RÓŻNICZKOWALNOŚĆ ROZWIĄZAŃ ZABURZONEGO RÓWNANIA TRANSPORTU

KAMILA ŁYCZEK[1]

Niniejsza rozprawa poświęcona jest równaniu transportu w przestrzeni skończonych miar Radona $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Oznacza to, że zarówno warunek początkowy μ_0, jak i rozwiązanie $t \mapsto \mu_t$ przyjmują wartości w tej właśnie przestrzeni. Rozważane jest zaburzenie współczynników (równania liniowego jak i nieliniowego) i badana różniczkowalność rozwiązań względem parametru zaburzającego. Okazuje się, że różniczkowalności nie można uzyskać przy założeniach dotychczas stosowanych w literaturze. Jednakże wzmacniając założenia na współczynniki równania, można wykazać, że pochodna takiego rozwiązania jest elementem pewnej przestrzeni Banacha – przestrzeni predualnej do przestrzeni Höldera $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ (funkcje ograniczone, których pierwsze pochodne są ograniczone i hölderowsko ciągłe z wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$). Wynik dotyczący różniczkowalności rozwiązań względem parametru jest szczególnie ważny z punktu widzenia teorii optymalizacji i modeli populacji ze strukturą – oba zastosowania są również omówione w rozprawie.

1. MOTYWACJA

Jeden z pierwszych modeli populacji ze strukturą został wprowadzony przez McKendricka w pracy [McK26] w 1926 roku. Zadany jest on następującym układem równań różniczkowym cząstkowych

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = -w(x)u(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u(t,0) = \int_0^\infty \beta(x)u(t,x)\mathrm{d}x. \end{cases} \tag{1.1}$$

W tym modelu funkcja $u(t,x)$ oznacza liczebność osobników w wieku x w chwili czasu t. Funkcja $w(x)$ opisuje śmiertelność a $\beta(x)$ rozrodczość tej populacji – obie zależne od wieku osobników. Mając wartości współczynników w, β oraz warunek u_0 chcielibyśmy wyznaczyć liczebność $u(t,x)$. Rozszerzenie tego modelu w taki sposób, że w oraz β zależą nie tylko od wieku, ale także od liczebności całej populacji wprowadzono w pracy [GM79]. Taki nieliniowy model pozwala uwzględnić dodatkowo oddziaływanie populacji ze środowiskiem lub wzajemne oddziaływania osobników ze sobą.

Dane statystyczne dotyczące populacji mają zwykle zagregowaną postać. Na przykład wiemy ile osób urodziło się w danym roku, miesiącu, dniu, być może w ciągu konkretnej godziny czy minuty, ale nie istnieją dane z dokładnie określoną chwilą urodzenia czy śmierci. Nie ma możliwości dysponowania takimi informacjami, na przykład ze względu na ograniczoną dokładność przyrządów pomiarowych. Właśnie ze względu na zagregowaną postać danych statystycznych, do opisu populacji bardziej adekwatne od funkcji są **miary**. Skończone miary

[1] INSTYTUT MATEMATYKI STOSOWANEJ I MECHANIKI, UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Radona w modelowaniu populacji ze strukturą pierwszy raz zostały użyte w pracy [MD86]. Od tamtej pory podejście do modelowania populacji z użyciem miar stało się powszechne [GLM10, Uli12, CCGU12, PR14, EHM16, BGMC16, JW19, ALS20].

