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d))$ zaprezentowanym w rozdziale trzecim, jest oszacowanie normy kombinacji liniowej skończonych produktów Riesza. Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem liczb naturalnych takich, że $a_{k+1} > 3a_k$. Definiujemy skończony produkt Riesza wzorem

$$R_n(x) = \Pi_{k=1}^n (1 + \cos 2\pi a_k x)$$

Kluczowym oszacowaniem użytym w rozdziale trzecim jest nierówność (3) z pracy R. Latały [13], która zachodzi dla odpowiednio szybko rosnących ciągów $\{a_k\}$.

$$\|\sum_j b_j R_j\|_{L^1(\mathbb{T})} \simeq \sum_j |b_j|. \tag{3}$$

Powyższa nierówność jest wnioskiem z analogicznej nierówności dla niezależnych zmiennych losowych. Przeniesienie tej nierówności do przypadku wielomianów trygonometrycznych opiera się na obserwacji, że dla wystarczająco szybko rosnącego ciągu $\{a_k\}$, funkcje $\cos(2\pi a_k x)$ naśladują zachowanie niezależnych zmiennych losowych. Problem tkwi w znalezieniu konkretnych warunków na ciąg $\{a_k\}$ takich, że R_j zachowuje sie jak ciąg zmiennych losowych względem normy L^1. Ten problem może być rozważany na większej klasie wielomianów trygonometrycznych niż skończone produkty Riesza. W rozdziale czwartym badamy jakie są warunki wystarczające, aby zachowanie wielomianów trygonometrycznych było podobne do zachowania niezależnych zmiennych losowych. Sprecyzujmy problem, podając poniższe definicje. Dla $k \in \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{Z}^k$ niech $L^p_B(\mathbb{T}^k) = \{f \in L^p(\mathbb{T}^k) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset B\}$.

Definicja. *Dla ustalonego ciągu liczb całkowitych* $\tau = \{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i zbioru* $A \subset \mathbb{Z}$ *definiujemy zbiory* $E \subset \mathbb{Z}$ *i* $F \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *(gdzie* $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *jest grupą dualną do* $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$*), w następujący sposób:*

$$F := \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \ : \ \lambda_n \in A\},$$
$$E := \{\beta \in \mathbb{Z} \ : \ \ \beta = \sum_{k=1} \tau_k \lambda_k \textit{ for } \boldsymbol{\lambda} \in F\}.$$

W przypadku normy L^∞ poniższe twierdzenie zostało udowodnione przez Y. Meyera [15]. Głównym rezultatem rozdziału czwartego jest dowód, że warunek Meyera jest wystarczający w normie L^1.

Twierdzenie. *Dla ciągu* $\tau = \{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is skończonego zbioru* $A \subset [-r, r] \cap \mathbb{Z}$ *spełniających*

$$|\tau_{k+1}| > 2r \sum_{j=1}^{k} |\tau_j| \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\tau_j|}{|\tau_{j+1}|} < \infty,$$

operator $T := L^p_F(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) \to L^p_E(\mathbb{T})$ *zadany wzorem*

$$Tf(x) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in F} \widehat{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{2\pi i \langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \tau_j, x\rangle}$$

jest izomorfizmem przestrzeni Banacha.

W dysertacji dowodzimy także ugólnienie tego twierdzenia na przypadek wielowymiarowy. W pracy [5] M. Déchamps wykazała, że słabszy warunek

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\tau_j|^2}{|\tau_{j+1}|^2} < \infty.$$

jest wystarczający w przypadku normy L^∞. Autorka stwierdziła tam że ten warunek działa również dla normy L^1, jednak jej argument zawiera lukę. Tym niemniej wykazujemy, że warunek M. Déchamps jest konieczny, aby operator T był izomorfizmem w normie L^1. Co więcej w ostatnim podrozdziale rozdziału czwartego dajemy przykład ciągu $\{\tau_k\}$ takiego, że operator T zdefiniowany jak w powyższym twierdzeniu jest izomorfizmem dla $p = 2$ i $p = 4$ oraz nie jest izomorfizem dla $p = 3$ i $p = \frac{4}{3}$. Stąd wynika, że warunki na $\{\tau_k\}$, dla których T jest izomorfizmem na L^p nie interpolują dla $2 < p < 4$ i bez dodatkowych założeń warunek na ciąg nie przenosi sie na przestrzeń dualną. Wyniki przedstawione w rozdziale czwartym pochodzą z nie opublikowanej pracy [9]. Godnym uwagi jest fakt, że w szczególnym przypadku produktów Riesza warunki na ciąg $\{a_k\}$ są znacząco słabsze. W swojej pracy [14] R Latała, P. Nayar i T. Tkocz wykazali, że warunek $a_{k+1} > 1.2 \times 10^9\, a_k$ jest wystarczający w przypadku L^p, $1 \leqslant p < \infty$. A. Bonami wskazała prosty argument, z którego wynika, że wystarczy $a_{k+1} > 3\, a_k$ dla normy L^1 [2].

