Osobliwości przekształceń harmonicznych i biharmonicznych z wartościami w zwartych rozmatiościach

Autoreferat Rozprawy Doktorskiej

Katarzyna Ewa Mazowiecka

16 października 2017

Tematyką niniejszej rozprawy doktorskiej są *minimalizujące* przekształcenia harmoniczne i biharmoniczne.

Standardowym problemem Dirichleta dla laplasjanu jest znalezienie funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zdefiniowanej na gładkim, ograniczonym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, która spełnia poniższe równanie

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{w } \Omega, \\ u = \varphi & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Bardzo znanym jest fakt, że dla danego $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie u, takie że $u \in C^\infty$. Ponadto rozwiązanie (0.1) minimalizuję całkę Dirichleta

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

w klasie funkcji $u : \Omega \to \mathbb{R}$ spełniających na brzegu $u = \varphi$ on $\partial\Omega$. Ten fakt znany jest jako zasada Dirichleta (i został udowodniony w 1940 przez H. Weyla, więcej na temat historii równania Laplasa w [3]).

Jedną z możliwości uogólnienia jest pojęcie przekształceń harmonicznych.

Niech $\mathcal{N}$ będzie gładką, zwartą rozmaitością riemannowską, bez brzegu, o wymiarze n. Dzięki twierdzeniu J. Nash'a o włożeniu [12], możemy założyć, że $\mathcal{N}$ jest izometrycznie zanurzona w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^\ell$ dla dostatecznie dużych ℓ. Dla $k \in \mathbb{N}$ i $1 \le p \le \infty$ definiujemy przekształcenia Sobolewa o wartościach w rozmaitościach jako

$$W^{k,p}(\Omega, \mathcal{N}) = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^\ell) \colon u(x) \in \mathcal{N} \text{ dla p.w. } x \in \Omega \right\},$$

z topologią dziedziczoną z topologii liniowych przestrzeni Sobolewa $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$.

Przekształcenia harmoniczne. Zajmujemy się badaniem osobliwości przekształceń $u \colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$, które minimalizują całkę Dirichleta

$$E(u) = \int_{\mathbb{B}^3} |\nabla u|^2 dx\,, \qquad u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2) \tag{0.2}$$

przy zadanym warunku brzegowym $u\,|_{\partial\mathbb{B}^3} = \varphi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$. Tutaj, $\mathbb{B}^3$ oznacza otwartą kulę o promieniu 1 w $\mathbb{R}^3$, a $\mathbb{S}^2$ oznacza dwuwymiarową sferę oraz

$$W^{1,2}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2) = \{v = (v_1,v_2,v_3) \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3,\mathbb{R}^3)\colon |v(x)| = 1 \text{ dla p.w. } x \in \mathbb{B}^3\}\,.$$

Ponadto dla przekształcenia φ w ułamkowej przestrzeni Sobolewa $H^{1/2}(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ piszemy

$$W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2) = \{v \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)\colon v\,|_{\partial\mathbb{B}^3} = \varphi \text{ w sensie śladów}\}\,.$$

Przekształcenia minimalizujące energię Dirichleta (0.2) w $W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ spełniają układ równań Eulera–Lagrange'a

$$\begin{cases} -\Delta u &= |\nabla u|^2 u \qquad \text{w } \mathbb{B}^3, \\ u\,|_{\partial\mathbb{B}^3} &= \varphi\,. \end{cases} \tag{0.3}$$

Podstawową motywacją naszych badań było osiągnięcie głębszego zrozumienia mechanizmu powstawania osobliwości rozwiązań oraz wielkości i struktury zbioru osobliwego minimalizujących przekształceń harmonicznych o zadanym warunku brzegowym. Ponadto chcieliśmy wiedzieć czy występowanie *zjawiska Ławrentiewa*, patrz poniżej (0.4), jest typowe (w dokładnym znaczeniu topologicznym). Pomimo pracy wielu ekspertów na przestrzeni ostatnich trzydziestu lat, ten temat nie jest jeszcze w pełni zrozumiały. Nasz główny wynik orzeka, z grubsza mówiąc, że nawet w przypadku kiedy nie ma topologicznego powodu, aby rozwiązanie (0.3) było nieciągłe, osobliwości u się *pojawiają* przy dowolnie małym (w znaczeniu topologii $W^{1,p}$, dla $1 \le p < 2$) zaburzeniu *dowolnego* gładkiego przekształcenia φ.

Przed formalnym sformułowaniem naszego rezultatu omówimy znane wyniki.

