

Schematy Hilberta punktów i ich zastosowania

Joachim Jelisiejew

Schemat Hilberta punktów $\mathcal{Hilb}_{pts}(X)$ na schemacie X jest przestrzenią moduli skończonych podschematów tej podrozmaitości. Intuicyjnie dla afinicznego X , schemat Hilberta punktów to *jedyna naturalna* struktura przestrzeni topologicznej na zbiorze skończonych \mathbb{k} -algebr prezentowanych jako ilorazy ustalonego pierścienia $H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Przykładowo, dla $X = \mathbb{A}^n$ rozważamy ilorazy pierścienia wielomianów $H^0(\mathbb{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) = \mathbb{k}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Algebra oznacza tutaj łączną przemienną algebrę z jedyneką nad ustalonym ciałem \mathbb{k} . Algebra A jest *skończona*, jeżeli $\dim_{\mathbb{k}} A < \infty$. Sformułowanie *przestrzeń moduli* znaczy, że odwzorowania $T \rightarrow \mathcal{Hilb}_{pts}(X)$ są w bijekcji z podschematami $\mathcal{Z} \subset T \times X$ takimi, że $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow T$ jest skończonym i płaskim morfizmem.

Stopniem skończonej algebry A nazywamy liczbę $\dim_{\mathbb{k}} A$. Stopień jest stałą funkcją na spójnych składowych $\mathcal{Hilb}_{pts}(X)$, zatem schemat Hilberta rozpada się na sumę rozłącznych schematów

$$\mathcal{Hilb}_{pts}(X) = \coprod_{r=1}^{\infty} \mathcal{Hilb}_r(X), \quad (1)$$

gdzie $\mathcal{Hilb}_r(X)$ parametryzuje algebry stopnia r . Przykładowo $\mathcal{Hilb}_1(X) = X$.

Poniżej zakładamy, że X jest spójną i gładką rozmaitością quasi-rzutową. W tym przypadku schematy $\mathcal{Hilb}_r(X)$ są spójne, lecz niewiele wiadomo o ich geometrii, pomimo, że jest ona intensywnie badana [BBS13, DS09, Hai01, HS04, EV10]. Jest zadziwiające, że choć od momentu skonstruowania schematów Hilberta punktów (1960, Grothendieck [Gro95]) minęło 57 lat i wiele prac naukowych (m.in., zastosowania w kombinatoryce, w algebrze przemiennej, przy konstruowaniu innych przestrzeni moduli, patrz [Jel17, Podrozdział 1.4]), ich własności są wciąż słabo poznane. Centralnym pytaniem rozważanym w tej pracy jest:

