Streszczenie rozprawy doktorskiej "Algebraiczne rozmaitości legendrowskie" ("Algebraic Legendrian varieties")

Jarosław Buczyński*

15 września 2007

Rzeczywiste rozmaitości legendrowskie stanowią standardowy przedmiot badań geometrii różniczkowej oraz mechaniki klasycznej (zobacz [Arn74], [Sła91] oraz odnośniki tamże). W swojej rozprawie doktorskiej badam ich geometro-algebraiczny odpowiednik: zespolone podrozmaitości legendrowskie zespolonych rozmaitości kontaktowych[1]. W porównaniu z rzeczywistymi, zespolone są dużo bardziej sztywne i mają bardziej wyjątkowe własności. Najważniejszy przypadek to podrozmaitości legendrowskie w zespolonej przestrzeni rzutowej — przed moimi badaniami znanych było jedynie kilka gładkich przykładów (zobacz [Bry82], [LM04]), a mocne ograniczenia dotyczące własności topologicznych takich rozmaitości zostały udowodnione przez Landsberga i Manivela [LM04].

Główną przyczyną dla podjęcia tych badań jest słynny, pięćdziesięcioletni problem z geometrii riemannowskiej. W roku 1955 Berger [Ber55] udowodnił, że grupa holonomii jednospójnej rozmaitości riemannowskiej[2] nie może być całkiem dowolna, ale musi być musi być jedną z niezbyt długiej listy (tzw. listy Bergera). Przykłady rozmaitości o zadanej grupie z tej listy zostały skonstruowane lokalnie dla wszystkich przypadków. Także istnienie zwartych przykładów dla prawie wszystkich przypadków zostało pokazane, między innymi (dla wyjątkowych grup G_2 i $Spin_7$) przez D. Joyce'a — zobacz przeglądową pracę [Joy00]. Na dzień dzisiejszy jedyną grupą z listy Bergera bez zwartego przykładu jest

$$\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n)/\mathbb{Z}_2,$$

*Praca doktorska częściowo finansowana ze środków finansowych na naukę w latach 2006–2008 jako projekt badawczy nr. N20103331/2715

[1]Zespoloną rozmaitość Y^{2n+1} nazywamy **rozmaitością kontaktową**, jeśli istnieje podwiązka wiązki stycznej $F \subset TY$ rangi $2n$ taka, że odwzorowanie $F \otimes F \longrightarrow TY/F$ wyznaczone przez nawias Liego pól wektorowych jest nigdzie nie zdegenerowane.

Podrozmaitość $X \subset Y$ nazywamy **legendrowską,** jeśli $\dim X = n = \frac{1}{2}(\dim Y - 1)$ oraz $TX \subset F$.

[2]Dla m-wymiarowej rozmaitości riemannowskiej M i punktu $x \in M$ **grupą holonomii** M nazywamy podgrupę grupy ortogonalnej $\mathbf{O}(T_xM)$ generowaną przez przesunięcia równoległe wzdłuż pętli przechodzących przez x.

a rozmaitości o takiej (lub mniejszej) grupie holonomii nazywane są rozmaitościami kwaternionowo-kählerowskimi.

Hipoteza 1 (LeBrun, Salamon [LS94])**.** *Jeśli M^{4n} jest zwartą rozmaitością kwaternionowo-kählerowską o dodatniej krzywiźnie, to jest jedną z przestrzeni symetrycznych Wolfa —zobacz [Wol65].*

Przestrzenie symetryczne Wolfa wszystkie mają grupę holonomii mniejszą niż $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n)/\mathbb{Z}_2$. Założenie o dodatniej krzywiźnie eliminuje przypadek zerowej krzywizny (który implikuje, że grupa holonomii jest zawarta w $\mathbf{Sp}(n)$, innej grupie z listy Bergera) oraz ujemnej krzywizny, gdzie nie spodziewamy się zwartych przykładów — zobacz [Bea99].

Okazuje się, że hipoteza 1 wynika z (a wręcz jest prawie równoważna z) następującej geometro-algebraicznej hipotezy (zobacz [LeB95]):

Hipoteza 2. *Każda rozmaitość kontaktowa Fano Y^{2n+1} jest jednorodna.*

Natomiast podrozmaitości legendrowskie pojawiają się jako rozmaitości związane z liniami kontaktowymi (lub inaczej minimalnymi krzywymi wymiernymi) przechodzącymi przez ustalony punkt rozmaitości kontaktowej Fano Y (zobacz [Wiś00], [Keb01], [Keb05]). Co więcej Hong [Hon00] pokazał, że znaczna część informacji o geometrii samego Y jest zawarta w geometrii odpowiadającej rozmaitości legendrowskiej X. Na przykład Y jest jednorodne wtedy i tylko wtedy, gdy X jest jednorodne.

