Podporządkowane ruchy Browna na fraktalach i związane z nimi losowe operatory Schrödingera

(autoreferat)

Hubert Balsam

W tej rozprawie rozważamy relatywistyczny proces stabilny na przestrzeniach metrycznych (F, ρ, μ), będących $d-$zbiorami. Znajdujemy oszacowanie na jego gęstość przejścia a następnie wyznaczamy dziedzinę formy Dirichleta i podajemy jej postać. Wprowadzamy definicję nieograniczonych fraktali zagnieżdżonych $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ wraz z ich podstawowymi własnościami i udowadaniamy twierdzenia dotyczące oszacowań gęstości przejścia dla procesów stabilnych i relatywistycznych na tejże przestrzeni, odbijanych przy dojściu do brzegu. Ponadto rozważamy temat całkowej gęstości stanów (IDS) i dowodzimy twierdzeń dotyczących istnienia osobliwości Lifschitza IDSu dla procesów podporządkowanych na nieskońzoncych fraktalach zagnieżdżonych z potencjałami typu kratowego i Poissonowskiego.

1. Motywacja

Teoria procesów stochastycznych na fraktalach jest rozwijana od ponad czterdziestu lat. Pierwszy został skonstruowany ruch Browna na trójkącie Sierpińskiego [8] oraz dywanie Sierpińskiego [6], a następnie na zagnieżdżonych fraktalach [36, 32, 18], jak również na bardziej ogólnych przestrzeniach metrycznych [45]. W przypadku fraktali rozważane procesy są dyfuzjami na przestrzeniach stanów zwanymi $d-$zbiorami, a ponadto są jednoznaczne z dokładnością do liniowej zmiany czasu [41, 7]. W rozważanych przypadkach skonstruowany proces jest mocnym procesem Markowa na przestrzeni metrycznej (F, ρ, μ) z ciągłymi trajektoriami i posiada gęstość prawdopodobieństw przejścia, która spełnia oszacowanie sub-gaussowskie:

$$C_{g.1} t^{-d/d_w} \exp\left\{-C_{g.2} \left(\rho(x,y) t^{-1/d_w}\right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}\right\}$$
$$\le g(t,x,y) \le C_{g.3} t^{-d/d_w} \exp\left\{-C_{g.4} \left(\rho(x,y) t^{-1/d_w}\right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}\right\},$$

gdzie d_w to tzw. wymiar błądzenia F, stała d_J to tzw. współczynnik chemiczny F, a $C_{g.1}, ..., C_{g.4} > 0$ to pewne stałe.

Procesy dyfuzji na zbiorach nieregularnych stały się popularne w związku z teorią nieregularnych przepływów, np. procesów, które ewoluują na krytycznych klastrach perkolacyjnych - klastry te wykazują wysoki poziom samopodobieństwa. Szerszy opis zjawisk fizycznych związanych z tym tematem Czytelnik znajdzie w [20] a aspekt matematyczny jest szeroko opisany w [5]. W tym kontekście rozważano również nieciągłe procesy o wartościach w ogólnych przestrzeniach metrycznych (wymagane są pewne warunki regularności). Jak do tej pory najlepiej przebadane są procesy stabilne (niekoniecznie w przestrzeni Euklidesowej) zdefiniowane niezależnie w [13] i [15]. W przestrzeni $\mathbb{R}^d$ rozważamy procesy $2\alpha-$stabilne, gdzie $\alpha \in (0,1)-$generatorem takiego procesu jest ułamkowy Laplasjan $-(-\Delta)^\alpha$. W terminologii fizycznej jest to *hamiltonian ultra-relatywistyczny.* Z matematycznego punktu widzenia, naturalnym jest rozważać *hamiltoniany relatywistyczne* $-(-c\Delta + m^{1/\alpha})^\alpha + m$, $m > 0$, $c > 0$, które są bardzo ważnymi przybliżeniami ultra-relatywistycznej mechaniki kwantowej. W szczególności gdy $\alpha = \frac{1}{2}$, Hamiltonian $\sqrt{-\hbar c^2 \Delta + m^2 c^4}$ (nazywany *operatorem pierwiastkowym Kleina-Gordona* lub *hamiltonianem quasi-relatywistycznym*) jest często używany do opisania ruchu *swobodnej cząsteczki quasi-relatywistycznej.* W tym przypadku m jest masą cząsteczki, c jest prędkością światła, a $\hbar$ jest zredukowaną stałą Plancka. Operator $-\mathcal{L} := \sqrt{-\hbar c^2 \Delta + m^2 c^4} - mc^2$ jest również nazywany *operatorem energii kinetycznej.* Na teorię tą silnie wpłynęły badania nad stabilnością relatywistycznej materii prowadzonych przez Lieba i Seiringera [34]. W tej rozprawie doktorskiej proponujemy definiować proces relatywistyczny αd_w-stabilny na zadanej przestrzeni metrycznej (F, ρ, μ), poprzez subordynację Bochnera względem ruchu Browna na F. Ta klasyczna procedura, wprowadzona przez Bochnera [11, 12] daje narzędzie do tworzenia nowych półgrup (operatorów, procesów) z już istniejących. Więcej na temat subordynacji Czytelnik znajdzie w [9, 10, 42]. Metoda subordynacji została użyta m.in. w pracy [16] - rozważano w niej twierdzenie o śladzie dla procesów subordynowanych na obszarach $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o nieregularnym brzegu.

