Anna Talarczyk

CZAS LOKALNY SAMOPRZECIĘĆ PROCESÓW GAUSSOWSKICH W $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$

Autoreferat

Czas lokalny samoprzecięć procesów o wartościach w przestrzeni skończenie wymiarowej ma bogatą literaturę, również najnowszą. Można tu wymienić na przykład prace Lévy'ego [Lev], Le Gall'a [LG1], [LG2], [LG3], Dynkina [Dy1], [Dy2], [Dy3], Rosena [Ro1], [Ro3], Marcusa i Rosena [MR1], [MR2], Yora [Y], Imkellera i innych [IPV], [IW].

Badanie czasu lokalnego samoprzecięć procesów o wartościach w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych zostało zapoczątkowane przez Dynkina [Dy4] dla superprocesów. Kontynuował je Rosen w [Ro2]. Inną ważną klasę stanowią procesy o wartościach w przestrzeni dystrybucji temperowanych $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Pojawiają się one w naturalny sposób np. jako granice fluktuacji układów cząstek (patrz Rozdział 3 pracy), a więc jako granice procesów o wartościach miarowych, a także jako rozwiązania równań opisujących różne zjawiska fizyczne, jak np. działanie neuronów czy rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń ([KX]). Przestrzeń $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, jako przestrzeń sprzężona do nuklearnej przestrzeni Frécheta ma dobre własności probabilistyczne.

Adler i Rosen [AR], zajmowali się najprostszym α-stabilnym procesem gęstości w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, badając czas lokalny samoprzecięć dowolnej krotności, jak też rozbieżność, gdy czas lokalny samoprzecięć nie istnieje. Prace Bojdeckiego i Gorostizy [BG2]-[BG5] dotyczą znacznie szerszej klasy procesów w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, ale poświęcone są wyłącznie badaniu istnienia i ciągłości czasu lokalnego tylko dwukrotnych samoprzecięć, brak jest wyników dotyczących samoprzecięć wielokrotnych a także analizy rozbieżności. Te artykuły, pozostawiając wiele otwartych problemów były ważną inspiracją do powstania przedstawianej pracy doktorskiej.

W pracy doktorskiej rozważamy procesy występujące w [BG3] i [BG4]. Zajmujemy się kwestią istnienia i ciągłości trajektorii czasu lokalnego k-krotnych samoprzecięć (w skrócie k-SILT, od ang. "self-intersection local time") dla dowolnego k, a w przypadku gdy SILT nie istnieje, badamy typ rozbieżności procesów, które miały przybliżać SILT. Badając rozbieżność ograniczamy się głównie do dwukrotnych samoprzecięć. Wyniki tu przedstawiane zostały zawarte w pracach [Ta1] i [Ta2].

Ustalmy ciągły, scentrowany proces gaussowski $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$, o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Intuicyjnie, czas lokalny k-krotnych samoprzecięć powinien mieć postać

$$\langle L(t),\varphi\rangle = \int_{[0,t]^k} \langle X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k}, \varphi(x_1)\delta(x_1-x_2)\ldots\delta(x_1-x_k)\rangle\, ds_1\ldots ds_k, \qquad (1)$$

gdzie $\otimes$ oznacza produkt tensorowy dystrybucji, δ jest dystrybucją Diraca, a φ należy do przestrzeni Schwartza funkcji gładkich, szybko znikających w nieskończoności, oznaczanej przez $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Oczywiście zapis (1) nie jest poprawny, ponieważ δ nie jest funkcją z $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Aby nadać sens temu wyrażeniu konstruuje się pole losowe $:X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k}:$ o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{kd})$, znormalizowane przy pomocy iloczynu Wicka (patrz str. 17-19 pracy). Na funkcjach prostej postaci $\Phi = \varphi^{(1)}\otimes\ldots\otimes\varphi^{(k)}$, gdzie $\varphi^{(i)}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, to pole losowe ma postać

$$\langle :X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k}:,\varphi^{(1)}\otimes\ldots\otimes\varphi^{(k)}\rangle = :\langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle\ldots\langle X_{s_k},\varphi^{(k)}\rangle:, \tag{2}$$

gdzie $:\cdot:$ po prawej stronie oznacza iloczyn Wicka rzeczywistych zmiennych losowych o łącznym rozkładzie gaussowskim.

Np. dla $k=2$ zachodzi

$$\langle :X_{s_1}\otimes X_{s_2}:,\varphi^{(1)}\otimes\varphi^{(2)}\rangle = \langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle\langle X_{s_2},\varphi^{(2)}\rangle - E\,\langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle\langle X_{s_2},\varphi^{(2)}\rangle.$$

Już przy $k=3$ normalizacja jest niedeterministyczna:

$$\begin{aligned}&\langle :X_{s_1}\otimes X_{s_2}\otimes X_{s_3}:,\varphi^{(1)}\otimes\varphi^{(2)}\otimes\varphi^{(3)}\rangle\\ &\quad= \langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle\langle X_{s_2},\varphi^{(2)}\rangle\langle X_{s_3},\varphi^{(3)}\rangle - \langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle E\,\langle X_{s_2},\varphi^{(2)}\rangle\langle X_{s_3},\varphi^{(3)}\rangle\\ &\qquad - \langle X_{s_2},\varphi^{(2)}\rangle E\,\langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle\langle X_{s_3},\varphi^{(3)}\rangle - \langle X_{s_3},\varphi^{(3)}\rangle E\,\langle X_{s_1},\varphi^{(1)}\rangle\langle X_{s_2},\varphi^{(2)}\rangle.\end{aligned}$$

Definiujemy procesy $L_\varepsilon^{X,f,k}$ przybliżające wyrażenie formalne (1) (Definicja 4.5 w pracy):

$$\langle L_\varepsilon^{X,f,k}(t),\varphi\rangle = \int_{[0,t]^k}\langle :X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k}:,\Phi^f_{\varepsilon,\varphi}\rangle\,ds_1\ldots ds_k,\quad \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

gdzie

$$\Phi^f_{\varepsilon,\varphi}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \varphi(x_1)f_\varepsilon(x_2-x_1)f_\varepsilon(x_3-x_1)\cdots f_\varepsilon(x_k-x_1),$$

$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^d}f(\frac{x}{\varepsilon})$, $f\in\mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest klasą funkcji nieujemnych należących do $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, o nośniku zawartym w kuli jednostkowej i całkujących się do 1. Jeśli $k=2$ to piszemy $L_\varepsilon^{X,f}$.

Podawane poniżej numery definicji, twierdzeń itp. odpowiadają numeracji w rozprawie.

