O problemie zanurzeń Skorochoda oraz pewnych rodzinach martyngałów brownowskich

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Jan Obłój

Niniejsza praca doktorska składa się z siedmiu rozdziałów. Rozdziały odpowiadają artykułom, które napisałem pomiędzy wrześniem 2002 a czerwcem 2005. Każdy rozdział był pisany jako spójna całość i może być czytany odrębnie od pozostałych. Jednakże zebrane razem artykuły dopełniają się w sposób naturalny i lektura zgodnie z porządkiem prezentacji zapewnia pełniejszy obraz tematyki i wyników doktoratu.

Jak sugeruje sam tytuł, praca ta składa się z dwóch części, które chociaż powiązane, są jednak wyraźnie odrębne. Część pierwsza (rozdziały 1 – 4) poświęcona jest problemowi zanurzeń Skorochoda. Zawiera obszerne wprowadzenie do dziedziny, omawia nowe rozwiązanie problemu w abstrakcyjnym markowskim kontekście oraz rozwija pewne problemy optymalnego stopowania. Druga część pracy (rozdziały 5 – 7) jest poświęcona studiom martyngałów, które można zapisać jako funkcję od ruchu Browna i pewnego procesu adaptowanego. W szczególności zawiera ona pełną charakteryzację tzw. martyngałów Azémy-Yora jako jedynych martyngałów lokalnych, które są funkcją ruchu Browna i jego procesu maksimum.

Omówię teraz wyniki zawarte w kolejnych rozdziałach. Celem moim jest zarysowanie kontekstu i metod związanych z wynikami i będę pomijał niektóre techniczne założenia. Tak więc, prezentowane poniżej twierdzenia powinny być traktowane jako streszczenie i odesłanie do twierdzeń w pracy, a nie jako matematycznie kompletne stwierdzenia.

Rozdział 1. Skorochod sformułował problem nazywany obecnie *problemem zanurzeń Skorochoda* w swojej książce [11] z 1961 roku. Podstawowy cel polega na zrealizowaniu, zanurzeniu jednego obiektu w drugim. Skorochod chciał zrealizować błądzenie losowe jako ruch Browna zatrzymany w ciągu momentów stopu. Sprowadzało się do rozwiązania następującego problemu: dla danej scentrowanej miary probabilistycznej μ ze skończoną wariancją, zaprojektować całkowalny moment stopu T taki że B_T, ruch Browna zatrzymany w T, ma zadany rozkład μ. Od 1961 wyjściowy problem rozrósł się w odrębną tematykę badawczą z dużą ilością zastosowań. Probabiliści przez przeszło 40 lat uogólniali wyjściowy problem, znajdowali nowe rozwiązania i dowodzili ciekawych własności znanych rozwiązań. W konsekwencji, osoba zainteresowana tematyką stawała wobec rozległej sieci wzajemnie powiązanych prac. Naturalną stała się potrzeba pracy przeglądowej, która zebrałaby w jednym miejscu i omówiła istniejące prace, pokazując ich wzajemne powiązania i ujednolicając metodologię. Taki był właśnie cel pierwszego rozdziału, opublikowanego w [4].

Pośród 21 rozwiązań problemu zanurzeń Skorochoda, które są omówione w rozdziale 1, trzy należy podkreślić w tym miejscu. W pierwszej kolejności jest to rozwiązanie Chacona i Walsha [2] omówione w sekcji 1.3.8. Chacon i Walsh [2] pokazali, że jednowymiarowy potencjał zadany przez $\mu \to U\mu$, $U\mu(x) = -\int_{\mathbb{R}} |x-y| d\mu(y)$, może być w prosty i wydajny sposób użyty do opisania rozwiązania, a raczej całej rodziny rozwiązań problemu zanurzeń Skorochoda opartej na składaniu kolejnych pierwszych momentów wyjścia. Zaproponowana przez autorów metodologia posłużyła mi za bazę do ujednoliconej prezentacji wszystkich dowodów oraz argumentów intuicyjnych w rozdziale 1. Z jej pomocą dowodzę na przykład w prosty sposób optymalnych własności zanurzenia Jacka (zob. sekcja 1.6.2).