W tej pracy doktorskiej nie wymagamy, aby zbiór stanów procesu był podzbiorem przestrzeni Euklidesowej, a nawet jeśli nim jest, to wprowadzamy własną metrykę, która może nie być porównywalna z Euklidesową. Wychodząc od ruchu Browna na danym zbiorze nieregularnym (zupełnie abstrakcyjnym, niekoniecznie będącym brzegiem dziedziny w $\mathbb{R}^n$) poprzez subordynację otrzymujemy proces na tej samej nieregularnej przestrzeni. Stabilne subordynatory zostały wprowadzowne w związku z [13], a my pracujemy m.in z blisko powiązanymi, jednak bardziej skomplikowanymi, subordynatorami relatywistycznymi.

Równolegle do rozważań stochastycznych wywodzących się głównie z fizyki matematycznej, istniało żywe zainteresowanie teorią przestrzeni funkcji na zbiorach nieregularnych. Początkowo teoria ta była rozwijana w przypadku zbiorów będącymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$, włączając fraktale (więcej [24, 49, 48] i literatura tamże). W szczególności na zbiorach tych były wprowadzane i analizowane przestrzenie Biesowa. Przestrzenie te zostały naturalnie połączone z dyfuzjami na fraktalach, okazuje się bowiem, że dziedzina formy Dirichleta ruchu Browna to przestrzeń Biesowa (zob. [25] dla trójkąta Sierpińskiego, [39] dla $d-$zbiorów). Przestrzenie funkcji na fraktalach, i ogólniej na przestrzeniach metrycznych były regularnie analizowane (np. [22, 23, 33, 19]). Zwracamy uwagę również na dwie prace dotyczące twierdzeń o śladach: [26] na trójkącie Sierpińskiego i [21] na ogólnych fraktalach.

2. Wyniki

Główne wyniki doktoratu pochodzą z prac [1, 2, 3, 4]. W pracy [4] zajmujemy się oszacowaniami gęstości przejścia dla procesów relatywistycznych na $d-$zbiorach. W szczególności, oszacowania te zachodzą dla zbiorów fraktalnych. Kontynuując ten temat, w pracy [1] uzyskujemy oszacowania dla odbijanych procesów relatywistycznych na fraktalach. Wykazujemy, że gęstość przejścia w przypadku odbijanego αd_w-stabilnego subordynowanego ruchu Browna spełnia oszacowanie

$$\begin{aligned} O_{S.1} p_S(t,x,y) \le p_S^M(t,x,y) \le \quad & O_{S.2} p_S(t,x,y) \quad \text{dla } t < L^{\alpha M d_w} \\ O_{S.3} L^{-Md} \le p_S^M(t,x,y) \le \quad & O_{S.4} L^{-Md} \quad \text{dla } t \ge L^{\alpha M d_w}, \end{aligned}$$

gdzie $O_{S.1}, O_{S.2}, O_{S.3}, O_{S.4}$, to pewne stałe a $p_S(\cdot,\cdot,\cdot)$ to gęstość procesu αd_w-stabilnego. Parametr L to czynnik skalujący fraktala. W przypadku relatywistycznego odbijanego procesu αd_w- stabilnego uzyskujemy oszacowanie postaci

1) istnieją stałe $O_{R.1}, O_{R.2} > 0$ takie, że dla $t \geq L^{Md_w}$, $x, y \in \mathcal{K}^{\langle M \rangle}$

$$O_{R.1} L^{-Md} \leq p_R^M(t,x,y) \leq O_{R.2} L^{-Md}.$$

2) istnieje stała H_1 taka, że dla $t < L^{Md_w}$,

$$p_R(t,x,y) \leq p_R^M(t,x,y) \leq p_R(t, H_1 x, H_1 y),$$

gdzie $O_{R.1}, O_{R.2}, H_1$ to pewne stałe, a $p_R(\cdot,\cdot,\cdot)$ to gęstość relatywistycznego procesu αd_w- stabilnego.