Hipotezy 1 oraz 2 oparły się licznym próbom dowiedzenia. Udało się je udowodnić w niskich wymiarach: dla $n = 1$ (zobacz [Hit81] oraz [Ye94]), dla $n = 2$ (zobacz [PS91] oraz [Dru98]), natomiast hipoteza 1 dla $n = 3$ (zobacz [HH02]). Ponadto A. Beauville, J. Wiśniewski, S. Kebekus, T. Peternell, A. Sommese, J.P. Demailly, C. LeBrun, J-M. Hwang oraz wielu innych badaczy pracuje nad tym problemem.

Zespolone rozmaitości legendrowskie znalazły również zastosowanie w teorii reprezentacji. Landsberg i Manivel [LM02] używają jednorodnych rozmaitości legendrowskich, aby ponownie sklasyfikować proste grupy Liego wyłącznie za pomocą geometrii rzutowej. Ponadto w pracy [LM01] autorzy przedstawiają jednolity opis tych rozmaitości, który w połączeniu z powyżej wspomnianą pracą [LM02] daje całkiem jednolity opis wyjątkowych grup Liego F_4, E_6, E_7 i E_8 — startując od, odpowiednio, liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, liczb zespolonych $\mathbb{C}$, kwaternionów $\mathbb{H}$ lub oktanionów $\mathbb{O}$, a następnie postępując według tego samego schematu, dostajemy na końcu odpowiednie wyjątkowe grupy Liego.

Także Mukai [Muk98] wiąże te rozmaitości z prostymi algebrami Jordana.

Nowe, potencjalne zastosowanie rozmaitości legendrowskich pojawia się w mojej pracy doktorskiej. Dowodzę, że klasyfikacja gładkich podrozmaitości $Z \subset \mathbb{P}^n$, których rozmaitość dualna jest gładka, jest równoważna z klasyfikacją pewnych gładkich rozmaitości legendrowskich w $\mathbb{P}^{2n+1}$.

Zespolone rozmaitości legendrowskie wydają się więc ważną tematyką badań. Nie tylko stanowią naturalne uogólnienie przypadku rzeczywistego, lecz także mają odrębne i ciekawe zastosowania w geometrii algebraicznej, geometrii riemannowskiej, algebrze oraz klasycznej geometrii rzutowej.

Przed moimi badaniami, jedynie nieliczne przykłady gładkich podrozmaitości legendrowskich w przestrzeni rzutowej były znane. Mianowicie, były to pewne przestrzenie jednorodne, przykłady krzywych oraz rodzina powierzchni biwymiernych z pewnymi powierzchniami K3. Jest to wyrazem tego, że badań nad samymi rozmaitościami legendrowskimi, ich geometrią oraz globalnymi własnościami prowadzi się względnie mało, więc jest to jeszcze nie do końca odkryty świat. Przynajmniej częściowo tę lukę zapełnia moja praca doktorska.

W opisywanej rozprawie poruszam dwa uzupełniające się problemy:

- opisanie ograniczeń, które muszą spełniać rozmaitości legendrowskie;
- skonstruowanie przykładów gładkich rozmaitości legendrowskich.

Znalezione przeze mnie ograniczenia dotyczą grupy zewnętrznych automorfizmów rozmaitości legendrowskiej. Natomiast nowe przykłady konstruuję poprzez udowodnienie, że hiperpłaskie cięcie podrozmaitości legendrowskiej w przestrzeni rzutowej też jest rozmaitością legendrowską przy odpowiednim zanurzeniu.

W [Buc03] oraz [Buc06] pokazałem, że wielomiany kwadratowe, które zerują się na rozmaitości legendrowskiej $X \subset \mathbb{P}^{2n-1}$ wyznaczają pewną podgrupę rzutowych automorfizmów X. Jest to maksymalna spójna grupa automorfizmów $\mathbb{P}^{2n-1}$, które zachowują zarówno X, jak i strukturę kontaktową na $\mathbb{P}^{2n-1}$. W rozprawie doktorskiej uogólniam ten wynik na dwa sposoby.

Po pierwsze pokazuję, że przestrzeń rzutowa może zostać zastąpiona przez dowolną rzutową rozmaitość kontaktową Y. Wtedy, jeśli X jest podrozmaitością legendrowską, a L pewną specjalną wiązką liniową na Y wyznaczoną przez strukturę kontaktową, to spójna grupa automorfizmów kontaktowych Y, która zachowuje X jest wyznaczona przez te cięcia wiązki L, które zerują się na X.