Drugim rozwiązanie, które chcę podkreślić, zostało zaproponowane przez Azémę i Yora [1] (zob. sekcja 1.5). Omawiam to rozwiązanie szczegółowo, przedstawiam prosty dowód oparty na jedno-wymiarowej teorii potencjału, ale opisuję także oryginalne podejście wykorzystujące teorię martyngałów. W ten sposób wprowadzam martyngały Azémy-Yora, które będą kluczowym obiektem w drugiej części doktoratu. Szczególna postać rozwiązania Azémy-Yora będzie punktem wyjścia dla mojego rozwiązania problemu zanurzeń Skorochoda dla procesu wieku w rozdziale 2, jak również, w mniejszym stopniu, rozwiązania dla funkcjonałów wycieczek procesu Markowa, które jest omówione w rozdziale 3. Wreszcie, badanie optymalnych własności rozwiązania Azémy-Yora rozwinęło się w odrębne studium w teorii optymalnych zatrzymań, które jest przedstawione w rozdziale 4.

Trzecie rozwiązanie problemu zanurzeń Skorochoda, które pragnę podkreślić w tym miejscu to rozwiązanie zaproponowane przez Roota [10]. W sekcji 1.7 omawiam je razem z jego naturalnym dopełnieniem zaproponowanym przez Rosta. W szczególności opisuję ich zaskakujące własności optymalne i stawiam hipotezę o pewnych dalszych własnościach.

Rozdziały 2 i 3. Rozdziały 2 i 3 zawierają nowe rozwiązanie problemu Skorochoda. Rozdział 3 jest istotnym rozszerzeniem i uogólnieniem rozdziału 2, dlatego też skupię się raczej na jego streszczeniu. Rozdział 2 jest wspólną pracą z M. Yorem [6]. Rozwiązujemy w niej problem zanurzeń Skorochoda dla procesu wieku wycieczek ruchu Browna, czyli dla procesu $A_t = t - g_t$, gdzie $g_t = \sup\{s \leqslant t : B_s = 0\}$. Policzony jest także rozkład łączny A_T, zatrzymanego procesu wieku oraz momentu stopu T. Główne wyniki rozdziału 2 są zaprezentowane w sekcji 2.3. W całym rozdziale dowody są oparte na teorii wycieczek, jednakże równolegle przedstawiane są argumenty bazujące na teorii martyngałów. Wymagają one uogólnień martyngałów Azémy-Yora co jest jeszcze jednym połączeniem pierwszej i drugiej części doktoratu.

W rozdziale 3 rozszerzam i doprecyzowuję ogólną metodologię zasugerowaną w rozdziale 2. Dopuszczam funkcjonały ze znakiem oraz kładę nacisk na zidentyfikowanie najogólniejszego kontekstu, w którym metodologia stosuje się i pozwala otrzymać bezpośrednie rozwiązanie problemu zanurzeń Skorochoda. W szczególności okazuje się, że specjalne własności procesu wieku (A_t) oraz ruchu Browna, użyte w rozdziale 2, nie były kluczowe. W ten sposób rozwiązuję bezpośrednio problem zanurzeń Skorochoda między innymi dla procesów Bessela o wymiarze $\delta \in (0, 2)$, dla skrzywionego ruchu Browna, dla jednowymiarowych dyfuzji na naturalnej skali oraz dla znakowanych procesów wieku wycieczek dyfuzji (w szczególności dla martyngału Azémy). Przedstawię teraz pokrótce główne twierdzenie, z którego wynikają wyżej wymienione rozwiązania.