Właściwości subordynowanego procesu stabilnego na $d-$zbiorach, włączając oszacowanie gęstości przejścia, były analizowane w [13, 44] przez Bogdana, Stósa i Sztonyka. Postępując podobnie jak w [13], w tej pracy udowadniamy dolne i górne szacowanie gęstości przejścia relatywistycznego procesu stabilnego na $d-$zbiorach, następnie znajdujemy formę Dirichleta tego procesu. Wyniki powyższe uzyskujemy, używając jedynie subordynacji i kilku znanych właściwości subordynatorów $\alpha-$stabilnych.

Bardziej szczegółowo, oznaczając przez $p_R(\cdot,\cdot,\cdot)$ gęstość przejścia subordynowanego relatywistycznego procesu αd_w-stabilnego na $d-$zbiorze (F, ρ, μ), udowadniamy, że

(1) dla $t \geq 1$ i $x, y \in F$,

$$p_R(t,x,y) \asymp C_* t^{-d/d_w} \exp\left\{-C_* \min\left(\rho(x,y), \left(\rho(x,y) t^{-1/d_w}\right)^{\frac{d_w}{d_w-1}}\right)\right\},$$

(2) dla $t \in (0,1)$, $x, y \in F$, $\rho(x,y) \geq 1$

$$p_R(t,x,y) \asymp C_* t \exp\left\{-C_* \rho(x,y)\right\},$$

(3) dla $t \in (0,1)$, $x, y \in F$, $\rho(x,y) < 1$

$$p_R(t,x,y) \asymp C_* \min\left(t \rho(x,y)^{-d-\alpha d_w}, t^{-d/(\alpha d_w)}\right),$$

gdzie przez C_* oznaczamy stałe, które mogą być różne w szacowaniu dolnym i górnym. Oszacowania te są spójne z oszacowaniami dla relatywistycznego procesu w $\mathbb{R}^d$ z [15]. Jeszcze tylko wspomnimy, że w przypadku przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{R}^d$, jest możliwe (zob. [31]) uzyskanie oszacowania górnego i dolnego z tą samą stałą w wykładniku potęgi we wzorze (2).

Drugim celem w tej pracy jest badanie tzw. *całkowej gęstości stanów* (IDS) na fraktalach i uzyskanie osobliwości Lifschitza dla szerokiej klasy procesów podporządkowanych - w tym dla procesów relatywistycznych (poprzednie wyniki [28] nie pokrywały tego przypadku, nawet na trójkącie Sierpińskiego). Wyniki te zostały uzyskane w pracach [2, 3].

IDS to jeden z najważniejszych obiektów w mechanice kwantowej, przydatny w modelach, w których analizujemy zachowanie/ruch cząsteczki w pewnym losowym ośrodku na przestrzeni nieskończonej. W naszym przypadku będzie to nieograniczony fraktal zagnieżdżony oznaczany przez $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$. Sam ruch cząsteczki modelujemy poprzez zwykły proces Markowa z generatorem H_0, natomiast losowość modelujemy w ten sposób, że dodajemy losowy potencjał V^ω, niezależny od H_0. W związku z powyższym, otrzymujemy losowy operator Schrödingera $H^\omega = H_0 + V^\omega$ gdzie H_0 opisuje energię kinetyczną cząsteczki, a V^ω jest losowym potencjałem interpretowanym jako operator mnożenia. Ze względu na fakt, że proces odpowiadający operatorowi H^ω działa na przestrzeni nieograniczonej ($\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$), to jego spektrum zwykle nie jest dyskretne i w związku z tym jest trudno taki operator badać. Obejściem tego problemu jest obcięcie operatora H^ω do pewnych sympleksów $\Delta_M, M \in \mathbb{Z}_+$, w ten sposób, że $\Delta_M \nearrow \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ gdy $M \to \infty$. Operator H^ω_M odpowiadający operatorowi H^ω obciętemu do sympleksu Δ_M ma już własności, które można łatwiej analizować. Operator taki generuje półgrupę operatorów zwartych, więc jego spektrum jest dyskretne oraz wszystkie wartości własne mają skończoną krotność. W rezultacie definiujemy obiekt - miarę związaną z wartościami własnymi operatora H^ω_M:

$$\Lambda_{H^\omega_M} := \frac{1}{|\Delta_M|}\Sigma_{i=1}^{\infty}\delta_{\lambda_i^{H^\omega_M}}$$

gdzie $\lambda_i^{H^\omega_M}$ to wartości własne operatora H^ω_M. Są to miary losowe. Następnie rozważamy ich słabą granicę gdy $M \to \infty$. Jeżeli granica istnieje, to nazywamy ją *całkową gęstością stanów* (ang. *integrated density of states*, w skrócie IDS) i będziemy ją oznaczać przez Λ.

W tej pracy skupimy się na dwóch przypadkach gdy losowy potencjał V^ω

będzie typu Poissona lub Andersona (tzn. potencjał kratowy, ang. *alloy-type*).

Dla dostatecznie regularnych fraktali (spełniających tzw. własność dobrego etykietowania), szerokiej klasy procesów subordynowanych, oraz odpowiedniej regularności profilu potencjału, IDS istnieje tak w przypadku potencjałów kratowych, jak i Poissonowskich. Po wykazaniu istnienia całkowej gęstości stanów - co jednak nie jest głównym celem tej pracy - skupiamy się na udowodnieniu, że w tych przypadkach, po niewielkim ograniczeniu dopuszczalnej klasy potencjałów, zachodzi tzw. całkowa osobliwość Lifschitza. Polega ona na tym, że tempo zaniku IDS w okolicach zera jest w tym przypadku jakościowo szybsze (wykładnicze) niż w przypadku nielosowym (zanik wielomianowy). Własność ta została odkryta przez Lifschitza [35], a następnie wykazana w wielu przypadkach. O ile dla ruchu Browna w przypadku nielosowego potencjału, mamy, że $\Lambda((0,\lambda]) \asymp \lambda^{d/2}$ dla małych λ, to przy wprowadzeniu losowości wielkość ta zachowuje się jak $e^{-C\lambda^{-d/2}}$. Za pomocą różnych metod, istnienie osobliwości Lifschitza zostało wykazane dla wielu klas procesów, i tak, w [37] dla procesów Levy'ego w $\mathbb{R}^d$, w [40] dla ruchu Browna na trójkącie Sierpińskiego, w [43] dla ruchu Browna na fraktalach, w [28] dla procesów podporządkowanych (np. stabilnych) na trójkącie Sierpińskiego – w wymienionych pracach rozpatrywany był potencjał Poissonowski. Ponadto w pracach [47, 46] jest rozpatrywany pochłaniający potencjał Poissonowski dla ruchu Browna odpowiednio w $\mathbb{R}^d$ oraz na przestrzeniach hiperbolicznych. Z kolei w [29] udowodnione zostało istnienie osobliwości Lifschitza dla procesów podporządkowanych z potencjałem kratowym w $\mathbb{R}^d$, a w pracy [14], jest rozważana gęstość stanów na kracie $\mathbb{Z}^d$. We wszystkich tych pracach zostało udowodnione, że

$$\begin{aligned} -\widetilde{L}_1 &\leq \liminf_{\lambda\searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0,\lambda])}{g(\widetilde{R}_1/\lambda)}; \\ & \limsup_{\lambda\searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha d_w}} \ln \Lambda([0,\lambda])}{g(\widetilde{R}_2/\lambda)} \leq -\widetilde{L}_2, \end{aligned} \tag{0.1}$$

gdzie $\widetilde{L}_1$ i $\widetilde{L}_2$ to stałe dodatnie, a g jest pewną funkcją, zależną od potencjału V^ω. W przypadku potencjału Poissonowskiego oraz niektórych potencjałów kratowych funkcja g nie jest potrzebna, natomiast dla ogólnych potencjałów kratowych g jest istotnym wkładem do asymptotyki Λ w okolicach zera.

W doktoracie dowodzimy istnienie osobliwości Lifschitza dla procesów podporządkowanych na fraktalach zagnieżdżonych (klasa procesów jest istotnie szersza niż w [30]) i dwóch typów potencjałów: kratowego i Poissonowskiego. Otrzymujemy zależność (0.1), tak jak we wcześniej rozpatrywanych przypadkach.