Po drugie, w przypadku przestrzeni rzutowej, dla podrozmaitości legendrowskiej $X \subset \mathbb{P}^{2n-1}$, rozważam czy spójna grupa automorfizmów rzutowych X musi zachowywać strukturę kontaktową. Dowodzę, że tak jest o ile X jest gładkie (i nie jest podprzestrzenią liniową) oraz przedstawiam kontrprzykłady, gdy X jest osobliwe. Przedstawiam też poszlaki sugerujące, że podane przeze mnie kontrprzykłady są jedynymi możliwymi.

Aby znaleźć nowe przykłady, rozważam problem klasyfikacji rozmaitości legendrowskich spełniających pewne dodatkowe założenia, na przykład, będących jednocześnie rozmaitościami torycznymi lub zawartych w pewnej konkretnej rozmaitości. W ten sposób konstruuję kilka nowych gładkich przykładów, miedzy innymi powierzchnię toryczną (rozdmuchanie $\mathbb{P}^2$ w 3 punktach) oraz pewną 8-wymiarową rozmaitość Fano. Na koniec pokazuję, że obydwa te przykłady są szczególnymi przypadkami bardzo ogólnej konstrukcji: ogólne hiperpłaskie cięcie rozmaitości legendrowskiej, po odpowiednim zrzutowaniu, zadaje gładką rozmaitość legendrowską mniejszego wymiaru. Stosując wielokrotnie powyższe stwierdzenie do znanych przykładów oraz do rozkładalnych rozmaitości legendrowskich, otrzymuję nieskończenie wiele nowych przykładów w każdym wymiarze. Przykłady te różnią się od siebie między innymi rangą grupy Picarda, stopniem dywizora kanonicznego oraz wymiarem Kodairy.

Literatura

[Arn74] V. I. Arnold. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki.* Izdat. "Nauka", Moscow, 1974.

[Bea99] Arnaud Beauville. Riemannian holonomy and algebraic geometry. arXiv:math.AG/9902110, 1999.

[Ber55] Marcel Berger. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83:279–330, 1955.

[Bry82] Robert L. Bryant. Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere. *J. Differential Geom.*, 17(3):455–473, 1982.

[Buc03] Jarosław Buczyński. Podrozmaitości legendrowskie zespolonej przestrzeni rzutowej. Master's thesis, Institute of Mathematics, Warsaw University, 2003.

[Buc06] Jarosław Buczyński. Legendrian subvarieties of projective space. *Geom. Dedicata*, 118:87–103, 2006.

[Dru98] Stéphane Druel. Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(4):365–368, 1998.

[HH02] Haydeé Herrera and Rafael Herrera. $\hat{A}$-genus on non-spin manifolds with S^1 actions and the classification of positive quaternion-Kähler 12-manifolds. *J. Differential Geom.*, 61(3):341–364, 2002.

[Hit81] N. J. Hitchin. Kählerian twistor spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 43(1):133–150, 1981.

[Hon00] Jaehyun Hong. Fano manifolds with geometric structures modeled after homogeneous contact manifolds. *Internat. J. Math.*, 11(9):1203–1230, 2000.

[Joy00] Dominic D. Joyce. *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[Keb01] Stefan Kebekus. Lines on contact manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 539:167–177, 2001.

[Keb05] Stefan Kebekus. Lines on complex contact manifolds. II. *Compos. Math.*, 141(1):227–252, 2005.

[LeB95] Claude LeBrun. Fano manifolds, contact structures, and quaternionic geometry. *Internat. J. Math.*, 6(3):419–437, 1995.

[LM01] J. M. Landsberg and L. Manivel. The projective geometry of Freudenthal's magic square. *J. Algebra*, 239(2):477–512, 2001.

[LM02] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. Construction and classification of complex simple Lie algebras via projective geometry. *Selecta Math. (N.S.)*, 8(1):137–159, 2002.

[LM04] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. Legendrian varieties. arXiv: math.AG/0407279, to appear in Asian J. Math, 2004.

[LS94] Claude LeBrun and Simon Salamon. Strong rigidity of positive quaternion-Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 118(1):109–132, 1994.

[Muk98] Shigeru Mukai. Simple Lie algebra and Legendre variety. http://www.math.nagoya-u.ac.jp /~mukai/, 1998.

[PS91] Y. S. Poon and S. M. Salamon. Quaternionic Kähler 8-manifolds with positive scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 33(2):363–378, 1991.

[Sła91] Jan J. Sławianowski. *Geometry of phase spaces.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1991. Translated from the Polish.

[Wiś00] Jarosław Wiśniewski. Lines and conics on fano contact manifolds. http://www.mimuw.edu.pl/~jarekw/, 2000.

[Wol65] Joseph A. Wolf. Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces. *J. Math. Mech.*, 14:1033–1047, 1965.

[Ye94] Yun-Gang Ye. A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures. *Invent. Math.*, 115(2):311–314, 1994.