Rozważmy proces $(F_t : t \geqslant 0)$, dany jako funkcjonał F od wycieczki procesu Markowa X w chwili t, oszacowany na skali wieku wycieczki. Dokładniej mówiąc, niech $(X_t : t \geqslant 0)$ będzie procesem Markowa o wartościach w przestrzeni polskiej, $(e_l : l \geqslant 0)$ jego procesem wycieczek a $(L_t : t \geqslant 0)$ czasem lokalnym w zerze. F jest funkcjonałem, który wycieczce ϵ przypisuje ciągłą, monotoniczną funkcję $F(\epsilon)$, $F(\epsilon)(0) = 0$, oraz takim, że indukowany proces $F_t = F(e_{L_t})(t - g_t)$ jest adaptowany do naturalnej filtracji X. Proces (F_t) jest kawałkami ciągły, gdy skacze to skacze do zera, oraz ma ten sam zbiór zer co proces X (w szczególności L jest adaptowany do naturalnej filtracji F). Ważniejsze przykłady, dla przypadku gdy X jest jednowymiarową dyfuzją, obejmują funkcjonał wieku A, który indukuje proces wieku wycieczek: $A_t = (t - g_t)$, funkcjonał wieku ze znakiem, który daje proces $\tilde{A}_t = sgn(X_t)(t - g_t)$ oraz funkcjonał ekstremów $M(\epsilon)(u) = sgn(\epsilon)\sup_{s\leqslant u}|\epsilon(u)|$. Moje rozwiązanie problemu zanurzeń Skorochoda dla procesu M_t daje jednocześnie rozwiązanie problemu Skorochoda dla samego procesu X oraz dla jego procesu znakowanego ekstremum.

Następujące twierdzenie opisuje rozwiązanie problemu Skorochoda dla ogólnego procesu (F_t). Wykorzystuje ono miarę charakterystyczną n_F naturalnego punktowego procesu Poissona związanego z funkcjonałem F (n_F jest obrazem miary Itô procesu wycieczek).

Twierdzenie (Twierdzenia 3.1 i 3.4). *Dla dowolnej, bezatomowej, miary probabilistycznej μ na $\mathbb{R}$ z $\int_{\mathbb{R}_+} d\mu(y)/n_F(y,\infty) = \int_{\mathbb{R}_-} d\mu(y)/n_F(-\infty,y)$, moment stopu zadany przez*

$$T^F = \inf\Big\{t > 0 : F_t \notin \Big(-\varphi_-(L_t), \varphi_+(L_t)\Big)\Big\}$$

jest p.n. skończony i rozwiązuje problem Skorochoda: $F_{T^F} \sim \mu$, gdzie $\varphi_{+/-}$, zdefiniowane w (3.15), są funkcjami μ i n_F.
Dla nieujemnego procesu (F_t) i dowolnej miary probabilistycznej μ na $\mathbb{R}_+$, moment stopu

$$T^F = \inf\Big\{t > 0 : F_t \geqslant \varphi(L_t)\Big\},$$

jest skończony p.n. i spełnia $F_{T^F} \sim \mu$, gdzie φ jest prawostronnie-ciągłą odwrotnością

$$\psi_\mu(y) = \int_0^y \frac{\mathbf{1}_{\mu(\{x\})=0}d\mu(x)}{\overline{\mu}(x)n_F([x,\infty))} + \sum_{x<y} \frac{\ln\left(\frac{\overline{\mu}(x)}{\overline{\mu}(x+)}\right)}{n_F([x,\infty))}\boldsymbol{1}_{\mu(\{x\})>0},$$

gdzie $\overline{\mu}(x) = \mu([x,\infty))$.

Zauważmy, że T^F jest momentem stopu w naturalnej filtracji (F_t). Funkcja ψ_μ jest nazwana dualną funkcją Hardy'ego-Littlewooda ponieważ pełni podobną rolę jak funkcja Hardy'ego-Littlewooda (1.17) w rozwiązaniu Azémy-Yora (zob. sekcja 1.5). Ma ona szczególnie prostą postać w najważniejszym przypadku, kiedy μ jest bezatomowa oraz $n_F(dx) = dx/x^2$, wtedy $\psi_\mu(y) = \int_0^y s d\mu(s)/\overline{\mu}(s)$.