3. Struktura pracy

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje obiektów, z którymi będziemy pracować przez całą pracę. W szczególności podajemy definicje dyfuzji ułamkowych, $d-$zbiorów, $d-$miar jak również definicje i własności procesów subordynowanych. Omawiamy subordynatory $\alpha-$stabilne oraz relatywistyczne $\alpha-$stabilne i odpowiadające im procesy αd_w-stabilne oraz relatywistyczne αd_w-stabilne.

W rozdziale drugim rozważamy relatywistyczny proces αd_w-stabilny na przestrzeniach metrycznych (F, ρ, μ) będących $d-$zbiorami. W szczególności osobno dowodzimy oszacowania gęstości wyżej wymienonego procesu dla dużych i małych czasów. Okazuje się, że dla dużych czasów i dużych odległości, relatywistyczny proces αd_w-stabilny zachowuje się podobnie (z dokładnością do stałych) do zwykłego ruchu Browna, a dla małych czasów jego zachowanie jest niemal takie samo jak procesu αd_w-stabilnego. Rozdział kończymy twierdzeniem, w którym wyznaczamy dziedzinę formy Dirichleta relatywistycznego procesu αd_w- stabilnego, a ponadto podajemy jej postać.

W rozdziale trzecim wprowadzamy definicję nieograniczonych fraktali zagnieżdżonych $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ wraz z ich podstawowymi własnościami. Ponadto opisujemy właściwość dobrego etykietowania (ang. *good labeling property* - GLP) fraktala, pochodzącą z [27]. Pokrótce, powiemy że dany nieograniczony zagnieżdżony fraktal posiada GLP, o ile można określić ciągłe rzutowanie z niego samego na ograniczony jego fragment, będący sympleksem fraktalnym. Następnie wprowadzamy ruch Browna na nieograniczonym fraktalu zagnieżdżonym, jak również definiujemy odbijany ruch Browna oraz subordynowany ruch Browna na fraktalu ograniczonym $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, M \in \mathbb{Z}_+$. Na zakończenie rozdziału podajemy szereg użytecznych lematów, z których będziemy korzystać w następnych rozdziałach, a które dowodzą właściwości procesów zdefiniowanych w tym rozdziale.

Rozdział czwarty zawiera twierdzenia dotyczące oszacowań gęstości przejścia dla procesów zdefiniowanych w rozdziale trzecim. Chodzi o procesy stabilne i relatywistyczne na fraktalach ograniczonych, odbijane przy dojściu do brzegu. Pierwsze twierdzenie dotyczy oszacowania gęstości przejścia subordynowanego procesu αd_w-stabilnego i pokazuje ono, że dla małych czasów, proces zachowuje się tak samo jak zwykły proces αd_w-stabilny podczas gdy dla dużych czasów, gęstość przejścia jest zbliżona do gęstości rozkładu jednostajnego na $\mathcal{K}^{\langle M \rangle}$. Kolejne twierdzenie dotyczy oszacowania gęstości przejścia relatywistycznego procesu αd_w-stabilnego. Również i to twierdzenie pokazuje, że dla małych czasów proces zachowuje się jak zwykły proces relatywistyczny stabilny a dla dużych czasów jego gęstość jest zbliżona do gęstości rozkładu jednostajnego na $\mathcal{K}^{\langle M \rangle}$.

W rozdziałach piątym, szóstym i siódmym rozważamy temat całkowej gęstości stanów (IDS). I tak, w rozdziale piątym, definiujemy wszystkie niezbędne obiekty potrzebne do opisania IDSu. W szczególności opisujemy losowe operatory Schrödingera, definiujemy potencjały z którymi będziemy pracować (kratowy i Poissona), ich periodyzację, jak również podajemy założenia, przy których w następnych rozdziałach udowodnimy istnienie osobliwości Lifschitza IDSu dla wymienionych potencjałów. Wprowadzamy oznaczenia dotyczące półgrup i operatorów, przypominamy definicję klasy Kato, półgrup Feynmanna-Kaca i udowadniamy twierdzenia mówiące o tym, że przy naszych założeniach funkcje profilu dla potencjału kratowego i Poissona należą do odpowiednich klas Kato, co pozwala na ścisłe, poprawne stosowanie tych metod. Rozdział piąty kończymy sformułowaniem twierdzenia o isnieniu IDSu dla zadanych potencjałów. Dowody niewiele różnią się od tych z [28, 38], więc przedstawiamy je tylko szkicowo w Dodatku.