W przypadku kiedy $\deg\varphi \neq 0$, wszystkie rozwiązania (0.3) w $W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ oczywiście mają osobliwości, gdyż nie istnieje ciągłe przedłużenie φ na całą kulę $u\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$. Sławny wynik Schoena i Uhlenbeck [15] mówi, że zbiór osobliwy *minimalizującego* rozwiązania (0.3) składa się z punktów izolowanych. Inne twierdzenie, Almgrena i Lieba [1], orzeka, że jeśli przekształcenie brzegowe φ ma całkowalne z kwadratem pochodne na $\mathbb{S}^2$, wówczas liczba tych punktów nie przekracza stałej pomnożonej przez *energię brzegową* $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_T\varphi|^2 d\sigma$. (Nieminimalizujące przekształcenia mogę się zachowywać bardzo burzliwie: Rivière [13] udowodnił, że dla każdego niestałego warunku brzegowego φ istnieje wszędzie nieciągłe rozwiązanie (0.3).)

Jednak, nawet gdy $\varphi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ spełnia $\deg\varphi = 0$ — w związku z czym, a priori, nie ma topologicznej przeszkody, aby rozwiązanie $u \in W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ było ciągłe — przekształcenia minimalizujące energię E w $W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ mogą być osobliwe, gdyż po prostu zmniejszy to ich energię. Hardt i Lin [6] pokazali przykład gładkiego przekształcenia brzegowego $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, które jest blisko w $H^{1/2}$ do przekształcenia stałego i ma następujące własności:

(a) Każde przekształcenie v minimalizujące energię E w $W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ ma przynajmniej M punktów osobliwych (liczba M może być zadana a priori);

(b) Zjawisko Ławrentiewa zachodzi dla E w $W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$, to znaczy:

$$\mu(\widetilde{\varphi}) := \min_{W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)} E(u) < \overline{\mu}(\widetilde{\varphi}) := \inf_{W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)\cap C^0(\overline{\mathbb{B}}^3)} E(u). \tag{0.4}$$

Natychmiastowym wnioskiem (0.4) jest to, że $W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)\cap C^0(\overline{\mathbb{B}}^3,\mathbb{S}^2)$ nie jest gęste w przestrzeni $W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$.

Jak pokazali Bethuel, Brezis i Coron, patrz [2, Twierdzenie 5], dla warunku brzegowego φ o stopniu 0, zjawisko Ławrentiewa jest równoważne faktowi, który mówi o tym, że wszystkie minimalizujące przekształcenia harmoniczne w $W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ mają osobliwości. Inne przykłady niespodziewanego i sprzecznego z intuicją zachowania osobliwości minimalizujących przekształceń harmonicznych zostały podane przez Almgrena i Lieba w [1]. W szczególności, przekształcenie minimalizujące u energię E w $W^{1,2}_{\varphi}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ może mieć dużą liczbę punktów osobliwych nawet jeśli $\det \nabla_T\varphi \equiv 0$ na $\mathbb{S}^2$ i φ odwzorowuje całą sferę $\mathbb{S}^2$ na gładką krzywą γ. Abstrakt pracy [1] jest zakończony słowami: "w szczególności, osobliwości u mogą być niestabilne przy małych zaburzeniach φ."

Nasz główny wynik orzeka, że przekaz tego ostatniego zdania, *osobliwości mogą być niestabilne*, może zostać wzmocniony, zastąpiony stanowczym *osobliwości* są *niestabilne*, przynajmniej w przypadku, kiedy weźmiemy pod uwagę małe zaburzenia przekształceń brzegowych w topologiach przestrzeni $W^{1,p}$, $1 \le p < 2$. Dokładne sformułowanie tego wyniku, opublikowanego w [11], mówi:

Theorem 1. *Załóżmy, że* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ *jest dowolnym gładkim przekształceniem z* $\deg\varphi = 0$ *i* $1 \le p < 2$. *Wówczas, dla każdego* $\varepsilon > 0$ *i każdego* $M \in \mathbb{N}$ *istnieje przekształcenie* $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ *takie, że*

(i) $\deg\widetilde{\varphi} = 0$*;*

(ii) $\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$ *i* $\mathcal{H}^2\big(\{x\in\mathbb{S}^2 \colon \varphi(x)\neq\widetilde{\varphi}(x)\}\big) < \varepsilon$*;*

(iii) *energia Dirichleta* E *ma dokładnie jedno przekształcenie minimalizujące* $\widetilde{u} \in W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$*; ponadto,* $\widetilde{u}$ *ma przynajmniej* M *punktów osobliwych w* $\mathbb{B}^3$.