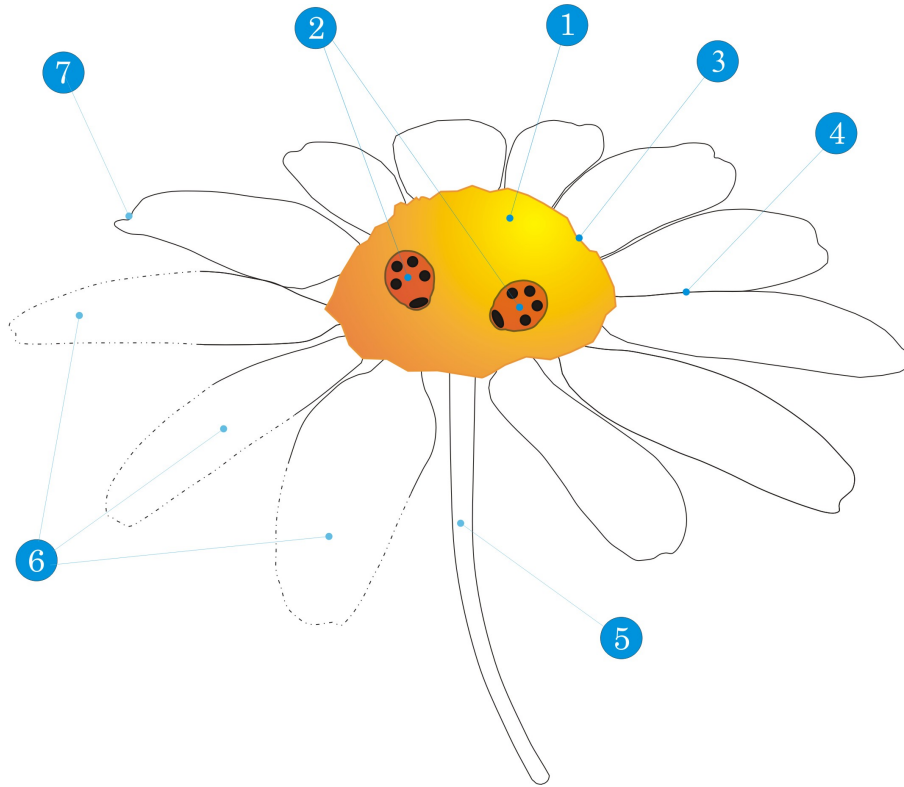
Jakie są spójne składowe schematów $\mathcal{Hilb}_r(X)$? Jakie są przecięcia i osobliwości tych składowych?

Rozważmy podzbiór $\mathcal{Hilb}_r^{\circ}(X) \subset \mathcal{Hilb}_r(X)$ złożony ze schematów gładkich. Podzbiór ten jest otwarty, więc jego domknięcie jest składową nieprzywiedlną $\mathcal{Hilb}_r(X)$, którą nazywamy *składową wygładzalną* i oznaczamy $\mathcal{Hilb}_r^{sm}(X)$. Schematy skończone odpowiadające punktom składowej $\mathcal{Hilb}_r^{sm}(X)$ nazywamy *wygładzalnymi w X* . Następujące twierdzenie mówi, że wygładzalność danego schematu nie zależy od wyboru zanurzenia w (gładki) schemat X .

Twierdzenie 2 ([Jel17, Theorem 1.4]). *Niech R będzie podschematem skończonym schematu gładkiego X . Następujące warunki są równoważne:*

1. R jest abstrakcyjnie wygładzalny,
2. R jest wygładzalny w X ,
3. każda spójna składowa R jest abstrakcyjnie wygładzalna,
4. każda spójna składowa R jest wygładzalna w X .

W szczególności, przy badaniu wygładzalności można zawsze rozważać $X = \mathbb{P}^n$ lub $X = \mathbb{A}^n$. W tych przypadkach, geometrię schematu Hilberta można zilustrować następująco.



Rysunek 1: „Stokrotka Hilbertowa”. Składowe schematu $\mathcal{Hilb}_r(X)$, dla X gładkiego. Kwiat, płatki i łodyga odpowiadają nieprzywiedlnym składowym.

- 1 Składowa wygładzalna jest uzwarceniem przestrzeni konfiguracji r -tek punktów na X . Ma ona wymiar $r(\dim X)$. Dla małych r jest to jedyna składowa, porównaj Twierdzenie 3 w przypadku podschematów Gorensteina.
- 2 Punkty schematu Hilberta odpowiadają skończonym podschematom X . Ogólne punkty na składowej wygładzalnej („biedronki”) odpowiadają krotkom punktów na X (o ile $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$). Zatem wszystkie punkty wygładzalne są granicami krotek punktów, stąd nazwa *wygładzalne*.
- 3 Każda składowa przecina składową wygładzalną, patrz [Ree95]. Opisanie przecięcia jest zwykle bardzo subtelne, patrz Twierdzenie 5.
- 4 Jest tylko jeden znany przykład, w którym przecięcie składowych nie zawiera się w składowej wygładzalnej [EV10].
- 5 Znanych jest tylko kilka składowych o wymiarze mniejszym niż wymiar składowej wygładzalnej, patrz [IE78].
- 6 Jest znanych wiele przykładów podrozmaitości w $\mathcal{Hilb}_r(X)$, które mają wymiar większy niż $r(\dim X)$, zatem nie są zawarte w składowej wygładzalnej. Jednakże składowe zawierające te podrozmaitości są zwykle nieznanne.
- 7 Niewiele wiadomo o geometrii i osobliwościach składowych różnych od składowej wygładzalnej. Przykładowo, w przypadku X wymiernego nieznanne są przykłady składowych niewymiernych.