Z punktu widzenia modelowania, badanie wrażliwości równań na zaburzenia jest istotną kwestią. Ze względu na ograniczoną dokładność współczynników modelu (na przykład gdy funkcja $w(x)$ różni się być może nieznacznie od faktycznej śmiertelności populacji) oczekujemy, że rozwiązania będą odporne na niewielkie zmiany tych współczynników. Innymi słowy: chcemy, żeby rozwiązanie modelu można było *rozsądnie* szacować w stosunku do błędów. Za takie *rozsądne* szacowanie uznaje się zazwyczaj lipschitzowską zależność rozwiązań od niedokładności współczynników. Podejście takie było szeroko stosowane w odniesieniu do wielu modeli, na przykład w modelach *populacji ze strukturą* [CnCC13, GLM10, GM10, CCGU12, CGR18], *dynamiki systemów* [CnCR11, BGSW13, DHL14, FLOS18, AFM18], czy *dynamiki tłumu* [BDDR08, EHM16, GS16, GR17]. Gdyby rozwiązania danego równania były różniczkowalne względem zaburzeń, a nie tylko lipschitzowskie, to można by stosować *efektywniejsze* algorytmy rozwiązujące dane zagadnienie, a także w przypadku zagadnień optymalizacyjnych *lepsze* metody.

Można powiedzieć, że niniejsza rozprawa dotyczy uproszczonego modelu (1.1). Uproszczonego, to znaczy nie uwzględniającego warunku brzegowego $u(t, 0)$ – zagadnienie w tym wariancie sprowadza się właśnie do równania transportu. Dotychczas nie rozważano różniczkowalności rozwiązań równania transportu względem zaburzenia współczynników tego równania w przestrzeniach miar [AGS08, Thi03, PR14, Pic17]. Co więcej, jak pokazuje przykład 1 ze strony 4, przy stosowanych w literaturze założeniach, rozwiązania nie są różniczkowalne.

Równanie transportu w $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Rozważmy zagadnienie liniowego równania transportu w postaci zachowawczej

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (b(t,x)\, \mu_t) = w(t,x)\, \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{1.2}$$

gdzie przez $(\cdot)^*$ oznaczana jest przestrzeń dualna do $(\cdot)$ wyposażona w naturalnie dziedziczoną topologię; $\mathcal{C}_c^\infty$ jest przestrzenią funkcji gładkich o zwartym nośniku. Rozwiązania zagadnienia (1.2) rozpatrujemy w słabym sensie, to znaczy równość

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \big(\partial_t \varphi(t,x) + b(t,x)\, \nabla_x \varphi(t,x)\big)\, \mathrm{d}\mu_t(x)\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0,\cdot)\, \mathrm{d}\mu_0(x) = \\ = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x)\varphi(t,x)\, \mathrm{d}\mu_t(x)\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{1.3}$$

ma zachodzić dla dowolnej funkcji testującej $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$. W literaturze znaleźć można różne warianty zagadnienia (1.2): jednorodne (z zerową prawą stroną) i niejednorodne; równanie liniowe, równanie z nieliniowym polem wektorowym $b(t, x, \mu_t)$ i całkowicie nieliniowe (czyli również w zależy od μ_t). Równanie rozważane jest także w różnych przestrzeniach: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (miar probabilistycznych), $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ (nieujemne skończone miary Radona), czy $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$; z różnymi metrykami (które za chwilę pokrótce przedstawimy). Do tej pory skupiano się jednak na istnieniu, jednoznaczności, ciągłej i lipschitzowskiej zależności rozwiązań od warunków początkowych oraz współczynników równania. W zależności od pożądanej regularności rozwiązań stosowano różne metryki, których niektóre przykłady omówimy.

Po pierwsze, zauważmy, że *norma wahania całkowitego* $\|\cdot\|_{TV}$ nie wystarcza do tego, żeby uzyskać chociaż ciągłość rozwiązań. Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x b \mu_t = 0 & \text{dla } t \in [0,T], x \in \mathbb{R}, \\ \mu_0 = \delta_0, \end{cases}$$

gdzie δ_x jest deltą Diraca skoncentrowaną w x (tu zerze), a pole wektorowe b jest stałe i dodatnie. Można sprawdzić, że słabym rozwiązaniem tego zagadnienia jest $\mu_t = \delta_{bt}$. Jednak to rozwiązanie nie jest ciągłe. Otóż, jeżeli $a \neq b$, to

$$\begin{aligned} \|\delta_a - \delta_b\|_{TV} &= \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, \mathrm{d}(\delta_a - \delta_b)(x) : \|\varphi\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)} \{\varphi(a) - \varphi(b) : \|\varphi\| \leq 1\}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{C}_0$ to przestrzeń funkcji ciągłych znikających w nieskończoności. W tym przypadku supremum jest realizowane przez $\varphi \equiv 1$. Ostatecznie dla $a \neq b$ mamy $\|\delta_a - \delta_b\|_{TV} = 2$.