Definicja 4.6. Mówimy, że proces $\{L(t)\}_{t\in[0,1]}$ o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ jest czasem lokalnym k-krotnych samoprzecięć (w skrócie k-SILT) procesu X, jeśli dla wszystkich $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $f\in\mathcal{F}$ i $t\in[0,1]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}E\,|\langle L_\varepsilon^{X,f,k}(t),\varphi\rangle - \langle L(t),\varphi\rangle|^2 = 0.$$

W Części II zajmujemy się istnieniem i ciągłością k-SILTu. Ogólny schemat dowodzenia tych faktów, dla dowolnego ciągłego, scentrowanego procesu gaussowskiego jest uogólnieniem [BG2], Theorem 2.4, które było sformułowane dla 2-SILTu.

Twierdzenie 4.7. *Załóżmy, że X jest ciągłym, scentrowanym procesem gaussowskim o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ i dla $\Phi,\Psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{kd})$ oznaczmy*

$$J_{r_1,\ldots,r_k,s_1,\ldots,s_k}(\Phi,\Psi) = E\,\langle :X_{r_1}\otimes\ldots\otimes X_{r_k}:,\Phi\rangle\langle :X_{s_1}\otimes\ldots\otimes X_{s_k}:,\Psi\rangle$$

Załóżmy, że

(i) $J_{r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_k}(\Phi^f_{\varepsilon,\varphi},\Phi^g_{\delta,\varphi})$ *ma granicę skończoną przy* $\varepsilon,\delta\to 0$ *dla każdych* $f,g\in\mathcal{F}$, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *niezależną od* f *i* g.

(ii) Istnieje funkcja G_φ *na* $[0,1]^{2k}$ *niezależna od* f,g,ε,δ *taka, że*

$$\left|J_{r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_k}(\Phi^f_{\varepsilon,\varphi},\Phi^g_{\delta,\varphi})\right|\le G_\varphi(r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_k)$$
$$\int_{[0,1]^{2k}} G_\varphi(r_1,\dots,r_k,s_1,\dots,s_k)\,dr_1\dots dr_k ds_1\dots ds_k<\infty$$

dla każdego $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Wtedy istnieje czas lokalny k-krotnych samoprzecięć procesu X.

Stwierdzenie dotyczące ciągłości k-SILTu jest rozszerzeniem i uogólnieniem części (iv) Twierdzenia 2.4, [BG2], która jest szczególnym przypadkiem Stwierdzenia przy $k=n=2$. Dopuszczenie $n>2$ daje lepsze wyniki nawet w przypadku dwukrotnych samoprzecięć (patrz np. Twierdzenie 5.9).

Stwierdzenie 4.8. *Załóżmy, że czas lokalny k-krotnych samoprzecięć procesu X istnieje. Jeżeli dla pewnej parzystej liczby naturalnej* $n\ge 2$, *dla każdego* $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *istnieje funkcja* $H_\varphi:[0,1]^{nk}\mapsto\mathbb{R}_+$, *taka że dla dowolnych* $\varepsilon>0$ *i* $f\in\mathcal{F}$

$$|E\,\langle :X_{s_{1,1}}\otimes\cdots\otimes X_{s_{1,k}}:,\Phi^f_{\varepsilon,\varphi}\rangle\cdots\langle :X_{s_{n,1}}\otimes\cdots\otimes X_{s_{n,k}}:,\Phi^f_{\varepsilon,\varphi}\rangle|\le H_\varphi(s_{1,1},\dots s_{n,k})$$

oraz istnieją stałe $C(\varphi)\ge 0$, $\gamma>0$ *i ciągła, niemalejąca funkcja* F *na* $[0,1]$, *takie że dla dowolnych* $0\le t_1\le t_2\le 1$ *zachodzi*

$$\int_{[0,1]^{nk}}\left(1_{[0,t_2]^k}-1_{[0,t_1]^k}\right)(s_{1,1},\dots,s_{1,k})\cdots\left(1_{[0,t_2]^k}-1_{[0,t_1]^k}\right)(s_{n,1},\dots,s_{n,k})$$
$$H_\varphi(s_{1,1},\dots,s_{n,k})ds_{1,1}\dots ds_{n,k}$$
$$\le C(\varphi)(F(t_2)-F(t_1))^{1+\gamma},$$

to k-SILT procesu X jest procesem ciągłym.

Zarówno Twierdzenie 4.7 jak i Stwierdzenie 4.8 dają tylko bardzo ogólny schemat i ich założenia są zwykle trudne do sprawdzenia. Procesy o różnych typach kowariancji wymagają różnych metod dowodzenia.

Dalej ograniczamy się do procesu Wienera w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ oraz procesu Ornsteina–Uhlenbecka (patrz str. 13 pracy), spełniającego równanie Langevina

$$dX_t=\Delta'_\alpha X_t dt+dW_t, \tag{3}$$

gdzie $\Delta_\alpha=-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ jest Laplasjanem ułamkowym, $(0<\alpha\le 2)$, W jest procesem Wienera w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, a warunek początkowy X_0 jest gaussowską zmienną losową o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ niezależną od W. Proces spełniający (3) pojawia się na przykład jako granica fluktuacji układów cząstek ([GR], [BG1], [DGW], patrz też Rozdział 3). Rozwiązanie równania (3) definiuje się jako

$$X_t = T'_t X_0 + \int_0^t T'_{t-s} dW_s,$$

gdzie T_t jest półgrupą przejścia symetrycznego, α-stabilnego procesu w $\mathbb{R}^d$.

Rozpatrujemy oddzielnie proces potoku $T'_t X_0$ oraz proces całkowy $\int_0^t T'_{t-s} dW_s$. Gdy $0 < \alpha < 2$ oba procesy muszą zostać właściwie zdefiniowane, gdyż w tym przypadku półgrupa T_t nie przeprowadza $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ w siebie.

Rozważamy procesy związane zarówno z polami jednorodnymi, jak i niejednorodnymi przestrzennie. Nie będziemy tu opisywać dokładnie wszystkich wyników, a jedynie przedstawimy te najbardziej typowe i najciekawsze.

W Rozdziale 5 rozpatrujemy przypadek jednorodny przestrzennie. X_0 i W są związane z seminormami postaci

$$q(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x) \overline{\hat{\psi}(x)} \sigma(dx), \qquad \varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{4}$$

gdzie σ jest symetryczną, nieujemną miarą temperowaną, a $\hat{}$ oznacza transformatę Fouriera. Takie procesy są ważne i często się pojawiają w przykładach (np. [DS], [Dob], [PZ]). Istnienie i ciągłość 2-SILTów odpowiednich procesów potoku i całkowego oraz procesu Wienera badano w [BG3]. Nasze wyniki dotyczące istnienia k-SILTu uogólniają rezultaty z cytowanej pracy, natomiast w przypadku ciągłości k-SILTu procesu całkowego otrzymujemy wynik lepszy, nawet dla $k = 2$.

Otrzymujemy warunki konieczne i dostateczne na istnienie czasu lokalnego samoprzecięć dowolnej krotności. Niech σ^{*k} oznacza k-krotny splot miary σ. Mówimy, że σ ma własność k-SI jeśli σ^{*k} jest miarą temperowaną.