Łącząc powyższy wynik z wynikiem Bethuela, Brezisa i Corona, [2, Twierdzenia 5–6], dostajemy natychmiast:

Corollary 2. *Załóżmy, że* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ *i* $\deg\varphi = 0$. *Niech* $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ *będzie dane przez Twierdzenie 1. Wówczas zjawisko Ławrentiewa* (0.4) *zachodzi dla* $\widetilde{\varphi}$.

Naturalnym jest pytanie czy występowanie takich przekształceń brzegowych jest *typowe* w klasie wszystkich przekształceń stopnia 0, to znaczy, czy zbiór przekształceń $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ takich, że warunki (i) i (iii) Twierdzenia 1 są spełnione *zawiera przeliczalne przecięcie otwartych i gęstych zbiorów przekształceń stopnia 0* w $H^{1/2}$ (albo innej topologii). Pomimo pewnych starań, nie udało nam się odpowiedzieć na to pytanie.

Główną nowością Twierdzenia 1 i jego dowodu jest to, że (1) pokazujemy, że osobliwości są niestabilne,(2) w celu osiągnięcia tego, pokazujemy, jak odpowiednio połączyć zmodyfikowany pomysł Hardta i Lin, zastosowany przez nich jedynie do *stałego* warunku brzegowego $\phi\colon \mathbb{S}^2 \to \{*\}$, z ponownie zbadaną wersją metody Almgrena i Lieba instalowania nowych punktów osobliwych, patrz [1, Twierdzenie 4.3]. Pomostem między tymi dwoma składniki jest krótki topologiczny argument, który gwarantuje, że dla każdego przekształcenia brzegowego φ z $\deg\varphi = 0$

istnieją dwa punkty antypodalne $\pm q \in \mathbb{S}^2$, takie że φ odwzorowuje je w ten sam punkt na sferze $\mathbb{S}^2$, $\varphi(q) = \varphi(-q)$. Wybieramy dowolną parę takich punktów i, z grubsza mówiąc, pokazujemy jak zainstalować dużo malutkich bąbelków w φ blisko tych dwóch punktów antypodalnych, aby otrzymać nowy warunek brzegowy $\tilde{\varphi}$. W ten sposób, φ zostało zmodyfikowane tylko na dwóch małych czaszach o środkach w $\pm q \in \mathbb{S}^2$, w taki spósób, żeby (ii) w Twierdzeniu 1 zachodziło.

Wreszcie pokazujemy, że rezultat ten może być uogólniony dla przekształceń brzegowych o dowolnym stopniu

Theorem 3. *Załóżmy, że $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ jest dowolnym gładkim przekształceniem i $1 \le p < 2$. Wówczas, dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $M \in \mathbb{N}$ istnieją przekształcenia $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$, takie że*

(i) $\deg \widetilde{\varphi} = \deg \varphi$;

(ii) $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$ *i* $\mathcal{H}^2\big(\{x \in \mathbb{S}^2 \colon \varphi(x) \neq \widetilde{\varphi}(x)\}\big) < \varepsilon$;

(iii) *energia Dirichleta E ma dokładnie jedno przekształcenie minimalizujące $\widetilde{u} \in W^{1,2}_{\widetilde{\varphi}}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$; ponadto, $\widetilde{u}$ ma przynajmniej $\deg(\varphi) + M$ punktów osobliwych w $\mathbb{B}^3$.*

Przekształcenia biharmoniczne. W drugiej części niniejszej rozprawy skupiamy się na brzegowej regularności *minimalizujących* przekształceń biharmonicznych. Naszą pierwotną motywacją studiowania tego tematu, była chęć zrozumienia, w modelowym przypadku $u : B^5 \to \mathbb{S}^4$, jak zmodyfikować przekształcenie brzegowe, aby wymusić istnienie osobliwości w odpowiadającym mu przekształceniu minimalizującym. Możliwości zastosowania brzegowej regularności jest wiele: Spodziewamy się, że taki rezultat może posłużyć, aby uzyskać wyniki dotyczące niejednoznaczności przekształceń biharmonicznych jak również przykłady niejednoznaczności w klasie przekształceń minimalizujących. Ponadto, podejrzewamy, że brzegowa regularność prowadzi też do wyników, które mówią, że przekształcenia brzegowe, dla których istnieje dokładnie jedno przekształcenie minimalizujace są gęste w pewnej normie brzegowej, która jest silniejsza niż naturalna przestrzeń śladów.