Metryka Wassersteina, odpowiednia do analizowania ciągłej zależności rozwiązań względem warunków początkowych, zdefiniowana jest przez

$$W_1(\mu, \nu) := \sup_{\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, \mathrm{d}(\mu - \nu)(x) : Lip(\varphi) \leq 1 \right\},$$

gdzie za φ możemy przyjąć dowolną funkcję lipschitzowską, której stała Lipschitza $Lip(\varphi)$ jest mniejsza niż 1. Istnienie, jednoznaczność i ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych wykazano dla jednorodnego, liniowego zagadnienia w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ z metryką Wassersteina (na przykład [AGS08, PR14]). Metryka W_1 nie nadaje się jednak do analizowania stabilności rozwiązań zagadnienia niejednorodnego. Dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ oraz $\mu(\mathbb{R}^d) \neq \nu(\mathbb{R}^d)$ mamy $W_1(\mu, \nu) = \infty$. Równanie niejednorodne nie zachowuje masy, to znaczy może prowadzić właśnie do sytuacji, gdy $\mu_t(\mathbb{R}^d) \neq \mu_s(\mathbb{R}^d)$. Żeby uzyskać ciągłą zależność rozwiązań równania niejednorodnego potrzebna jest inna metryka.

Żeby uporać się z tym problemem wprowadzono *uogólnioną metrykę Wassersteina* i w niej wykazano istnienie, jednoznaczność i ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych. Wykazano to zarówno dla wariantu liniowego w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ jak i nieliniowego w przestrzeni nieujemnych skończonych miar Radona $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ [PR14, PR16].

Między innymi w pracy [PR16, twierdzenie 2] wykazano, że *uogólniona metryka Wassersteina* jest równoważna metryce dualnej *bounded Lipschitz* (nazywanej także *flat metric*) zdefiniowanej następująco

$$\rho_F(\mu, \nu) := \sup_{\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, \mathrm{d}(\mu - \nu)(x) : \|\varphi\|_{W^{1,\infty}} \leq 1 \right\}.$$

Jak się okazuje, przestrzeń dualna do $W^{1,\infty}$ nadaje się dość naturalnie do analizy równania transportu w przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. W tej metryce wykazana została lipschitzowska zależność rozwiązań od współczynników modelu, patrz [GM10]. Wynik ten został rozszerzony także na nieliniowy model populacji ze strukturą, zbliżony do modelu (1.1). Konstruktywny dowód tego, że rozwiązanie μ_t modelu jest lipschitzowskie względem współczynników, dostarczył narzędzi ułatwiających badanie zbieżności schematów numerycznych dla tego typu zagadnień [GJMU14].

Naturalnym kolejnym krokiem w badaniu regularności rozwiązań równań różniczkowych, po uzyskaniu lipschitzowskiej zależności, jest **różniczkowalność rozwiązań względem zaburzenia**. I jak już zostało wspomniane, różniczkowalność nie była dotychczas rozważana dla tego typu równania. Okazuje się, że wcześniejsze założenia nie zapewniają różniczkowalności rozwiązań, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 1. *Rozważmy jednowymiarowe ($x \in \mathbb{R}$) zagadnienie zaburzonego równania transportu*

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \partial_x((1+h)\,\mu_t^h) = 0 \\ \mu_0^h = \delta_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Parametr h traktujemy jak zaburzenie pola wektorowego $b \equiv 1$. Rozwiązaniem tego zagadnienia jest $\mu_t^h = \delta_{(1+h)\,t}$. Zauważmy, że odwzorowanie $h \mapsto \mu_t^h$ jest lipschitzowskie w metryce ρ_F

$$\rho_F\left(\mu_t^h, \mu_t^{\overline{h}}\right) = \rho_F\left(\delta_{(1+h)\,t}, \delta_{(1+\overline{h})\,t}\right) \le \left|h - \overline{h}\right| t.$$