Dla procesu Wienera zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.3. *Niech W będzie procesem Wienera związanym z seminormą q postaci* (4)*. Jego k-SILT istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy σ ma własność k-SI. Jeśli k-SILT istnieje, to ma ciągłe trajektorie.*

Dla procesów potoku i całkowego mamy:

Twierdzenie 5.4. *Niech W będzie procesem Wienera związanym z seminormą q postaci* (4) *i niech X_0 będzie scentrowaną, gaussowską zmienną losową z kowariancją q. Wtedy k-SILT procesu potoku istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy miara $\sigma_\alpha(dx) = \frac{\sigma(dx)}{1+|x|^{2\alpha}}$ ma własność k-SI. Podobnie, k-SILT procesu całkowego istnieje wtedy i tylko wtedy gdy σ_α ma własność k-SI.*

W przypadku procesu Ornsteina–Uhlenbecka otrzymujemy podobny warunek:

Twierdzenie 5.5. *Niech X_0 będzie scentrowaną gaussowską zmienną losową z kowariancją q_0 postaci* (4) *z miarą σ_0 i niech W będzie procesem Wienera, niezależnym od X_0, związanym z seminormą postaci* (4) *z miarą σ. Wtedy k-SILT procesu Ornsteina–Uhlenbecka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy miara $\frac{\sigma_0(dx)+\sigma(dx)}{1+|x|^{2\alpha}}$ ma własność k-SI.*

Widać więc, że ważne jest sprawdzanie własności k-SI. Dla miar specjalnej postaci, które pojawiają się w przykładach, mamy następujący wynik, Proposition 4.2. [BG3] jest jego szczególnym przypadkiem, gdy $k = 2$ i $\gamma \geq 0$:

Stwierdzenie 5.6. *Niech $\theta \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ i $d > \gamma$. Miara $\sigma(dz) = (1 + |z|^\theta)^{-1} |z|^{-\gamma} dz$ ma własność k-SI wtedy i tylko wtedy, gdy $d < \frac{k}{k-1}(\theta + \gamma)$.*

Zatem dla miar specjalnej postaci, występujących w Stwierdzeniu 5.6 z istnienia $k+1$-SILTu odpowiednich procesów Wienera, potoku, całkowego bądź Ornsteina–Uhlenbecka wynika istnienie k-SILTu. Pokazujemy, że tak jest również dla dowolnych miar σ.

O ciągłości trajektorii k-SILTu procesów potoku i całkowego wiadomo co następuje: Jeśli k-SILT procesu potoku istnieje, to ma ciągłe trajektorie na odcinku $(0, 1]$ (Stwierdzenie 5.10). Jeśli k-SILT procesu całkowego istnieje, to ma ciągłe trajektorie na $[0, 1]$ (Twierdzenie 5.9). Ten ostatni wynik jest lepszy nawet w przypadku $k = 2$ od znanego wcześniej rezultatu z [BG3], gdzie wymagano silniejszego założenia. Podobnie jak w [BG3], Proposition 4.4, przy założeniu nieco silniejszym od warunku koniecznego istnienia k-SILTu dostajemy ciągłość w zerze k-SILTu procesów potoku i Ornsteina–Uhlenbecka. Problem ciągłości w zerze k-SILTu procesu potoku bez dodatkowych założeń pozostaje nadal otwarty.

W pracy [AR] podano warunki na istnienie k-SILTu najprostszego α-stabilnego procesu gęstości, jednak brakowało tam wyników dotyczących ciągłości. Tak więc nasze rezultaty są nowe również dla tak prostego procesu.

Poza przypadkiem jednorodnym przestrzennie rozpatrujemy też przypadek niejednorodny. Zajmujemy się dwiema klasami takich procesów. Pierwszą klasę (patrz Rozdział 6) stanowią procesy, które były też rozpatrywane w [BG4]. Zakładamy, że zmienna losowa X_0 ma kowariancję

$$q_0(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x)\theta(dx), \tag{5}$$

a proces Wienera jest związany z rodziną seminorm

$$q_t(\varphi, \psi) = q_t^{(1)}(\varphi, \psi) + q_t^{(2)}(\varphi, \psi), \tag{6}$$

gdzie

$$q_t^{(1)}(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x)\mu_t(dx), \tag{7}$$

$$q_t^{(2)}(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} [\Delta_\alpha(\varphi\psi) - \varphi\Delta_\alpha\psi - \psi\Delta_\alpha\varphi](x)\nu_t(dx), \tag{8}$$

przy czym θ, μ_t i ν_t są miarami skończonymi na $\mathbb{R}^d$ (niektóre z nich mogą być miarami zerowymi).

Tego typu procesy pojawiają się one na przykład jako granice fluktuacji α-stabilnych układów cząstek jeśli miary intensywności początkowej i imigracji są miarami skończonymi (por. Rozdział 3).

W twierdzeniach korzystamy z faktu pokazanego w [BG4], że seminormy $q_t^{(1)}$ i $q_t^{(2)}$ można zapisać w postaci

$$q_t(\varphi,\psi) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{\varphi}(z)\hat{\psi}(z')h(z,z')\overline{\hat{\mu}_t(z+z')}dzdz', \tag{9}$$

gdzie $h(z,z') \equiv 1$ dla seminormy $q^{(1)}$ oraz $h(z,z') = |z|^\alpha + |z'|^\alpha - |z+z'|^\alpha$ w przypadku $q^{(2)}$ (i $\mu_t = \nu_t$).

Rezultaty dotyczące istnienia k-SILTu dla dowolnego k, które otrzymujemy, mają podobną formę jak w [BG4] dla 2-SILTu. Tak jak w większości twierdzeń we wspomnianej pracy, podajemy warunki dostateczne.

Twierdzenie 6.1. *Niech X_0 będzie scentrowaną zmienną gaussowską z kowariancją q_0 postaci* (9) *z $\mu_t \equiv \mu$ i niech W będzie procesem Wienera związanym z rodziną seminorm postaci* (9)*. Jeśli*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left[\frac{|h(z,z')|\,|\hat{\mu}(z+z')|}{(1+|z|^\alpha)(1+|z'|^\alpha)}\right]^{\frac{k}{k-1}} dzdz' < \infty, \tag{10}$$

to k-SILT procesu potoku istnieje.

Jeśli

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left[\frac{|h(z,z')|\left(\int_0^1 |\hat{\mu}_\tau(z+z')|\,d\tau\right)}{(1+|z|^\alpha)(1+|z'|^\alpha)}\right]^{\frac{k}{k-1}} dzdz' < \infty, \tag{11}$$

to k-SILT procesu całkowego istnieje.