Oczywiście, geometria schematu Hilberta byłaby najprostsza, gdyby wszystkie punkty były wygładzalne, tj. gdyby na Rysunku 1 nie było liści czy łodygi. Nie jest to prawdą w ogólności [CEVV09, Iar72]. Jednym z głównych wyników naszej pracy jest stwierdzenie o wygładzalności schematów Gorensteina. (Przypomnijmy, że schemat jest *Gorensteina* jeżeli jego snop kanoniczny jest wiązką. Zbiór schematów Gorensteina stopnia r jest otwarty w $\mathcal{Hilb}_r(X)$ i oznaczany przez $\mathcal{Hilb}_r^{Gor}(X)$).

Twierdzenie 3 ([CJN15], [Jel17, Theorem 1.5]). *Niech R będzie skończonym schematem Gorensteina o długości co najwyżej 14. Wtedy R jest wygładzalny lub R jest nieprzywiedlny i odpowiada lokalnej algebrze o funkcji Hilberta $(1, 6, 6, 1)$. W szczególności, wszystkie schematy długości co najwyżej 13 są wygładzalne.*

Twierdzenie 3 interpretuje się jako częściową klasyfikację algebr Gorensteina. Ma ono następujące zastosowanie w teorii równań rozmaitości siecznych, która to teoria ma zastosowania np. w przesyłaniu sygnałów [Lan12]. Ograniczmy się na chwilę do ciał \mathbb{k} algebraicznie domkniętych charakterystyki zero. Rozważmy przestrzeń liniową P_1 z bazą x_0, \dots, x_n . Przypomnijmy, że d -te zanurzenie Veronese $\nu_d: \mathbb{P}\langle x_0, \dots, x_n \rangle \rightarrow \mathbb{P}(P_d)$, przekształca formę $[F] \in \mathbb{P}\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ na $[F^d] \in \mathbb{P}(P_d)$, gdzie $P_d = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]_d$. Definiujemy r -tą rozmaitość siecznych d -tego zanurzenia Veronese jako

$$\sigma_r(\nu_d(\mathbb{P}^n)) := \overline{\left\{ \sum_{i=1}^r \ell_i^d \mid \ell_i \in \langle x_0, \dots, x_n \rangle \right\}} \subset P_d,$$

gdzie domknięcie jest wzięte w topologii Zariskiego (dla $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ można równoważnie wziąć topologię Euklidesową). Dla formy $[F] \in P_d$, oznaczmy przez $\text{Diff}(F)_s$ przestrzeń tych wyższych pochodnych cząstkowych F , które mają stopień s , na przykład $\text{Diff}(x_0^3 x_1)_2 = \langle x_0 x_1, x_0^2 \rangle$. Z półciągłości wynika, że każdy element $[F] \in \sigma_r(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ spełnia, dla ustalonego s , warunek $\dim_{\mathbb{k}} \text{Diff}(F)_s \leq r$.