Jednakże nie jest ono różniczkowalne. Jeżeli pochodna istnieje, to jest granicą $\lim_{h\to 0} \frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$. Jeżeli natomiast $\frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$ jest zbieżny, to jest ciągiem Cauchy'ego w metryce ρ_F. Obliczamy

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{\mu_t^{h_1} - \mu_t^0}{h_1} - \frac{\mu_t^{h_2} - \mu_t^0}{h_2}\right)(x) = \frac{\varphi((1+h_1)\,t) - \varphi(t)}{h_1} - \frac{\varphi((1+h_2)\,t) - \varphi(t)}{h_2}. \tag{1.5}$$

Weźmy następującą funkcję $\varphi(x)$ klasy $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x-t| - 1 & \text{dla } |x-t| \le 1, \\ 0 & \text{dla } |x-t| > 1. \end{cases}$$

Jeżeli wybierzemy $h_1 > 0$ oraz $h_2 < 0$, otrzymamy $\rho_F\left(\frac{\mu_t^{h_1} - \mu_t^0}{h_1}, \frac{\mu_t^{h_2} - \mu_t^0}{h_2}\right) \ge 2t$. W takim razie $\frac{\mu_t^h - \mu_t^0}{h}$ nie jest zbieżny.

Przykład ten pokazuje, że funkcje testujące powinny być bardziej regularne niż $W^{1,\infty}$.

2. Główne wyniki

Okazuje się, że wystarczającą regularnością funkcji testujących są funkcje klasy $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ – przestrzeń funkcji ograniczonych, których pierwsza pochodna także jest ograniczona i hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$. Jest to przestrzeń Banacha wyposażona w normę

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla_x f(x)| \; + \sup_{\substack{x_1 \ne x_2 \\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^d}} \frac{|\nabla_x f(x_1) - \nabla_x f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}. \tag{2.6}$$

Przestrzeń $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dziedziczy normę przestrzeni $(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*$. Wreszcie przestrzenią, w której spodziewamy się istnienia pochodnych rozwiązań jest

$$\mathcal{Z} := \overline{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}^{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*},$$

czyli przestrzeń Banacha wyposażona w normę $\|\cdot\|_{(\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))^*}$. Przestrzeń $\mathcal{Z}$ jest przestrzenią predualną do $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, to znaczy przestrzeń $\mathcal{Z}^*$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Własności przestrzeni $\mathcal{Z}$ mogą stanowić obiekt niezależnych, od rozwiązań równania transportu, zainteresowań.

Równanie liniowe. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (1.2), gdy warunek początkowy jest miarą probabilistyczną został wykazany w [Man07]. Wprowadźmy następujące zaburzenia

$$b^h(t,x) := b_0(t,x) + h\, b_1(t,x) \qquad \text{oraz} \qquad w^h(t,x) := w_0(t,x) + h\, w_1(t,x), \tag{2.7}$$

gdzie $h \in \mathbb{R}$ jest bliskie zeru. Zaburzone zagadnienie, odpowiadające (1.2), ma postać

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot \big(b^h(t,x)\, \mu_t^h\big) = w^h(t,x)\, \mu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{2.8}$$

Poniższe twierdzenie jest jednym z dwóch głównych wyników rozprawy.

Twierdzenie 2.1. *Niech pole* $(t \mapsto b_i(t,\cdot))$ *będzie klasy* $\mathcal{C}_b\big([0,+\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)\big)$ *oraz funkcja skalarna* $w_i(t,x)$ *będzie* $\mathcal{C}_b\big([0,+\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})\big)$ *dla* $i = 0, 1$. *Niech* μ_t^h *spełnia* (2.8) *w słabym sensie, ze współczynnikami zdefiniowanymi przez* (2.7). *Wtedy odwzorowanie*

$$(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \ni h \mapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

jest różniczkowalne w $\mathcal{Z}$, *innymi słowy pochodna* $\partial_h \mu_t^h$ *należy do przestrzeni* $\mathcal{Z}$.