Następne stwierdzenie daje jawny warunek dostateczny istnienia k-SILTu:

Stwierdzenie 6.2. *Niech $m(z) = \int_0^1 |\hat{\mu}_\tau(z)|\,d\tau$. Załóżmy, że dla każdego $K > 0$ oraz pewnych $\delta > 0$ i $p \in [\frac{k}{k-1}, \infty]$*

$$\begin{aligned} (i) \qquad & 1_{|z|\le K} m \in L^{\frac{k}{k-1}}(\mathbb{R}^d), \\ (ii) \qquad & 1_{|z|>\delta} m \in L^p(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Niech $p_0 = \inf\{p : \frac{k}{k-1} \le p \le \infty, (ii) \text{ zachodzi}\}$ i niech

$$\kappa(h) = \begin{cases} 2 & \textit{jeżeli} \quad h \equiv 1 \\ 1 & \textit{jeżeli} \quad h(z,z') = |z|^\alpha + |z'|^\alpha - |z+z'|^\alpha \end{cases}$$

Jeśli $d < \frac{\kappa(h)p_0 k}{2(k-1)p_0 - k}\alpha$ to zachodzi (11).

Jeżeli $h \equiv 1$, to w najlepszym przypadku ($p_0 = \frac{k}{k-1}$), warunkiem dostatecznym istnienia czasu lokalnego k-krotnych samoprzecięć jest $d < 2\frac{k}{k-1}\alpha$, natomiast w najgorszym ($p_0 = \infty$), warunkiem dostatecznym jest $d < \frac{k}{k-1}\alpha$.

Dla $h(z,z') = |z|^\alpha + |z'|^\alpha - |z+z'|^\alpha$ warunki dostateczne przedstawiają się odpowiednio: $d < \frac{k}{k-1}\alpha$ i $d < \frac{k}{2(k-1)}\alpha$.

Dla odpowiednio dobranych miar μ_t, przy $k = 2$ te "najgorsze" warunki mogą być warunkami koniecznymi.

W przypadku ogólnym mamy tylko warunki dostateczne. Pewne warunki konieczne dla istnienia 2-SILTu otrzymujemy badając rozbieżności. Część wniosków jakie stamtąd dostajemy jest powtórzeniem wyników z [BG4], choć niektóre są nieco słabsze, na przykład:

Wniosek 6.4. Załóżmy, że W jest procesem Wienera związanym z rodziną seminorm $q_t^{(1)}$ postaci (7), gdzie $\mu_t \equiv \mu$ i $\hat{\mu} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, bądź też $\mu_t = T_t'\mu$ i $\frac{\hat{\mu}}{1+|\cdot|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dla pewnego $p < 2$. Jeżeli $d \geq 4\alpha$ to 2-SILT procesu całkowego nie istnieje.

Podobnie, jeżeli X_0 ma kowariancję $q_0^{(1)}$ postaci (7) z $\mu_0 = \mu$, $\hat{\mu} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $d \geq 4\alpha$, to 2-SILT procesu potoku nie istnieje.

Badanie rozbieżności pozwala jednak uzyskać również nowy warunek konieczny, którego brak było w [BG4]:

Wniosek 6.6. Niech W będzie procesem Wienera związanym z rodziną seminorm $q_t^{(2)}$ postaci (8) z $\nu_t \equiv \nu$ i $\hat{\nu} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dla pewnego $p < 2$ lub $\nu_t = T_t'\nu$ i $\frac{\hat{\nu}}{1+|\cdot|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dla pewnego $p < 2$. Jeżeli $d \geq 2\alpha$, to 2-SILT procesu całkowego nie istnieje.

Ze Stwierdzenia 6.2 wynika, że warunki $d < 4\alpha$ i $d < 2\alpha$ są warunkami dostatecznymi istnienia 2-SILTu procesu całkowego we Wnioskach 6.4 i 6.6, odpowiednio..

W odróżnieniu od przypadku jednorodnego przestrzennie, nadal otwarte pozostaje pytanie czy z istnienia SILTu wyższej krotności wynika istnienie SILTu niższej krotności.

Jeśli proces Wienera jest jednorodny przestrzennie i spełnione jest (11), to k-SILT procesu całkowego ma ciągłe trajektorie, a ogólniej

Twierdzenie 6.9. *Niech W będzie procesem Wienera związanym z rodziną seminorm postaci* (9)*. Jeśli istnieje $p > 2$ takie, że*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left[\frac{|h(z,z')| \left(\int_0^1 |\hat{\mu}_\tau(z+z')|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}}}{(1+|z|^\alpha)(1+|z'|^\alpha)} \right]^{\frac{k}{k-1}} dz dz' < \infty, \tag{12}$$

to k–SILT procesu całkowego jest procesem ciągłym na $[0,1]$, o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Gdy $k = 2$ dostajemy lepszy wynik. Wystarczy wtedy zakładać, że $p > 1$ (Twierdzenie 6.7). Jest to też wynik lepszy od znanych z pracy [BG4], gdzie dla procesu Wienera jednorodnego w czasie wymagano założenia silniejszego od (11) i nie było ogólnego warunku w przypadku, gdy proces Wienera był niejednorodny w czasie. Rozważano tam tylko pewien specjalny typ niejednorodności w czasie.

Podobnie jak w przypadku jednorodnym przestrzennie można dostać twierdzenie o ciągłości k-SILTu procesu potoku przy założeniu silniejszym od (10), analogicznie do [BG4], Theorem 3.14.

W Rozdziale 7 rozważamy inny typ niejednorodności przestrzennej. Zakładamy, że seminormy są postaci

$$q(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} A(x, x')\varphi(x)\varphi(x')dxdx', \tag{13}$$

gdzie A jest symetryczne, dodatnio określone i takie, że dla pewnego $n \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |A(x, x')| \frac{1}{(1 + |x|^2)^n} \frac{1}{(1 + |x'|^2)^n} dxdx' < \infty.$$

Istnienie 2-SILTu procesów związanych z seminormami tej postaci było badane w pracy [BG3].

Twierdzenie 7.1. *Niech W będzie procesem Wienera związanym z seminormą q postaci* (13)*. Jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |A(x, y)|^k \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n} \frac{dy}{(1 + |y|^2)^n} < \infty \tag{14}$$

to k–SILT procesu W istnieje i jest procesem o ciągłych trajektoriach.

Podobnie, jeśli X jest procesem stałym w czasie z kowariancją q i zachodzi (14)*, to k-SILT procesu X istnieje i ma ciągłe trajektorie.*

Jeśli $A \geq 0$, to (14) jest warunkiem koniecznym istnienia k-SILTu.

Twierdzenie 7.5. *Niech X_0 będzie gaussowską zmienną losową z kowariancją q postaci* (13) *i niech W będzie procesem Wienera związanym z q. Jeśli istnieją $C \geq 0$ i $n \geq 0$, przy dodatkowym założeniu $n < \alpha$, gdy $0 < \alpha < 2$, takie, że*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left| \frac{A(x, x')}{(1 + |x|^2)^{\frac{n}{2}} (1 + |x'|^2)^{\frac{n}{2}}} \right|^p 1_{\{|A(x,x')| > C\}} dxdx' < \infty$$

z pewnym $p \geq 1$ spełniającym $p > \frac{kd}{d+\alpha k}$, to procesy potoku i całkowy są dobrze zdefiniowane oraz k-SILT istnieje dla obu procesów i jest ciągły.