Twierdzenie 4 ([Jel17, Twierdzenie 1.8]). *Niech r, d będą liczbami naturalnymi dodatnimi takimi, że $r < 14$ i $d \geq 2r$. Wtedy $\sigma_r(\nu_d(\mathbb{P}^n))$ składa się dokładnie z klas tych form F , dla których*

$$\text{Diff}(F)_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \leq r.$$

Warto zauważyć, że w ogólności, dla dowolnego r i $d \geq 2r$, zbiór zadany warunkiem

$$\text{Diff}(F)_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \leq r$$

jest *rozmaitością kaktusową*, patrz [BB14]. Twierdzenie 3 stosuje się w dowodzie Twierdzenia 4 by pokazać, że rozmaitości sieczna i kaktusowa pokrywają się dla $r < 14$. Teza Twierdzenia 4 jest prawdziwa ogólniej, dla algebraicznie domkniętych ciał charakterystyki $\neq 2, 3$, patrz [BJ17].

Twierdzenie 3 orzeka, że prawie wszystkie schematy Gorensteina długości 14 są zawarte w składowej wygładzalnej. Istnieją jednak schematy niewygładzalne. Tworzą one (po domknięciu w $\mathcal{Hilb}_r^{Gor}(X)$) nieprzywiedlną składową

$$\mathcal{H}_{1661} \subset \mathcal{Hilb}_{14}^{Gor}(\mathbb{A}^6).$$

Składowa ta jest interesującą rozmaitością algebraiczną, bowiem jest ona naturalnie zdefiniowana, np. jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy automorfizmów X . Okazuje się, że dla

$X = \mathbb{A}^6$ jest ona ściśle związana z przestrzenią hiperpowierzchni stopnia trzy w \mathbb{P}^5 (ang. *cubic fourfolds*) i dywizorem Ilieva-Ranestada (patrz [IR01, RV13]) w tej przestrzeni.

Twierdzenie 5 ([Jel17, Theorem 1.6]). *Niech \mathbb{k} będzie ciałem charakterystyki zero. Składowa \mathcal{H}_{1661} jest 21-wymiarową wiązką wektorową nad otwartym podzbiorem przestrzeni hiperpowierzchni stopnia 3 w \mathbb{P}^5 ($\simeq \mathbb{P}(\text{Sym}^3 \mathbb{k}^6)$). W szczególności, $\dim \mathcal{H}_{1661} = 76$. Przecięcie \mathcal{H}_{1661} ze składową wygładzalną jest przeciwobrazem dywizora Ilieva-Ranestada.*

Prócz rozważania wszystkich schematów skończonych w X , można ograniczyć się do schematów o nośniku w ustalonym punkcie $p \in X$. Oznaczmy

$$\mathcal{Hilb}P_r^{Gor}(\mathbb{A}^n, p) = \{[R] \in \mathcal{Hilb}_r^{Gor}(\mathbb{A}^n) \mid \text{Supp}(R) = \{p\}\}.$$

Schemat $\mathcal{Hilb}P_r^{Gor}(\mathbb{A}^n, p)$ nazywa się punktowym schematem Hilberta. Dla małych wartości r znamy wymiar tego schematu.

Twierdzenie 6 ([Jel17, Theorem 1.7]). *Niech \mathbb{k} będzie ciałem charakterystyki i i niech $r \leq 9$. Wtedy*

$$\dim \mathcal{Hilb}P_r^{Gor}(\mathbb{A}^n, p) = (r-1)(n-1).$$

Powyższe twierdzenie ma ciekawe konsekwencje w topologii. Mówimy, [Bor57], że odwzorowanie $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^N$ jest *r-regularne*, jeżeli obrazy r różnych punktów są liniowo niezależnymi wektorami.