Dowód sprowadza się do wykazania, że granica odpowiednich ilorazów różnicowych jest elementem przestrzeni $\mathcal{Z}$. Przy okazji dowodu twierdzenia 2.1 podajemy pewne nowe własności przestrzeni predualnej do $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d)$, które mogą być obiektem niezależnych badań.

Powyższy wynik ukazał się w [GHŁŚ19] w nieco słabszej wersji. W [GHŁŚ19] rozważane było zaburzenie tylko pola wektorowego, natomiast funkcja w nie była zaburzona. Powyższe twierdzenie mówi o istnieniu pochodnej w punkcie, natomiast kolejny wynik dotyczy ciągłej różniczkowalności. Przez $\mathcal{C}_\omega([0,\infty); X)$ oznaczamy przestrzeń funkcji ciągłych o wartościach w X wraz z normą $\sup_{t\geq 0} \omega(t) \|\cdot\|_X$, gdzie $\omega(t) > 0$ dla każdego $t \in [0,\infty)$. Innymi słowy, $\mathcal{C}_\omega([0,\infty); X)$ to przestrzeń funkcji ciągłych o wzroście co najwyżej $1/\omega(t)$ – funkcja $\omega(t)$ nazywana jest *wagą*.

Twierdzenie 2.2. *Niech pole* $(t \mapsto b_i(t,\cdot))$ *będzie klasy* $\mathcal{C}_b\big([0,+\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)\big)$ *oraz funkcja skalarna* $w_i(t,x)$ *będzie* $\mathcal{C}_b\big([0,+\infty); \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})\big)$ *dla* $i = 0, 1$. *Niech* μ_t^h *spełnia* (2.8) *w słabym sensie, ze współczynnikami zdefiniowanymi przez* (2.7). *Wtedy odwzorowanie*

$$\big(h \mapsto (t \mapsto \mu_t^h)\big) \quad \textit{jest klasy} \quad \mathcal{C}^1\left((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2});\ \mathcal{C}_{\widehat{\omega}}([0,\infty); \mathcal{Z})\right),$$

gdzie waga $\widehat{\omega}(t)$ *jest rzędu* $\mathcal{O}(\frac{1}{t}\exp(-Ct))$.

Dowód przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.1 z tą różnicą, że teraz konieczne będą także oszacowania dla $t \mapsto \mu_t^h$ względem czasu. Właśnie do niwelowania „nadmiernego" wzrostu rozwiązań μ_t^h względem czasu wykorzystana zostanie waga $\widehat{\omega}(t)$.

Równanie nieliniowe. Publikacja przedstawiająca poniższy wynik jest obecnie w trakcie przygotowań [GHŁ]. Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot \Big(v(\mu_t)\ \mu_t \Big) = m(\mu_t)\ \mu_t & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0} = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{2.9}$$

gdzie pole wektorowe ma postać $v(\mu_t) := v\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_v(y,x)\, \mathrm{d}\mu_t(y) \right)$ i analogicznie funkcja skalarna $m(\mu_t) := m\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_m(y,x)\, \mathrm{d}\mu_t(y) \right)$. Jądro operatora $(x \mapsto K_u(\cdot,x))$ należy do przestrzeni $\mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$ dla $u \in \{v, m\}$, gdzie $K_v, K_m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Podobna forma pola wektorowego jest używana w kontekście modelowania *procesu dostaw* (ang. supply chain). W pracach [ADR06, AMR$^+$06] rozważano jednorodne, nieliniowe równanie transportu z polem wektorowym postaci $v(u) := \int_0^1 u(x)\, \mathrm{d}x$.