Mimo że wiele wyników dotyczących istnienia k-SILTu jest uogólnieniami już znanych rezultatów dla 2-SILTu, jednak początkowo, patrząc na twierdzenia dotyczące dwukrotnych samoprzecięć, nie było jasne jakie powinny być te uogólnienia. Również dowody nie są prostymi rozszerzeniami dowodów dla 2-SILTu. Już dla trzykrotnych samoprzecięć pojawiają się istotne trudności. Okazuje się, że przypadek trzykrotnych samoprzecięć jest znacznie bardziej typowy niż przypadek samoprzecięć dwukrotnych. Pojawiają się tu techniczne trudności typowe dla wielokrotnych samoprzecięć. Ich dokładniejsza analiza pozwala na opracowanie metod dobrych dla k-SILTu przy dowolnym, naturalnym $k \geq 2$.

W Rozdziale 8 pracy opisujemy kilka przykładów. Tutaj skupimy się tylko nad dwoma z nich, związanymi z układem cząstek opisanym dokładniej w Rozdziale 3. W chwili 0 cząstki są rozłożone zgodnie z miarą Poissona a następnie poruszają się niezależnie ruchem α-stabilnym. Dopuszczamy też poissonowską imigrację oraz gałązkowanie krytyczne. Zakładamy, że miary intensywności początkowej i imigracji są miarami Lebesgue'a przeskalowanymi przez stałe (Przykład 8.3), bądź miarami skończonymi (Przykład 8.4). Z [GR] (patrz też [BG1]) wynika, że granica fluktuacji układu cząstek przy zwiększającej się gęstości jest procesem Ornsteina–Uhlenbecka w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, spełniającym równanie (3).

Jeśli miary intensywności początkowej i imigracji są miarami Lebesgue'a, to proces graniczny odpowiada przypadkowi jednorodnemu przestrzennie i seminormy są postaci (4). W przypadku miar skończonych graniczny proces Ornsteina–Uhlenbecka jest związany z seminormami postaci (5) i (6). Okazuje się, że w obu tych sytuacjach warunkiem dostatecznym istnienia k-SILTu procesu Ornsteina–Uhlenbecka jest $d < \frac{k}{k-1}\alpha$. W przypadku miar Lebesgue'a jest to również warunek konieczny, a także dla $k = 2$ i pewnych miar skończonych. Interesujący jest fakt, że $d < \frac{k}{k-1}\alpha$ jest też warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia k-krotnych samoprzecięć procesu α-stabilnego w $\mathbb{R}^d$ ([Tay]). Ciekawe jest więc pytanie o związek między czasem lokalnym samoprzecięć procesu będącego granicą fluktuacji a czasem lokalnym samoprzecięć procesu α-stabilnego. Rezultat tego typu, w najprostszym przypadku α-stabilnego procesu gęstości został przedstawiony w [AFL]. W pracy doktorskiej nie zajmowaliśmy się jednak tym problemem.

W Części III pracy przedstawiamy wyniki dotyczące typu rozbieżności procesów L_ε^f (które miały przybliżać SILT) w sytuacji, gdy czas lokalny samoprzecięć nie istnieje. Szukamy takich wielkości C_ε zależnych od ε, że $C_\varepsilon L_\varepsilon^{X,f}$ zbiega w sensie rozkładów, gdy $\varepsilon \to 0$, do pewnego procesu o wartościach w $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Rozważamy dwa typy zbieżności: zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych procesu $C_\varepsilon L_\varepsilon^{X,f}$ (zbieżność F-słabo) oraz zbieżność w sensie rozkładów na $C([0,1], \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ (zbieżność słaba w $\mathscr{C}$). Interesuje nas także postać otrzymanego procesu granicznego.

Ograniczamy się tu głównie do samoprzecięć dwukrotnych. Wynika to z trudności technicznych, jakie pojawiają się w przypadku wielokrotnych samoprzecięć.

Rozważamy te same procesy, co w części pierwszej, dotyczącej istnienia SILTu, poza przypadkiem związanym z seminormami opisanymi przez jądra temperowane. W pozostałych dwóch sytuacjach w istotny sposób korzystamy z przedstawień seminorm przy pomocy transformat Fouriera.

Jak poprzednio, opiszemy tu tylko niektóre, ciekawsze przykłady wyników zawartych w pracy.

Zajmijmy się najpierw przypadkiem jednorodnym. Jak pokazano w [BG3], a także w Stwierdzeniu 5.6 istnienie k-SILTu zależy od wymiaru d (w $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$). SILT istnieje wtedy i tylko wtedy gdy d jest ściśle mniejsze od pewnej krytycznej wielkości (różnej w różnych przykładach i niekoniecznie całkowitej). Nie jest więc zaskakujące, że gdy SILT nie istnieje i d jest ściśle większe od tego krytycznego wymiaru, to szybkość rozbieżności procesów L_ε^f zależy od d. Zależność ta jest wykładnicza. Granica zależy od funkcji f użytej do aproksymowania dystrybucji Diraca w (1). Gdy d jest równe wymiarowi krytycznemu, to szybkość rozbieżności nie zależy od d i jest równa $\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ i w tym przypadku granica jest niezależna od f Tego typu normowania były również w pracach [AR] dla najprostszego procesu gęstości oraz [Ro2] dla superprocesów.

We wszystkich przykładach jako procesy graniczne otrzymujemy:

Dla procesu Wienera – scentrowany proces gaussowski $M_f U$, gdzie

$$E\langle U_t,\varphi\rangle\langle U_s,\psi\rangle = \left(\int_{[0,t]\times[0,s]}(r\wedge u)\,drdu\right)^2\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(z)\overline{\hat{\psi}(z)}dz, \tag{15}$$

a M_f jest stałą, która może zależeć od f.

Dla procesu potoku – scentrowany proces gaussowski $M_f Z$, gdzie $Z_0 = 0$, $Z_t \equiv Z_1$, dla $t > 0$, a Z_1 jest białym szumem na $\mathbb{R}^d$, tj.

$$E\langle Z_1,\varphi\rangle\langle Z_1,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(z)\overline{\hat{\psi}(z)}dz. \tag{16}$$

Dla procesu całkowego – proces $M_f V$, gdzie V jest procesem Wienera niejednorodnym w czasie z kowariancją

$$E\langle V_s,\varphi\rangle\langle V_t,\psi\rangle = (s\wedge t)^2\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(z)\overline{\hat{\psi}(z)}dz. \tag{17}$$

W przypadku krytycznym stała M_f nie zależy od f i jest równa $\sqrt{2}c_d$, $c_d = \sqrt{\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}}$, gdzie Γ oznacza funkcję Gamma Eulera.