Rozdział 4. W ostatnim rozdziale pierwszej części doktoratu podejmuję tematykę zastosowań problemu zanurzeń Skorochoda, a dokładniej jego ścisłych związków z teorią optymalnego stopowania. Rozdział ukaże się w [5].

Jest on naturalną kontynuacją pisania pracy przeglądowej (zob. rozdział 1) w której przedstawiłem pewne nieznane wcześniej związki pomiędzy różnymi artykułami z tej tematyki.

Rozważam następujący problem optymalnego stopowania: znaleźć maksimum

$$\mathbb{E}\left[\phi\Big(\sup_{s\leqslant\tau} X_s\Big) - \int_0^\tau c(X_s)ds\right]$$

po wszystkich momentach stopu τ takich, że $\mathbb{E}\int_0^\tau c(X_s)dx < \infty$. Proces (X_t) jest jednowymiarową dyfuzją zadaną przez swój generator infinitezymalny, tutaj jednak założę, że $X = B$ jest ruchem Browna. W mojej pracy łączę studia Peskira [7] i Meilijsona [3]. Rozwiązanie problemu jest przedstawione jako ciąg trzech twierdzeń z różnymi założeniami na funkcje ϕ i c. W przypadku gładkim opieram się bezpośrednio na wynikach Peskira [7] i pokazuję, że problem ma skończone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy równanie różniczkowe $g'(x) = \phi'(x)/[2c(g(x))(x - g(x))]$ ma maksymalne rozwiązanie g_*, które pozostaje pod diagonalą w $\mathbb{R}^2$, $g_*(x) < x$. Moment stopu indukujący rozwiązanie jest momentem Azémy-Yora zadanym przez $\tau_* = \inf\{t : X_t \leqslant g_*(\sup_{s\leqslant t} X_s)\}$. Przypadki ogólniejszych funkcji ϕ, c uzyskuję dzięki argumentom granicznym przy wykorzystaniu mocnej własności Markowa i szczególnej postaci problemu.

W drugiej części rozdziału 4, rozważam tzw. optymalny problem zanurzeń Skorochoda (zob. Peskir [8]). Mając daną scentrowaną miarę probabilistyczną μ, należy zaprojektować problem optymalnego stopowania, którego rozwiązanie jednocześnie zanurzy miarę μ. Rozwiązuję ten problem opierając się na wynikach z pierwszej części rozdziału. Dokładniej, dla danej miary μ, podaję funkcje ϕ i c takie, że moment stopu τ_*, opisany powyżej, zanurza μ, $B_{\tau_*} \sim \mu$. W porównaniu z pracą Peskira [8] rozszerzam klasę rozważanych miar, gdyż nie muszę się ograniczać do miar z gęstością. Uwzględnienie miar z atomami umożliwia funkcja ϕ, która w [8] jest identycznością, $\phi(x) = x$.

Rozdziały 5 i 6. W tych rozdziałach skupiam się na martyngałach Azémy-Yora. Rozdział 5 jest wspólną pracą z M. Yorem. Niech $(N_t : t \geqslant 0)$ będzie ciągłym martyngałem lokalnym, $\overline{N}_t = \sup_{s\leqslant t} N_s$ jego procesem maksimum oraz dla funkcji f oznaczmy jej funkcję pierwotną przez $F(y) = \int_0^y f(x)dx$. Pokazujemy, że dla dowolnej lokalnie całkowalnej funkcji f, proces $(F(\overline{N}_t) - f(\overline{N}_t)(\overline{N}_t - N_t) : t \geqslant 0)$ jest martyngałem lokalnym. Procesy takie, wprowadzone przez Azémę i Yora [1], nazywamy *max-martyngałami*, *M-martyngałami* lub martyngałami Azémy-Yora. Prezentujemy ich różne zastosowania, między innymi wyprowadzamy następujące ograniczenie na rozkład czasu lokalnego w zerze L_t^N procesu N:

Twierdzenie. *Niech $(N_t : t \geqslant 0)$ będzie jednostajnie całkowalnym martyngałem i niech μ będzie rozkładem $|N_\infty|$ a T momentem stopu opisanym w rozdziałach 2 i 3, takim że $|B_T| \sim \mu$. Wtedy*

$$\mathbb{E}\left(L_\infty^N - \gamma_\infty^N(p)\right)^+ \leqslant \mathbb{E}\left(L_T^B - \gamma_T^B(p)\right)^+, \quad p \in (0,1),$$

gdzie $\mathbb{P}(L_\infty^N \geqslant \gamma_\infty^N(p)) = p = \mathbb{P}(L_T^B \geqslant \gamma_T^B(p))$.

Innymi słowy, rozkład L_∞^N jest ograniczony z góry w tzw. porządku *excess wealth order* oraz ograniczenie górne jest osiągane przez rozwiązanie problemu zanurzeń Skorochoda opisane w rozdziałach 2 i 3 (zauważmy, że $B_t^T = B_{T\wedge t}$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem oraz $|B_\infty^T| \sim \mu$).

Rozdział 6 zawiera charakteryzację martyngałów Azémy-Yora jako jedynych martyngałów lokalnych, które można zapisać jako funkcję od pary $(N_t, \overline{N}_t)$. Dowodzę następującego twierdzenia, które stanowi odpowiedź na pytanie postawione przez Revuza i Yora w [9, str. 279].

Twierdzenie. *Niech $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Proces $(H(N_t, \overline{N}_t) : t \geqslant 0)$ jest prawostronnie-ciągłym martyngałem lokalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje lokalnie całkowalna funkcja f taka, że dla $y \geqslant x \vee 0$*

$$H(x,y) = F(y) - f(y)(y-x), \quad \textit{gdzie } F(y) = \int_0^y f(u)du.$$

Rozdział 7. W ostatnim rozdziale pracy studiuję rodziny martyngałów, które można zapisać jako funkcję od pary (N_t, Y_t), gdzie (N_t) jest ciągłym martyngałem lokalnym a (Y_t) jest pewnym wielowymiarowym procesem adaptowanym. Proponuję nazywać takie procesy *Y-martyngałami*. Interesują mnie sytuacje, gdy współrzędne procesu Y to proces maksimum $\overline{N}$, proces minimum $\underline{N}$ lub czas lokalny w zerze L^N. Wyniki są opisane dla ruchu Browna, ale uogólniają się natychmiast dla dowolnego ciągłego martyngału lokalnego N dzięki twierdzeniu Dambisa-Dubinsa-Schwarza. Rozdział 7 zawiera pełną charakteryzację martyngałów lokalnych postaci $H(N_t^+, N_t^-, \overline{N}_t, \underline{N}_t, L_t^N)$ przy założeniu, że H jest klasy C^2. Dowody opierają się w zasadzie jedynie na wzorze Itô i wydaje się zadziwiające, że prezentowane wyniki nie były, wedle mojej najlepszej wiedzy, wcześniej znane. Dowodzone charakteryzacje mają wiele interesujących implikacji, z których przytoczę tu jedną.

Twierdzenie. *Niech $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^2. Wtedy proces $(H(N_t, \overline{N}_t, \underline{N}_t) : t \geqslant 0)$ jest martyngałem lokalnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieją funkcje $f, g \in C^1$, takie że $H(x, y, z) = F(y) - f(y)(y-x) + G(z) - g(z)(z+x)$.*

Innymi słowy, martyngał lokalny $H(N_t, \overline{N}_t, \underline{N}_t)$, nazywany *MM-martyngałem* (MM jak MaxMin), jest sumą dwóch martyngałów Azéma-Yora. Nie zawiera on żadnej interakcji pomiędzy maksimum $\overline{N}_t$ i minimum $\underline{N}_t$.