W pracy [CPT11] wykorzystano jednorodne, nieliniowe równanie transportu na miarach do modelowania *dynamiki tłumu* (ang. crowd dynamics). Autorzy pracy przyjęli następującą postać pola wektorowego

$$v(\mu_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}} K(|y-x|)\, g(\alpha_{xy})\, \frac{y-x}{|y-x|}\, \mathrm{d}\mu_t(y),$$

gdzie o funkcji $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ założono, że ma zwarty nośnik i opisuje w jaki sposób jednostka w punkcie x reaguje na swoich sąsiadów, którzy znajdują się w punkcie y. Wartość α_{xy} to kąt pomiędzy wektorem $y - x$ oraz wektorem opisującym kierunek, w którym dotychczas zmierzała jednostka w x. Fakt, że człowiek przemieszczając się nie ma oczu dookoła głowy i reaguje na otoczenie tylko w obrębie określonego kąta widzenia, opisuje funkcja $g : [-\pi, \pi] \to [0,1]$.

Rozważmy następujące zaburzenia zagadnienia (2.9)

$$\begin{aligned} v^h(\mu_t) &:= v_0\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_0}(y,x)\, \mathrm{d}\mu_t(y) \right) + h\, v_1\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{v_1}(y,x)\, \mathrm{d}\mu_t(y) \right), \\ m^h(\mu_t) &:= m_0\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_0}(y,x) \mathrm{d}\mu_t(y) \right) + h\, m_1\left(\int_{\mathbb{R}^d} K_{m_1}(y,x)\, \mathrm{d}\mu_t(y) \right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Gdy uwzględnimy powyższe zaburzenia, zagadnienie nieliniowe przyjmuje postać

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t^h + \nabla_x \cdot \left(v^h(\mu_t^h)\, \mu_t^h \right) = m^h(\mu_t^h)\, \mu_t^h & \text{na } (\mathcal{C}_c^\infty([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d))^*, \\ \mu_{t=0}^h = \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{2.11}$$

Następujący rezultat jest trzecim głównym wynikiem niniejszej rozprawy i stanowi naturalne rozszerzenie twierdzenia 2.2.

Twierdzenie 2.3. *Załóżmy, że dla* $i = 0, 1$ *zachodzi*

- **A1.:** $x \mapsto v_i(\cdot)(x) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$,
- **A2.:** $x \mapsto m_i(\cdot)(x) \in \mathcal{C}^{3+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$,
- **A3.:** $(x \mapsto K_{v_i}(\cdot,x)), (x \mapsto K_{m_i}(\cdot,x)) \in \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^d))$.

Niech μ_t^h będzie rozwiązaniem w słabym sensie zagadnienia (2.11) *ze współczynnikami zadanymi przez* (2.10). *Wtedy odwzorowanie* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \ni h \mapsto \mu_t^h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *jest różniczkowalne w* $\mathcal{Z}$*, to znaczy* $\partial_h \mu_t^h \in \mathcal{Z}$. *Ponadto zachodzi*

$$h \mapsto (t \mapsto \mu_t^h) \in \mathcal{C}^1\Big((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}); \mathcal{C}_{\tilde{\omega}}\big([0,\infty); \mathcal{Z}\big)\Big),$$

gdzie waga $\tilde{\omega}$ *jest zadana przez* $\tilde{\omega}(t) := \min\big\{\tilde{\omega}_1(t),\ \tilde{\omega}_2(t)\big\}$ *oraz*

$$\tilde{\omega}_1(t) = \begin{cases} e^{-g_1 t} & \textit{dla } 0 \leq t < 1, \\ e^{-g_2 t} & \textit{dla } 1 \leq t < 2, \\ \cdots & \\ e^{-g_N t} & \textit{dla } N-1 \leq t < N, \\ \cdots & \end{cases} \qquad \tilde{\omega}_2(t) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\exp(-Ct)\right),$$

stała g_N *jest dodatnia dla każdego* $N \in \mathbb{N}$*, a stała* C *jest również dodatnia.*

3. Struktura rozprawy

W rozdziale 2 wprowadzamy narzędzia niezbędne do tego, żeby móc analizować miarowe równania transportu. Na początek przytaczamy klasyczne twierdzenia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych, jak twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności. Następnie definiujemy pojęcie potoku pola wektorowego oraz metodę charakterystyk, za pomocą której można rozwiązywać równania transportu w *klasycznym* sensie. Rozważamy własności klasycznych rozwiązań i wprowadzamy pojęcie *słabego* rozwiązania.