Otrzymujemy wyniki ogólne, jednak z braku miejsca ograniczamy się tu do omówienia konkretnego przykładu: Ważnym przypadkim miary występującej w (4) jest miara postaci $\sigma(dx) = |x|^{-\gamma}dx$, $\gamma < d$. Przypadek $\gamma \geq 0$ odpowiada wielopoziomowym układom gałązkowym (patrz [DGW]). Z [BG3], Proposition 4.2 wynika, że 2-SILT procesu Wienera istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $d < 2\gamma$ a dla procesów potoku i całkowego tym warunkiem jest $d < 2\gamma + 4\alpha$ (patrz też Stwierdzenie 5.6). Ze Stwierdzenia 5.6 wynika, że te same warunki są konieczne i dostateczne na istnienie 2-SILTu również gdy $\gamma < 0$. Miary tego typu pojawiają się przy badaniu granic fluktuacji α-stabilnych układów cząstek przy zwiększającej się gęstości, gdy miary intensywności poissonowskiej są miarami Lebesgue'a (patrz Rozdział 3 i [BG1], [GR]). W najprostszym przypadku α-stabilnego procesu gęstości rozpatrywanym w [AR] mamy $\gamma = -\alpha$.

Twierdzenie 10.7. *Niech W będzie procesem Wienera związanym z q postaci* (4) *z miarą $\sigma(dx) = |x|^{-\gamma}dx$, gdzie $\gamma < d$.*

(i) Jeśli $d > 2\gamma$ i $C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{d}{2}-\gamma}$, to $C_\varepsilon L_\varepsilon^{W,f}$ zbiega słabo w $\mathscr{C}$ do $M_f U$, gdzie U jest procesem zdefiniowanym przez (15) *oraz*

$$M_f = \left(2\int_{\mathbb{R}^d}|w|^{-2\gamma}\left|\hat{f}(w)\right|^2 dw\right)^{1/2}.$$

(ii) Jeżeli $d = 2\gamma$, to $(\ln\frac{1}{\varepsilon})^{-1/2}L_\varepsilon^{W,f}$ zbiega słabo w $\mathscr{C}$ do procesu $\sqrt{2}c_d U$.

Twierdzenie 10.8. *Niech $\sigma(dx) = |x|^{-\gamma} dx$, $\gamma < d$. Niech X i Y oznaczają odpowiednio procesy potoku i całkowy. Załóżmy też, że $C_{\gamma,\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{d}{2}-\gamma-2\alpha}$ oraz*

$$M_{f,\gamma} = \sqrt{2\int_{\mathbb{R}^d} |w|^{-2\gamma-4\alpha} \left|\hat{f}(w)\right|^2 dw}. \tag{18}$$

(i) Jeżeli $d > 2\gamma + 4\alpha$, to $C_{\gamma,\varepsilon} L_\varepsilon^{X,f}$ zbiega F-słabo do procesu $M_{f,\gamma} Z$, gdzie Z jest jak w (16).

(ii) Jeżeli $d = 2\gamma + 4\alpha$ to $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1/2} L_\varepsilon^{X,f}$ zbiega F-słabo do $\sqrt{2} c_d Z$.

(iii) Jeżeli $d > 2\gamma + 4\alpha$ to $C_{\gamma,\varepsilon} L_\varepsilon^{Y,f}$ zbiega słabo w $\mathscr{C}$ do $M_{f,\gamma} V$, gdzie V jest procesem Wienera niejednorodnym w czasie, zdefiniowanym przez (17).

(iv) Jeżeli $d = 2\gamma + 4\alpha$, to $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1/2} L_\varepsilon^{Y,f}$ zbiega słabo w $\mathscr{C}$ do procesu $\sqrt{2} c_d V$.

(v) Teraz załóżmy, że X_0 jest związane z $\sigma_0(dx) = |x|^{-\gamma_0} dx$, a proces Wienera W jest niezależny od X_0 i jest związany z $\sigma(dx) = |x|^{-\gamma} dx$.

Jeśli $\gamma_0 > \gamma$ i $d > 2\gamma + 4\alpha$, to $C_{\gamma,\varepsilon} L_\varepsilon^{X+Y,f}$ zbiega słabo w $\mathscr{C}$ do procesu $M_{f,\gamma} V$.

Jeśli $\gamma_0 > \gamma$ i $d = 2\gamma + 4\alpha$, to $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1/2} L_\varepsilon^{X+Y,f}$ zbiega słabo w $\mathscr{C}$ do procesu $\sqrt{2} c_d V$.

Jeśli $\gamma_0 < \gamma$ i $d > 2\gamma_0 + 4\alpha$, to $C_{\gamma_0,\varepsilon} L_\varepsilon^{X+Y,f}$ zbiega F-słabo do $M_{f,\gamma_0} Z$.

Jeśli $\gamma_0 < \gamma$ i $d = 2\gamma_0 + 4\alpha$, to $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1/2} L_\varepsilon^{X+Y,f}$ zbiega F-słabo do $\sqrt{2} c_d Z$.

Jeśli $\gamma_0 = \gamma$ i $d > 2\gamma + 4\alpha$, to $C_{\gamma,\varepsilon} L_\varepsilon^{X+Y,f}$, zbiega F-słabo do scentrowanego procesu gaussowskiego R, $R_0 = 0$ a dla $t, s > 0$

$$E\langle R_s, \varphi\rangle \langle R_t, \psi\rangle = 2\left(1 + (s \wedge t)\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} |w|^{-2\gamma-4\alpha} \left|\hat{f}(w)\right|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(z)\overline{\hat{\psi}(z)} dz.$$

Jeśli $\gamma_0 = \gamma$ i $d = 2\gamma + 4\alpha$, to $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1/2} L_\varepsilon^{X+Y,f}$ zbiega F-słabo do scentrowanego procesu gaussowskiego $\tilde{R}$, $\tilde{R}_0 = 0$, a dla $s, t > 0$

$$E\langle \tilde{R}_s, \varphi\rangle \langle \tilde{R}_t, \psi\rangle = \frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(1 + (s \wedge t)\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(z)\overline{\hat{\psi}(z)} dz.$$

W przypadku niejednorodnym przestrzennie zależność szybkości zbieżności od wymiaru przedstawia się w podobny sposób jak w przypadku jednorodnym, ale problem granicy jest bardziej skomplikowany.