Operator śladu i jego prawy odwrotny na obszarach planarnych

W ostatnim rozdziale dysertacji badamy zachowanie operatora śladu. E. Gagliardo [6] udowodnił, że dla obszarów z gładkim brzegiem Ω operator śladu $Tr : W_1^1(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ jest surjekcją na $L^1(\partial\Omega)$. J. Petree w pracy [17] wykazał, że dla operator śladu na $W_1^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ nie istnieje ciągły, liniowy prawy odwrotny operator. W pierwszej części rozdziału używamy pokrycia Whitney'a obszaru Ω, aby w nowy sposób udowodnić twierdzenie Peetre.

Twierdzenie. *Niech Ω będzie obszarem z lipschitzowskim brzegiem będącym krzywą Jordana. Niech $Tr : W_1^1(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ będzie operatorem śladu. Wówczas nie istniej ciągły, liniowy operator $S : L^1(\partial\Omega) \to W^{1,1}(\Omega)$ taki, że $TS = Id_{L^1(\partial\Omega)}$.*

Dowód jest zaskakująco prosty. Wykorzystuje on tylko geometrię pokrycia Whitney'a oraz podstawowe własności klasycznych przestrzeni Banacha.

W drugiej części rozdziału badamy własności operatora śladu na śnieżynce von Kocha Ω_K. W [7] P. Hajłasz i O. Martio badali istnienie operatora przedłużenia śladu w przypadku przestrzeni Sobolewa $W_1^p(\Omega)$ dla $p > 1$. Scharakteryzowali oni przestrzeń śladów jako uogólnioną przestrzeń Sobolewa. W tej części dysertacji charakteryzujemy przestrzeń śladów przestrzeni $W_1^1(\Omega_K)$. Używamy gęstości restrykcji funkcji Lipchitza $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)$ w przestrzeni $W_1^1(\Omega_K)$ aby zdefiniować przestrzeń śladów. Dla funkcji gładkich operator Tr jest ich obcięciem do brzegu. Oznaczamy przez $X(\Omega_K)$ przestrzeń śladów - uzupełnienie $Tr(\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$ względem normy

$$\|g\|_{X(\Omega_K)} := \inf\{\|f\|_{W_1^1(\Omega)} : Trf = g \text{ and } f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2)\}. \tag{4}$$

Dowodzimy, że $X(\Omega)$ jest izomorficzny z przestrzenią Arensa-Eelsa względem metryki

$$d(x, y) = \inf\{|\nabla f\|_{L^1} : f \in W_1^1(\Omega),\ Trf = \mathbb{1}_{[x,y]}\}$$

określonej na brzegu, gdzie $\mathbb{1}_{[x,y]}$ jest funkcją charakterystyczną łuku $[x, y]$.

Definicja. *Niech (Y, d_Y) będzie przestrzenią metryczną. Nazywamy funkcję $f : Y \to \mathbb{R}$ molekułą jeżeli ma skończony nośnik i $\sum_{y\in Y} f(y) = 0$. Niech $x, y \in Y$. Definiujemy szczególny przykład molekuły - atom : $m_{xy} = \mathbb{1}_{\{x\}} - \mathbb{1}_{\{y\}}$. Niech m będzie molekułą, tzn. $m = \sum_{j=1}^{M} a_j m_{x_j y_j}$. Norma Arensa-Eelsa m jest równa*

$$\|m\|_{AE(d_Y)} = \inf\left\{\sum_j |a_j| d_Y(x_j, y_j) : m := \sum_j a_j m_{x_j y_j}\right\},$$

gdzie infimum bierzemy po wszystkich możliwych reprezentacjach molekuły m jako liniowej kombinacji funkcji m_{pq}. Przestrzeń Arensa-Eelsa jest uzupełnieniem zbioru molekuł względem normy $\|\cdot\|_{AE(d_Y)}$.