Twierdzenie 7 ([BJJM17], [Jel17, Twierdzenie 1.10]). *Jeśli $r \leq 9$ lub $n \leq 2$, to istnieją r-regularne odwzorowania $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n(r-1)+1}$ oraz $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n(r-1)+1}$.*

Głównym narzędziem kombinatorycznym stosowanym w [Jel17] są systemy odwrotne Macaulaya. Pozwalają one zastąpić badanie algebr przez badanie szeregów formalnych, w następujący sposób. Algebrze A przyporządkowujemy minimalny zbiór generatorów modułu kanonicznego $\omega_A := \text{Hom}_{\mathbb{k}}(A, \mathbb{k})$. Jeżeli A jest lokalna i $A = S/I$ jest ilorazem pierścienia wielomianów $S = \mathbb{k}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, to możemy przedstawić A jako \hat{S}/I , gdzie $\hat{S} = \mathbb{k}[[\alpha_1, \dots, \alpha_n]]$, więc

$$\omega_A \subset P = \{f : \hat{S} \rightarrow \mathbb{k} \mid \forall d \geq 0 f(\mathfrak{m}_S^d) = \{0\}\}. \quad (8)$$

Przestrzeń liniowa P ma naturalną strukturę pierścienia *potęg dzielonych* (ang. *divided powers*): $\mathbb{k}_{dp}[x_1, \dots, x_n]$ oraz strukturę \hat{S} -modułu. W szczególności grupa pro-algebraiczna

$$\mathbb{G} = \text{Aut}(\hat{S}) \times \hat{S}^*$$

działa na P . Jeżeli A jest Gorensteina, to moduł ω_A jest generowany przez jeden element, który można utożsamić z elementem P . Odwrotnie, mając element $f \in P$, można odtworzyć algebrę A jako $A = \hat{S}/\text{Ann}(f)$. Algebrę A nazywa się *algebrą apolarną f* , zaś f nazywa się *generatorem dualnym A* . Powyższe operacje zadaną bijekcją pomiędzy elementami P z dokładnością do działania \mathbb{G} , a algebrami A prezentowanymi jako ilorazy \hat{S} .

Stwierdzenie 9 ([Ems78]). *Niech $\hat{S} = \mathbb{k}[[\alpha_1, \dots, \alpha_n]]$ i niech $P \simeq \mathbb{k}_{dp}[x_1, \dots, x_n]$ będzie jak w (8). Klasy izomorfizmu lokalnych algebr Gorensteina $(A, \mathfrak{m}, \mathbb{k})$ spełniających warunek*

$$\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq n$$

są w naturalnej bijekcji z orbitami działania \mathbb{G} na P .

W [Jel17, Rodział 2] podajemy jawne wzory na działanie grupy \mathbb{G} na P oraz analizujemy algebrę Liego grupy \mathbb{G} . Otrzymujemy w ten sposób efektywne narzędzie klasyfikacji skończonych algebr lokalnych, które, między innymi, pozwala nam podać krótki dowód następujących wyników Eliasa i Rossi [ER12, ER15]:

Twierdzenie 10 ([Jel17, Theorem 1.1]). *Niech \mathbb{k} będzie ciałem charakterystyki $\neq 2, 3$. Niech $(A, \mathfrak{m}, \mathbb{k})$ będzie skończoną lokalną \mathbb{k} -algebrą Gorensteina o funkcji Hilberta*

$$(1, n, n, 1) \quad \text{lub} \quad \left(1, n, \binom{n+1}{2}, n, 1\right).$$

Wtedy A jest izomorficzna ze swoją algebrą zgradowaną $\text{gr } A = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1}$.

Co ciekawe, Twierdzenie 10 nie jest prawdziwe w charakterystyce dwa lub trzy. Wreszcie, systemy odwrotne Macaulaya pozwalają niekiedy otrzymać, relatywnie prosto, klasyfikacje algebr Gorensteina o danej funkcji Hilberta z dokładnością do izomorfizmu, przykładowo.

Stwierdzenie 11 ([Jel17, Proposition 1.2]). *Założmy, że \mathbb{k} jest algebraicznie domknięte i charakterystyki $\neq 2, 3$. Jest dokładnie jednaście typów izomorfizmów skończonych lokalnych algebr Gorensteina o funkcji Hilberta $(1, 3, 3, 3, 1)$.*

Algebry reprezentujące 11 typów są podane explicite w [Jel17, Example 3.75].