W przypadku problemów drugiego rzędu wynik dotyczący brzegowej regularności dla *minimalizujących* przekształceń harmonicznych został udowodniony przez Schoena i Uhlenbeck [16], dla *minimalizujących* przekształceń p-harmonicznych[1] przez Hardta i Lina [7] oraz niezależnie przez [5]. Istnieje też warunkowy wynik dla *stacjonarnych* przekształceń harmonicznych [17], który przy założeniu brzegowej formuły monotonicznej dla przekształceń stacjonarnych daje częściową regularność na brzegu. W [14] znajduje się też wynik brzegowej regularności dla innej klasy przekształceń harmonicznych.

Głównym powodem, dla którego nie ma wyników częściowej regularności dla *stacjonarnych* przekształceń harmonicznych jest brak brzegowej formuły monotonicznej. Dowód brzegowej regularności dla *minimalizujących* przekształceń harmonicznych oraz p-harmonicznych w kluczowy sposób zależy od takiej formuły. Brzegowa formuła monotoniczna dla minimalizujących przekształceń harmonicznych jest otrzymana poprzez odbicie odpowiedniego przekształcenia

[1] przekształcenia p-harmoniczne są zdefiniowane podobnie jak przekształcenia harmoniczne, są punktami krytycznymi energii $E_p(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ wśród przekształceń z $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$.

porównawczego, patrz [16, Lemma 1.3]. Brzegowa formuła monotoniczna może być otrzymana dla dostatecznie gładkich *stacjonarnych* przekształceń harmonicznych. Według [9] taki dowód został po raz pierwszy uzyskany przez W.Y. Dinga, patrz również [4] wraz z referencjami.

Teraz przejdźmy do przekształceń biharmonicznych. Energia biharmoniczna jest dana wzorem

$$H(u) = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx.$$

Przekształcenie $u \in W^{2,2}(\Omega, \mathcal{N})$ nazywamy *minimalizującym biharmonicznym* jeśli, dla wszystkich przekształceń $v \in W^{2,2}(\Omega, \mathcal{N})$ spełniających $u - v \in W_0^{2,2}$, zachodzi

$$H(u) \leq H(v).$$

Jesteśmy zainteresowany brzegową regularnością minimalizujących przekształceń biharmonicznych, zakładamy więc, że u spełnia warunki Dirichleta, a dokładniej, niech $\varphi \in C^\infty(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ będzie dane dla $\delta > 0$, gdzie

$$\Omega_\delta = \{x \in \overline{\Omega} : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Zakładamy, że u spełnia

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)\bigg|_{\partial\Omega}, \tag{0.5}$$

gdzie ν jest wektorem normalnym.

Podobnie jak w przypadku przekształceń harmonicznych brzegowa formuła monotoniczna może zostać pokazana dla dostatecznie gładkich przekształceń biharmonicznych. Gong, Lamm i Wang pokazali biharmoniczny odpowiednik warunkowej częściowej regularności dla stacjonarnych przekształceń harmonicznych z [17] i pokazali, że przy założeniu brzegowej formuły monotonicznej stacjonarne przekształcenia biharmoniczne są gładkie poza zbiorem ko-wymiaru 4. Ze względu na techniczną złożoność i długość brzegowej formuły monotonicznej dla przekształceń biharmonicznych nie definiujemy jej dokładnej postaci w niniejszym tekście.

Pokazujemy, że warunkowy wynik częściowej regularności Gonga i współautorów może być wzmocniony do pełnej regularności przy brzegu dla przekształceń *minimalizujących.*

Theorem 4. *Niech $m \geq 5$, $\varphi \in C^\infty(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ dla pewnego $\delta > 0$, załóżmy, że $u \in W^{2,2}(\Omega, \mathcal{N})$ jest minimalizującym przekształceniem biharmonicznym, które spełnia brzegową formułę monotoniczną. Wówczas, u jest gładkie na pełnym otoczeniu $\partial\Omega$.*

Przypuszczamy, że brzegowa formuła monotoniczna jest spełniona przez wszystkie minimalizujące przekształcenia biharmoniczne o odpowiednio gładkich warunkach brzegowych.

Podobnie jak w przypadku przekształceń harmonicznych [16] i p-harmonicznych [7] pełna regularność przy brzegu jest oparta na nieistnieniu niestałych brzegowych przekształceń stycznych. Nasz wynik orzeka co następuje.

Lemma 5. *Każde minimalizujące przekształcenie biharmoniczne $u_0 \in W^{2,2}(B_1^+, \mathcal{N})$, które jest jednorodne stopnia 0 i stałe na $B_1 \cap \{x_m = 0\}$ musi być stałe.*

Rozważamy styczne przekształcenia brzegowe i dowodzimy, że powstają one jako silna granica na nieco mniejszym zbiorze, zawierającym częśc brzegu przeskalowanych przekształceń. W celu otrzymania silnej zbieżności podciągu, ciągu o którym początkowo wiemy jednynie, że jest ograniczony w $W^{2,2}$ dowodzimy odpowiednik wyniku Schevena dotyczący zwartości.