W rozdziale 3.1 poświęconym teorii miary, poza omówieniem własności przestrzeni $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, przedstawiamy narzędzia potrzebne do tego, żeby omówić wcześniejsze wyniki dotyczące miarowego równania transportu. Tymi narzędziami są w szczególności metryki W_1, ρ_F oraz uogólniona metryka Wassersteina, które przedstawiamy wraz z licznymi przykładami. Wreszcie na końcu tego rozdziału pada formalna definicja rozwiązania transportu w przestrzeni skończonych miar Radona.

Rozdział 3.2 jest przeglądem literatury i znanych wyników. Część z nich zostanie wykorzystana w dowodach głównych twierdzeń tej rozprawy. Przedstawiamy formułę reprezentacyjną zagadnienia liniowego; lipschitzowską zależność rozwiązań od warunków początkowych dla równania liniowego oraz nieliniowego. W ostatniej części tego rozdziału omawiamy pokrótce nieco inne od przyjętego w rozprawie podejście do badania regularności rozwiązań. Podejście to pozwala, by przy pewnych dodatkowych założeniach co do struktury pola wektorowego, osłabić założenia o jego regularności i wtedy badać regularność rozwiązań (za pomocą potoków gradientowych).

W rozdziale 4 zaprezentowane są dwa pierwsze główne wyniki tej rozprawy, a mianowicie dowód twierdzenia 2.1 oraz twierdzenia 2.2. Dodatkowo w rozdziale 4.1 znajduje się, nieco szersze niż to konieczne do dowodu twierdzenia, przedstawienie przestrzeni $\mathcal{Z}$. W tym rozdziale jest także analizowana zwagowana przestrzeń $\mathcal{C}_\omega([0,\infty); \mathcal{Z})$. W rozdziale 5 przedstawiony jest dowód twierdzenia 2.3.

W rozdziale 6 omawiamy szerzej możliwe zastosowania głównych wyników. Dokładniej: modele populacji ze strukturą oraz zagadnienia optymalizacyjne. Na końcu tego rozdziału wskazane są możliwe dalsze perspektywy badań.

W dodatku A znajduje się spis notacji używanej w rozprawie, a w dodatku B pewne dodatkowe fakty i twierdzenia pomocne w lekturze rozprawy.

LITERATURA

[ADR06] D. Armbruster, P. Degond, and C. Ringhofer. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(3):896–920, 2006.

[AFM18] L. Ambrosio, M. Fornasier, and M. Morandotti. Spatially inhomogeneous evolutionary games. *ArXiv:1805.04027v1*, 2018.

[AGS08] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient Flows In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Birkhäuser, 2008.

[ALS20] A. S. Ackleh, R. Lyons, and N. Saintier. Finite difference schemes for a structured population model in the space of measures. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 17(mbe-17-01-039):747, 2020.

[AMR$^+$06] D. Armbruster, D. E. Marthaler, C. Ringhofer, K. Kempf, and T.-C. Jo. A continuum model for a re-entrant factory. *Operations Research*, (5):933–950, 2006.

[BDDR08] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, and M. Rascle. A model for the formation and evolution of traffic jams. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 187(2):185–220, 2008.

[BGMC16] J.-E. Busse, P. Gwiazda, and A. Marciniak-Czochra. Mass concentration in a nonlocal model of clonal selection. *Journal of Mathematical Biology*, 73(4):1001–1033, 2016.

[BGSW13] Y. Brenier, W. Gangbo, G. Savaré, and M. Westdickenberg. Sticky particle dynamics with interactions. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 99(5):577–617, 2013.

[CCGU12] J. A Carrillo, R. M. Colombo, P. Gwiazda, and A. Ulikowska. Structured populations, cell growth and measure valued balance laws. *Journal of Differential Equation*, 252:3245–3277, 2012.