Dla porównania, przy rozważaniu martyngałów postaci $H(N_t, \overline{N}_t, L_t^N)$, nazwanych *ML-martyngałami*, pojawia się ciekawa interakcja pomiędzy $\overline{N}_t$, L_t^N oraz $N_t^- = (-N_t) \vee 0$. Opisuję nową, wedle mojej najlepszej wiedzy, rodzinę martyngałów, parametryzowaną funkcjami lokalnie ograniczonymi $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie. *Niech $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ będzie lokalnie ograniczoną funkcją borelowską. Wtedy proces $H(N_t^+, N_t^-, \overline{N}_t, L_t^N)$, $t \geqslant 0$, jest martyngałem lokalnym, gdzie*

$$H(x^+, x^-, y, l) = {}^{yl}\mathrm{F}(y,l) - {}^{l}\mathrm{F}(y,l)(y-x) - 2x^-\Big({}^{y}\mathrm{F}(y,l) - yf(y,l)\Big),$$

${}^{l}\mathrm{F}(y,l) = \int_0^l f(y,u)du$, ${}^{y}\mathrm{F}(y,l) = \int_0^y f(s,l)ds$, ${}^{yl}\mathrm{F}(y,l) = \int_0^y \int_0^l f(s,u)duds$.

Praca kończy się przykładami zastosowań tej nowej rodziny martyngałów. Są to, między innymi, dowód wzoru na podwójny ogon supremum i czasu lokalnego, $\mathbb{P}(\overline{B}_T \geqslant \lambda, L_T \geqslant \gamma)$, który uogólnia równości Dooba $\lambda\,\mathbb{P}(\overline{B}_T \geqslant \lambda) = \mathbb{E}\, B_T \mathbf{1}_{\overline{B}_T \geqslant \lambda}$ oraz konstrukcja martyngałów lokalnych zerujących się na zbiorze postaci $\{L_T \geqslant v(\overline{B}_T)\}$, dla $v \in C^1$.

Inspirowany charakteryzacją *max-martyngałów* udowodnioną w rozdziale 6, stawiam hipotezę o kompletnej charakteryzacji martyngałów lokalnych postaci $H(B_t, \overline{B}_t, \underline{B}_t, L_t)$ dla H funkcji borelowskiej. Sądzę jednak, że dowód takiej charakteryzacji będzie wymagał uzupełnienia mojego podejścia z rozdziału 6 o nowe pomysły. Pozostaje to główny otwarty problem wynikający z mojego doktoratu.

Literatura

[1] Jacques Azéma and Marc Yor. Une solution simple au problème de Skorokhod. In *Séminaire de Probabilités, XIII*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 90–115. Springer, Berlin, 1979.

[2] R. V. Chacon and J. B. Walsh. One-dimensional potential embedding. In *Séminaire de Probabilités, X*, pages 19–23. Lecture Notes in Math., Vol. 511. Springer, Berlin, 1976.

[3] Isaac Meilijson. The time to a given drawdown in Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XXXVII*, volume 1832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 94–108. Springer, Berlin, 2003.

[4] Jan Obłój. The Skorokhod embedding problem and its offspring. *Probability Surveys*, 1:321–392, 2004.

[5] Jan Obłój. The maximality principle revisited: on certain optimal stopping problems. In *Séminaire de Probabilités, XL*, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 2006. to appear.

[6] Jan Obłój and Marc Yor. An explicit Skorokhod embedding for the age of Brownian excursions and Azéma martingale. *Stochastic Process. Appl.*, 110(1):83–110, 2004.

[7] Goran Peskir. Optimal stopping of the maximum process: the maximality principle. *Ann. Probab.*, 26(4):1614–1640, 1998.

[8] Goran Peskir. Designing options given the risk: the optimal Skorokhod-embedding problem. *Stochastic Process. Appl.*, 81(1):25–38, 1999.

[9] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[10] D. H. Root. The existence of certain stopping times on Brownian motion. *Ann. Math. Statist.*, 40:715–718, 1969.

[11] A. V. Skorohod. *Issledovaniya po teorii sluchainykh protsessov (Stokhasticheskie differentsialnye uravneniya i predelnye teoremy dlya protsessov Markova)*. Izdat. Kiev. Univ., Kiev, 1961.