Rozdział szósty zawiera dowód twierdzenia o występowaniu osobliwości Lifschitza dla IDSu w przypadku procesów subordynowanych z potencjałem typu kratowego na nieskończonych fraktalach zagnieżdżonych. Na ten dowód składa się udowodnienie oszacowań górnych i dolnych odpowiedniej transformaty Laplace'a miary granicznej a następnie skorzystanie z twierdzeń Tauberowskich typu mieszanego z pracy [29].

Podobnie jak rozdział szósty, rozdział siódmy zawiera dowód twierdzenia o występowaniu osobliwości Lifschitza dla IDSu w przypadku procesów subordynowanych z potencjałem typu Poissonowskiego na nieskończonych fraktalach zagnieżdżonych. Analogicznie, na dowód składa się udowodnienie oszacowań górnych i dolnych transformaty Laplace'a i skorzystanie z twierdzeń Tauberowskich, tym razem, prostszych - typu eksponencjalnego z pracy

[17]. Dla kompletności tezy, w Dodatku zamieszczamy dowody lematów z rozdziału 3 (pochodzące z pracy [2]), a także dowody istnienia całkowej gęstości stanów.

Literatura

[1] Balsam, H.,*Transition density estimates for subordinated reflected Brownian motion on simple nested fractals*, 2021, available at: arXiv:2106.00081.

[2] Balsam, H., Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K.,*Density of states for the normal Anderson model on nested fractals*, preprint

[3] Balsam, H., Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K.,*IDS for subordinate Brownian motions in Poisson random environment on nested fractals*, preprint.

[4] Balsam H., Pietruska-Pałuba K.,*Transition density estimates for relativistic $\alpha-$stable processes on metric spaces.* PMS (2020), Vol. 40, Fasc. 2, pages 183 - 204.

[5] Barlow, M. T.,*Diffusion on fractals*, Lectures on Probability and Statistics, Ecole d'Eté de Prob. de St. Flour XXV — 1995, Lecture Notes in Mathematics no. 1690, Springer-Verlag, Berlin 1998.

[6] Barlow, M. T., Bass, R. F., *The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 25 (1989), pp. 225–257.

[7] Barlow, M. T., Bass, R. F., T. Kumagai, A. Teplyaev, *Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 12 (2010), pp. 655–701.

[8] Barlow, M. T., Perkins, E. A., *Brownian motion on the Sierpiński gasket*, Prob. Th. Rel. Fields 79 (1988), pp. 543–623.

[9] Bertoin, J., *Lévy Processes.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[10] Bertoin, J., *Subordinators: examples and applications*, in: École d'Été de Probabilités de St. Flour XXVII, P. Bernard (ed.), Lecture Notes in Mathematics no. 1717, Springer, 1999, pp. 4–79.

[11] Bochner, S., *Diffusion Equation and Stochastic Processes,* Proc. Natl. Acad. Sci. 35 (1949), pp. 368–370.

[12] Bochner, S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability,* California Monographs in Math. Sci., University of California Press, Berkeley CA, 1955

[13] Bogdan, K., Stós, A., Sztonyk, P., *Harnack inequality for stable processes on d-sets*, Studia Math. 158 (2), (2003), 163–198.

[14] Carmona R., Lacroix J.,*Spectral theory of random Schoedinger operators.* Birkhauser, 1990.

[15] Chen, Z.-Q., Kumagai, T., *Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets*, Stoch. Proc. Appl. 108 (2003), pp. 27–62.

[16] Farkas, W., Jacob, N., *Sobolev Spaces on Non-Smooth Domains and Dirichlet Forms Related to Subordinate Reflecting Diffusions*, Math. Nachr. 224 (2001), 75–104.

[17] Fukushima, M., *On the spectral distribution of a disordered system and a range of a random walk* Osaka J. Math. 11, 1974, 73-85.

[18] Fukushima, M., *Dirichlet forms, diffusion processes, and spectral dimensions for nested fractals.* In: *Ideas and methods in stochastic analysis, stochastics and applications*, 151–161. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1992.

[19] Grigor'yan, A., *Heat kernels and function theory on metric measure spaces.* In: *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, pp. 143–172, Contemp. Math., 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[20] Havlin, S., Ben-Avraham, D., *Diffusion in disordered media*, Adv. Phys. 36 (1987), pp. 695–798.