Scheven, naśladując metodę dla przekształceń harmonicznych z [9], oparł swój dowód na analizie miar defektu. My podążamy za jego strategią, modyfikując różne techniczne szczegóły, w taki sposób, żeby dowód pracował dla przekształcenia uzyskanego jako odbicie wyższego rzędu wzdłuż płaskiej części brzegu.

Nie dowodzimy, że granica u słabo zbieżnego ciągu przekształceń minimalizujących $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ jest minimalizująca. Taki wynik jest znany tylko w przypadku przekształceń w sferę $\mathcal{N} = \mathbb{S}^{\ell-1}$ (patrz [8, Lemma 3.3.]). W przypadku przekształceń harmonicznych podobny wynik jest znany dla przekształceń o wartościach w dowolnej rozmaitości. Ponieważ przekształcenia u_j i u nieco się różnią na brzegu nie możemy użyć definicji minimalizującego przekształcenia aby porównać ich energię. Narzędzie do porównywania takiej energii zostało pokazane przez Luckhausa w [10]. Niestety nie możemy użyć bezpośrednio lematu Luckhausa dla przekształceń z $W^{2,2}$. Odpowiednik tego lematu nie jest znany w przypadku przekształceń biharmonicznych.

Zamiast tego, podobnie jak [15, 16] i [7] dla nas będzie wystarczający wynik, który orzeka, że w bardzo prostych przypadkach granica ciągu *minimalizujących* przekształceń harmonicznych jest ponownie *minimalizująca.* Poprzez powtórzoną formację stycznych przekształceń brzegowych dostajemy styczne przekształcenie brzegowe, które jest w szczególnej postaci — jest niezależne od pierwszych $(m-5)$-ciu zmiennych, jednorodne stopnia 0, którego jedyna osobliwość może się pojawić w zerze. Scheven pokazał, że takie przekształcenia są minimalizujące.

References

[1] Frederick J. Almgren, Jr. and Elliott H. Lieb. Singularities of energy minimizing maps from the ball to the sphere: examples, counterexamples, and bounds. *Ann. of Math. (2)*, 128(3):483–530, 1988.

[2] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Jean-Michel Coron. Relaxed energies for harmonic maps. In *Variational methods (Paris, 1988)*, volume 4 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 37–52. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[3] Haim Brezis. The interplay between analysis and topology in some nonlinear PDE problems. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 40(2):179–201, 2003.

[4] Yun Mei Chen and Fang-Hua Lin. Evolution of harmonic maps with Dirichlet boundary conditions. *Comm. Anal. Geom.*, 1(3-4):327–346, 1993.

[5] Martin Fuchs. p-harmonic obstacle problems. III. Boundary regularity. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 156:159–180, 1990.

[6] Robert Hardt and Fang-Hua Lin. A remark on H^1 mappings. *Manuscripta Math.*, 56(1):1–10, 1986.

[7] Robert Hardt and Fang-Hua Lin. Mappings minimizing the L^p norm of the gradient. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40(5):555–588, 1987.

[8] Min-Chun Hong and Changyou Wang. Regularity and relaxed problems of minimizing biharmonic maps into spheres. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 23(4):425–450, 2005.

[9] Fang-Hua Lin. Gradient estimates and blow-up analysis for stationary harmonic maps. *Ann. of Math. (2)*, 149(3):785–829, 1999.

[10] Stephan Luckhaus. Partial Hölder continuity for minima of certain energies among maps into a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, 37(2):349–367, 1988.

[11] Katarzyna Mazowiecka and Paweł Strzelecki. The Lavrentiev gap phenomenon for harmonic maps into spheres holds on a dense set of zero degree boundary data. *Adv. Calc. Var.*, 10(3):303–314, 2017.

[12] John Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 63:20–63, 1956.

[13] Tristan Rivière. Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres. *Acta Math.*, 175(2):197–226, 1995.

[14] Christoph Scheven. Variationally harmonic maps with general boundary conditions: boundary regularity. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 25(4):409–429, 2006.

[15] Richard Schoen and Karen Uhlenbeck. A regularity theory for harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 17(2):307–335, 1982.

[16] Richard Schoen and Karen Uhlenbeck. Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 18(2):253–268, 1983.

[17] Changyou Wang. Boundary partial regularity for a class of harmonic maps. *Comm. Partial Differential Equations*, 24(1-2):355–368, 1999.