Używamy rozkładu Whitney'a śnieżynki von Kocha aby wykazać, że istnieje metryka d taka, że $\tilde{d} = d^\alpha$, gdzie $0 < \alpha < 1$. Istnienie prawego odwrotnego operatora do tego operatora jest konsekwencją tego faktu.

Twierdzenie. *Niech* $Tr : W_1^1(\Omega_K) \to X(\Omega_K)$ *będzie operatorem śladu, gdzie* $X(\Omega_K)$ *jest przestrzenią śladów* (4). *Istnieje ciągły, liniowy operator* $S : X(\Omega_K) \to W_1^1(\Omega_K)$ *taki, że* $Tr \circ S = Id_{X(\Omega_K)}$.

Rezultaty przedstawione w tym rozdziale są wynikiem wspólnej pracy z moim promotorem M. Wojciechowskim.

Bibliografia

[1] A. Bonami and S. Poornima. Nonmultipliers of the Sobolev spaces $W^{k,1}(\mathbf{R}^n)$. *J. Funct. Anal.*, 71(1):175–181, 1987.

[2] Aline Bonami. personal comunications.

[3] Sergio Conti, Daniel Faraco, and Francesco Maggi. A new approach to counterexamples to L^1 estimates: Korn's inequality, geometric rigidity, and regularity for gradients of separately convex functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 175(2):287–300, 2005.

[4] K. de Leeuw and H. Mirkil. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm. *Illinois J. Math.*, 8:112–124, 1964.

[5] Myriam Déchamps. Sous-espaces invariants de $L^p(G)$, G groupe abélien compact. In *Harmonic analysis*, volume 8 of *Publ. Math. Orsay 81*, pages Exp. No. 3, 15. Univ. Paris XI, Orsay, 1981.

[6] Emilio Gagliardo. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. The Mathematical Journal of the University of Padova*, 27:284–305, 1957.

[7] Piotr Hajłasz and Olli Martio. Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains. *Journal of Functional Analysis*, 143(1):221–246, 1997.

[8] Krystian Kazaniecki, Dmitriy M. Stolyarov, and Michał Wojciechowski. Anisotropic Ornstein noninequalities. *Anal. PDE*, 10(2):351–366, 2017.

[9] Krystian Kazaniecki and Michał Wojciechowski. On the equivalence between the sets of the trigonometric polynomials. *http://arxiv.org/abs/1502.05994*.

[10] Krystian Kazaniecki and MichałWojciechowski. On the continuity of Fourier multipliers on the homogeneous Sobolev spaces $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 66(3):1247–1260, 2016.

[11] Bernd Kirchheim and Jan Kristensen. Automatic convexity of rank-1 convex functions. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 349(7-8):407–409, 2011.

[12] Bernd Kirchheim and Jan Kristensen. On rank one convex functions that are homogeneous of degree one. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 221(1):527–558, 2016.

[13] Rafał Latała. L_1-norm of combinations of products of independent random variables. *Israel J. Math.*, 203(1):295–308, 2014.

[14] Rafal Latała, Piotr Nayar, and Tomasz Tkocz. Bounds on moments of weighted sums of finite riesz products. *https://arxiv.org/abs/1805.10918.*

[15] Yves Meyer. Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1(G)$, classes de Hardy et séries de Fourier lacunaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 1:499–580, 1968.

[16] Donald Ornstein. A non-equality for differential operators in the L_1 norm. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11:40–49, 1962.

[17] Jaak Peetre. A counterexample connected with Gagliardo's trace theorem. *Commentationes Mathematicae. Special Issue*, 2:277–282, 1979. Special issue dedicated to Władysław Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday.

[18] S. Poornima. On the Sobolev spaces $W^{k,1}(\mathbf{R}^n)$. In *Harmonic analysis (Cortona, 1982)*, volume 992 of *Lecture Notes in Math.*, pages 161–173. Springer, Berlin, 1983.

[19] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[20] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.