[CGR18] R. M. Colombo, P. Gwiazda, and M. Rosińska. Optimization in structure population models through the Escalator Boxcar Train. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 24(1):377–399, 2018.

[CnCC13] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, and S. Cuadrado. Measure solutions for some models in population dynamics. *Acta Applicandae Mathematicae*, 123:141–156, 2013.

[CnCR11] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, and J. Rosado. A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(3):515–539, 2011.

[CPT11] E. Cristiani, B. Piccoli, and A. Tosin. Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics. *Multiscale Modeling & Simulation. A SIAM Interdisciplinary Journal*, 9(1):155–182, 2011.

[DHL14] P. Degond, M. Herty, and J.-G. Liu. Flow on sweeping networks. *Multiscale Modeling & Simulation. A SIAM Interdisciplinary Journal*, 12(2):538–565, 2014.

[EHM16] J. H. M. Evers, S. C. Hille, and A. Muntean. Measure-valued mass evolution problems with flux boundary conditions and solution-dependent velocities. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(3):1929–1953, 2016.

[FLOS18] M. Fornasier, L. Lisini, C. Orrieri, and G. Savaré. Mean-field optimal control as gamma-limit of finite agent controls. *ArXiv:1803.04689v1*, 2018.

[GHŁ] P. Gwiazda, S. C. Hille, and K. Łyczek. Differentiability in perturbation parameter of measure solution to non-linear perturbed transport equation. *In preparation*.

[GHŁŚ19] P. Gwiazda, S. C. Hille, K. Łyczek, and A. Świerczewska-Gwiazda. Differentiability in perturbation parameter of measure solutions to perturbed transport equation. *Kinetic & Related Models*, 12:1093–1108, 2019.

[GJMU14] P. Gwiazda, J. Jabłoński, A. Marciniak-Czochra, and A. Ulikowska. Analysis of particle methods for structured population models with nonlocal boundary term in the framework of bounded Lipschitz distance. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(6):1797–1820, 2014.

[GLM10] P. Gwiazda, T. Lorenz, and A. Marciniak-Czochra. A nonlinear structured population model: Lipschitz continuity of measure-valued solutions with respect to model ingredients. *Journal of Differential Equations*, 248:2703–2735, 2010.

[GM79] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy. Some simple models for nonlinear age-dependent population dynamics. *Mathematical Biosciences. An International Journal*, 43(3-4):199–211, 1979.

[GM10] P. Gwiazda and A. Marciniak-Czochra. Structured population equations in metric spaces. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 7:733–773, 2010.

[GR17] P. Goatin and F. Rossi. A traffic flow model with non-smooth metric interaction: well-posedness and micro-macro limit. *Communications in Mathematical Sciences*, 15(1):261–287, 2017.

[GS16] P. Goatin and S. Scialanga. Well-posedness and finite volume approximations of the LWR traffic flow model with non-local velocity. *Networks and Heterogeneous Media*, 11(1):107–121, 2016.

[JW19] J. Jabłoński and D. Wrzosek. Measure-valued solutions to size-structured population model of prey controlled by optimally foraging predator harvester. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 29(9):1657–1689, 2019.

[Man07] S. Maniglia. Probabilistic representation and uniqueness results for measure-valued solutions of transport equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 87(6):601–626, 2007.

[McK26] A. McKendrick. Applications of mathematics to medical problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 40:98–130, 1926.

[MD86] J. A. Metz and O. Diekmann. *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

[Pic17] B. Piccoli. Measure differential equations. *ArXiv:1708.09738v1*, 2017.

[PR14] B. Piccoli and F. Rossi. Generalized Wasserstein distance and its application to transport equations with source. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 211(6):335–358, 2014.

[PR16] B. Piccoli and F. Rossi. On properties of the generalized Wasserstein distance. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 222(3):1339–1365, 2016.

[Thi03] H. R. Thieme. *Mathematics in Population Biology*. Princeton University Press, 2003.

[Uli12] A. Ulikowska. An age-structured two-sex model in the space of Radon measures: well posedness. *Kinetic and Related Models*, 5(4):873–900, 2012.