Mimo intensywne badań nad schematami Hilberta w ostatnim półwieczu, wiele pytań pozostaje otwartych. W [Jel17, Podrozdział 1.5] umieszczona jest lista problemów otwartych, zaś krótki przegląd historyczny znajduje się w [Jel17, Podrozdział 1.4].

Literatura

- [BB14] Weronika Buczyńska and Jarosław Buczyński. Secant varieties to high degree Veronese embeddings, catalecticant matrices and smoothable Gorenstein schemes. *J. Algebraic Geom.*, 23:63–90, 2014.
- [BBS13] Kai Behrend, Jim Bryan, and Balázs Szendrői. Motivic degree zero Donaldson-Thomas invariants. *Invent. Math.*, 192(1):111–160, 2013.
- [BJ17] Jarosław Buczyński and Joachim Jelisiejew. Finite schemes and secant varieties over arbitrary characteristic. *arXiv:1703.02770*, 2017.
- [BJJM17] Jarosław Buczyński, Tadeusz Januszkiewicz, Joachim Jelisiejew, and Mateusz Michałek. On the existence of k -regular maps. Accepted in Journal of EMS, *arXiv:1511.05707*, 2017.
- [Bor57] Karol Borsuk. On the k -independent subsets of the Euclidean space and of the Hilbert space. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, 5:351–356, XXIX, 1957.
- [CEVV09] Dustin A. Cartwright, Daniel Erman, Mauricio Velasco, and Bianca Viray. Hilbert schemes of 8 points. *Algebra Number Theory*, 3(7):763–795, 2009.
- [CJN15] Gianfranco Casnati, Joachim Jelisiejew, and Roberto Notari. Irreducibility of the Gorenstein loci of Hilbert schemes via ray families. *Algebra Number Theory*, 9(7):1525–1570, 2015.
- [DS09] Alexandru Dimca and Balázs Szendrői. The Milnor fibre of the Pfaffian and the Hilbert scheme of four points on \mathbb{C}^3 . *Math. Res. Lett.*, 16(6):1037–1055, 2009.

- [Ems78] Jacques Emsalem. Géométrie des points épais. *Bull. Soc. Math. France*, 106(4):399–416, 1978.
- [ER12] Joan Elias and Maria E. Rossi. Isomorphism classes of short Gorenstein local rings via Macaulay’s inverse system. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(9):4589–4604, 2012.
- [ER15] Joan Elias and Maria E. Rossi. Analytic isomorphisms of compressed local algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(3):973–987, 2015.
- [EV10] Daniel Erman and Mauricio Velasco. A syzygetic approach to the smoothability of zero-dimensional schemes. *Adv. Math.*, 224(3):1143–1166, 2010.
- [Gro95] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, pages Exp. No. 221, 249–276. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [Hai01] Mark Haiman. Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4):941–1006 (electronic), 2001.
- [HS04] Mark Haiman and Bernd Sturmfels. Multigraded Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 13(4):725–769, 2004.
- [Iar72] Anthony Iarrobino. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Invent. Math.*, 15:72–77, 1972.
- [IE78] Anthony Iarrobino and Jacques Emsalem. Some zero-dimensional generic singularities; finite algebras having small tangent space. *Compositio Math.*, 36(2):145–188, 1978.
- [IR01] Atanas Iliev and Kristian Ranestad. $K3$ surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1455–1468, 2001.
- [Jel17] Joachim Jelisiejew. Hilbert schemes of points and their applications. PhD thesis. 2017.
- [Lan12] Joseph M. Landsberg. *Tensors: geometry and applications*, volume 128 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Ree95] Alyson Reeves. The radius of the Hilbert scheme. *J. Algebraic Geom.*, 4(4):639–657, 1995.
- [RV13] Kristian Ranestad and Claire Voisin. Variety of power sums and divisors in the moduli space of cubic fourfolds. *ArXiv e-print arXiv:1309.1899*, 2013.