Ogólnie, jeśli miary występujące w we wzorach na kowariancje (patrz (5), (7), (8)) są dostatecznie regularne, to granice są procesami gaussowskimi. Otrzymujemy na przykład

Twierdzenie 11.1. *Niech μ będzie miarą skończoną i taką, ze $\hat{\mu} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dla pewnego $p < 2$.*

(i) *Jeżeli* W *jest procesem Wienera związanym z seminormą* $q^{(1)}$ *postaci* (7), *z* $\mu_t \equiv \mu$, *to* $\varepsilon^{\frac{d}{2}} L^f_\varepsilon$ *zbiega słabo w* $\mathscr{C}$ *do* $M_{f,1}U$, *gdzie* U *jest scentrowanym procesem gaussowskim z funkcjonałem kowariancji*

$$E\left\langle U_s,\varphi\right\rangle\left\langle U_t,\psi\right\rangle = \left(\int_{[0,s]\times[0,t]}(u\wedge r)dudr\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}*\hat{\mu}(w)\overline{\hat{\psi}*\hat{\mu}(w)}dw$$

oraz

$$M_{f,1} = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^{4d}}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\hat{f}(z)\right|^2 dz.}$$

(ii) *Jeżeli* W *jest procesem Wienera związanym z rodziną seminorm* $q^{(2)}$ *postaci* (8), *z* $\nu_t \equiv \mu$, *to* $\varepsilon^{\frac{d}{2}+\alpha} L^f_\varepsilon$ *zbiega słabo w* $\mathscr{C}$ *do procesu* $M_{f,2}U$, *gdzie*

$$M_{f,2} = \sqrt{\frac{8}{(2\pi)^{4d}}\int_{\mathbb{R}^d}|z|^{2\alpha}\left|\hat{f}(z)\right|^2 dz.}$$

Twierdzenie 11.13. *Niech* W *będzie procesem Wienera związanym z rodziną seminorm* $q^{(2)}_t$ *postaci* (8) *z* $\nu_t = T'_t\nu$. *Załóżmy, że* $m_\alpha := \frac{\hat{\nu}}{1+|\cdot|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *dla pewnego* $p<2$. *Niech* Y *oznacza proces całkowy.*

(i) *Jeżeli* $d > 2\alpha$, *to* $\varepsilon^{\frac{d}{2}-\alpha} L^{Y,f}_\varepsilon$ *zbiega F-słabo do* $M_f V$, *gdzie* V *jest procesem Wienera z funkcjonałem kowariancji*

$$E\left\langle V_s,\varphi\right\rangle\left\langle V_t,\psi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{3d}}\hat{\varphi}(w)\hat{\psi}(v+v'-w)\overline{\hat{\mu}(v)\hat{\mu}(v')}\frac{1-e^{-(s\wedge t)|v|^\alpha}}{|v|^\alpha}\frac{1-e^{-(s\wedge t)|v'|^\alpha}}{|v'|^\alpha}dvdv'dw,$$

natomiast

$$M_f = \sqrt{\frac{8}{(2\pi)^{4d}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\left|\hat{f}(z)\right|^2}{|z|^{2\alpha}}dz.}$$

(ii) *Jeżeli* $d = 2\alpha$, *to* $(\ln\frac{1}{\varepsilon})^{-\frac{1}{2}} L^{Y,f}_\varepsilon$ *zbiega F-słabo do* $\frac{\sqrt{8}c_d}{(2\pi)^{2d}}V$.

Pojawiają się też jednak granice niegaussowskie. Na przykład:

Twierdzenie 11.6. *Niech* W *będzie procesem Wienera związanym z rodziną seminorm* $q^{(1)}_t$, *gdzie* $\mu_t \equiv \delta_a$ *(tj.* $q^{(1)}_t(\varphi,\psi) = \varphi(a)\psi(a)$*) i niech* Y *będzie odpowiednim procesem całkowym.*

(i) *Jeżeli* $d > 2\alpha$, *to* $\varepsilon^{d-2\alpha} L^{Y,f}_\varepsilon$ *zbiega F-słabo do procesu* $M_f V$, *gdzie*

$$V_t = (\beta_t^2 - t)\delta_a,$$

β_t *jest jednowymiarowym, standardowym procesem Wienera, a*

$$M_f = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\hat{f}(w)}{|w|^{2\alpha}}dw$$

(ii) Jeżeli $d = 2\alpha$, to $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1} L_\varepsilon^{Y,f}$ *zbiega F-słabo do procesu* $\frac{1}{(2\pi)^d} c_d^2 V$.

Stwierdzenie 11.11. *Niech* $X_0 = \xi\delta_a$, *gdzie* ξ *jest jednowymiarową zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią* 0 *i niech* X *oznacza odpowiadający jej proces potoku.*

Jeżeli $d > 2\alpha$, *to* $\varepsilon^{d-2\alpha} L_\varepsilon^f$ *zbiega F-słabo do procesu*

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|w|^{2\alpha}} \hat{f}(w) dw R,$$

gdzie $R_0 = 0$, $R_t = (\xi^2 - E\xi^2)\delta_a$, $t > 0$.

Jeżeli $d = 2\alpha$, *to* $(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1} L_\varepsilon^f$ *zbiega F-słabo do* $\frac{c_d^2}{(2\pi)^d} R$.

Występują też bardziej skomplikowane rozkłady.

Jak już wspomnieliśmy wcześniej, badanie rozbieżności pozwala na uzyskanie nowego warunku koniecznego na istnienie 2-SILTu (Wniosek 6.6), którego brakowało w [BG4].

Inną konsekwencją jest uzasadnienie definiowania SILTu jako procesu L, dla którego przy każdym $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ i $t \in [0,1]$, $\langle L_\varepsilon^f(t), \varphi \rangle$ zbiega w $L^2(\Omega)$ do $\langle L(t), \varphi \rangle$. Jak pokazują przykłady, jeśli SILT nie istnieje w tym sensie, to $\langle L_\varepsilon^f(t), \varphi \rangle$ nie jest też zbieżne w sensie rozkładów.

Zbieżność według rozkładów procesów unormowanych $C_\varepsilon \langle L_\varepsilon^f(t), \varphi \rangle$ pokazujemy korzystając najpierw z faktu, że w przestrzeni $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ ze zbieżności funkcjonałów charakterystycznych wynika zbieżność rozkładów. Pozwala to zredukować problem do badania zbieżności rozkładów na $\mathbb{R}$. Tu z kolei możemy zastosować metodę momentów, która mówi, że jeśli wszystkie momenty ciągu rozkładów są zbieżne do odpowiednich momentów pewnego rozkładu, który jest wyznaczony przez swoje momenty, to jest też zbieżność według rozkładów. Dowody są jednak specyficzne dla każdego z przykładów i okazują się dość skomplikowane. Badanie momentów jest dość trudne. Posługujemy się grafami Feynmana, które pozwalają opisać momenty znormalizowanego pola losowego $:X_{s_1} \otimes \ldots \otimes X_{s_k}:$ i momenty $L_\varepsilon^{X,f}$.

Bibliografia

[AFL] Adler, R.J., Feldman, R.E., Lewin M., *Intersection local times for infinite systems of Brownian motions and for the Brownian density process*, Ann. Probab. 19 (1991), 192-220.

[AR] Adler, R.J., Rosen, J.S., *Intersection local times of all orders for Brownian and stable density processes–construction, renormalisation and limit laws*, Ann. Probab. 21 (1993), 1073–1123.

[Bi1] Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York 1968.

[Bi2] Billingsley P., *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987.

[BG1] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. Langevin equations for $\mathscr{S}'$–valued Gaussian processes and fluctuation limits of infinite particle systems Probab. Th. Rel. Fields 73 (1986), 227-244.