[21] Hino, M., Kumagai, T., *A trace theorem for Dirichlet forms on fractals*, J. Funct. Anal. 238 (2006), pp. 578–611.

[22] Hu, J., Zähle, M., *Potential spaces on fractals*, Studia Math. 170 (2005), pp. 259–281.

[23] Hu, J., Zähle, M., *Generalized Bessel and Riesz potentials on metric measure spaces*, Potential Anal. 30 (2009), pp. 315–340.

[24] Jonsson, A., Wallin, H., *Function spaces on subsets of* $\mathbb{R}^n$, Mathematical Reports Vol. 2, Part 1, Harwood Acad. Publ. 1984.

[25] Jonsson, A., *Brownian motion on fractals and function spaces.* Math. Z. 222 (1996), pp. 495–504.

[26] Jonsson, A., *A trace theorem for the Dirichlet form on the Sierpinski gasket.* Math. Z. 250 (2005), pp. 599–609.

[27] Kaleta, K., Olszewski, M., Pietruska-Pałuba, K., *Reflected Brownian motion on simple nested fractals*, Fractals 27 (6), 2019, 1950104 1-29

[28] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Lifschitz singularity for subordinate Brownian motions in presence of the Poissonian potential on the Sierpiński gasket,* Stochastic Processes and their Applications, 2018. Vol. 128, no. 11, 3897–3939

[29] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Lifschitz tail for continuous Anderson models driven by Lévy operators*, Communications in Contemporary Mathematics, 2021. Vol. 23, no. 06, 1–33

[30] Kaleta, K., Pietruska-Pałuba, K., *Lifschitz tail for Alloy-type models driven by the fractional Laplacian,* Journal of Functional Analysis. 2020, vol. 279, no 5, 1–23.

[31] Kaleta, K., Sztonyk, P., *Small-time sharp bounds for kernels of convolution semigroups,* J. Anal. Math. 132, no. 1 (2017), pp. 355–394.

[32] Kumagai, T., *Estimates on transition densities for Brownian motion on nested fractals*, Prob. Th. Rel. Fields, 96 (1993), pp. 205–224.

[33] Kumagai, T.,, *Function spaces and stochastic processes on fractals. Fractal geometry and stochastics III*, pp. 221–234, Progr. Probab., 57, Birkhäuser, Basel, 2004.

[34] Lieb, E. H., Seiringer, R., *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2009.

[35] Lifschitz I.M., *Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems*, Soviet Physics Uspekhi 7 (1965), 549-573.

[36] Lindstrøm, T., *Brownian motion on nested fractals*, Mem. Amer. Math. Soc. 420 (1990), pp. 1–128.

[37] Okura H., *On the spectral distributions of certain integro-differential operators with random potential*, Osaka J. Math. 16 (1979), no. 3, 633-666.

[38] Olszewski, M., *Stochastic processes on fractals and in random media*, praca doktorska. Wrocław, April 2020.

[39] Pietruska-Pałuba, K., *On function spaces related to the fractional diffusions on d-sets*, Stoch. and Stoch. Reports 70 (2000), pp. 153–164.

[40] Pietruska-Pałuba, K., *The Lifschitz singularity for the density of states on the Sierpinski gasket*, Probab. Theory Related Fields 89 (1991), no. 1, 1-33.

[41] Sabot, C., *Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 30 (1997), pp. 605–673.

[42] Schilling, R., Song, R., Vondracek, Z., *Bernstein functions. Theory and applications.* De Gruyter Studies in Mathematics, 37. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2010.

[43] Shima, T., *Lifschitz tails for random Schrödinger operators on nested fractals*, Osaka J. Math 29, 1992, 749–770.

[44] Stós, A., *Symmetric α-stable processes on d-sets.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48 (2000), no. 3, 237–245.

[45] Sturm, K.-T., *Diffusion processes and heat kernels on metric spaces*, Ann. Probab. 26 (1998), pp. 1–55.

[46] Sznitman, A.S., *Lifschitz tail and Wiener sausage on hyperbolic space*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 1033-1065.

[47] Sznitman, A.S., *Lifschitz tail on hyperbolic space: Neumann conditions*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 1-30.

[48] Triebel, H., *Theory of function spaces. III.* Monographs in Mathematics, 100. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[49] Triebel, H., *Fractals and spectra. Related to Fourier analysis and function spaces*, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2011.