[BG2] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., *Self-intersection local time for Gaussian $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$-processes: Existence, path continuity and examples*, Stoch. Proc. Appl. 60 (1995), 191-226.

[BG3] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., *Self-intersection local time for $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$-Wiener process and related Ornstein-Uhlenbeck processes*, Infinite Dimen. Anal. Quant. Probab. Related Topics 2 (1999), 569-615.

[BG4] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., *Self-intersection local time for some $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$-Ornstein-Uhlenbeck processes related to inhomogeneous fields*, Math. Nachr., to appear

[BG5] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., *Self-intersection local time for $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$–Ornstein–Uhlenbeck processes arising from immigration systems*, Preprint (2000).

[Daw] Dawson, D.A., *The critical measure diffusion process*, Z. Wahr. Verw. Geb. 40 (1977), 125–145.

[DGW] Dawson, D.A., Gorostiza, L.G., Wakolbinger, A., *Occupation time fluctuations of branching systems*, J. Theoret. Probab., to appear.

[DS] Dawson, D.A., Salehi, H., *Spatially homogeneous random evolutions*, J. Multivariate Anal. 10 (1980), 141-180.

[Dob] Dobroushin, R.L., *Gaussian and their subordinated generalized fields*, Ann. Probab. 7 (1979), 1-28.

[Dy1] Dynkin, E. B., *Random fields associated with multiple points of Brownian motion*, J. Funct. Anal. 62 (1985), 397–434.

[Dy2] Dynkin, E. B., *Self–intersection gauge for random walks and for Brownian motion*, Ann. Probab. 16 (1988), 1-57.

[Dy3] Dynkin, E. B., *Regularized self–intersection local times of the planar Brownian motion*, Ann. Probab. 16 (1988), 58-74.

[Dy4] Dynkin, E. B., *Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals, with applications to self-intersection local times*, Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques, Astérisque (1988) 157-158; 147-171.

[GHLO] Gjessing, H., Holden, H., Lindstrom, H., Oksendal, J., Uboe, J., Zhang, T.-S.,, *The Wick product*, w: Frontiers in Pure and Applied Probability I, TVP Science Publishers, Moscow, 1993.

[GJ] Glimm, J.„ Jaffe, A., *Quantum Physics A Functional Integral Point of View*, Springer, New York 1981.

[Gor] Gorostiza, L.G., *Asymptotic fluctuations and critical dimension for two–level branching system*, Bernoulli 2 (1996), 109-132.

[GR] Gorostiza, L.G., Rodrigues, E.R., *A stochastic model for transport of particulate matter in air: an asymptotic analysis*, Acta Appl. Math. 59 (1999), 21-43.

[GT] Gorostiza, L.G., Todorova, E., *Self–intersection local time of an $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$-valued process involving motions of two types*, Stoch. Proc. Appl. 81 (1999), 271-298.

[HS] Holley, R.A., Stroock, D.W., *Generalized Ornstein–Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 (1981), 741–788.

[It] Itô, K., *Foundations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, SIAM, Philadelphia 1984.

[IPV] Imkeller, P., Perez–Abreu, V., Vives, J., *Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization*, Stoch. Proc. Appl. 56 (1995), 1-34.

[IW] Imkeller, P., Weisz, F., *Critical dimensions for the existence of self–intersection local times of the N-parameter Brownian motion in $\mathbb{R}^d$*, J. Theoret. Probab. 12 (1999), no. 3, 721-737.

[KX] Kallianpur, G., Xiong, J., *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*, Institute of Mathematical Statistics Lecture notes–Monograph Series, 26. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1995.

[Kuo] Kuo, H.–H., *White Noise Distribution Theory*, CRC Press, 1996

[LG1] Le Gall, J.F., *Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan*, w: Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes Math. 1123, 314-331, Springer, Berlin 1985.

[LG2] Le Gall, J.F., *Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy*, w: Séminaire de Probabilités XXI, Lect. Notes Math. 1247, 341-375, Springer, Berlin 1987.

[LG3] Le Gall, J.F., *Some Properties of Planar Brownian Motion*, w: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint–Flour XX – 1990, Lect. Notes Math. 1527, 111-235, Springer, Berlin 1992.

[Lev] Levy, P., *Le mouvement brownien plan*, Amer. J. Math. 62 (1940), 487-550.

[MR1] Marcus, M.B., Rosen, J., *Renormalized self–intersection local times and Wick power chaos processes*, Mem. Amer. Math. Soc. 142 (1999), no. 675, viii+125 pp.

[MR2] Marcus, M.B., Rosen, J., *Additive functionals of several Lévy processes and intersection local times*, Ann Probab. 27 (1999), no. 4, 1643-1678.

[Mi1] Mitoma, I., *On the norm continuity of $\mathscr{S}'$–valued Gaussian processes*, Nagoya Math. J. 82 (1981), 209-220.

[Mi2] Mitoma, I., *On the sample continuity of $\mathscr{S}'$–processes*, J. Math. Soc. Japan 35 (1983), No. 4, 629-636.

[Mi3] Mitoma, I., *Tightness of probabilities on $C([0,1];\mathscr{S}')$ and $D([0,1];\mathscr{S}')$*, Ann. Probab. 11 (1983), No. 4, 989-999.

[PZ] Peszat, S., Zabczyk, J., *Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process*, Stoch. Proc. Appl. 72 (1997), 187-204.

[Ro1] Rosen, J., *A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion*, w: Séminaire de Probabilités XX, Lect. Notes Math. 1204, 515-531, Springer, Berlin 1986.

[Ro2] Rosen, J., *Renormalization and limit theorems for self-intersections of superprocesses*, Ann. Probab. 20 (1992), 1341-1368

[Ro3] Rosen, J., *Joint continuity and a Doob-Meyer type decomposition for renormalized intersection local times*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 35 (1999), no. 2, 143-176.

[Si] Simon, B., *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press 1974.

[St] Stein, E.M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Pinceton, 1971.

[Ta1] Talarczyk, A., *Self–intersection local time of order k for Gaussian processes in* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, Stoch. Proc. Appl. (praca przyjęta)

[Ta2] Talarczyk, A., *Divergence results for self–intersection local times of Gaussian* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$*-processes*, praca złożona.

[Tay] Taylor, S.J., *Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process*, Z. Warsch. Verw. Geb. 5 (1966), 247-264.

[To1] Todorova, E., *Self-intersection local time of generalized Gaussian processes over time rectangles*, w: IV Simposio de Probabilidad y Processos Estocasticos, 12 (1996), 157-168. Aportaciones Matemáticas, Soc. Mat. Mexicana.

[To2] Todorova, E., *Self-intersection local time of the fluctuation limit of a multitype branching particle system*, w: Modelos Estocásticos 14 (1998), 325-339. Aportaciones Matemáticas, Soc. Mat. Mexicana.

[Tr] Treves F. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels Academic Press, New York 1967.

[Y] Yor, M., *Compléments aux formules de Tanaka–Rosen*, w: Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes Math. 1123, 332-349, Springer, Berlin 1985.